

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

Аннотации курсов по выбору обучающихся

Направление подготовки
010800 – Механика и математическое моделирование

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2014

Оглавление

Общая характеристика альтернативных курсов	3
Курсы кафедры гидродинамики	4
Курсы кафедры математических методов геофизики	20
Курсы кафедры математического моделирования	34
Курсы кафедры механики деформируемого твердого тела.....	48
Курсы кафедры теоретической механики	56

Общая характеристика альтернативных курсов

Курсы по выбору обучающихся (альтернативные курсы) входят в вариативную часть блока «Дисциплины (модули)» ООП магистратуры по направлению 010800 – Механика и математическое моделирование.

Альтернативные курсы профессиональной направленности изучаются студентами магистратуры на кафедрах специализации. Учебным планом предусмотрено посещение трех годовых спецкурсов трудоемкости 4 зачетные единицы в течение всего срока магистратуры. Допускается посещение разбиение годовых спецкурсов на полугодовые. Спецкурсы направлены на развитие компетенций ОК-4, ОК-5, ОК-6, ОК-10, ПК-1, ПК-2, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

Кроме того, каждый студент магистратуры должен посещать научный семинар по тематике исследований в течение всего срока обучения в магистратуре, итого: 2 годовых спецсеминара, трудоемкость 8 зачетных единиц, направлен на развитие компетенций ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ОК-6, ОК-10, ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8. Форма промежуточной аттестации – зачет в конце каждого семестра.

Выбор спецкурсов и спецсеминаров осуществляется студентом в согласовании с научным руководителем и руководством кафедры.

Студенты могут посещать альтернативные курсы в объемах, превышающих указанные в учебном плане. Дисциплины (разделы дисциплин), прослушанные и сданные сверх плана засчитываются в качестве факультативов.

Курсы кафедры гидродинамики

Акустика неоднородных сред

Автор: Сухинин Сергей Викторович, д.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ, в.н.с. ИГиЛ СО РАН

Годовой курс лекций «Акустика неоднородных сред» предназначен для студентов 3-6 курсов и аспирантов механико-математического факультета. Основной целью его освоения является изучение общих математических моделей генерации и распространения акустических волн в неоднородных средах и овладение методами их исследования. Курс связан общими целями с дисциплинами математическое моделирование, механика сплошных сред и уравнения математической физики, волновые движения сплошных сред. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- о освоение основных понятий и, методов и алгоритмов акустики неоднородных сред;
- о ознакомление с основными моделями генерации и распространения акустических волн в неоднородных средах.
- о ознакомление с основными областями применения методов акустики неоднородных сред.

Содержание курса:

1. Моделирование движения малых возмущений жидкой сплошной среды. Уравнения для описания движения малых возмущений сплошной среды. Скорость звука и уравнение состояния. Возможности зондирования.
2. Движение малых возмущений через границы раздела жидких и упругих сплошных сред. Линеаризация законов сохранения. Условия Дирихле, Неймана и трансмиссии. Энергия и поток энергии.
3. Волновой характер распространения малых возмущений в неоднородной среде. Бегущие волны. Характеристические поверхности, Лучи (бихарактеристики). Инварианты Римана. Волновые фронты.
4. Фундаментальные решения уравнений акустики. Монополь, диполь. Интегральные представления. Дальнее поле компактной области источников. Излучение квадруполь и тензор напряжений. Излучение сферой.
5. Принцип суперпозиции. Бегущие и стоячие волны. Интеграл Фурье. Метод Лапласа. Установившиеся колебания. Принцип предельного поглощения. Принцип предельной амплитуды. Условия излучения.
6. Акустические волны в потоке газа со слабой завихренностью. Генерация звука потоком. Псевдозвук. Эоловы тона. Теория Лайтхилла Метод акустических аналогий. Генерация звука компактными вихрями.
7. Механика гидродинамических излучателей звука. Сирена и вихревой свисток. Автоколебания: нелинейный источник; резонатор; обратная

- связь. Гидродинамическая неустойчивость. Акустические и аэроупругие резонаторы.
8. Термические источники колебаний. Явление Рийке. Вибрационное горение. Акустика свечи и газовой горелки. Генерация звука химической реакцией и фазовым переходом.
 9. Автоколебания и их подавление. Разрыв обратной связи. Изменение источника. Утилизация колебаний. Активные и реактивные резонансные поглотители. Методика расчета глушителя ДВС.
 10. Подавление колебаний в газовой полости РДТТ. Анализ нелинейных источников колебаний. Подавление источников. Утилизация энергии колебаний при помощи активных резонансных поглотителей и формы дозвуковой части соплового блока
 11. Собственные колебания в ограниченных областях. Вариационные свойства собственных частот. Вилка Дирихле – Неймана. Полнота собственных функций. Условия резонанса.
 12. Рассеяние акустических волн на компактных неоднородностях сплошной среды. Матрица рассеяния. Полуса резольвенты. Квазисобственные частоты и функции. Резонанс в открытых резонаторах.
 13. Зависимость квазисобственных частот от геометрических параметров компактных неоднородностей и граничных условий. Асимптотика квазисобственных частот по малым параметрам.
 14. Квазисобственные колебания одиночных пузырьков и капель. Квазисобственные колебания нескольких пузырьков и капель. Влияние акустических полей на движение пузырьков и капель Эффект Бьеркнеса.
 15. Точная теория резонатора Гельмгольца. Мода Гельмгольца. Теория Рэлея. Взаимовлияние системы резонаторов. Квазисобственные колебания системы резонаторов. Эффект Бьеркнеса для резонаторов Гельмгольца.
 16. Распространение акустических волн в неоднородных одномерно периодических монодисперсных средах. Дисперсионные соотношения. Фазовая скорость. Групповая скорость. Полосы пропускания и запирания.
 17. Распространение акустических волн в неоднородных одномерно периодических полидисперсных средах. Фазовая скорость. Групповая скорость. Полосы пропускания и запирания. Резонансные явления. Определение полидисперсности.
 18. Определение концентрации пузырьков газа в жидкости по известной фазовой скорости звука. Определение объемной пористости сплошной среды.
 19. Распространение акустических волн в однородных каналах и трубах. Общий вид распространяющихся волновых мод. Поршневая мода. Спиновые моды. Резонансные явления в однородных каналах.
 20. Собственные колебания и резонансные явления около тонкостенных цилиндрических препятствий в каналах и трубах. Существование собственных частот. Вид собственных колебаний и функций.

21. Эоловы тона решетки пластин в канале. Частоты Струхаля. Математическая модель в рамках 2D. Существование собственных колебаний. Численно-аналитические исследования. Метод сшивания (склеивания).
22. Собственные колебания в каналах около цилиндрических препятствий. Существование и вид собственных колебаний. Условия на кромках. Численно-аналитические методы исследования. Вращающиеся моды.
23. Собственные колебания около нескольких тонкостенных препятствий в канале. Расщепление собственных частот. Резонансные явления и условия резонанса в каналах с тонкостенными препятствиями.
24. Неоднородности как волноводы в неограниченной сплошной среде. Условия существования волноводных свойств в однородных по одному пространственному направлению сред. Вид волноводных мод. Фазовая и групповая скорости.
25. Одномерно – периодические волноводы. Цепочки проницаемых и непроницаемых препятствий. Вид волноводных мод. Дисперсионные соотношения. Полосы пропускания и запираания. Условия резонанса.
26. Одномерно периодические границы как волновод. Дисперсионные соотношения. Вид волноводных мод. Фазовая и групповая скорости. Полосы пропускания и запираания. Резонансные свойства.
27. Продольные волны в разветвленных и неоднородных каналах. Законы сохранения. Дифференциальные уравнения. Прохождение волн через сужения и полости. Волны в неоднородном канале. Теория рупора.
28. Продольные волны в однородных каналах с упругими стенками. Дифференциальные уравнения. Инварианты Римана. Условия на сильном разрыве. Классификация разрывов. Распространение сильных разрывов.
29. Распространение продольных волн в разветвленных каналах с упругими стенками. Прохождение волн через сужения и расширения. Методы расчета гидроударных явлений в разветвленных каналах.
30. Продольные волны в неоднородных каналах с упругими стенками. Распространение слабых разрывов. Условия на сильном разрыве. Распространение сильных разрывов.
31. Математические модели распространения слабых нелинейных волн. Образование ударных волн. Генерация звука ударными волнами и скачками уплотнения. Вибрационное горение
32. Нелинейное взаимодействие сильных акустических волн. Параметрические антенны. Нелинейные волны в диссипативных средах. Уравнение Бюргерса.
33. Основные уравнения. Продольные и поперечные волны. Граничные условия. Взаимодействие продольных и поперечных волн в неоднородных упругих средах. Волны Рэлея. Волны Лява. Источники волн.
34. Дефектоскопия. Интенсификация горения. Расходомеры. Определение температуры. Определение количественного состава смесей.

Уровнемеры. Виброизоляция. Акустическое заражение. Акустическое оружие.

Симметричные решения в гидро- газодинамике

Автор: Чухахин Александр Павлович, д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ, зав. лаб. ИГиЛ СО РАН

Курс реализуется на механико-математическом факультете (ММФ) Новосибирского государственного университета в рамках специализации “механика и математическое моделирование”. Он является специальной математической дисциплиной с приложениями в математической физике и механике сплошной среды, читается как обязательный специальный курс по кафедре гидродинамики и предназначен для студентов IV курса, магистрантов и аспирантов ММФ.

Дисциплина “Симметричные решения в гидро- газодинамике” предназначена в первую очередь для изучения оригинального точного решения, имеющего место в математической физике и механике сплошной среды и существенно обобщающего классические радиальные, сферически симметричные решения.

Основной целью освоения дисциплины является овладение студентами понятиями и алгоритмами симметричного анализа дифференциальных уравнений, методами построения и анализа конкретного класса точных решений и физической интерпретации полученных результатов. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- овладение алгоритмами построения частично инвариантных решений для математических моделей механики сплошной среды;
- изучение группы вращений $SO(3)$ как исключительной подгруппы группы Галилея, являющейся фундаментальной группой симметрии моделей механики сплошных сред;
- овладение методами теории переопределенных систем дифференциальных уравнений для приведения их в инволюцию и интегрирования;
- изучение одно- и многошаговых алгоритмов построения инвариантных и частично инвариантных подмоделей;
- изучение элементов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной: дискриминантная кривая, пучок интегральных кривых, правильные и неправильные особые точки;
- изучение инвариантных подмоделей вихря Овсянникова: однородного ВО, стационарного ВО;
- изучение физического содержания полученных решений: характеристики, до- и сверхзвуковые режимы движения, сопряжение решений через ударную волну.

Содержание курса:

1. Точные решения математических моделей: инвариантные и частично инвариантные. Алгоритмы построения и анализа.
2. Группа вращений $SO(3)$ — исключительная подгруппа группы Галилея: операторное представление, инварианты

3. Радиальные движения как особые инвариантные решения группы $SO(3)$.
4. Вихрь Овсянникова — регулярное частично инвариантное решение относительно группы $SO(3)$.
5. Вихрь Овсянникова как векторное поле со специальными свойствами, потенциальный ВО.
6. Акустический ВО.
7. ВО в газовой динамике: построение факторсистемы.
8. Приведение в инволюцию переопределенной подсистемы факторсистемы ВО.
9. Общие свойства ВО: движения частиц в своей плоскости, модифицированное время.
10. Специальное свойство алгебраических инвариантов векторного поля скоростей ВО: зависимость лишь от инвариантных независимых переменных.
11. Одно- и многошаговые алгоритмы построения инвариантных подмоделей ВО.
12. Однородный вихрь Овсянникова: аналитическое исследование и физические свойства.
13. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной: дискриминантная кривая, пучок интегральных кривых, правильные и неправильные особые точки.
14. Стационарный вихрь Овсянникова: аналитическое исследование и физические свойства.
15. Вихрь Овсянникова для специального показателя адиабаты; аналитическое исследование и физические свойства.
16. Автомодельные одномерные сферически симметричные решения
17. Автомодельный вихрь Овсянникова

Экспериментальная гидродинамика

Автор: Ерманюк Евгений Валерьевич, д.ф.-м.н., зав. лаб. ИГиЛ СО РАН

Курс реализуется на механико-математическом факультете (ММФ) Новосибирского государственного университета. Он является специальной математической дисциплиной с приложениями в механике сплошной среды, гидродинамике и газовой динамике, читается как специальный курс по кафедре гидродинамики и предназначен для студентов IV курса, магистрантов и аспирантов ММФ.

Цели и задачи курса

Дисциплина “Экспериментальная гидродинамика” предназначена для изучения способов исследования задач гидродинамики с использованием техники лабораторного эксперимента.

Основной целью освоения дисциплины является овладение студентами программными средствами математической обработки результатов эксперимента.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса:

- о ознакомление с методикой измерений основных параметров гидродинамических течений;
- о овладение методами обработки измерительных сигналов и изображений;
- о овладение методами визуализации высокоскоростных процессов;
- о изучение способов подготовки научных текстов с помощью системы LaTeX;

Содержание курса:

1. Подобие в задачах гидрогазодинамики. Критерии подобия. Моделирование по одному и нескольким критериям подобия.
2. Составляющие гидродинамического сопротивления. Метод Фруда.
3. Аффинное подобие в теории крыла в дозвуковом потоке сжимаемого газа и в теории колебаний тел в однородно стратифицированной жидкости.
4. Методы измерений стационарных и нестационарных характеристик потока и гидродинамических нагрузок.
5. Частотные характеристики измерительных систем.
6. Линейные колебания тел в жидкости с образованием поверхностных и внутренних волн.
7. Экспериментальная оценка гидродинамических нагрузок с помощью преобразований в частотно-временной области.
8. Методы обработки измерительных сигналов и изображений.
9. Фурье-анализ и вейвлетные преобразования.
10. Понятие о PIV и PTV методах. Основы метода оценки скоростей с помощью взаимно-корреляционного анализа изображений. Поведение частиц в потоках.
11. Методы визуализации возмущений плотности. Физический шлирен-метод, интерферометрия.

12. Цифровой шлирен-метод в плоской и пространственной задачах. Томографическая инверсия изображений.
13. Метод индуцированной лазером флуоресценции. Взаимно-корреляционный анализ смещений меченых линий в потоках.
14. Визуализация высокоскоростных процессов.
15. Задача о падении тел на свободную поверхность жидкости.
16. Эксперимент с образованием каверн, оценка влияния захвата воздуха.
17. Проблемы экспериментальной гидродинамики транспортных средств, зданий и технических сооружений.
18. Волновые нагрузки. Колебания, индуцированные срывом вихрей.

Теория ветвления

Автор: Макаренко Николай Иванович, д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ, в.н.с.
ИГиЛ СО РАН

Основной целью курса является овладение современными функционально-аналитическими методами исследования нелинейных операторных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах. Первый раздел курса отводится изучению свойств дифференцируемости по Фреше и Гато и их использованию при анализе условий локальной разрешимости уравнений с гладкими операторами. Второй раздел посвящен принципам неподвижной точки Брауэра и Шаудера и их приложениям. Третий раздел затрагивает основы теории бифуркации, в нем рассматривается метод Ляпунова – Шмидта решения фредгольмовых операторных уравнений. Все указанные подходы иллюстрируются содержательными примерами, дающими адекватное представление о возможностях излагаемых методов. В целом изучение данной дисциплины служит приобретению навыков и квалификации, достаточных для успешного исследования нелинейных задач в широком спектре приложений современного анализа.

Содержание курса:

Раздел 1. Гладкий анализ

Метрические, нормированные и банаховы пространства. Свойства линейных непрерывных отображений.

Производные Гато и Фреше. Связь между дифференцируемостью по Гато и дифференцируемостью по Фреше.

Дифференцирование композиции отображений. Теорема о конечных приращениях и ее следствия.

Полилинейные отображения. Естественная изометрия пространств $L(E,F;G)$ и $L(E,L(F,G))$.

Симметрия второй производной. Производные Фреше n -го порядка. Формула Тейлора.

Принцип неподвижной точки сжимающего отображения и его обобщения. Теорема о неявных отображениях. Примеры.

Раздел 2. Принципы неподвижной точки Брауэра и Шаудера

Присоединенные матрицы и якобианы гладких конечномерных отображений. Лемма о дивергенции.

Выпуклые тела. Функционал Минковского. Лемма о гомеоморфизме выпуклого тела единичному шару.

Отображения конечномерных шаров, близкие к тождественным у границы. Неподвижные точки гладких ретрактов.

Теорема Брауэра для шара и выпуклого тела в конечномерном пространстве.

Выпуклые оболочки. Конечномерная аппроксимация вполне непрерывного оператора.

Теорема Шаудера. Примеры приложений.

Раздел 3. Элементы теории бифуркаций

Точки ветвления и точки бифуркации решений нелинейных операторных уравнений. Нетеровы и фредгольмовы операторы. Примеры.

Биортогональные системы, конечномерные проекторы и дефектные функционалы.

Метод конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта. Уравнение разветвления и его свойства.

Лемма Шмидта. Вывод уравнения разветвления с помощью леммы Шмидта.

Эквивалентность двух форм уравнений разветвления.

Одномерный случай ветвления. Подготовительная теорема Вейерштрасса.

Диаграмма Ньютона. Определяющее уравнение. Ряды Пуансо.

Пример. Ветвление решений уравнения Дуффинга.

Гидродинамические задачи в компьютерном сопровождении

Автор: Черевко Александр Александрович, к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ, н.с. ИГиЛ СО РАН

Курс реализуется на механико-математическом факультете (ММФ) Новосибирского государственного университета в рамках специализации “механика и математическое моделирование”. Он является специальной математической дисциплиной с приложениями в механике сплошной среды, гидродинамике и газовой динамике, читается как специальный курс по кафедре гидродинамики и предназначен для студентов IV курса, магистрантов и аспирантов ММФ.

Цели и задачи курса

Дисциплина “Гидродинамические задачи в компьютерном сопровождении” предназначена для изучения способов исследования задач гидродинамики с использованием компьютера.

Основной целью освоения дисциплины является овладение студентами различными программными средствами необходимыми для решения задач гидродинамики.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса:

- о овладение методами численного и аналитического исследования задач гидродинамики в программе аналитических вычислений Mathematica;
- о изучение преобразования данных расчётов гидродинамических задач с помощью регулярных выражений в языке программирования Perl;
- о овладение методами объединения различных программ, применяемых при исследовании задач гидродинамики, и быстрого построения графических интерфейсов к ним на языке Tcl/Tk;
- о изучение способов подготовки научных текстов с помощью системы LaTeX.

Содержание курса:

1. Основы устройства и язык системы Mathematica.
2. Графические возможности системы Mathematica: встроенные процедуры, дополнительные пакеты, некоторые внешние программы. Визуализация простых течений.
3. Аналитическое решение уравнений, неравенств и их систем. Упрощение систем уравнений и исключение переменных. Поиск частных решений.
4. Средства Mathematica для аналитического решения дифференциальных уравнений. Инвариантно-групповые решения задач газовой динамики.
5. Численные методы в программе Mathematica. Вычисления с произвольно заданной точностью. Методы численного решения уравнений и их систем. Контроль вычислений и управление ими.
6. Численное решение дифференциальных уравнений и их систем. Иерархия встроенных методов решения. Настройка методов решения. Создание собственных методов.

7. Графика для изображения решений дифференциальных уравнений и их систем. Специализированные пакеты.
8. Написание в Mathematica сложных программ
9. Основы языка программирования Perl.
10. Регулярные выражения в Perl.
11. Создание законченных программ обработки данных в Perl. Обработка выходных данных расчётов системы Mathematica. Подготовка данных и визуализация сложных трехмерных течений.
12. Основы языка программирования Tcl/Tk.
13. Принципы использования Tcl/Tk в качестве «склеивающего» языка между разнородными программами.
14. Построение графических интерфейсов с помощью Tcl/Tk. Управление системой Mathematica и программами обработки данных на Perl из созданного интерфейса. Визуализация течений в режиме диалога с компьютером.
15. Основы системы LaTeX. Подготовка печатных материалов.
16. Подготовка презентаций в системе LaTeX. Пакет beamer.

Стратифицированные течения

Автор: проф. Н. И. Макаренко

Содержание курса:

1. Математическая модель движения неоднородной жидкости. Интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии. Дифференциальные уравнения.
2. Уравнение для вихря. Лагранжевы и полулагранжевы координаты. Формула Коши для переноса завихренности.
3. Стратификация. Граничные условия. Подмодели движения неоднородной жидкости: безвихревые, стационарные и плоские течения. Кусочно-постоянные и сдвиговые течения.
4. Двухслойные течения под крышкой. Линеаризация, дисперсионное соотношение. Плотностные числа Фруда. Неустойчивость Рэлея-Тейлора и Кельвина-Гельмгольца.
5. Длинноволновое приближение. Уравнения двухслойной мелкой воды под крышкой и со свободной границей.
6. Приближение Буссинеска для двухслойной жидкости. Смешанный тип уравнений двухслойной мелкой воды.
7. Непрерывно стратифицированные течения. Частота плавучести. Уравнения малых возмущений. Нормальные моды. Формулировка спектральной задачи.
8. Второе приближение теории мелкой воды. Модель длинных волн в 2.5-слойной жидкости. Критический слой.
9. Свойства спектра в случае течения без сдвига скорости. Пример: экспоненциальная стратификация.
10. Устойчивость сдвиговых течений. Число Ричардсона. Теорема Майлса. Теорема Ховарда.

Введение в гемодинамику

Автор: д.ф.-м.н. А. П. Чупахин

В предлагаемом слушателям семестровом спецкурсе кафедры гидродинамики даётся представление о круге методов и задач, необходимых для эффективного моделирования гемодинамики сосудов головного мозга. Материал основан на совместной работе специалистов Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и нейрохирургов Новосибирского НИИ патологии кровообращения им. акад. Е. Н. Мешалкина (клиника Мешалкина).

План лекций

1. Анатомия и физиология головного мозга
2. Современные инструменты и методы нейрохирургии
3. Физические основы магнитно-резонансной томографии
4. Математические основы томографии
5. Получение и обработка клинических данных
6. Математические модели гемодинамики: от задачи FSI (Fluid—Structure Interaction) к приближённым моделям
7. Модель движения жидкости в трубке с жёсткими стенками
8. Модель движения жидкости в упругой трубке
9. Компьютерное 3D моделирование движения крови в сосудах головного мозга

Математические модели неоднородной жидкости

Автор: д.ф.-м.н. А. А. Чесноков

Введение (1 лекция). Общие принципы построения математических моделей механики на основе законов сохранения. «Выделенные» направления, переход к безразмерным переменным и разложение по малому параметру.

Гидродинамические модели теории длинных волн (3 лекции). Вывод уравнений вихревой мелкой воды и кинетической модели пузырьковой жидкости. Различные формулировки моделей (гидродинамическая, кинетическая, использование полулагранжевых переменных). Другие примеры кинетических моделей и уравнений пространственно-неоднородного течения: уравнения горизонтально-сдвигового движения тонкого слоя жидкости, модель вихревого течения в протяженной упругой трубке, уравнения квазинейтральной плазмы, модель движения слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле-Шоу, уравнения волнового течения пленок и пограничного слоя с самоиндуцированным давлением.

Теория характеристик для уравнений с операторными коэффициентами (3 лекции). Определения и основные понятия. Характеристики дискретного и непрерывного спектра, собственные функционалы. Условия обобщенной гиперболичности уравнений вихревой мелкой воды и кинетической модели пузырьковой жидкости. Интерпретация условий гиперболичности уравнений теории длинных волн, сравнение с классическими критериями устойчивости сдвиговых течений. Схема доказательства теорем существования и единственности решения задачи Коши для модели вихревой мелкой воды.

Методы построения точных решений интегро-дифференциальных уравнений (3 лекции). Метод построения решений с функционально зависимыми интегральными инвариантами Римана. Решения в классе простых и бегущих волн, сведение к интегральному уравнению Абеля. Применение группового анализа для построения решений дифференциальных уравнений с граничными условиями. Примеры точных решений пространственных уравнений сдвигового движения тонкого слоя жидкости, физическая интерпретация. Методы решения линеаризованных интегро-дифференциальных уравнений. Асимптотика малых возмущений сдвигового течения тонкого слоя идеальной жидкости при больших временах. Эффект затухания Ландау.

Гидравлические прыжки и боры на сдвиговом потоке (2 лекции). Консервативная форма уравнений теории длинных волн, обобщенные решения. Вывод соотношений на сильном разрыве, условия определенности сильного разрыва. Разрывы малой амплитуды и поведение энтропии на разрывах. Распад произвольного разрыва для моделей сдвигового течения жидкости под крышкой и со свободной границей в классе решений с кусочно-постоянной завихренностью. Модель слоя смешения и приповерхностной турбулентной струи.

Многослойные аппроксимации и численные методы (2 лекции). Дифференциальные аппроксимации интегро-дифференциальных уравнений теории длинных волн. Бесконечные гидродинамические цепочки для

моментов и методы их замыкания. Точные и приближенные редукции, законы сохранения. Газодинамическая аналогия слабосдвиговых течений жидкости. Методы численного решения квазилинейных гиперболических систем. Метод Годунова, схемы Лакса — Фридрихса и Нассьяху — Тэдмора.

Длинноволновые модели с учетом дисперсии и диссипации (2 лекции). Вывод и теоретический анализ уравнений волнового движения тонкого слоя вязкой жидкости и модели пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Сравнение с осредненными моделями пленочного течения. Взаимодействие вязких жидкостей с различными физическими свойствами в ячейке Хеле-Шоу (анализ устойчивости границы раздела). Вывод аналога уравнений Грина — Нагди для горизонтально-сдвиговых течений, построение точных решений, их интерпретация и анализ устойчивости.

Курсы кафедры математических методов геофизики

Математическое моделирование геофизических процессов в средах сложного геологического строения

Авторы: доцент, д.ф.-м.н. В.А. Чеверда, профессор, академик РАН Б.Г. Михайленко, внс, д.ф.-м.н. Г.В. Решетова

Часть 1. Возбуждение и распространение упругих волн

Постановка начально-краевых задач. Уравнения динамической теории упругости: бихарактеристики, кинематические и динамические условия на слабых разрывах. Задача Коши, начально-краевые задачи, задачи дифракции. Установившиеся упругие колебания. Условия излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды.

Сейсмические волны в однородных средах. Плоские волны, сферические волны. Поверхностные волны. Отражение/преломление плоских волн на плоских границах. Волны от элементарных источников: центр расширения, сосредоточенная сила, источники дипольного типа.

Геометрическая сейсмика. Уравнение луча. Лучи в средах с линейной скоростью. Лучевой ряд. Отражение и преломление на границах раздела. Головные волны. Каустики и фокальные точки. ВКБ-приближение.

Элементы теории дифракции. Эталонные задачи (дифракция на цилиндре, на шаре, на клине). Низкие частоты (дифракция на малых телах и малых отверстиях). Высокие частоты (большие тела, большие отверстия,)

Численное моделирование упругих волновых полей. Спектральные и конечно-разностные методы. Понятие численной дисперсии и анизотропии. Поглощающие граничные условия.

Поглощение и затухание сейсмических волн. Среда с последствием. Наиболее распространенные модели сред с поглощением: среда Максвелла, среда Фойхта, линейное твердое тело, обобщенное линейное твердое тело. Понятие добротности.

Элементы теории распространения сейсмических волн в анизотропных средах. Анизотропная среда как предельный случай трещиноватых и тонкослоистых сред. Анизотропия, обусловленная напряженным состоянием среды. Некоторые особенности распространения плоских волн в анизотропных средах. Численное моделирование упругих волн в анизотропных средах.

Среда с микронеоднородностями и пористые среды. Элементы теории рассеяния (однократное рассеяние, эффективные поперечники рассеяния, представление рассеянных полей в дальней зоне). Гомогенизация (эффективная модель среды). Пористые флюидонасыщенные среды.

1.1.1. Часть 2. Обработка сейсмических данных

Деконволюция сейсмических трасс. Сжимающие обратные фильтры. Среднеквадратические фильтры. Подавление реверберации. Предсказывающая деконволюция. Корректирующая фильтрация. Спектрально-статистический метод обработки сейсмограмм.

Трансформации сейсмических волновых полей. Построение временных и глубинных сейсмических разрезов. Суммирование по ОГТ. Годографы ОГТ для простейших моделей сред. Временной разрез. Подавление кратных волн. Спектры скоростей. Миграция временных разрезов в глубинные (миграция после суммирования).

Обращение волновых сейсмических полей. Постановка обратных динамических задач. Операторы прямой и обратной задачи. Регулярность оператора обратной задачи. Оптимизационный подход к постановке обратных динамических задач сейсмики. Миграция до суммирования как результат применения сопряженного оператора. Обращение как последовательная реализация миграций до суммирования.

Обращение данных о временах пробега сейсмических волн. Постановка обратной кинематической задачи сейсмики. Определение строения вертикально-неоднородной среды по временам пробега рефрагированных волн. Волноводы. Неединственность решения обратной задачи для вертикально-неоднородных сред, содержащих волноводы. Элементы интегральной геометрии. Постановка обратной кинематической задачи в линейном приближении. Сейсмическая томография. Структура оператора сейсмической томографии. Единственность. Информативность.

Теория и методы расчета океанических течений

Автор: доц., д.ф.-м.н. Е.Н.Голубева

1. Вводная часть

Роль океана в климатической системе. Общие сведения об океанических бассейнах. Морская вода. Основные физические свойства. Температура. Соленость, плотность. Стратификация. Распределение гидрологических характеристик Мирового океана. Общие сведения о крупномасштабной циркуляции океана.

2. Построение математической модели океанических течений

Движение свободной частицы на вращающейся плоскости. Ускорение на вращающейся Земле. Сила Кориолиса. Центробежная и центростремительная силы. Внешние силы.

Уравнения движения. Закон сохранения массы. Закон сохранения энергии. Уравнение состояния. Оценка порядка величин и роли различных факторов в динамике океанических течений. Приближения гидростатики и Буссинеска. Условия на боковых границах и на дне океана. Граничные условия на поверхности океана.

3. Аналитические модели океанических циркуляций

Однородный геострофический поток. Уравнения мелкой воды. Вихревая динамика. Теория дрейфовых течений Экмана. Придонный слой Экмана. Метод полного потока Штокмана. Западная интенсификация течений. Функция тока. Теория Стомелла. Обобщение Манка.

Термохалинная циркуляция океана. Геострофические течения. Сезонные изменения термоклина. Циркуляция океана в меридиональной плоскости.

4. Численные модели океанической циркуляции

Основные требования, предъявляемые к численным моделям океанической циркуляции. Задачи диагноза, адаптации и прогноза. Численные сетки. Аппроксимация береговой линии. Способы аппроксимации рельефа дна океана: z-уровневый подход, сигма-координатный метод. Построение сеточных аналогов уравнений математической модели. Аппроксимация и устойчивость численных схем. Численные схемы для описания переноса – диффузии трассеров. Численные аналоги законов сохранения. Блок-схема численной модели океана.

Современные численные модели океанических течений. Основные результаты численного моделирования. Использование численных моделей в современных исследованиях.

Математическое моделирование природных процессов

Автор: проф., д.ф.-м.н. В.В.Пененко

1. Постановки основных задач

Теоретические основы моделей гидротермодинамики атмосферы и переноса загрязняющих примесей в газовом и аэрозольном состояниях. Соотношения между пространственно-временными масштабами динамических и химических процессов в атмосфере. Функции состояния и параметры. Естественные и антропогенные факторы и способы их описания в моделях. Взаимодействие атмосферы и примесей с поверхностью Земли. Понятие о категориях землепользования и способах их учета в моделях. Основные уравнения. Граничные и начальные условия. Интегральные соотношения и законы сохранения. Классификация моделей по масштабам и назначению.

2. Задачи переноса и трансформации примесей в атмосфере

Соотношения между характерными масштабами процессов переноса и трансформации примесей. Вариационная постановка задачи переноса и трансформации примесей. Вывод основного интегрального тождества и законов сохранения. Модели Гауссовского, Лагранжевого, Эйлера типов и их комбинации. Задачи химической трансформации примесей и динамики аэрозолей.

3. Методы построения дискретных моделей

Вариационные принципы для построения численных моделей.

Аппроксимации интегрального тождества. Вывод основных и сопряженных уравнений. Метод расщепления по физическим и химическим процессам, по координатным направлениям. Понятие о методе декомпозиции по областям. Монотонные схемы. Понятие транспортности.

4. Базовые алгоритмы реализации численных моделей

Численные схемы расщепления для последовательных и параллельных алгоритмов. Решение дискретных уравнений переноса примесей. Устойчивость вычислений. Решение уравнений трансформации примесей. Прямые и итерационные алгоритмы.

5. Постановки задач природоохранного прогнозирования и проектирования

Критерии качества и ограничения; предсказуемость и чувствительность моделей. Задачи оценок риска и уязвимости территорий. Теоретические и практические постановки задач. Проблемы задания начальных данных и параметров.

6. Методика совместного использования моделей и данных измерений для целей прогнозирования и мониторинга.

Вариационные принципы для объединения моделей и данных наблюдений. Прямые и сопряженные задачи. Методы исследования чувствительности моделей к вариациям входных параметров. Критерии качества и функции чувствительности. Усвоение данных наблюдений. Идентификация параметров моделей. Диагностика моделей. Восстановление структуры полей по данным наблюдений.

7. Постановка задач оптимизации для управления качеством атмосферы.

Вариационные формулировки моделей и критерии и ограничения экологической безопасности. Локальные и глобальные ограничения. Оценка допустимых нагрузок на природную среду и снижение рисков. Методы районирования территорий по уровням антропогенных воздействий. Наблюдаемость территорий. Планирование наблюдений.

Томография сложных сред: модели, методы, алгоритмы

Автор: доц., к.ф.-м.н. Е.Ю. Деревцов

1. Преобразование Радона. Элементарные сведения

1.1 Исторические замечания. Суть и характер томографических исследований. Области приложений.

1.2 Параллельная и веерная схема наблюдений.

1.3 Одномерная задача эмиссионной томографии и ее дифференциальное уравнение.

1.4 Задача ЭТ как обратная задача определения правой части уравнений по следу решения на границе.

1.5 Многообразие прямых на плоскости. Двумерное преобразование Радона и его свойства. Теорема Асгейрссона. Оператор обратного проецирования на плоскости.

1.6 Примеры вычисления преобразования Радона функций, заданных в единичном круге. Использование геометрических и дифференциальных свойств преобразования при вычислениях.

1.7 Многообразие плоскостей в пространстве. Преобразование Радона в пространстве. Задание удобных для вычислений систем координат. Примеры.

1.8 Задача Абеля. Интегральное уравнение Абеля и его обращение. Обращение преобразования Радона в двумерном случае. Использование геометрических свойств ПР для обращения. Разновидности формул обращения. Примеры.

1.9 Формулы обращения преобразования Радона в трехмерном пространстве. Теорема Асгейрссона в пространстве. Оператор обратного проецирования в пространстве. Примеры.

2. Преобразование Радона и другие интегральные преобразования как операторы в функциональных пространствах. Общие формулы обращения. Единственность и области значений

2.1 Нормированные и гильбертовы функциональные пространства. Пространства L_p и пространства Соболева H_s .

2.2 Пространства основных и обобщенных функций. Распределения с компактным носителем и пространства Шварца. Свертка и преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Свойства преобразования Фурье.

2.3 Линейные операторы Радона, лучевого и конусного преобразований. Связь с преобразованием Фурье и сверткой. Проекционная теорема и теорема о центральном сечении.

2.4 Операторы обратного проецирования. Теоремы об образах преобразований Радона и лучевого под действием обратной проекции. Теорема о непрерывности основных томографических операторов из L_2 в весовые L_2 -пространства.

2.5 Потенциал Рисса. Теоремы об обращении томографических операторов. Формулы обращения, использующие преобразование Фурье. Обращение на основе метода моментов.

2.6 Восстановление функции по неполной информации. “Теорема о дыре” для преобразований Радона и лучевого. Теорема о единственности восстановления

- распределения с компактным носителем по его конусному преобразованию. Контрпримеры для конечного числа проекций.
- 2.7 Условие Кавальери. Условия совместности Хелгасона-Людвига. Области значений основных томографических операторов. Оценки в пространствах Соболева.
3. Некорректно поставленные задачи. Методы приближенного решения
- 3.1 Операторные уравнения первого рода. Некорректно поставленные задачи. Нормальное решение. Параметр регуляризации.
- 3.2 Метод сингулярного разложения. Усеченное сингулярное разложение. Сингулярное разложение преобразования Радона.
- 3.3 Метод Тихонова. Метод наименьших квадратов. Итерационные методы.
- 3.4 Классификация некорректно поставленных задач. Оценки погрешностей.
4. Основные алгоритмы компьютерной томографии
- 4.1 Алгоритм свертки и обратной проекции. Наиболее употребительные фильтры. Параллельная и веерная схемы на плоскости.
- 4.2 Представление 3D-преобразования Радона в виде композиции 2D – преобразований. Двухэтапный алгоритм. Фурье-алгоритмы.
- 4.3 Алгебраические методы. Метод последовательного проектирования. Метод Качмажа. Полная и частичная дискретизации. Прямые алгебраические алгоритмы.
- 4.4 Задачи с неполными данными. Особенности применения алгоритмов.
5. Томография симметричных тензорных полей в R^n
- 5.1 Предварительные сведения. Алгебра тензоров. Дифференциальные и интегральные операторы тензорного анализа. Разложения векторного поля на потенциальную и соленоидальную части. Связи с краевыми задачами. Разложение симметричного тензорного поля. Представления векторных и тензорных полей через потенциалы.
- 5.2 Лучевое преобразование. Основные свойства. Связь с преобразованием Фурье. Ядро лучевого преобразования.
- 5.3 Операторы угловых моментов.
- 5.4 Формулы обращения лучевого преобразования.
- 5.5 Формула Планшереля для лучевого преобразования.
- 5.6 Примеры.
6. Томография симметричных тензорных полей на римановом многообразии
- 6.1 Предварительные сведения. Криволинейные системы координат. Задание римановой метрики. Геодезические и их задание системой дифференциальных уравнений. Примеры.
- 6.2 Симметричные тензорные поля на римановом многообразии. Теорема о разложении симметричного тензорного поля.
- 6.3 Формулы типа Гаусса-Остроградского.
- 6.4 Лучевое преобразование на римановом многообразии. Ядро лучевого преобразования.
- 6.5 Проблема обращения лучевого преобразования.
- 6.6 Теорема об однозначном восстановлении соленоидальной части симметричного тензорного поля по его лучевому преобразованию.

6.7 Приближенное решение задачи восстановления тензорного поля, заданного на римановом многообразии, методом наименьших квадратов. Общая схема алгоритма. Сходимость.

6.8 Проблема построения полиномиальных и локальных базисов. Построение базисов потенциальных и соленоидальных симметричных тензорных полей на основе ортогональных и неортогональных полиномов. Базисы на основе В-сплайнов.

6.9 Численные эксперименты. Примеры. Проблема восстановления разрывных симметричных тензорных полей. Визуализация разрывов. Примеры.

Математическое моделирование и теория климата

Автор: доц., д.ф.-м.н. В.Н. Крупчатников

1. Вихревая динамика атмосферы и океана
 - 1.1 Ведение
 - 1.2 Уравнение вихря
 - 1.3 Двумерные течения жидкости
 - 1.4 Теорема Кельвина о циркуляции
 - 1.5 Топологические свойства поля завихренности
 - 1.6 Деформация вихревых трубок в потоке вязкой жидкости
 - 1.7 Потенциальный вихрь
 - 1.7.1 Баротропная жидкость
 - 1.7.2 Бароклинная жидкость
 - 1.7.3 Потенциальный вихрь в изэнтропической системе координат
 - 1.8 Потенциальный вихрь в приближенных моделях динамики атмосферы и океана
 - 1.8.1 Модель Буссинеска
 - 1.9 Квазигеострофические модели динамики атмосферы и океана
2. Основы теории турбулентной несжимаемой жидкости
 - 2.1 Теория Колмогорова
 - 2.2 Двумерная турбулентность
 - 2.3 Предсказуемость турбулентных потоков
3. Геострофическая турбулентность
 - 3.1 Эффекты вращения в двумерной турбулентности
 - 3.2 Стратифицированный поток
 - 3.3 Бароклинная турбулентность
 - 3.4 Масштабный анализ для геострофической турбулентности
4. Основы современной теории климата
 - 4.1 История формирования современного климата
 - 4.2 Структура и состав атмосферы
 - 4.3 Радиационные процессы в атмосфере. Радиационный баланс атмосферы и подстилающей поверхности
 - 4.4 Водный баланс
 - 4.5 Углеродный баланс
 - 4.6 Общая циркуляция атмосферы
 - 4.7 Радиационно-конвективные модели климата
 - 4.8 Модели климатической системы
5. Математическое моделирование климата
 - 5.1 Введение
 - 5.2 Уравнения динамики атмосферы и океана
 - 5.3 Численные методы решения уравнений динамики атмосферы и океана
 - 5.4 Методы параметризации подсеточных процессов
 - 5.5 Моделирование глобальных изменений климата
 - 5.6 Предсказуемость климата

Теория рассеивания

Автор: доц., д.ф.-м.н. В.А.Чеверда

Часть 1. Возбуждение и распространение упругих волн

Сейсмические волны в однородных средах. Плоские волны, сферические волны. Поверхностные волны. Отражение/преломление плоских волн на плоских границах. Волны от элементарных источников. Их представление в дальней зоне.

Геометрическая сейсмика. Уравнение луча. Лучи в средах с линейной скоростью. Лучевой ряд. Отражение и преломление на границах раздела. Каустики и фокальные точки.

Элементы теории дифракции. (6 часов) Эталонные задачи (дифракция на цилиндре, на шаре, на клине). Низкие частоты (дифракция на малых телах и малых отверстиях). Высокие частоты (большие тела, большие отверстия,)

Поглощение и затухание сейсмических волн. Вязкоупругие среды. Пористые среды. Случайные среды.

Среды с микронеоднородностями. Элементы теории рассеяния (однократное рассеяние, эффективные поперечники рассеяния, представление рассеянных полей в дальней зоне, многократное рассеяние, кода волны). Подходы к оценке поглощающих свойств среды. Различные подходы к осреднению сред, содержащих микронеоднородности.

Часть 2. Элементы теории обратных задач распространения сейсмических волн
Условно-корректные задачи. Линейные условно-корректные задачи. Понятие регуляризирующего оператора. Подход А.Н.Тихонова. Принцип обобщенной невязки. Нелинейные условно-корректные задачи. Принцип итеративной регуляризации.

Обращение данных о временах пробега сейсмических волн. (6 часов)

Постановка обратной кинематической задачи сейсмики. Определение строения вертикально-неоднородной среды по временам пробега рефрагированных волн. Волноводы. Неединственность решения обратной задачи для вертикально-неоднородных сред, содержащих волноводы.

Элементы интегральной геометрии. Постановка обратной кинематической задачи в линейном приближении. Сейсмическая томография. Структура оператора сейсмической томографии. Единственность. Информативность.

Обращение волновых сейсмических полей. Постановка обратных динамических задач. Оптимизационный подход к постановке обратных динамических задач сейсмики. Миграция до суммирования как результат применения сопряженного оператора. Обращение как последовательная реализация миграций до суммирования.

Элементы методов Монте-Карло

Автор: проф., д.ф.-м.н. А.И. Хисамутдинов

1. Равномерно распределенные (р.р.) на $(0,1)$ и на $0,1,\dots,9$ случайные величины: случайное число и случайная цифра .

2. Случайные числа и вычисление интегралов по параллелепипедальным ограниченным областям.

3. Общие принципы оценки математических ожиданий.

Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел. Неравенство Чебышева и сходимости методов Монте-Карло. Центральная предельная теорема и построение доверительного интервала.

4. Таблица случайных цифр и чисел, псевдослучайные числа.

Рекуррентные формулы 1-го порядка и метод вычетов. Равномерно распределенные и вполне равномерно распределенные последовательности.

5. Случайные величины и вычисление интегралов.

Одномерный и многомерный случаи. Правило замены переменных.

6. Метод обратной функции для моделирования дискретных и непрерывных распределений.

Моделирование (розыгрыши): (1) р.р. номера, (2) показательного распределения, (3) точки, р.р. в многомерном интервале, в круге и шаре, изотропного направления на плоскости и в пространстве.

Общий способ моделирования многомерных распределений посредством «мультипликации». Моделирование «упругого» рассеяния двух частиц одинаковой массы. Моделирование рассеяния нейтрона на «неподвижном» протоне.

Моделирование «пары» нормально распределенных случайных величин.

7. Методы отбора и метод исключения.

Моделирование изотропного направления на плоскости, выбора «взаимодействующей» пары.

8. Метод и погрешность, алгоритм и трудоемкость. «Выборка по важности» для вычисления интегралов.

9. Схема Неймана-Улама для итерации линейных операторов.

Задача о переносе на отрезке и полупрямой.

Цепи Маркова с поглощением и вычисление линейных функционалов от пары сопряженных интегральных уравнений 2-го рода.

Конечность среднего числа соударений и дисперсии.

10. Методы Монте-Карло с эргодическими цепями Маркова.

Уравнения переноса и некоторые вопросы ядерной геофизики и астрофизики

Автор: проф, д.ф.-м.н. А.И. Хисамутдинов

1. Введение, теория переноса как раздел физической кинетики. Фазовое пространство. Источники, среда, детекторы. Физические представления об эволюции газа частиц в среде.
2. Два предельных случая:
 - а) импульсный точечный источник в вакууме (взрыв «нейтронной бомбы»);
 - б) диффузия «тепловых» нейтронов; импульсный нейтрон – нейтронный (n-n) каротаж.
3. Взаимодействия частиц нейтрального газа со средой. Сечения и частоты взаимодействий.
4. Случайный пробег частицы в среде.
5. Марковский процесс эволюции частиц газа в среде.
6. Уравнения переноса и управляющие уравнения марковского процесса. Стационарный случай.
7. Перенос в «абсолютно поглощающей» среде.
8. Интегральная форма уравнений переноса, представление решений в форме ряда Неймана.
9. Геофизическое исследование скважин. Представления о прямых и обратных задачах - каротажа, n-n и - методов.
10. Нейтронно – активационный (n-a) и рентгено – флюоресцентный (r-f) анализы вещества. Некоторые прямые и обратные задачи n-a – каротажа и r-f - анализа.
11. Проблема об Интерфейсе Гелиосферы.
12. Некоторые прямые и обратные задачи импульсного n- - каротажа (неупругого рассеяния).

Некоторые вопросы численных методов для кинетических уравнений

Автор - проф., д.ф.-м.н. А.И. Хисамутдинов

1. Марковские скачкообразные процессы с состояниями в и цепи Маркова с поглощением с состояниями в . Случайные процессы физики переноса частиц. Фазовое пространство.
2. Плотности в и в , управляющее уравнение и уравнения для плотностей. Уравнение переноса частиц.
3. Имитационные оценки для вычисления линейных функционалов от различных плотностей в цепи .
4. Имитационные оценки, связанные с пересечением поверхности.
5. Стационарные задачи. Сведение их к нестационарным с “импульсным” источником . Сходимость ряда Неймана для стационарного уравнения переноса.
6. Понятие о неимитационных случайных цепях и неимитационных оценках. Схема Неймана-Улама, классы несмещенных оценок.
7. Марковские скачкообразные процессы с состояниями в и цепи Маркова с состояниями в . Случайные процессы эволюции N частиц разреженного газа с двумя типами скачков: рассеянием пар и скачками частиц на граничной поверхности. Управляющее уравнение и связь со сглаженным уравнением Больцмана.
8. Моделирование пары случайных величин: 1) случайный момент взаимодействия в системе частиц и 2) случайная скорость частицы среды или случайный номер взаимодействующей пары.
9. Системы с переменным числом частиц и тремя типами скачков, включая влеты-вылеты частиц на граничных поверхностях. Система управляющих уравнений, плотности в случайном процессе, связь со сглаженным уравнением Больцмана.
10. Имитационные оценки для вычисления основных физических величин: числовой плотности, средних скоростей, температур, потоков энергии, тензоров потока импульса.

Численные методы обработки данных метеорологических наблюдений

Автор: доц., д.ф.-м.н. Е.Г.Климова

1. Данные метеорологических наблюдений. Первичная обработка. Комплексный контроль метеорологической информации. Архивы данных. Данные ПГЭП. Данные реанализа. Задача численного (объективного) анализа метеорологических данных.
2. Численные методы восстановления метеорологических полей по данным наблюдений. Метод последовательных коррекций. Экспоненциальная интерполяция. Спектральная интерполяция. Оптимальная интерполяция.
3. Эквивалентность методов численного анализа.
4. Схема численного анализа данных на основе метода трехмерной многоэлементной оптимальной интерполяции.
5. Задача усвоения данных метеорологических наблюдений. Схема прогноз - анализ - инициализация. Связь задачи анализа и задачи инициализации.
6. Два подхода к задаче усвоения метеорологических данных: вариационный и динамико- стохастический. Постановка задачи оптимальной фильтрации. Фильтр Калмана. Фильтр Винера-Хопфа.
7. Фильтр Калмана для нелинейных прогностических моделей. Обобщенный фильтр Калмана. Субоптимальные фильтры. Адаптивный фильтр. Ансамблевый фильтр Калмана.
8. Вариационная постановка задачи усвоения.
9. Реализация фильтра Калмана в задаче усвоения метеорологических данных. Проблема сходимости, наблюдаемости, управляемости.
10. Обобщенный метод усвоения Лоренца.
11. Принцип двойственности и связь между различными подходами к задаче усвоения.
12. Современные системы усвоения данных метеорологических наблюдений.

Курсы кафедры математического моделирования

Интервальный анализ

Автор: проф. С.П. Шарый

- Введение

Предмет и метод интервального анализа. Мотивации и практические постановки, приводящие к интервальным методам. Понятие об интервальных величинах. Независимость и связанность интервальных величин.

Интервалы в сравнении с теоретико-вероятностным и нечётким способами описания неопределённости.

- Интервальные арифметики

Классическая интервальная арифметика, её алгебраические свойства. Основная теорема интервальной арифметики.

Мотивации пополнения классической интервальной арифметики. Полная интервальная арифметика Каухера и её алгебраические свойства. Минимаксный характер интервальной арифметики Каухера.

- Интервальные векторы и матрицы

Интервальные векторы и матрицы, введение операций между ними. Свойства интервальных векторно-матричных операций. «Эффект обёртывания» и его всеобщность. Задание топологии на интервальных пространствах. Нормы интервальных векторов. Теорема Шрёдера о неподвижной точке. Особенные и неособенные интервальные матрицы. Признаки Бека, Рона-Рекса, Румпа. Сильно неособенные интервальные матрицы.

- Интервальные методы вычисления областей значений функций

Понятие интервального расширения функции. Его связь с задачами оптимизации. Естественное интервальное расширение, его асимптотическая точность. Центрированные формы интервальных расширений и их точность. Теорема Кравчика-Ноймайера. Среднезначные формы. Интервальные методы глобальной оптимизации.

- Интервальные системы линейных алгебраических уравнений

Множества решений интервальных линейных систем и их строение. Необходимость оценивания и постановки задач. Внешнее оценивание, его связь с задачами чувствительности. Трудоёмкость решения различных постановок, её влияние на классификацию интервальных численных методов. Интервальный метод Гаусса. Интервальный метод Гаусса-Зейделя. Формальный подход. Предобуславливание. Стационарные итерационные методы. Метод Кравчика. Внутреннее оценивание множества решений, его приложение к задачам идентификации.

- Оптимальное внешнее оценивание множеств решений

Простейший пассивный переборный метод. Альтернатива Янссона. Теорема Бека-Никеля. Теорема Рона об экстремальных решениях. Методы дробления решений. Методы дробления параметров. Финально гарантирующие алгоритмы и последовательно гарантирующие алгоритмы.

- Обобщённые множества решений

Двойственный характер интервальной неопределённости, её различные типы. Кванторный формализм и понятие об обобщённых множествах решений интервальных задач. Теоретико-игровая интерпретация, приложения к задачам обеспечения надёжности и живучести систем. Множества АЕ-решений интервальных уравнений и неравенств. Формальный подход к внешнему и внутреннему оцениванию множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений.

- Задача о допусках для интервальных систем уравнений

Линейная задача о допусках и её инженерные интерпретации. Экономические приложения на примере уравнения Леонтьева. Свойства допустимого множества решений. Теорема Рона о допустимом множестве решений. Грубое исследование разрешимости. Распознающий функционал и полное исследование разрешимости.

«Центровой» подход к построению бруса решений линейной задачи о допусках.

- Вычисление формальных решений интервальных систем уравнений

Стационарные одношаговые итерационные методы. Теорема Зюзина. Погружение в линейное пространство. Абсолютно неособенные матрицы. Субдифференциальный метод Ньютона. Существование формальных решений.

- Интервальные методы для нелинейных уравнений и систем уравнений

Постановки задач. Доказательное решение уравнений и систем уравнений.

Интервальный метод Ньютона, одномерный и многомерный варианты.

Методы Кравчика и Хансена-Сенгупты. Понятие о методах распространения ограничений. Глобальное решение систем нелинейных уравнений. Ограничение области рассмотрения аналитическими и полуаналитическими процедурами.

Численные методы решения задач аэрогидродинамики

Автор: доц. А.С. Лебедев

Содержание курса:

Физико—математические модели. Задачи, которыми занимается аэродинамика.

Особенности экспериментального, теоретического и численного подходов в решении этих задач. Математические постановки задач аэродинамики. Основные принципы постановки краевых условий для (систем) уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов. Интегральные и дифференциальные законы сохранения. Различные формы записи дифференциальных уравнений. Иерархия математических моделей. Области применимости моделей. Преобразование уравнений к безразмерному виду. Критерии подобия. Некоторые точные решения задачи Коши для скалярного закона сохранения и для системы (квази)одномерных уравнений газовой динамики.

Основные понятия разностных схем. Переход к дискретным моделям. Способы дискретизации. Конечно—разностный метод. Метод конечных объемов. Важнейшие характеристики разностных схем. Точность. Экономичность. Проблемы реализации. Область применимости.

Конечно—разностные схемы для уравнения переноса и гиперболической системы уравнений. Схемы для скалярного закона сохранения. Противопотоковая схема. Схема Лакса. Условная аппроксимация. Одно— и двухшаговые схемы Лакса — Вендроффа. Схема Маккормака. Неявные схемы в дивергентной форме. Внутренние итерации. Противопотоковые схемы для гиперболических систем уравнений. Физические и математические особенности течений с ударными волнами. Консервативность разностной схемы. Схема Годунова — Ван Лира. Схема Стегера — Уорминга. Схемы распадного типа. Схема Годунова. Схема Роя. Инварианты Римана. Инварианты простой волны. Схема Ошера. Порядок аппроксимации схемы и проблема нефизических осцилляций численного решения. Исследование коэффициента перехода разностной схемы. Амплитудная и фазовая ошибка. Дисперсионные и диффузионные свойства разностной схемы. Дифференциальное представление разностной схемы. Искусственная вязкость. Метод коррекции антидиффузионных потоков. Слабые решения. Проблема выбора физического решения. Монотонные схемы. Схемы с невозрастающей полной вариацией. Схемы, сохраняющие монотонность. Порядок аппроксимации и главный член погрешности монотонной схемы для скалярного закона сохранения. Достаточное условие TVD. TVD — модификация схемы Лакса — Вендроффа для скалярного закона сохранения и для системы одномерных уравнений газовой динамики.

Схемы для скалярных одномерных и многомерных модельных уравнений параболического типа. Схема Ричардсона. Схема Дюфорта — Франкела. Схема с весами. Компактные схемы. Схемы в дробных шагах. Схема Саульева. Полная аппроксимация.

Схемы для многомерных уравнений газовой динамики и Навье — Стокса. Схема переменных направлений. Схема расщепления. Суммарная аппроксимация. Схема стабилизирующей поправки. Схема Дугласа. LU — факторизация. Схемы для решения стационарных задач. Метод установления. Расщепление по физическим процессам. Схема расщепления с минимальной диссипацией. Маршевые по пространственной координате алгоритмы решения стационарных задач газовой динамики. Необходимое условие корректности постановки маршевой по пространственной координате задачи. Маршевые алгоритмы решения параболизированных уравнений. Метод глобальных итераций.

Разностная сетка как неотъемлемый элемент численного алгоритма. Типы сеток. Сравнительные недостатки и преимущества структурированных и неструктурированных сеток. Алгебраический метод построения сетки по заданным граничным узлам. Адаптация к границе сложной формы. Алгебраический метод сгущения сетки. Неструктурированные (треугольные) сетки.

Прямые и обратные задачи механики композитов

Автор: доц. С.К. Голушко

Прямые и обратные задачи механики композитов

- Структурные модели композиционных материалов.
- Нитяная модель.
- Модель с одномерными волокнами
- Модель с двумерными волокнами.
- Модель В.В. Болотина.
- Структурные критерии прочности.
- Сравнительный анализ расчетных характеристик композиционных материалов с экспериментальными данными.
- Классические и уточненные уравнения композитных пластин и оболочек.
- Задачи статики упругих композитных пластин и оболочек.
- Неосесимметричные линейные задачи упругих композитных оболочек.
- Осесимметричные нелинейные задачи упругих композитных оболочек.
- Круглые и кольцевые композитные пластины.
- Методы решения краевых задач механики композитных пластин и оболочек
- Метод начальных параметров.
- Метод сплайн-коллокации.
- Метод дискретной ортогонализации.
- Основные задачи рационального проектирования армированных пластин и оболочек
- О постановках задач рационального проектирования армированных пластин и оболочек.
- О методах решения задач рационального проектирования.
- О разрешимости переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих при решении обратных задач композитных конструкций.
- О получении условий совместности при использовании различных критериев рациональности: равнонапряженности арматуры, равнопрочности, полужесткости, безмоментностию
- Аналитические решения задач рационального проектирования армированных пластин и оболочек.

Введение в математическое моделирование динамики гидромеханических систем

Автор: проф. В.Л. Сенницкий

Введение.

Математическое моделирование; гидромеханические системы; жидкость и включение; периодические воздействия; необычное поведение механических систем.

Механика жидкости.

Описание движения жидкой среды; гипотеза сплошности; переменные Эйлера; переменные Лагранжа.

Закон сохранения массы; уравнение неразрывности.

Закон сохранения импульса; идеальная жидкость; уравнения Эйлера.

Постановка задачи обтекания; идеальная несжимаемая жидкость; условия на твердой и свободной границах; начальные условия.

Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости; теорема Томсона; теорема Лагранжа; интеграл Коши-Лагранжа.

Математическое моделирование динамики системы «жидкость – газовый пузырь» при периодических воздействиях.

Постановка задачи–модели о движении пульсирующего твердого включения нулевой массы в колеблющейся жидкости.

Решение задачи.

Исследование решения; парадоксальное поведение включения.

Интерпретация условий задачи.

Эффект преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся жидкости.

Объяснение поведения газового пузыря.

Экспериментальное обнаружение эффекта преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся жидкости.

Задача о движении газового пузыря в жидкости при периодических воздействиях как задача о течении жидкости со свободной границей.

Однородные и неоднородные колебания жидкости.

Определения и примеры; качественные различия в поведении включений в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости.

Математическое моделирование динамики системы «жидкость – твердое тело» при периодических воздействиях (однородные колебания жидкости).

Постановка задачи-модели.

Приближенное решение задачи; метод отражений; метод возмущений.

Исследование решения; эффект «левитации», парадоксальное поведение включения.

Объяснение поведения включения.

Обобщенная задача; присоединенная масса тела; уравнения Томсона-Тэта; метод усреднения; позиционная сила, действующая на включение при колебаниях жидкости.

Математическое моделирование динамики системы «жидкость – твердое тело» при периодических воздействиях (неоднородные колебания жидкости).

Постановка задачи-модели.

Приближенное решение задачи; метод оценок.

Исследование решения; эффект «источника гравитации».

Объяснение поведения включения.

Управление гидромеханическими системами.

Использование результатов математического моделирования; примеры и перспективы.

Введение в гидродинамику волн

Автор: проф. Л.Б. Чубаров

ЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. Основные понятия и определения. Стоячие волны, биения. Дисперсионное соотношение. Мода, диссипация, дисперсия, фазовая и групповая скорости. Простейшая классификация волновых математических моделей.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. Метод перевала, седловые точки, Асимптотическое поведение решения общего линейного уравнения. Распространение энергии в диспергирующей среде. Закон сохранения для волнового числа.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛН. Эффекты нелинейности. Диссипирующие волны. Диспергирующие волны.

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ – СОЛИТОНЫ. Некоторые уравнения, порождающие солитоны: обобщенное уравнение КдФ, уравнение Буссинеска, уравнение \sin -Гордона, нелинейное уравнение цепочки.

ЭТАЛОННАЯ ФОРМА ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ. Уравнения, описывающие течения газа в трубах, и волны на мелкой воды. Систематический вывод иерархии уравнений теории мелкой воды.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ. Свойства уравнения Шредингера. Интегралы уравнения и связь между уравнениями КдФ и Шредингера. Параметры рассеяния. Независимость от времени спектра уравнения Шредингера.

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ. Уравнение Гельфанда-Левитана. Солитонные решения уравнения КдФ: односолитонное решение, двухсолитонное решение, N-солитонное решение. Взаимодействие солитонов, асимптотический анализ.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ. Основные определения и теоремы (1-6). Применение общей теории к уравнению КдФ. Собственные скорости общего решения уравнения КдФ.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН. Процедура усреднения. Примеры: линейная волна, нелинейное волновое уравнение, уравнение КдФ

Численные модели свободных турбулентных течений

Автор: проф. Г.Г. Черных

Основные уравнения гидродинамики несжимаемых жидкостей. Осреднение полей. Приведены в удобной для дальнейшего изложения уравнения гидродинамики, сформулированы свойства осреднения.

Иерархия полуэмпирических моделей турбулентности. Осреднение уравнений Обербека-Буссинеска. Уравнения переноса одноточечных корреляционных моментов второго порядка. Модели турбулентной вязкости и диффузии. Модель с одним уравнением баланса энергии турбулентности. Двухпараметрические модели турбулентности. Модели с дифференциальными уравнениями переноса компонент тензора Рейнольдсовых напряжений, вектора потоков и дисперсии флуктуаций температуры. Локально равновесные и неравновесные алгебраические модели.

Основы вычислительной гидродинамики. Основные конечноразностные подходы к решению краевых задач для уравнений пограничного слоя и Навье-Стокса. Методы расщепления по пространственным координатам и физическим процессам.

Модели турбулентной вязкости и диффузии. Двухпараметрическая модель турбулентности. Модели с дифференциальными уравнениями переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений вектора потоков и дисперсии флуктуаций температуры. Локально-равновесное приближение. Неравновесное приближение для вторых моментов. Решение краевых задач для многомерного уравнения теплопроводности с помощью метода дробных шагов. Итерационные схемы расщепления решения краевых задач для уравнения Пуассона. Конечноразностные методы решения уравнений пограничного слоя. Основные подходы к решению двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

Плоские и осесимметричные свободные струйные течения в однородной жидкости. Основные уравнения. Иерархия математических моделей. Конечноразностные алгоритмы. Численные модели плоских и осесимметричных свободных турбулентных течений.

Турбулентные следы в стратифицированной жидкости. Параболизированные уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Метод расщепления по физическим процессам. Иерархия полуэмпирических моделей турбулентности. Анизотропное вырождение турбулентности в дальнем безымпурсном турбулентном следе в линейно стратифицированной среде. Упрощенные модели.

Метод дифференциального приближения

Автор: д.ф.-м.н., проф. Хакимзянов Гаяз Салимович

Дисциплина (курс) «Метод дифференциального приближения» имеет своей целью подготовку высокопрофессиональных специалистов в области вычислительной математики, обладающих глубокими знаниями о популярных численных методах, владеющих современным методом исследования конечно-разностных схем – методом дифференциального приближения и имеющих развитые навыки использования этого метода в научно-исследовательской работе.

Содержание курса:

1. Некоторые сведения из теории линейных дифференциальных уравнений и теории разностных схем.
2. Дифференциальное представление разностной схемы.
3. Дифференциальное приближение разностной схемы.
4. Анализ устойчивости разностной схемы на основе ее дифференциального представления.
5. Устойчивость некоторых разностных схем с постоянными коэффициентами.
6. Определение свойства разностных схем. Исследование ϵ -свойства простых разностных схем.
7. ϵ -свойство трёхточечных разностных схем. ϵ -свойство схемы предиктор-корректор и некоторых неявных схем.
8. Уравнения мелкой воды. О схемах, сохраняющих гидравлический скачок.
9. Диссипация и дисперсия разностных схем.
10. Геометрическая иллюстрация диссипации и дисперсии разностных схем.
11. Анализ монотонности разностных схем.
12. Монотонизация схемы предиктор-корректор для одномерного линейного уравнения переноса.
13. О разностных схемах в произвольной системе координат.
14. Исследование свойств схемы предиктор-корректор на подвижной сетке для линейного уравнения переноса.
15. Монотонизация схемы предиктор-корректор для нелинейного уравнения переноса.
16. Алгебраическая эквивалентность разностных схем.
17. Консервативные разностные схемы на подвижной сетке.
18. Полностью консервативные разностные схемы.
19. Некоторые сведения из теории групповых свойств дифференциальных уравнений.
20. Условия инвариантности разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики.

Математическое моделирование динамики сжимаемой жидкости и газа

Автор: д.ф.-м.н. Лазарева Г.Г.

Дисциплина (курс) «Математическое моделирование динамики сжимаемой жидкости и газа» имеет своей целью подготовку высокопрофессиональных специалистов в области математического моделирования, владеющих методологией математического моделирования задач современной науки, знакомых с современными подходами к высокопроизводительным вычислениям и их приложениям, имеющих развитые базовые навыки использования этих знаний в дальнейшей исследовательской и практической работе.

Содержание курса:

1. Математические модели астрофизики. Уравнения гравитационной газодинамики. Учет самосогласованного гравитационного поля. Кинетические модели звездно-пылевого компонента. Современные численные методы для решения задач гравитационной газодинамики. Эффект курбункула. Общие подходы. Сравнительный анализ.
2. Лагранжевы методы. Метод сглаженных частиц. Идеология метода сглаженных частиц. Алгоритм решения задачи. Аппроксимация метода сглаженных частиц. Оценка погрешности аппроксимации. Законы сохранения. Искусственная вязкость. Адаптивный шаг сглаживания.
3. Учет влияния гравитации на движение частиц. Иерархический метод расчета сил всемирного тяготения. Сглаживание сил гравитации на малых расстояниях. Погрешность и экономичность иерархического метода. Распараллеливание метода сглаженных частиц. Распараллеливание иерархического метода поиска соседних частиц.
4. Эйлеровы методы. Адаптивные сетки. Переопределение в ячейках. Блочнo-структурное переопределение.
5. Метод Годунова для уравнений акустики с одной пространственной переменной. Законы сохранения. Формулы общего решения. Задача о распаде разрыва. Разностные формулы для метода Годунова. Построение решения с помощью распадов разрывов. Усреднение и законы сохранения. Построение разностной схемы с помощью соотношений на характеристиках.
6. Метод Годунова для уравнений газодинамики с одной пространственной переменной. Задача о распаде разрыва. Возможные конфигурации.
7. Конечно-разностная схема. Метод Годунова для уравнений газодинамики с двумя пространственными переменными. Модификация для подвижной разностной сетки. Параллельный алгоритм для решения задач гравитационной газодинамики методом Годунова.
8. Эйлерово-лагранжевы методы. Метод крупных частиц Белоцерковского-Давыдова для уравнений газодинамики с одной пространственной переменной. Устойчивость метода. Метод крупных частиц для уравнений гравитационной газодинамики с тремя пространственными

- переменными. Распараллеливание метода крупных частиц. Выбор метода декомпозиции.
9. Современные численные методы для решения задач гравитационной газодинамики.
 10. Общее введение в метод частиц. Модель столкновений. Метод частиц в ячейках для описания звездно-пылевого компонента. Описание взаимодействия газовой и пылевой фаз.
 11. Распараллеливание метода частиц в ячейках. Связь уровня численных шумов с числом модельных частиц. Внутренний параллелизм метода. Различные варианты: P2, PM, Treecode. Передача данных между параллельно работающими процессорами.
 12. Численное моделирование динамики ударных волн в пассивных пузырьковых системах. ИКВ-модель и методы решения. Выбор геометрии пузырькового кластера. Законы сохранения энергии. Метод определения погрешности максимальной амплитуды давления в области фокусировки.
 13. Параллельная версия алгоритма. Распараллеливание алгоритма задачи. Выбор метода декомпозиции. Ускорение и эффективность параллельного алгоритма. Влияние размеров пузырькового кластера на ускорение и эффективность параллельного алгоритма. Формирование и усиление ударных волн в ходе взаимодействия плоской ударной волны с пузырьковым кластером.
 14. Современные математические модели мантийных течений и численные методы реализации. Подходы к построению параллельных алгоритмов для вычислений над распределенной памятью.
 15. Численное моделирование динамики нестационарных мантийных течений в приближении слабосжимаемой жидкости. Динамика всплывания легкого вещества в результате андерплейтинга базитовой высокотемпературной магмы под основанием коры.
 16. Метод частиц в ячейках для описания звездно-пылевого компонента. Современные математические модели мантийных течений и численные методы реализации.
 17. Дополнительные физические факторы (многофазность, самогравитация, процессы охлаждения, теплоперенос, плавление, наличие сильно изменяющихся реологических и транспортных свойств и т. д.) в приложениях задач гидродинамики. Введение в уравнения газовой динамики новых членов и включения в систему дополнительных уравнений.

Технологии разработки информационных систем научной направленности

Автор: доц. В.Б. Барахнин

Введение.

Цели и задачи создания информационных систем научной направленности. Виды информационных систем: каталоги интернет-ресурсов, электронные коллекции и атласы, базы данных удаленного доступа.

1. Архитектура «клиент-сервер».
 - 1.1. Основные компоненты информационных систем.
 - 1.2. Хранилища данных.
 - 1.3. Обработчики данных.
 - 1.4. Средства доступа и презентации
2. Доступ к информационной системе через Интернет.
 - 2.1. Протокол TCP/IP.
 - 2.2. IP-адрес документа.
 - 2.3. Протоколы HTTP и FTP.
 - 2.4. URL-адрес документа.
3. Интерфейс CGI.
 - 4.1 Передача данных на сервер.
 - 4.2. Заголовки и метод GET.
 - 4.3. Метод Post.
4. HTML – язык описания web-страниц.
 - 4.1. Структура команд языка HTML.
 - 4.2. Форматирование документа: базовая разметка, таблицы, списки.
 - 4.3. Гиперссылки.
 - 4.4. Описание документа.
 - 4.5. Использование различных шрифтов и специальных символов.
 - 4.6. Изображения и мультимедиа в HTML документах.
 - 4.7. Краткие сведения об языке обработки сценариев Java Script.
 - 4.8. Передача данных на сервер с помощью форм.
5. Язык PHP как инструмент разработки сценариев.
 - 5.1. Основные характеристики языка.
 - 5.2. Переменные, константы, выражения.
 - 5.3. Работа с данными формы.
 - 5.4. Конструкции языка.
 - 5.5. Функции и области видимости.
 - 5.6. Особенности работы с массивами, ассоциативные массивы.
 - 5.7. Работа с текстовыми переменными, регулярные выражения в формате RegEx.
 - 5.8. Математические функции.
 - 5.9. Работа с файлами и каталогами.
 - 5.10. Работа с датами и временем.
6. Базы данных.
 - 6.1. Понятие базы данных и СУБД.
 - 6.2. Инфологическая модель данных.

- 6.3. Реляционная структура данных.
- 6.4. Проектирование реляционных баз данных, нормализация данных.
- 6.5. Метаданные.
- 7. Структурированный язык запросов к базам данных MySQL.
- 7.1. Структура операторов и базовые элементы языка.
- 7.2. Выборка данных.
- 7.3. Внесение изменений в базу данных.
- 7.4. Способы создания баз данных.
- 7.5. Работа с MySQL через PHP.
- 8. Заключение.
- 8.1. Обзор примеров реализации изученных технологий на сайте СО РАН

Курсы кафедры механики деформируемого твердого тела

Нелинейные задачи механики твердого тела

Автор: д.ф.-м.н. С.Н. Коробейников

Содержание курса:

1. Введение. Кинематика деформирования

Предмет нелинейной механики деформируемого твердого тела, место в ряду наук, структура, область применения. Система отсчета. Движение сплошной среды. Лагранжевы и эйлеровы координаты.

Лагранжев (общий и текущий) и эйлеров подходы к описанию движения сплошной среды. Пространственный, материальный отсчетный и материальный текущий базисы. Вектор перемещений.

Закон движения. Тензоры градиентов деформаций и перемещений.

Формулы преобразования элементарных отрезков, площадок и объемов из отсчетной в актуальную конфигурацию. Объективные (инвариантные и индифферентные) тензоры.

Дифференцирование тензоров по времени. Конвективные и коротационные производные тензоров. Объективные производные тензоров.

2. Тензоры деформаций.

Полярное (мультипликативное) разложение тензора градиента деформации. Правые и левые тензоры деформаций; тензоры деформаций Коши - Грина и Пиолы.

Тензоры деформаций семейства Хилла. Тензоры деформаций Грина – Лагранжа и Альманзи. Малые деформации и линейный тензор деформаций. Объективные производные тензоров деформаций. Тензор скорости деформаций.

3. Тензоры напряжений. Уравнения движения.

Определение тензора напряжений Коши. Тензоры напряжений Коши, Кирхгофа, Пиолы – Кирхгофа. Объективные скорости изменения тензоров во времени. Сопряженные тензоры напряжений и деформаций.

Уравнения движения/равновесия в текущей и отсчетной конфигурациях. Уравнения движения/равновесия, записанные относительно скоростей, в текущей и отсчетной конфигурациях.

4. Определяющие соотношения упругости.

Три формы записи определяющих соотношений упругого материала в случае бесконечно малых деформаций. Гиперупругость, упругость и гипоупругость. Теорема Нолла.

5. Слабые формы уравнений движения и вариационные принципы.

Слабые формы уравнений движения (равновесия) в текущей и отсчетной конфигурациях.

Вариационный принцип Хилла в отсчетной и текущей конфигурациях. Варианты принципа в текущей конфигурации: с использованием производных Трусделла и Хилла в определяющих соотношениях.

6. Потеря устойчивости и контактные взаимодействия деформируемых тел.

Бифуркация решений краевой задачи и собственные состояния. Потеря устойчивости равновесных состояний. Критерии единственности и устойчивости решений краевых задач.

Постановка контактной задачи. Формулировка контактной задачи с помощью методов множителей Лагранжа и штрафных функций.

7. Применение метода конечных элементов к решению нелинейных задач.

Векторно-матричная запись слабых форм уравнений и функционалов вариационных принципов для общей лагранжевой и текущей лагранжевой формулировок уравнений.

Конечно-элементная дискретизация геометрии и вектора перемещений. Изопараметрические конечные элементы. Дискретизованные уравнения движения/равновесия и методы их решения.

Избранные главы механики твердого тела

Автор: д.ф.-м.н. Б.Д. Аннин

Содержание курса:

1. Метод малого параметра в задачах механики твердого тела

Асимптотика решения краевых задач с малым параметром при старших производных. Метод Боголюбова–Крылова. Задача о неоднородном упругом стержне.

2. Эффективные характеристики композитов

Подходы Фойгта и Рейса. Упругие среды с периодически расположенными неоднородностями. Осреднение в теории малых упругопластических деформаций.

3. Механика волокнистых композитов

Механические свойства современных композитных материалов.

Модель Аутвотера деформирования и разрушения. Задача о концентрации напряжений. Трещина нормального разрыва в однородном поле. Задача о динамической концентрации напряжений.

Плоская задача о деформировании анизотропного тела. Введение комплексных переменных. Задача о концентрации напряжений около прямолинейного выреза.

4. Механика слоистых композитов

Модели упругого деформирования слоистых тел.

Численное моделирование упругопластического соударения пластин.

Оптимальное проектирование слоистых конструкций из конечного набора материалов.

Минимизация массы сферической оболочки, подверженной силовому и температурному воздействиям.

Численные методы в механике деформируемого твердого тела

Автор: д.ф.-м.н. С.Н. Коробейников

Содержание курса:

1. Сильная, слабая и вариационная формулировки уравнений статического деформирования стержня.

Сильная (дифференциальная) и слабая (уравнение принципа возможных перемещений) формы уравнений равновесия стержня (одномерная задача); эквивалентность этих форм.

Сильная и слабая формы уравнений для решения задачи о деформировании стержня с разрывами в геометрии и внешних силах; преимущества слабой формы уравнений.

Вариационная формулировка задачи о равновесии упругого стержня; теорема о минимуме потенциальной энергии стержня; эквивалентность вариационной, слабой и сильной формулировок задачи.

Сильная, слабая и вариационная формулировки задачи о деформировании стержня из неоднородного материала с разрывным модулем Юнга; преимущества вариационной и слабой формулировок уравнений равновесия.

Функциональные энергетические пространства; методы Бубнова - Галеркина и Ритца; базисные функции и их свойства; дискретизованная система уравнений в матричной и векторной формах; свойства матрицы жесткости.

2. Конечные элементы одномерного статического деформирования стержня с линейной аппроксимацией.

Проекционные свойства методов Бубнова - Галеркина и Ритца; оценка энергии деформации приближенного решения; оптимальные свойства приближенных решений, полученных методами Бубнова - Галеркина и Ритца.

МКЭ как частный случай методов Бубнова - Галеркина и Ритца с полиномиальными кусочно-линейными базисными функциями с финитными носителями; оценка ошибки численного решения МКЭ; оптимальные точки определения перемещений и деформаций; скорость сходимости численного решения к точному.

Локальная форма МКЭ как основа его практической реализации.

Решение одномерной задачи о деформировании упругого стержня с помощью линейных конечных элементов (использовать глобальную и локальную формы МКЭ); сравнение численных решений с точным.

3. Изопараметрические конечные элементы одномерного статического деформирования стержня.

Одномерные изопараметрические конечные элементы; линейные элементы постоянной деформации; достаточные условия сходимости численного решения к точному (гладкость, непрерывность, полнота); выполнение достаточных условий сходимости для элементов постоянной деформации.

Одномерные изопараметрические конечные элементы высокого порядка; трехузловой изопараметрический конечный элемент с иерархическим строением функций форм; положение среднего узла квадратичного элемента, обеспечивающее достаточные условия сходимости численного решения к точному; сингулярный изопараметрический квадратичный конечный элемент;

матрица жесткости и вектор внешних сил изопараметрического конечного элемента произвольного порядка.

Численное интегрирование матриц и векторов изопараметрических конечных элементов по квадратурным формулам Гаусса - Лежандра; порядок интегрирования матрицы жесткости, обеспечивающий сходимость численного решения к точному.

Решение одномерной задачи о деформировании упругого стержня с помощью одного изопараметрического квадратичного конечного элемента; сравнение численного решения с точным.

Точки Барлоу (оптимальные точки определения напряжений) в численном решении одномерной задачи квадратичными конечными элементами.

4. Сильная и слабая формулировки уравнений динамического деформирования стержня и конечно-элементная аппроксимация.

Сильная и слабая формы уравнений движения консервативной одномерной задачи о деформировании стержня.

Полудискретная формулировка метода Бубнова - Галеркина решения динамических задач; совместная и диагональная матрицы массы; матричная и векторная формы полудискретных уравнений движения.

Уравнения движения стержня с учетом вязкости; полудискретные уравнения движения вязко-упругого стержня; матрица демпфирования; демпфирование по Релею.

Явная (центрально-разностная) и неявная (Ньюмарка) схемы интегрирования уравнений движения.

5. Уравнения равновесия двумерных задач упругого тела в сильной, слабой и вариационной формах.

Уравнения равновесия деформируемого тела в сильной и слабой формах (многомерный случай).

Замкнутая система статических уравнений линейной теории упругости в сильной, слабой и вариационной формулировках; принцип минимума полной потенциальной энергии.

6. Конечно-элементная дискретизация уравнений равновесия двумерных задач упругого тела.

Глобальная форма МКЭ; треугольный конечный элемент постоянной деформации; локальная форма МКЭ для треугольного элемента; матричный и векторный эквиваленты задачи Бубнова - Галеркина.

Четырехузловой изопараметрический конечный элемент; условия сходимости численного решения к точному; численное интегрирование матрицы жесткости и векторов сил четырехугольного изопараметрического конечного элемента по квадратурным формулам Гаусса - Лежандра; пониженный и полный порядки численного интегрирования.

Четырехугольные изопараметрические элементы высокого порядка; лагранжево и серендипово семейства элементов; элементы с иерархическим строением функций форм; пониженный и полный порядки численного интегрирования матрицы жесткости квадратичных изопараметрических конечных элементов по квадратурным формулам Гаусса - Лежандра.

Механика углеродных наноструктур

Автор: д.ф.-м.н. С.Н. Коробейников

Содержание курса:

1. Потенциальные энергии взаимодействия атомов углеродной наноструктуры. Физические основы межатомных взаимодействий наноструктур. Потенциальные силы взаимодействия атомов в наносистеме. Энергия растяжения связи атомов. Энергия изменения углов соседних связей. Энергия выхода атома из плоскости. Энергия электростатических сил. Энергия сил Ван-дер-Ваальса.

2. Уравнения динамического движения наноструктуры и векторы внутренних сил элементов наноструктуры.

Уравнения движения Ньютона атомов консервативной наноструктуры. Уравнения движения Ньютона атомов неконсервативной наноструктуры. Определение вектора внутренних сил элемента с двухчастичным потенциалом. Определение вектора внутренних сил элемента с трехчастичным потенциалом. Определение векторов внутренних сил элемента с четырехчастичными потенциалами (кручение ковалентной связи и выхода атома из плоскости, образуемой тремя соседними атомами).

3. Уравнения квазистатического движения наноструктуры и матрицы касательных жесткостей элементов наноструктуры.

Уравнения квазистатического движения наноструктуры. Определение матриц касательных жесткостей элементов с с двухчастичным, трехчастичным и четырехчастичными потенциалами.

4. Уравнения молекулярной динамики и молекулярной механики.

Уравнения молекулярной динамики. Уравнения молекулярной механики: квазистатика. Уравнения молекулярной механики: динамика. Характерные скорости движения атома углерода.

5. Линейные уравнения статики атомной цепочки.

Линейные уравнения статики атомной цепочки в векторной форме. Свойства глобальных матриц статически определимой и статически неопределимой атомной цепочки. Задание перемещений атомов цепочки методом конденсации. Задание перемещений атомов цепочки методом множителей Лагранжа. Задание перемещений атомов цепочки методом штрафных функций. Применение метода Гаусса к решению линейных уравнений статики атомной цепочки, полученных методом конденсации. Применение метода Гаусса к решению линейных уравнений статики атомной цепочки, полученных методом множителей Лагранжа. Применение метода Гаусса к решению линейных уравнений статики атомной цепочки, полученных методом штрафных функций.

6. Скалярная и вариационная формы статики атомной цепочки.

Скалярная форма линейных уравнений статики атомной цепочки. Эквивалентность скалярной и векторной форм уравнений равновесия. Поэлементное построение глобальных матрицы жесткости и векторов внутренних и внешних сил, основанное на скалярной форме уравнений равновесия. Теорема минимума полной потенциальной энергии.

Поэлементное построение глобальной матрицы жесткости и векторов внутренних и внешних сил, основанное на вариационной форме уравнений равновесия. Вариационная формулировка задачи статического равновесия атомной цепочки, основанная на методе конденсации. Вариационная формулировка задачи статического равновесия атомной цепочки, основанная на методе множителей Лагранжа. Вариационная формулировка задачи статического равновесия атомной цепочки, основанная на методе штрафных функций. Сопоставление векторной, скалярной и вариационной формулировок уравнений равновесия атомной цепочки. Методы решения алгебраических систем уравнений с симметричными матрицами профильного типа.

7. Векторная и скалярные формы уравнений движения атомной цепочки.

Векторная форма уравнений движения атомной цепочки. Скалярная форма уравнений движения атомной цепочки. Решение уравнений движения атомной цепочки методом разложения по формам собственных колебаний.

Курсы кафедры теоретической механики

Капиллярная гидродинамика

Автор: Пухначев Владислав Васильевич , д.ф.-м.н., профессор

Курс ставит своей целью усвоение студентами основных понятий и базовых положений математической теории капиллярной гидродинамики. Основное внимание уделяется рассмотрению вопросов устойчивости форм поверхности жидкости при условии наличия сил поверхностного натяжения. Излагаются известные математические модели и существующие методы исследования классических задач капиллярной гидродинамики. Также исследуются условия на границе раздела несмешивающихся жидкостей и различных фаз, уравнения капиллярно-гравитационной конвекции, признаки неустойчивости.

В целом курс дает представление о все более активной роли современной прикладной математики в решении задач естествознания.

Содержание курса:

1. Объемные и поверхностные силы. Равновесие жидкости в полях внешних сил. Понятие о капиллярности.
2. Потенциальная энергия капиллярной жидкости в поле тяжести. Первая вариация потенциальной энергии. Средняя кривизна поверхности. Вариационный принцип Гаусса.
3. Условие равновесия на границе трех фаз. Статический краевой угол. Задача о равновесной поверхности в вертикальном цилиндрическом сосуде.
4. Равновесные формы вращающейся жидкости. Критерии подобия равновесных поверхностей. Число Бонда и капиллярное число. Проблема динамического краевого угла.
5. Подъем свободной поверхности у смачивающей плоской стенки и в круглой трубке. Асимптотическое решение задачи при больших числах Бонда. Формула Лапласа.
6. Задача о равновесии мыльной пленки. Минимальные поверхности. Условие существования осесимметричных минимальных поверхностей.
7. Капиллярные поверхности в невесомости. Неустойчивость и несуществование равновесных поверхностей. Аномальный подъем жидкости вдоль двугранного угла.
8. Классическая теорема Лагранжа об устойчивости равновесия механической системы и проблема ее обращения. Приложение к капиллярной гидродинамике.
9. Вторая вариация поверхностной энергии. Оператор Лапласа-Бельтрами.
10. Спектральный признак устойчивости равновесных капиллярных поверхностей. Случай поверхности вращения.
11. Линейное приближение в задаче о капиллярных волнах. Устойчивость круглой капиллярной струи идеальной жидкости.

12. Неустойчивости Рэля-Тейлора и Кельвина-Гельмгольца. Стабилизирующая роль поверхностного натяжения.
13. Элементы термодинамики поверхности раздела несмешивающихся жидкостей. Внутренняя энергия, свободная энергия и энтропия границы раздела.
14. Кинематическое условие на границе раздела. Условия непрерывности.
15. Динамическое условие на границе раздела неизотермических жидкостей. Термокапиллярный эффект.
16. Эквивалентность двух определений коэффициента поверхностного натяжения. Энергетическое условие на границе раздела.
17. Уравнения капиллярно-гравитационной конвекции. Критерии подобия: число Рэля и число Марангони.
18. Решение Бириха и его обобщения.

Метод двухмасштабной гомогенизации в задачах геомеханики

Автор: Шелухин Владимир Валентинович, д.ф.-м.н., профессор

Курс ставит своей целью усвоение студентами основных понятий и базовых положений математической теории усреднения дифференциальных операторов и ее применения в механике гетерогенных сред.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с моделированием процессов в гетерогенной среде с помощью усреднения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в однородных компонентах среды. Излагается математический аппарат, представляющий основу для строгого применения усреднений в исследовании физических процессов. Дано обоснование ряду известных моделей геомеханики и продемонстрировано, как можно получать новые модели гетерогенной среды.

В целом курс дает представление о все более активной роли современной прикладной математике в решении задач естествознания.

Содержание курса:

1. Некоторые сведения из функционального анализа. Теория слабой сходимости. Понятие обобщенной производной и пространства Соболева.
2. Теоремы вложения и неравенство Пуанкаре.
3. Теорема Реллиха. Билинейные формы и Лемма Лакса – Мильграма.
4. Метод двухмасштабных асимптотических разложений.
5. Краевая задача для эллиптического дифференциального уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами.
6. Понятие двухмасштабной сходимости. Теорема Нгуэтсенга о двухмасштабной компактности.
7. Теорема Аллэра о трехмасштабной сходимости
8. Теория компенсированной компактности Мюра – Тартара.
9. Div-rot-Лемма о компактности. Пример гомогенизации для нелинейной задачи.
10. Гомогенизация уравнений Максвелла при различных отношениях порядка между такими длинами как размер неоднородности, длина волны и длина скин-слоя.
11. Частотная дисперсия Максвелла-Вагнера. Физические основания закона Арчи.
12. Эффект частотной дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости и эффективной электрической проводимости.
13. Обоснование закона фильтрации Дарси.
14. Теорема Тартара.
15. Усреднение в теории упругости.
16. Законы поведения для композиционных упругих материалов.
17. Применение теории гомогенизации к течению электролитов в пористой среде.
18. Двухмасштабная гомогенизация уравнений Нернста-Планка. Обобщенный закон фильтрации Дарси.

19. Потенциал самополяризации в пористых средах во время бурения.
20. Уравнения электроосмоса для наномембран.
21. Акустика пористых сред, насыщенных водно-нефтяными эмульсиями.

Математические модели конвекции

Автор: Пухначев Владислав Васильевич, чл.-корр РАН, профессор ММФ НГУ, зав.отделом ИГиЛ СО РАН

Курс ставит своей целью усвоение студентами понятий, связанных с процессами конвективных течений на основе комплексного изучения механизмов возникновения конвекции в различных условиях, определения структуры и устойчивости течений к возмущениям на границе раздела с учетом деформаций самой границы.

Содержание курса:

1. Основные гипотезы сплошной среды. Подходы Эйлера и Лагранжа к описанию движения сплошной среды. Формула переноса.
2. Интегральные законы сохранения. Дифференциальные уравнения непрерывных движений.
3. Элементы термодинамики. Плотностная аномалия воды.
4. Классические модели жидкости и газа.
5. Понятие границы раздела двух несмешивающихся жидкостей. Кинематическое условие на границе раздела
6. Поверхностное натяжение. Динамическое условие на границе раздела.
7. Элементы термодинамики поверхности раздела. Условия непрерывности.
8. Перенос энергии через границу раздела.
9. Понятие свободной поверхности. Дополнительные условия.
10. Иерархия моделей тепловой гравитационной конвекции в замкнутых областях. Исходные соотношения.
11. Критерии подобия. Переход к безразмерным переменным. Разложение по малому параметру
12. Уравнения конвекции слабосжимаемой жидкости.
13. Уравнения конвекции изотермически несжимаемой жидкости.
14. Уравнения Обербека-Буссинеска. Условия равновесия неравномерно нагретой жидкости.
15. Линейная модель переходного процесса.
16. Групповые свойства уравнений Обербека-Буссинеска. Примеры точных решений.
17. Микроконвекция в вертикальном слое
18. Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости.
19. Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения.
20. Задача Рэлея-Бенара об устойчивости равновесия горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу.
21. Задача Остроумова о возникновении конвекции в вертикальном круговом канале.
22. Конвективный пограничный слой.
23. Тепловая конвекция во вращающемся слое жидкости в условиях невесомости.
24. Уравнения конвекции бинарной смеси. Эффект Сорэ.

Краевые задачи в областях с негладкими границами

Автор: Хлуднев Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор

Курс «Краевые задачи в областях с негладкими границами» предназначен для студентов 3 и 4 курсов бакалавриата и первого курса магистратуры механико-математического факультета университета.

Основной целью освоения дисциплины является получение представлений о современном состоянии теории краевых задач в областях с негладкими границами, приобретении навыков в исследовании задач равновесия деформируемых тел с включениями и трещинами и овладении соответствующей техникой.

Содержание курса:

1. Области с негладкими границами.
2. Пространства Соболева
3. Дифференцируемость функционалов. Экстремальные точки. Критические точки.
4. Слабая полунепрерывность функционалов. Условия слабой полунепрерывности выпуклых и дифференцируемых функционалов.
5. Вариационные неравенства.
6. Обобщенная теорема Вейерштрасса и ее применение.
7. Задача о равновесии мембраны. Функциональные пространства.
 - а) Мембрана, содержащая разрез. Линейная задача
 - б) Мембрана, содержащая разрез. Нелинейная задача
8. Линейная задача о равновесии пластины с разрезом
9. Задача о контакте пластины с тонким препятствием
10. Равновесие нелинейной мембраны с тонким включением
11. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини
12. Задача о контакте мембраны с тонким препятствием.
13. Задача о контакте пластины с объемным препятствием
14. Задача о равновесии неоднородной пластины с трещиной
15. Равновесие упругого тела с трещиной
16. Задача о равновесии упругого тела с тонким жестким включением
17. Тонкое жесткое включение, выходящее на границу
18. Тонкое упругое включение Бернулли-Эйлера в упругом теле
19. Отслоение тонкого включения в упругом теле
20. Тонкое включение Тимошенко в упругом теле
21. Отслоение включения Тимошенко

Математические вопросы динамики вязкопластических жидкостей

Автор: Шелухин Владимир Валентинович, д.ф.-м.н., профессор

Семинар ставит своей целью усвоение студентами основных понятий и базовых положений математического моделирования течений неньютоновских сред. Этот раздел механики интенсивно развивается в последнее время, и число публикаций растет. Изучение актуальных современных работ и работ классиков позволит студентам быть в курсе современных тенденций.

Семинар доступен как студентам-магистрантам, так и студентам-бакалаврам поскольку на начальном этапе работы семинара обсуждаются основные определения и понятия теории неньютоновских сред. Студенты приобретают квалификацию в области математических методов исследования уравнений нелинейной механики. Специалисты в этом направлении востребованы в инженерных центрах и научных институтах механического профиля.

В целом курс дает представление о все более активной роли современной прикладной математике в решении задач естествознания.

Содержание курса:

1. Введение. Примеры вязко-пластических и вязкоупругих жидкости. Основные предположения и модели
2. Релаксационная модель Максвелла. Принцип материальной объективности определяющих уравнений.
3. Течение типа источника (стока) в неньютоновских жидкостях Джеффри и Максвелла. Уравнение для завихренности.
4. Течение Тейлора-Куэтта между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами в рамках модели Джеффри.
5. Автомодельные решения в модели Максвелла.
6. Нестационарные течения. Задача Релея о схлопывании пузыря в рамках моделей Максвелла и Джеффри.
7. Диффузия завихренности. Задача Озеена в жидкости Максвелла.
8. Задача Стокса о течении, индуцированным движением плоскости, в рамках модели Джеффри.
9. Моделирование турбулентности. Напряжения Рейнольдса.
10. Устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой жидкости.
11. Устойчивость в моделях Олдройда-Джеффри и В-модели Олдройда.
12. Устойчивость произвольных периодических однонаправленных течений.
13. Однонаправленные течения вязкоупругой жидкости.
14. Течение микрополярной жидкости.
15. Устойчивость течений микрополярной жидкости.
16. Неньютоновские эффекты в электрогидродинамике.
17. Задача с радиальным электрическим полем. Диэлектрическое трение.