СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НГУ ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

1 курс

1. Пусть неотрицательные числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}\,.$$

2. Десятизначное число назовём правильным, если его стандартная десятичная запись содержит все цифры и при чтении его слева направо, чётные числа идут по возрастанию, а нечётные по убыванию. Сколько существует нечётных правильных чисел?

3. Пусть BK — биссектриса угла B треугольника ABC с прямым углом C. Окружность, описанная около треугольника AKB пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $AB = CB + CL$.

4. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $x + f(x) = f(f(x))$. Найдите все решения уравнения $f(f(x)) = 0$.

5. Пафнутий написал на 1000 карточек по одному числу от 1 до 1000 (каждое число было написано ровно один раз). Арсений разложил карточки Пафнутия по некоторым ячейкам доски 1×2017, не более чем по одной карточке в каждую клетку. Если соседняя клетка справа от карточки с числом n ($n < 1000$) пуста, то за один ход Пафнутию разрешается переложить в эту пустую ячейку карточку с числом $n+1$. Через несколько ходов у Пафнутия не осталось возможности сделать ход. Какое наибольшее количество ходов могло быть сделано к этому моменту?

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НГУ ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

2-4 курсы

1. Пусть для дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f выполнены условия $|f'(a)| = |f(b)|$, $|f'(b)| = |f(a)|$ и $f'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Докажите, что уравнение $f(x) + f''(x) = 0$ имеет корень в (a, b).

2. Могут ли сходиться оба интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ для некоторой непрерывной функции $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$?

3. Пусть $a_n > 0$ убывающая последовательность. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2^n}$.

4. Пусть $a_0 > 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{n+2}$. Докажите сходимость этой последовательности и найдите её предел.

5. Найдите все действительные числа λ, для которых существует ненулевой многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющий тождеству

$$(1 - x)p(x + 1) + (1 + x)p(x - 1) + \lambda p(x) = 0.$$

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НГУ ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

1 курс

1. Пусть неотрицательные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}\,.$$

Решение. Пусть Σ — левая часть искомого равенства, а d — разность прогрессии. Тогда $d = (\sqrt{a}_{k+1}-\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})$, поэтому

$$\Sigma=\frac{1}{d}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_0}}{d}=\frac{a_n-a_0}{d(\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n})}=\frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}\,.$$

2. Десятизначное число назовём правильным, если его стандартная десятичная запись содержит все цифры и при чтении его слева направо, чётные числа идут по возрастанию, а нечётные по убыванию. Сколько существует нечётных правильных чисел?

Решение. Правильное число однозначно определится выбором 5 мест из 9 для чётных цифр, поэтому всех правильных чисел будет $C_9^5 = 126$. Если правильное число чётно, то последнее место надо зарезервировать для чётной цифры и останется выбрать 4 места из 8 возможных. Таким образом чётных правильных чисел будет $C_8^4 = 70$, а нечётных $126 - 70 = 56$.

3. Пусть BK — биссектриса угла B треугольника ABC с прямым углом C. Окружность, описанная около треугольника AKB пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $AB = CB + CL$.

Решение. Опустим перпендикуляр KM на AB. Так как BK биссектриса, то $BC = BM$ и $CK = KM$. На хорды LK и KA опираются одинаковые углы, поэтому $LK = KA$. Отсюда прямоугольные треугольники $\triangle KMA$ и $\triangle KCL$ равны по катету и гипотенузе, поэтому $CL = AM$. Тогда $CB + CL = BM + AM = AB$, что и требовалось.

4. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $x + f(x) = f(f(x))$. Найдите все решения уравнения $f(f(x)) = 0$.

Решение. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 + f(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2 + f(x_2)$, откуда $x_1 = x_2$. Таким образом, отображение f инъективно. Подставив в тождество $x = 0$, получим $f(f(0)) = f(0)$ и в силу инъективности получим $f(0) = 0$. Если $f(f(x)) = 0$ для некоторого x, то $f(f(x)) = 0 = f(f(0))$ и опять по инъективности $x = 0$. Таким образом, решение $x = 0$.

Для любознательных: примером такой функции может служить функция $f(x) = cx$, где c — корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

5. Пафнутий написал на 1000 карточек по одному числу от 1 до 1000 (каждое число было написано ровно один раз). Арсений разложил карточки Пафнутия по некоторым ячейкам доски 1×2017, не более чем по одной карточке в каждую клетку. Если соседняя клетка справа от карточки с числом n $(n < 1000)$ пуста, то за один ход Пафнутию разрешается переложить в эту пустую ячейку карточку с числом $n+1$. Через несколько ходов у Пафнутия не осталось возможности сделать ход. Какое наибольшее количество ходов могло быть сделано к этому моменту?

Решение. Заметим, что карточка с числом 1 недвижима. Карточка с числом 2 может быть передвинута на место только в соседнюю справа ячейку с числом 1, то есть может быть передвинута не более одного раза. По индукции очевидно, что карточка с числом k может быть передвинута не более $k-1$ раз. Отсюда число движений не превосходит суммы $1+2+\ldots+999 = 499500$. Из сказанного ясно, как реализовать это число движений: разложим карточки в порядке возрастания на первые 1000 нечётных мест. Двигать будем так. Сначала сдвинем 1000, затем 999, а следом снова 1000, далее $998, 999, 1000$; $997, 998, 999, 1000$; $\ldots$. В результате получим искомое число движений.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НГУ ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

2-4 курсы

1. Пусть для дважды дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f выполнены условия $|f'(a)| = |f(b)|$, $|f'(b)| = |f(a)|$ и $f'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Докажите, что уравнение $f(x) + f''(x) = 0$ имеет корень в (a, b).

Решение. Рассмотрим функцию $h(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$. Так как $h(a) = h(b)$, то то по теореме Ролля найдётся точка $c \in (a, b)$, в которой $h'(c) = 2f(c)f'(c) + 2f'(c)f''(c) = 0$. Сократив на $2f'(c) \neq 0$, получим требуемый результат.

2. Могут ли сходиться оба интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ для некоторой непрерывной функции $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$?

Решение. Если оба интеграла сходятся, то из неравенства Коши-Буняковского получим

$$x - \varepsilon = \int\limits_{\varepsilon}^{x} \sqrt{f(t)}\sqrt{\frac{1}{f(t)}}\,dt \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{x} f(t)\,dt \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{x} \frac{1}{f(t)}\,dt.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $x \to \infty$, получим противоречие.

3. Пусть $a_n > 0$ убывающая последовательность. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2^n}$.

Решение. Пусть $f(x)$ непрерывная функция, для которой $f(n) = a_n \, (n \in \mathbb{N})$. Такая функция существует - нас устроит простое соединение точек прямолинейными отрезками. В силу монотонности сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2^n}$ равносильна сходимости интеграла $I = \int\limits_1^{\infty} f(2^x)\,dx$. Подстановкой $t = 2^x$ получим $I = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \int\limits_2^{\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,dt$. Так как положительная функция $\frac{f(t)}{t}$ убывает, то сходимость интеграла I равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

4. Пусть $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{n+2}$. Докажите сходимость этой последовательности и найдите её предел.

Решение. Если сходимость есть, то переходя к пределу, получим, что он равен корню уравнения $x = \sqrt{x}$ то есть равен либо нулю либо единице. Если все $a_n < 1$, то $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{n+2} > a_n + \frac{1}{n+2} \Rightarrow a_3 > a_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ — противоречие. Следовательно есть n, для которого $a_n \geqslant 1$, но тогда из рекуррентности очевидно, что и все последующие больше единицы. Если найдётся n, для которого $a_{n+1} \leqslant a_n$, то $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \frac{1}{n+3} \leqslant \sqrt{a_n} + \frac{1}{n+2} = a_{n+1}$, то есть последовательность убывает, следовательно предел есть и тогда он равен единице. Если такого n нет, то последовательность строго возрастает. Тогда $0 < a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} - a_n + \frac{1}{n+2}$, то есть $\sqrt{a_n}$ удовлетворяет квадратному неравенству $x^2 - x - \frac{1}{n+2} < 0$, следовательно последовательность a_n ограничена. В таком случае у неё есть предел и он больше единицы, а это невозможно. Таким образом, осталась единственная возможность — предел есть и он равен 1.

5. Найдите все действительные числа λ, для которых существует ненулевой многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющий тождеству

$$(1 - x)p(x + 1) + (1 + x)p(x - 1) + \lambda p(x) = 0.$$

Решение. Очевидно отображение $L : p(x) \to L[p](x) = (x-1)p(x+1) - (x+1)p(x-1)$ линейно в пространстве всех многочленов. Отсюда требуемое λ является собственным числом линейного оператора L. Имеем

$$L[1] = -2, L[x] = 0, L[x^k] = 2(k-1)x^k + q(x),$$

где $q(x)$ - многочлен степени, меньшей k. Поэтому оператор L, ограниченный на подпространство $\mathbb{R}_n[x]$ в базисе $1, \ldots, x^n$ имеет треугольную матрицу с диагональю $(-2, 0, 2, \ldots, 2(n-1))$. Поскольку для каждого собственного числа существует собственный вектор, то

Ответ: чётные числа, не меньшие $\geqslant -2$.