Программа спецкурса «Алгебра-3»
Новосибирский государственный университет
Кафедра Алгебры и математической логики

д.ф.-м.н. Колесников П. С.
2012–2013

Специальный курс «Алгебра-3» предназначен для студентов и аспирантов механико-математического факультета, желающих освоить ряд вопросов теории групп, колец и полей, не входящих в стандартный обязательный курс высшей алгебры. Рассматриваемый в рамках курса материал носит общий характер и будет полезен начинающим исследователям в области алгебры, математической логики и информатики. Материал курса включает в себя определения, результаты и методы теории групп, полей и ассоциативных колец, знание которых необходимо в теории групп, теории алгоритмов, теории алгебр Ли и других областях алгебры. Основной целью освоения дисциплины является расширение базовых знаний о строении групп, колец и полей, а также о методах, применяемых в этих областях алгебры.

Целью курса является освоение следующих навыков

— умение ориентироваться в базовых понятиях и конструкциях теории групп, колец и полей, а также универсальной алгебры;
— знание основных теорем, относящихся к рассматриваемым областям;
— умение применять технические приемы в изученных областях алгебры;
— умение находить и использовать информацию по проблемам, рассмотренным в настоящем курсе, в печатных и электронных источниках

Спецкурс включает в себя следующие разделы

I. **Алгебраические системы, многообразия**
   1. Алгебры и гомоморфизмы, операторы замыкания на множестве.
   2. Свободные алгебры.
   3. Тождества и многообразия, теорема Биркгофа о многообразиях.

II. **Решетки**
   1. Основные понятия и базовые факты о решетках. Примеры решеток.
   2. Дистрибутивные решетки, теорема о вложении дистрибутивной решетки в решетку множеств.
   3. Модулярные решетки. Теорема о композиционных рядах.

4. Прямые разложения в модулярных решетках. Теорема Шмидта — Оре.
5. Алгебраические решетки. Теорема Биркгофа — Фринка.

III. **Булевы алгебры**
1. Конгруэнции булевых алгебр и булевы кольца.
2. Теорема Стоуна о строении конечно-порожденных булевых алгебр.
3. Фильтры и ультрафильтры на булевых алгебрах.
4. Булевы топологические пространства, двойственность Стоуна.

IV. **Свободные (полу)группы и кольца**
1. Конструкция свободной группы и свободного моноида. Конгруэнции полугрупп.
2. Определяющие соотношения для полугрупп, переписывающие правила, лемма о ромбе (Diamond lemma).
3. Свободная группа как образ свободной полугруппы. Определяющие соотношения для групп. Примеры: группа кватернионов и группа диэдра, HNN-расширения групп.
4. Теорема Нильсена — Шрайера.
5. Свободное некоммутативное кольцо и свободная ассоциативная алгебра над полем. Определяющие соотношения.

V. **Представления групп**
1. Действие группы на множестве, линейные представления групп.
2. Неприводимые представления, теорема Машке и лемма Шура.
3. Характеры представлений групп, соотношения ортогональности.
4. Регулярный характер и его разложение.
5. Вычисление таблиц характеров неприводимых представлений для групп S_4, D_n и A_5.

VI. **Представления колец**
1. Модули над ассоциативными кольцами и алгебрами. Артиновы и нетеровы кольца и модули, теорема Гильберта о базисе.
2. Модули над евклидовыми кольцами. Строение конечно-порожденных абелевых групп.
3. Радикал кольца. Теорема Веддерберна — Артина.
4. Тензорное произведение простых центральных алгебр. Теорема Нетер — Сколема.

5. Максимальные подполя. Теоремы Фробениуса и Веддерберна (о конечном теле).
6. Системы факторов, скрещенные произведения, группа Брауэра.

VII. **Алгебры Ли. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта**

1. Определение и примеры алгебр Ли.
2. Полупростота, разрешимость, нильпотентность.
3. Теоремы Энгеля, Ли и Мальцева.
4. Универсальные обертывающие и теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Примеры задач для самостоятельной работы

(1) Привести пример конечно-порожденной алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что некоторый ее образ относительно гомоморфизма с нетривиальным ядром изоморфен самой $\mathfrak{A}$.

(2) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра над полем F. F-линейное отображение $d : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ называется *дифференцированием* алгебры $\mathfrak{A}$, если $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ для любых $a, b \in \mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *дифференциально простой*, если у нее есть такое дифференцирование d, что в $\mathfrak{A}$ нет ненулевых собственных идеалов, инвариантных относительно J. Опишите конечномерные дифференциально простые алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

(3) Покажите, что для любого левого идеала I алгебры $\mathcal{R} = \mathbb{M}_n(D)$, где D — алгебра с делением над полем F, существует такой элемент $e = e^2 \in \mathcal{R}$, что $I = \mathcal{R}e$.

(4) Пусть D — алгебра с делением над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ такая, что $\dim_{\mathbb{R}} D = 4$. Покажите, что D изоморфна алгебре кватернионов

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k,$$

где

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(5) Пусть $\mathfrak{A}$ — простая центральная конечномерная алгебра над полем F. Докажите, что $\mathfrak{A} \otimes_F \mathfrak{A}^{op}$ изоморфна алгебре матриц над F.

(6) При каких условиях на квадратичную форму f алгебра Клиффорда $\mathfrak{C}(n, f)$ над алгебраически замкнутым полем F является простой?

(7) Приведите пример алгебры, не являющейся простой, но имеющей точное неприводимое представление (являющейся *примитивной*). Опишите коммутативные примитивные алгебры.

(8) Доказать теорему Веддерберна для простой алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей левых идеалов: для любой последовательности

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots, I_k \lhd_l \mathfrak{A},$$

найдется n такое, что $I_n = I_{n+1} = \ldots$.

(9) Доказать, что радикал Джекобсона J удовлетворяет формальным свойствам радикала, т.е. (1) $J(J(\mathfrak{A})) = J(\mathfrak{A})$, (2) $J(\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A})) = \{0\}$, (3) $(J(A) + I)/I \subseteq J(A/I)$ для любого $I \lhd \mathfrak{A}$.

(10) Пусть $\mathfrak{A} \in \mathrm{Alg}_F$, $I \neq 0$ — идеал в $\mathfrak{A}$. Показать, что $\mathfrak{A}$ может быть изоморфно $\mathfrak{A}/I$. Предложить какие-нибудь достаточные условия на алгебру $\mathfrak{A}$, чтобы такого изоморфизма заведомо не существовало.

(11) Пусть $\mathfrak{A} \in \mathrm{Alg}_F$ — конечномерная алгебра без делителей нуля, а F — алгебраически замкнутое поле. Показать, что $\mathfrak{A} = F$.

(12) Доказать, что если $\mathfrak{A} \in \mathrm{Alg}_F$ — простая алгебра, то алгебра матриц $M_n(\mathfrak{A})$ — тоже простая.

(13) Укажите базис *алгебры Вейля* W_n над полем F, где

$$W_n = \mathrm{Alg}_F^{\#}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \mid S\rangle,$$

$$S = \{x_i x_j - x_j x_i,\ y_i y_j - y_j y_i,\ y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij} 1 : i, j = 1, \ldots, n\},$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Является ли эта алгебра простой?

(14) Описать свободную алгебру многообразия с двумя ассоциативными бинарными операциями $\cdot$ и $*$ такими, что $x_1 * x_2 \approx x_2 * x_1$, $(x_1 * x_2)x_3 \approx (x_1 x_3) * (x_2 x_3)$ и $x_1(x_2 * x_3) \approx (x_1 x_2) * (x_1 x_3)$.

(15) Привести алгоритм решения проблемы равенства для полугруппы $\mathrm{Smg}\langle X \mid S\rangle$, где $X = \{x, y, z\}$, $S = \{\langle xy, yx\rangle, \langle yz, zy\rangle\}$.

(16) Сформулировать и доказать аналог универсального свойства полугруппового кольца $\mathfrak{A}^{\oplus}$ на кольцо $\mathbb{Z}\mathfrak{A}$.

(17) Сформулировать строго и доказать утверждение: свободная группа получается из свободной полугруппы "добавлением единичного и обратных элементов".

(18) Найти минимальное множество порождающих элементов и семейство определяющих соотношений для полугрупп $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ и для группы S_3.

(19) Доказать, что если $\mathrm{Gr}\langle X_1 \rangle \simeq \mathrm{Gr}\langle X_2 \rangle$, то $|X_1| = |X_2|$ (*ранг* свободной группы).

(20) Доказать, что $\mathrm{Gr}\langle x, y \rangle$ содержит свободную подгруппу любого не более чем счетного ранга.

(21) *Коммутантом группы* G называется подгруппа $[G, G]$, порожденная всевозможными элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$. Указать какое-нибудь множество свободных порождающих для коммутанта свободной группы $G = \mathrm{Gr}\langle X \rangle$.

(22) *Группа диэдра* D_n — это группа всех движений (преобразований, сохраняющих расстояния и углы) плоскости, оставляющих на месте некоторый правильный n-угольник. Найти определяющие соотношения этой группы.

(23) Найти определяющие соотношения для группы унитреугольных матриц размера 3×3 над кольцом $\mathbb{Z}$,

$$UT_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Список литературы

1. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.* М.: Наука, 1976.

2. Винберг Э.Б. *Курс алгебры.* М.: Факториал Пресс, 2001.

3. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* М.: Мир, 1964.

4. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры алгебры.* М.: Физматлит, 2000.

5. Ленг С. *Алгебра.* М.: Мир, 1968.

6. Мальцев А.И. *Алгебраические системы.* М.: Наука, 1970.

7. Скорняков Л.А. *Элементы общей алгебры.* М.: Наука, 1983.

8. Херстейн И. *Некоммутативные кольца.* М.: Мир, 1972.