

# Программа курса высшей алгебры

Лектор: проф. Васильев А.В.

2012–13 учебный год

1 семестр

## 1. Введение

Алгебраическая операция, алгебраическая система, сужение операции на подмножество, подсистема, изоморфизм (КОС, гл. 4, § 1; ВДВ, § 9).

## 2. Группы, кольца, поля

Группа, кольцо, поле: аксиомы, примеры, элементарные свойства, кольцо вычетов (ВДВ, § 6, 11, 12; КУР, § 63, 64, 43-45; ВИН, гл. 1, § 3, 6). Группа подстановок: проверка аксиом, разложение подстановки в произведение циклов, декремент, четность, разложение в произведение транспозиций, четность произведения, знакопеременная группа (КОС, гл. 4, § 2). Кольцо квадратных матриц: проверка аксиом (М, § 1), разложение матрицы в произведение элементарных и диагональной матриц. Определитель, его поведение при простейших преобразованиях. Определитель произведения матриц. Разложение определителя по строке (столбцу) (КУР, § 4-6). Обратная матрица: существование, вычисление, решение линейных матричных уравнений (М, § 2). Поле комплексных чисел: существование, единственность. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа. (КОС, гл. 5, § 1; КУР, § 46; ВИН, гл. 1, § 5).

## 3. Векторные пространства

Векторное пространство над полем: аксиомы, примеры, понятие подпространства. Алгебра и подалгебра над полем: примеры (КУР, § 9, 29; М, § 4; ВИН, гл. 1, § 7, 8). Базис и размерность векторного пространства: линейные комбинации, линейная зависимость, эквивалентные наборы векторов, теорема о замене и ее следствия, базис пространства, размерность, координаты, изоморфизм пространств. Матрица перехода, ее невырожденность, связь между координатами в разных базах (КУР, § 9, 29, 30; М, § 4, 5; ВИН, гл. 1, § 7, гл. 2, § 2). Подпространство, базис, согласованный с подпространством, взаимное расположение подпространств, сумма и пересечение подпространств, связь между их размерностями, прямая сумма (М, § 6; ВИН, гл. 5, § 1).

## 4. Системы линейных уравнений

Ранг матрицы: ранг набора векторов, строчный и столбцовый ранги матрицы, минор, минорный ранг, теорема о совпадении трех рангов, вычисление ранга приведением матрицы к ступенчатому виду, ранг суммы и произведения матриц (КУР, § 10; М, § 5; ВИН, гл. 2, § 1). Система линейных уравнений: векторная и матричная формы, критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера — Капелли), общее решение и метод Гаусса его поиска, системы линейных уравнений с ненулевым определителем, формулы Крамера (КУР, § 1, 7; М, § 5; ВИН, гл. 2, § 1). Однородные системы: пространство решений, фундаментальный набор решений, связь между однородными и неоднородными системами, теорема Фредгольма (КУР, § 11, 12; М, § 5).

## 5. Кольца многочленов

Многочлены от одной переменной: определение, кольцо многочленов над кольцом и полем, степень суммы и произведения многочленов (КУР, § 20; ВИН, гл. 3, § 1). Делимость в кольце многочленов: деление с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида, взаимно простые многочлены, неразложимые многочлены, разложение на неразложимые множители (КУР, § 21, 48; ВИН, гл. 3, § 5). Значения и корни многочленов: теорема Безу, теорема о числе корней, интерполяционный многочлен Лагранжа, кратные корни, характеристика поля, производная и ее приложения к многочленам, формула Тейлора, интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестра (КУР, § 22, М, § 16.3; ВИН, гл. 3, § 2). Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, элементарные свойства, лексикографическое упорядочение одночленов, старший одночлен, симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах (КУР, § 51-52; ВИН, гл. 3, § 7, 8). Теорема о существовании корня многочлена в расширении поля и ее следствия: разложение на линейные множители в расширении поля, формулы Виета (КУР, § 49). Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел (КУР, § 55). Разложимость многочлена над полем рациональных чисел: сведение к многочленам с целочисленными коэффициентами, признак неразложимости над кольцом целых чисел и существование неразложимого многочлена произвольной степени, алгоритмическая разрешимость проблемы разложения многочлена над полем рациональных чисел (КУР, § 56-57; ВИН, гл. 3, § 6). Оценка числа действительных корней: границы корней, ряд Штурма и теорема Штурма (КУР, § 39, 40).

## 2 семестр

### 6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейное преобразование (ЛП) и его матрица. Координаты образа, связь между матрицами ЛП в разных базах, подобные матрицы. Операции над ЛП, изоморфизм алгебраической системы ЛП и алгебры матриц (М, § 8,9). Ядро и образ ЛП, невырожденные ЛП (М, § 10; Ч). Инвариантное пространство, ограничение на нем ЛП. Собственные векторы и собственные значения, характеристический многочлен (М, § 11, Ч). Корневые подпространства, разложение в прямую сумму корневых подпространств. Нильпотентное ЛП, разложение в прямую сумму циклических подпространств. Жорданова база пространства. Жорданова форма матрицы (Ч; КОС: Дополнение; ВИН, гл. 6, § 4). Многочлены от матриц и линейных преобразований. Минимальный аннулирующий многочлен, теорема Гамильтона — Кэли, теорема о ядерном разложении. Функции от матриц и линейных преобразований, представления их значений значениями многочленов (Ч; М, § 16).

### 7. Евклидовы и унитарные пространства и их линейные преобразования

Евклидовы и унитарные пространства: аксиомы, примеры. Процесс ортогонализации, ортонормированные базы, ортогональное дополнение к подпространству. Сопряженные преобразования: связь между матрицами. Нормальные преобразования, свойство их собственных векторов, канонический вид матрицы нормального преобразования в унитарном и евклидовом пространстве. Унитарные, ортогональные и

самосопряженные преобразования, их матрицы, канонический вид унитарного, ортогонального и самосопряженного преобразований. Неотрицательные самосопряженные преобразования, сингулярные числа, полярное и сингулярное разложение матрицы (М, § 17-20).

## 8. Квадратичные формы

Матрица квадратичной формы, ее изменение при линейной замене. Алгоритм Лагранжа приведения к диагональному виду. Нормальная форма вещественной квадратичной формы, закон инерции квадратичных форм. Приведение к главным осям. Положительно определенные квадратичные формы и одновременная диагонализация двух форм (М, § 22-23; КУР, §26-28).

## 9. Элементы теории групп

Группы и их подгруппы: примеры. Порождающее множество и циклическая подгруппа. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы и теорема Лагранжа. Сопряженные элементы, коммутаторы, нормальные подгруппы и фактор-группы. Теоремы о гомоморфизмах. Прямые произведения групп, связь между двумя определениями. Разложение циклической группы конечного порядка в прямое произведение примарных подгрупп. Действие группы на множестве. Стабилизатор и орбита, связь между их порядками. Теорема Бернсайда о количестве орбит и ее применение к задаче о раскраске тетраэдра. (КУР, гл. 14; ВИН, гл. 4 и гл. 10 § 1,3; КМ, § 1-2, 4, 11; ВДВ, гл. 2).

## Литература

- [ВДВ] Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. - М.:Наука, 1976.
- [ВИН] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. - М.: Факториал Пресс, 2002.
- [КМ] М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. - М.:Наука, 1982.
- [КОС] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. - М.:Наука, 1977.
- [КУР] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. - М.:Наука, 1968.
- [М] А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. - М.:Наука, 1970.
- [Ч] В. А. Чуркин. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов. - Новосибирск: НГУ, 1991.