

АЛГЕБРА-3

2013-2014

Лектор – проф. НГУ д.ф.-м.н. А. П. Пожидаев

I. Алгебраические системы, многообразия

1. Алгебры и гомоморфизмы, прямые и полупрямые произведения.
2. Свободные алгебры.
3. Тожества и многообразия, теорема Биркгофа о многообразиях.

II. Решетки

1. Основные понятия и простейшие свойства решеток.
2. Дистрибутивные решетки, теорема о вложении дистрибутивной решетки в решетку множеств.
3. Модулярные решетки. Теорема о композиционных рядах.
4. Прямые разложения в модулярных решетках. Теорема Шмидта-Оре.
5. Алгебраические решетки. Теорема Биркгофа-Фринка.

III. Булевы алгебры

1. Конгруэнции булевых алгебр и булевы кольца.
2. Теорема Стоуна о строении конечно-порожденных булевых алгебр.
3. Фильтры и ультрафильтры на булевых алгебрах.
4. Булевы топологические пространства, двойственность Стоуна.

IV. Свободные (полу)группы и кольца

1. Конструкция свободной группы и свободного моноида. Конгруэнции полугрупп.
2. Определяющие соотношения для полугрупп, переписывающие правила, лемма о ромбе (Diamond lemma).
3. Свободная группа как образ свободной полугруппы. Определяющие соотношения для групп. Группа кватернионов и группа диэдра, HNN-расширения групп.
4. Теорема Нильсена-Шрайера.
5. Свободное некоммутативное кольцо и свободная ассоциативная алгебра над полем. Определяющие соотношения.

V. Представления групп и колец

1. Действие группы на множестве, линейные представления групп, неприводимые представления.
2. Характеристики представлений групп, соотношения ортогональности.
3. Регулярный характер и его разложение.
4. Модули над ассоциативными кольцами и алгебрами, теорема Гильберта о базисе.
5. Модули над евклидовыми кольцами. Строение конечно порожденных абелевых групп.

VI. Алгебры Ли. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта

1. Определение и примеры алгебр Ли.
2. Полупростота, разрешимость, нильпотентность.
3. Теоремы Энгеля, Ли и Мальцева.
4. Универсальные обертывающие и теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Библиографический список

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
3. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
5. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
6. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
7. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
8. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.