ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 2000 г.

ВАРИАНТ 1.1.

1. Доказать существование производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x,y)$ в точке (x_0,y_0), где $u(x_0,y_0)=0$, $v(x_0,y_0)=1$, если

$$\begin{cases} x=u+uv+v^2, \\ y=v-u^2, \\ z=2u+\ln v. \end{cases}$$

Найти эти производные.

2. Найти все плоские кривые второго порядка из R^3, инвариантные относительно линейного преобразования $\varphi: x \mapsto Ax$, $x\in R^3$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 2 & -4/3 \\ 2 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$$

по линии, центр которой находится в точке $(4,4,3)$.

ВАРИАНТ 1.2.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+y^2+z^2\right)^4 \le z\left(\frac{x^4}{a^4}+y^4\right).$$

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\gamma \frac{z}{(z+\sqrt{z^2-1})(z^2-9)}dz, \quad \gamma=\{z:\ |z|=2\},$$

где интегрирование ведется в положительном направлении относительно нуля, а ветвь корня на γ выделяется исходя из условия $\sqrt{z^2-1}|_{z=2}=\sqrt{3}$.

6. При каких вещественных параметрах α, β, γ все решения системы

$$\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} \alpha\cos^2(3t)+\beta \\ \gamma\sin(6t) \end{pmatrix}$$

ограничены на числовой оси $-\infty<t<\infty$?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 2000 г.

ВАРИАНТ 2.1.

1. Доказать существование производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x,y)$ в точке (x_0,y_0), где $u(x_0,y_0)=0$, $v(x_0,y_0)=1$, если

$$\begin{cases} x = 10u + 20uv + v^2, \\ y = 7u^2 + 13v, \\ z = \sin(uv). \end{cases}$$

Найти эти производные.

2. Найти все плоские кривые второго порядка из R^3, инвариантные относительно линейного преобразования $\varphi : x \mapsto Ax$, $x \in R^3$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 3/2 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$$

по линии, центр которой находится в точке $(1,1,1)$.

ВАРИАНТ 2.2.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$\left(\frac{x^2}{b^2} + y^2 + z^2\right)^2 \le a^2\left(\frac{x^2}{b^2} + y^2 - z^2\right).$$

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{(z-i)}{\sqrt{z^2-1}(z^2+9)}dz, \quad \gamma = \{z : \ |z| = 2\},$$

где интегрирование ведется в положительном направлении относительно нуля, а ветвь корня на γ выделяется исходя из условия $\sqrt{z^2-1}|_{z=2i} = i\sqrt{5}$.

6. При каких вещественных параметрах α, β, γ все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \alpha\sin^2(2t) \\ \beta\sin(3t)\cos(t) + \gamma \end{pmatrix}$$

ограничены на числовой оси $-\infty < t < \infty$?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 2000 г.

ВАРИАНТ 3.1.

1. Доказать существование производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x,y)$ в точке (x_0,y_0), где $u(x_0,y_0)=0$, $v(x_0,y_0)=1$, если

$$\begin{cases} x = 9u + 8uv + 7v^2, \\ y = 3v - u^2, \\ z = e^{u+v}. \end{cases}$$

Найти эти производные.

2. Найти все плоские кривые второго порядка из R^3, инвариантные относительно линейного преобразования $\varphi : x \mapsto Ax$, $x \in R^3$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 & 3 \\ -4/3 & 3 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 2z$$

по линии, центр которой находится в точке $(1,3,5)$.

ВАРИАНТ 3.2.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{c^2} + z^2\right)^2 \le a^2\left(x^2 + \frac{y^2}{c^2}\right).$$

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{\sqrt{z^2 - z + 1}(z+4)} dz, \quad \gamma = \{z : \ |z| = 2\},$$

где интегрирование ведется в положительном направлении относительно нуля, а ветвь корня на γ выделяется исходя из условия $\sqrt{z^2 - z + 1}|_{z=2} = \sqrt{3}$.

6. При каких вещественных параметрах α, β, γ все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \alpha \sin(6t) \\ \beta \sin^2(3t) + \gamma t \end{pmatrix}$$

ограничены на числовой оси $-\infty < t < \infty$?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 2000 г.

ВАРИАНТ 4.1.

1. Доказать существование производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x,y)$ в точке (x_0,y_0), где $u(x_0,y_0)=0$, $v(x_0,y_0)=1$, если

$$\begin{cases} x = 3u+10uv+6v^2, \\ y = 3v-5u^2, \\ z = \cos(u+v). \end{cases}$$

Найти эти производные.

2. Найти все плоские кривые второго порядка из R^3, инвариантные относительно линейного преобразования $\varphi : x \mapsto Ax$, $x \in R^3$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3/2 & -5/4 \\ 0 & -3/2 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

3. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 2z$$

по линии, центр которой находится в точке $(3,5,1)$.

ВАРИАНТ 4.2.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + y^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^4 \leq y\left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{z^4}{c^4}\right).$$

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{\sqrt{z^2-2z+2}(z+5)} dz, \quad \gamma = \{z:\ |z|=2\},$$

где интегрирование ведется в положительном направлении относительно нуля, а ветвь корня на γ выделяется исходя из условия $\sqrt{z^2-2z+2}|_{z=2} = \sqrt{2}$.

6. При каких вещественных параметрах α, β, γ все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \alpha\sin^2(4t)+\gamma \\ \beta\sin(5t)\cos(3t) \end{pmatrix}$$

ограничены на числовой оси $-\infty < t < \infty$?