ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

В А Р И А Н Т 1.1

1. Найти точки условного экстремума функции $w = x^2 + y^2 + z^2$, если $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где a, b, c — положительные вещественные числа.

2. Пространство V косоэрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом можно считать евклидовым, если квадрат "длины" матрицы X из V по определению равен $\det X$. Доказать, что оператор $\Phi : \ X \to AXA^{-1}$ ортогонален при $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$. Найти спектр Φ, канонический вид его матрицы и дать геометрическое описание оператора.

3. Найти коэффициент $a \neq 0$ в уравнении поверхности $\alpha : \frac{x^2}{a^2} + y^2 + 2z^2 = 1$, если известно, что поверхность α касается плоскости $x + 2y + 6z + 5 = 0$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

В А Р И А Н Т 1.2

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — евклидов шар с центром в 0. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_B \frac{dx}{\left(\max\limits_{i=1,2,3} |x_i|\right)^p}$$

в зависимости от p.

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^4 - 4iz^3 - 3z^2 - 4iz - 4},$$

где $\Gamma : y = x^2 + 1$.

6. Построить непродолжаемое решение задачи

$$\begin{aligned} &y' = |3y - 2t|, \\ &y|_{t=0} = \tfrac{1}{9}. \end{aligned}$$

Указать интервал существования непродолжаемого решения.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. Найти точки условного экстремума функции $w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, где a, b, c — ненулевые вещественные числа.

2. Пространство V косоэрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом можно считать евклидовым, если квадрат "длины" матрицы X из V по определению равен $\det X$. Доказать, что оператор $\Phi : \ X \to AXA^{-1}$ ортогонален при $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}$. Найти спектр Φ, канонический вид его матрицы и дать геометрическое описание оператора.

3. Найти коэффициент $b \neq 0$ в уравнении поверхности $\alpha : \ x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 + 3z^2$, если известно, что поверхность α касается плоскости $4x + y + 9z + 1 = 0$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — евклидов шар с центром в 0. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \frac{dx}{\left(\max\limits_{i=1,2,3} |x_i|\right)^p}$$

в зависимости от p.

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 - iz^3 + 3z^2 - iz + 2},$$

где $\Gamma : y = \operatorname{arctg} x + 1$.

6. Построить непродолжаемое решение задачи

$$\begin{aligned} y' &= |y + t|, \\ y|_{t=0} &= -1. \end{aligned}$$

Указать интервал существования непродолжаемого решения.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. Найти точки условного экстремума функции $w = xy^2z^3u^4$, если $x+y+z+u=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $u \geq 0$.

2. Пространство V косоэрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом можно считать евклидовым, если квадрат "длины" матрицы X из V по определению равен $\det X$. Доказать, что оператор $\Phi : \ X \to AXA^{-1}$ ортогонален при $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix}$. Найти спектр Φ, канонический вид его матрицы и дать геометрическое описание оператора.

3. Найти коэффициент $a \neq 0$ в уравнении поверхности $\alpha :\ \frac{x^2}{a^2} + 3y^2 = 2z$, если известно, что поверхность α касается плоскости $2x+6y+2z+11 = 0$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — евклидов шар с центром в 0. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_B \frac{dx}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} |x_i|\right)^p}$$

в зависимости от p.

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^4 - 8iz^3 - 15z^2 - 8iz - 16},$$

где $\Gamma : y = (x-1)^2$.

6. Построить непродолжаемое решение задачи

$$\begin{aligned} &y' = |t - 2y|, \\ &y|_{t=0} = -1. \end{aligned}$$

Указать интервал существования непродолжаемого решения.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

В А Р И А Н Т 4.1

1. Найти точки условного экстремума функции $w = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

2. Пространство V косоэрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом можно считать евклидовым, если квадрат "длины" матрицы X из V по определению равен $\det X$. Доказать, что оператор $\Phi: \; X \to AXA^{-1}$ ортогонален при $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}$. Найти спектр Φ, канонический вид его матрицы и дать геометрическое описание оператора.

3. Найти коэффициент $b \neq 0$ в уравнении поверхности $\alpha: \; 5x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, если известно, что поверхность α касается плоскости $15x+y+2z+3 = 0$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2005 г.)

В А Р И А Н Т 4.2

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — евклидов шар с центром в 0. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \frac{dx}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} |x_i|\right)^p}$$

в зависимости от p.

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 - 6iz^3 - 8z^2 - 6iz - 9},$$

где $\Gamma : y = e^x$.

6. Построить непродолжаемое решение задачи

$$\begin{aligned} &y' = |y + 2t|, \\ &y|_{t=0} = -2. \end{aligned}$$

Указать интервал существования непродолжаемого решения.