ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
ВАРИАНТ 1.1

1. Найти супремум функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln x_1 + 2\ln x_2 + \ln x_3$$

при условии, что переменные x_1, x_2, x_3 положительны и удовлетворяют условиям $0 < x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8$ и $x_2 \leq 1$.

2. Известно, что квадратичная форма $q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, сохраняется при замене переменных с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти все такие квадратичные формы и их канонический вид в главных осях.

3. Цилиндр C задан своим сечением $(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 1$ с плоскостью $z = 0$ и направлением $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямолинейных образующих. При каком значении параметров α, β, γ поверхность $x^2 + 3y^2 + (z-1)^2 = 1$ и цилиндр C имеют бесконечно много общих диаметральных плоскостей? Найти уравнение цилиндра C для этих направлений.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
ВАРИАНТ 1.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C 2y\,dz + \frac{x}{y^2+1}\,dy + \operatorname{arctg} y\,dx,$$

где контур C, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z, задан системой уравнений $x = \sqrt{z - y^2}$, $z^2 + y^2 = 4z - 3$.

5. Найти область аналитичности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2 + z^2}.$$

6. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - 2\mu(x')^2 + 4x = 4t, \\ x|_{t=0} = 0, \\ x'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 2.1

1. Найти супремум функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln x_1 + 2\ln x_2 + 3\ln x_3$$

при условии, что переменные x_1, x_2, x_3 положительны и удовлетворяют условиям $0 < 2x_1 + x_2 + x_3 \le 3$ и $x_3 \le 1$.

2. Известно, что квадратичная форма $q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, сохраняется при замене переменных с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все такие квадратичные формы и их канонический вид в главных осях.

3. Цилиндр C задан своим сечением $(x-1)^2 - 2(y-1)^2 = 2$ с плоскостью $z = 0$ и направлением $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямолинейных образующих. При каком значении параметров α, β, γ поверхность $x^2 + 3y^2 = 1 + (z-1)^2$ и цилиндр C имеют бесконечно много общих диаметральных плоскостей? Найти уравнение цилиндра C для этих направлений.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 2.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \arcsin x\, dz + (x + y^2)\, dy + \frac{z}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

где контур C, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z, задан системой уравнений $x = \sqrt{z - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2y$.

5. Найти область аналитичности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+z)}.$$

6. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} x'' + 3\sin(\mu x) + x = -9t, \\ x|_{t=0} = 0, \\ x'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 3.1

1. Найти супремум функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\ln x_1 + \ln x_2 + 2\ln x_3$$

при условии, что переменные x_1, x_2, x_3 положительны и удовлетворяют условиям $0 < x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5$ и $x_1 \le 1$.

2. Известно, что квадратичная форма $q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, сохраняется при замене переменных с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти все такие квадратичные формы и их канонический вид в главных осях.

3. Цилиндр C задан своим сечением $(x-1)^2 + 5(y-1)^2 = 3$ с плоскостью $z = 0$ и направлением $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямолинейных образующих. При каком значении параметров α, β, γ поверхность $x^2 + 3y^2 = (z-1)^2 - 1$ и цилиндр C имеют бесконечно много общих диаметральных плоскостей? Найти уравнение цилиндра C для этих направлений.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 3.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \arccos x\,dz + \left(x + \frac{1}{1+y^2}\right) dy - \frac{z}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

где контур C, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z, задан системой уравнений $y = \sqrt{z + x^2}$, $x^2 + y^2 = 2y$.

5. Найти область аналитичности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}.$$

6. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} x'' + 2\mu(x')^2 + 16x = -16t, \\ x|_{t=0} = 0, \\ x'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 4.1

1. Найти супремум функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3\ln x_1 + \ln x_2 + 2\ln x_3$$

при условии, что переменные x_1, x_2, x_3 положительны и удовлетворяют условиям $0 < 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12$ и $x_1 \le 3/2$.

2. Известно, что квадратичная форма $q(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^2$, сохраняется при замене переменных с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти все такие квадратичные формы и их канонический вид в главных осях.

3. Цилиндр C задан своим сечением $2(x-1)^2 - (y-1)^2 = 4$ с плоскостью $z = 0$ и направлением $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямолинейных образующих. При каком значении параметров α, β, γ поверхность $3x^2 - y^2 = 1 + (z-1)^2$ и цилиндр C имеют бесконечно много общих диаметральных плоскостей? Найти уравнение цилиндра C для этих направлений.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2014 г.)
В А Р И А Н Т 4.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \left(3x + \frac{1}{z^2+1}\right) dz + \frac{xy}{\sqrt{y^2-1}}\, dy + \sqrt{y^2-1}\, dx,$$

где контур C, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z, задан системой уравнений $y = \sqrt{z + x^2}$, $z^2 + x^2 = 2z$.

5. Найти область аналитичности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}.$$

6. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - 3\sin(\mu x) + 9x = 27t, \\ x|_{t=0} = 0, \\ x'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.