

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики

**Е. А. БАТЯЕВ**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Курс лекций

Новосибирск 2013

ББК В21я73-4

УДК 531

Б 289

Батяев Е. Ф. Теоретическая механика: Курс лекций/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 180 с.

Данная разработка основана на курсе лекций дисциплины «Теоретическая механика», входящей в базовую часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра по направлению подготовки «Математика», профиля «Математика и прикладная математика».

Курс лекций представляет собой строгое, комплексное и компактное изложение основных задач, подходов и методов теоретической механики. Её отличие от существующих курсов лекций заключается как в подборе материала, так и в способе его изложения. Основное внимание уделено рассмотрению наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов динамики и методов аналитической механики; статика изучается как раздел динамики, кинематические выражения приведены в объеме необходимом для исследования задач динамики. Некоторые методические идеи и подходы являются новыми в учебной практике.

Данная разработка призвана помочь студентам в освоении дисциплины – получить более полные знания по фундаментальным основам механики, понять основные закономерности движения и взаимодействия материальных тел, научиться применять полученные сведения, модели и методы для изучения и объяснения природных явлений и технических процессов.

Разработка подготовлена в рамках реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского университета.

© Новосибирский государственный университет, 2013

© Е. А. Батяев, 2013

## Содержание

<b>ЛЕКЦИЯ 1.</b> ВВЕДЕНИЕ . . . . .	5
<b>ЛЕКЦИЯ 2.</b> КРИВОЛИНЕЙНАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ . . . . .	11
<b>ЛЕКЦИЯ 3.</b> КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА . . . . .	16
<b>ЛЕКЦИЯ 4.</b> СФЕРИЧЕСКОЕ И ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА . . . . .	22
<b>ЛЕКЦИЯ 5.</b> КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ТЕЛА .	27
<b>ЛЕКЦИЯ 6.</b> ДИНАМИКА ТОЧКИ . . . . .	34
<b>ЛЕКЦИЯ 7.</b> ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ . .	40
<b>ЛЕКЦИЯ 8.</b> ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ . . .	46
<b>ЛЕКЦИЯ 9.</b> ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ .	53
<b>ЛЕКЦИЯ 10.</b> ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (МЕРЫ) ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ	61
<b>ЛЕКЦИЯ 11.</b> МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	68
<b>ЛЕКЦИЯ 12.</b> ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС . . . . .	75
<b>ЛЕКЦИЯ 13.</b> ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА . . . . .	81
<b>ЛЕКЦИЯ 14.</b> ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. РАБОТА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТЕЛУ . . . . .	88
<b>ЛЕКЦИЯ 15.</b> ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ЗАКОНЫ КУЛОНА. . . . .	94
<b>ЛЕКЦИЯ 16.</b> ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ. ВИДЫ СВЯЗЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОГРАНИЧЕНИЯ НАКЛАДЫВАЕМЫЕ СВЯЗЯМИ НА ВОЗМОЖНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, СКОРОСТИ, УСКОРЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК СИСТЕМ. . . . .	102
<b>ЛЕКЦИЯ 17.</b> ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. СИНХРОННОЕ ВАРЬИРОВАНИЕ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ . . . . .	108

<b>ЛЕКЦИЯ 18.</b> УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ). ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ . . . . .	115
<b>ЛЕКЦИЯ 19.</b> ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И СИЛЫ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. ВИРТУАЛЬНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ. . . . .	120
<b>ЛЕКЦИЯ 20.</b> УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ . . .	126
<b>ЛЕКЦИЯ 21.</b> ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ. ДИССИПАТИВНЫЕ СИЛЫ (ФУНКЦИЯ РЕЛЕЯ). НАТУРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА . . . . .	133
<b>ЛЕКЦИЯ 22.</b> ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА. ТЕОРЕМА ДОНКИНА. ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА. ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА . . .	140
<b>ЛЕКЦИЯ 23.</b> УРАВНЕНИЯ УИТТЕКЕРА И ЯКОБИ (ДЛЯ ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ). СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ. ИГНОРИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТ . . .	146
<b>ЛЕКЦИЯ 24.</b> УРАВНЕНИЯ РАУСА (ПЕРЕМЕННЫЕ И ФУНКЦИЯ РАУСА). ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА (ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ, ЦИКЛИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ) . . . . .	152
<b>ЛЕКЦИЯ 25.</b> ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА (ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ). СКОБКИ ПУАССОНА. КРИТЕРИЙ «ИНТЕГРАЛЬНОСТИ» ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЯКОБИ-ПУАССОНА. ИНВОЛЮЦИЯ. . . . .	159
<b>ЛЕКЦИЯ 26.</b> УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА(-ДИРИХЛЕ). ВЛИЯНИЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ. . . . .	164
<b>ЛЕКЦИЯ 27.</b> ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РАВНОМЕРНО ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. ПОТЕНЦИАЛ ПЕРЕНОСНОЙ (ЦЕНТРОБЕЖНОЙ) СИЛЫ ИНЕРЦИИ . . .	170
<b>ЛЕКЦИЯ 28.</b> УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ ОКОЛО УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. УРАВНЕНИЕ ЧАСТОТ. ГЛАВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ . . . . .	175

# ЛЕКЦИЯ 1

## ВВЕДЕНИЕ

**Механика** - наука о движении и взаимодействии материальных тел.

**Механическое движение** - изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основанная, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, механика может быть разделена на наблюдательную (опытную) и теоретическую.

В опытной (наблюдательной) механике устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называются силами. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, представляющих собой утверждения о свойствах материальных объектов.

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных на опыте. Эти законы принимаются за абсолютные истины, не требующие доказательств - аксиомы.

Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы, как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, теоретическая механика возводит свое здание при помощи строгих математических выводов.

Теоретическая механика, как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самыми реальными материальными объектами, а с их моделями. Такими моделями, изучаемыми в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела.

Дальнейшим развитием науки о механическом движении является изучение деформируемых сплошных сред: гидро-газодинамика, механика деформируемого твердого тела, теория упругости, теория пластичности.

**Область применимости механики:** движение макроскопических тел со скоростями, малыми сравнительно со световой (предельные случаи описываются квантовой и релятивистской механикой).



**Кинематика** - изучает движение тел с геометрической точки зрения, без исследования причин, вызывающее это действие (геометрические свойства движений).

**Кинетика** - изучает равновесие (статика) и движение (динамика) тел под действием приложенных к ним сил.

## Пространство и время

Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели - абсолютное пространство и абсолютное время, существование которых постулируется.

Абсолютное пространство и абсолютное время - считаются независимыми одно от другого (в отличие от теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны).

**Абсолютное пространство** – трехмерное, однородное и изотропное (т.е. свойства движений в каждой точке пространства и в каждом направлении - одинаковы), неподвижное евклидово (т.е. со скалярным произведением) пространство.

**Абсолютное время** – непрерывно изменяющаяся величина, она течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение, в его геометрическом представлении, имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются (например: движение в поезде, в лифте). Поэтому для удобства исследования геометрического характера движения необходимо взять вполне определенное твердое тело, т.е. тело, форма которого неизменна, и условиться считать его неподвижным. Движение (покой) всех других тел по отношению к этому телу называется абсолютным движением (покоем). В качестве неподвижного тела отсчета выбирается абсолютная система координат:

**Неподвижная (абсолютная) система координат** - это система трех не лежащих в одной плоскости осей (чаще всего взаимно ортогональных) и начало отсчета расстояний вдоль осей (выбор направления осей) (Рис. 1).

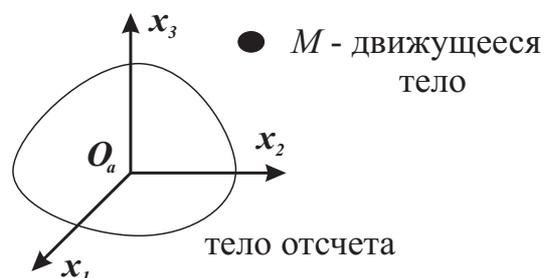


Рис. 1. Абсолютная система координат

Каждому телу  $M$  однозначно сопоставляется тройка чисел - координат:

$$M \iff (x_1, x_2, x_3)$$

Единица длины:

1 метр =  $\frac{1}{40\,000\,000}$  длины Парижского меридиана.

Если некоторый момент времени принять за начало отсчета времени, то всякий другой момент времени однозначно сопоставляется

соответствующим числом  $t$ , т.е. числом секунд прошедших между начальным и рассматриваемым моментом.

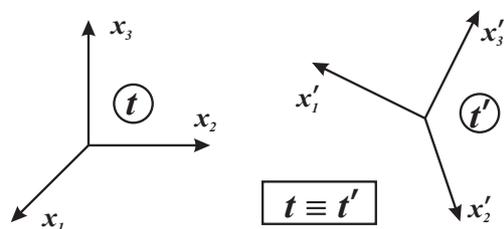


Рис. 2.

Событие  $\iff$  число  $t$

Время не зависит от выбора абсолютной системы координат (неподвижного тела) (Рис.2)

«+» - следует за начальным моментом времени (увеличивается);

«-» - предшествует начальному моменту времени (уменьшается).

**Система отсчета** - система координат + время (начало отсчета времени).

**Материальная точка** - частица материи (материальный объект) достаточно малая для того чтобы ее положение и движение можно было задать (определить) как для объекта, не имеющего размеров.

**Геометрическая точка** - объект размерами и вращением которого можно пренебречь (например как у тела протяженного объекта).

Условно: спутник в космическом пространстве - материальная точка; но его ориентация, положение антенн, солнечных батарей - случай когда нельзя избежать вращения и пренебрежения размерами.

В кинематике материальная точка отождествляется с геометрической.

**Траекторией точки** называется геометрическое место последовательных положений движущейся точки.

*Пример:* если на  $t_1 < t < t_2$  траектория - *прямая линия*, то **движение** точки называется **прямолинейным**, иначе **криволинейное**. В частности, если траектория на интервале  $t_1 < t < t_2$  находится *на окружности*, то движение называется **круговым**.

Задать движение точки - значит задать способ определения положения точки в любой момент времени.

Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движения и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин.

### Векторный способ задания движения точки

Рассмотрим движение точки  $M$  относительно некоторого тела, считаемого неподвижным. Пусть точка  $O$  - точка принадлежащая этому телу (рис. 3)



**Радиус-вектор  $\mathbf{r}$**  - движущейся точки  $M$  относительно  $O$  является направленным отрезком  $\overrightarrow{OM}$  и задается как вектор-функция времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM}$$

Рис. 3.

С течением времени конец вектора  $\mathbf{r}$  описывает траекторию точки.

**Скоростью точки  $M$ :** называется производная по времени от  $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

**Ускорением точки  $M$ :** называется производная по времени от  $\mathbf{v}(t)$  (или вторая производная по времени от радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$ )

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

### Координатный способ задания движения точки

Пусть  $Ox_1x_2x_3$  - неподвижная, декартова прямоугольная система координат (рис. 4).

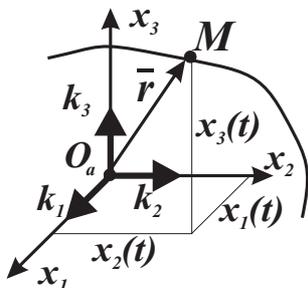


Рис. 4.

$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  - **орты** ее координатных осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . (т.е. длина  $\mathbf{k}_i$  - единица:  $|\mathbf{k}_i| = 1$  - единичные вектора).

$\{\mathbf{k}_i\}$  - **координатный базис** (3 независимых вектора),  $\{\mathbf{k}_i\}$  - **ортонормированный базис**:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j = \delta_{ij}$$

(**Скалярным произведением** 2-х векторов:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  называется скаляр (число) равно произведению модулей (длин) векторов и косинуса угла между ними:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ). Символ Кроннекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  может быть задана с помощью трех скалярных функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  – **координатами** точки  $M$ , по формуле разложения вектора в базисе:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{k}_i$$

Связь между векторным и координатным представлением движения точки:

$$x_i(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{k}_i = r \cos \angle(\mathbf{r}, \mathbf{k}_i)$$

Т.е. физический смысл **компонент** (координат) вектора  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  – *проекции* вектора  $\mathbf{a}$  на оси системы координат  $Ox_1x_2x_3$ .

**Свойство:** разложение вектора  $\mathbf{a}$  в координатном базисе – единственно. ( $\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{k}_i = \sum a'_i \mathbf{k}_i \Rightarrow \sum (a_i - a'_i) \mathbf{k}_i = 0 \Rightarrow a_i = a'_i$  в силу независимости  $\{\mathbf{k}_i\}$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \text{ – векторное} \\ x_i = x_i(t) \text{ – координатное} \end{array} \right\} \text{уравнения движения точки}$$

Последние уравнения  $x_i = x_i(t)$  можно рассматривать как *параметрическое* задание траектории точки (где  $t$  играет роль параметра). Выражая из одного уравнения  $t$ , например из первого  $t = t(x_1)$ , и подставляя в другие, получим

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = x_2(x_1) \\ x_3 = x_3(x_1) \end{array} \right\} \text{уравнение траектории}$$

Для вектора скорости точки имеем представление:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \mathbf{k}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{k}_i$$

Количество точек над символом ( $\dot{x}_i$ ,  $\ddot{x}_i$ ) равно числу производных по времени.

Так как разложение вектора в координатном базисе единственно, имеем:

$$v_i = \dot{x}_i(t) \quad \text{– компоненты скорости точки}$$

Для вектора ускорения точки:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{k}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{v}_i(t) \mathbf{k}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \mathbf{k}_i$$

Так как разложение вектора в координатном базисе единственно, имеем:

$$a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \ddot{x}_i(t) \quad \text{– компоненты ускорения точки}$$

Здесь предполагается, что  $x_i(t)$  – являются дважды дифференцируемыми функциями времени.

**Свойства скалярного произведения в ортонормированном базисе**

$$\forall \quad \mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{k}_i$$

Величина (длина, модуль) вектора  $\mathbf{a}$ :  $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_i a_i^2}$

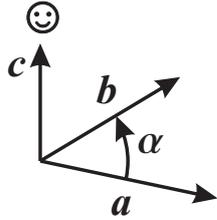
Направление вектора  $\mathbf{a}$ :  $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{k}_i) = \frac{a_i}{a}$  - направляющие косинусы.

Скалярное произведение векторов:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i \mathbf{k}_i \cdot \sum_i b_i \mathbf{k}_i = \sum_i a_i b_i$

Коммутативность операции скалярного произведения - :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

### Свойства векторного произведения в ортонормированном базисе

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



Результат векторного произведения - вектор  $\mathbf{c}$  - ортогонален (перпендикулярен) обоим векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 5).

Направлен  $\mathbf{c}$  в сторону откуда движение (вращение) первого вектора ( $\mathbf{a}$ ) ко второму вектору ( $\mathbf{b}$ ) по наименьшему между ними углу ( $\alpha$ ) видно происходящим против хода часовой стрелки - **положительном направлении вращения** (правило правого винта, буравчика, штопора).

Рис. 5.

$$c = a \cdot b \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

модуль  $c$ , векторного произведения  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равен произведению их модулей на синус наименьшего угла между ними  $\alpha$ .

Для координатного представления векторов

$$\mathbf{c} = \sum c_i \mathbf{k}_i = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum a_i \mathbf{k}_i \times \sum b_i \mathbf{k}_i$$

используется формула с использованием определителя:

$$\mathbf{c} = \sum c_i \mathbf{k}_i = \det \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$c_i = a_{i+1} b_{i+2} - a_{i+2} b_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(Нижний индекс ограничен по модулю 3.)

Все системы координат рассматриваемые в курсе ( $Ox_1x_2x_3$ ) - **правые**:

$$\mathbf{k}_\alpha \times \mathbf{k}_{\alpha+1} = \mathbf{k}_{\alpha+2} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

для ортогонального координатного базиса  $\{\mathbf{k}_i\}$ .

1.  $c$  - численно равен площади параллелограмма натянутого на вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (Рис. 6)

2. антикоммутативность:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

3. правило циклической перестановки при смешанном произведении ( $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ):

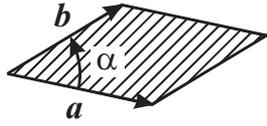
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Это объем  $V$  параллелепипеда, натянутого на вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  (Рис. 6)

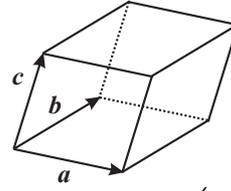
Если  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$ , т.е.  $V \neq 0$ , т.е. вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  не лежат в одной плоскости, то эти вектора называются **некомпланарными** - необходимое условие любого базиса.

4. двойное векторное произведение через скалярное (правило "бац минус цаб"):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$



$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha$$



$$V = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.

### Направление векторов скорости и ускорения

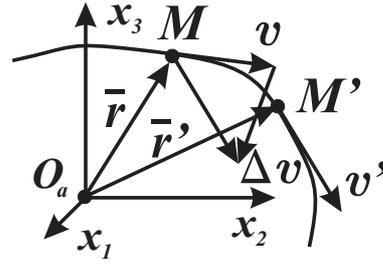
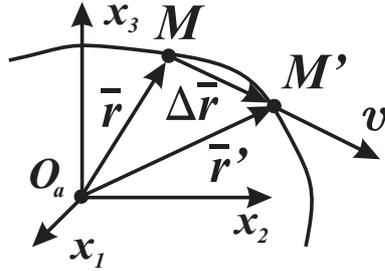


Рис. 7.

$$\begin{aligned} M: \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) \\ M': \mathbf{r}' &= \mathbf{r}(t + \Delta t) \end{aligned} \implies \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Скорость точки направлена по касательной к её траектории

$$\begin{aligned} M: \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t) \\ M': \mathbf{v}' &= \mathbf{v}(t + \Delta t) \end{aligned} \implies \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Ускорение точки направлено в сторону вогнутости траектории

## ЛЕКЦИЯ 2

### КРИВОЛИНЕЙНАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Ранее мы определили, что положение точки в пространстве определяется тремя декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$ .

Однако, вместо них можно использовать 3 других независимых величины (параметра)  $q_1, q_2, q_3$ , однозначно определяющих положение точки. Причем декартовы координаты выражаются через  $\{q_i\}$  с помощью функций  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ , а вектор

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i(q_1, q_2, q_3) \mathbf{k}_i = \mathbf{r}(q_\alpha)$$

Будем предполагать, что функции  $x_i(q_1, q_2, q_3)$  трижды непрерывно дифференцируемы, причем

$$\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \neq 0$$

Это свойство позволяет обратить выражения:  $q_\alpha = q_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ .

Каждой точке  $M$  соответствует 3 координаты  $x_i$  тогда найдем  $q_\alpha$ . Верно и наоборот для любой тройки чисел  $q_\alpha$  определяется  $x_i$ . Таким образом, между  $x_i$  и  $q_\alpha$  взаимно однозначное соответствие, поэтому  $\{q_\alpha\}$  - **обобщенные координаты (криволинейные)**.

Движение точки считается заданным, если ее обобщенные координаты  $q_\alpha$  - суть функции времени:  $q_\alpha = q_\alpha(t)$ . А радиус-вектор  $\mathbf{r}$  - сложная функция времени:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

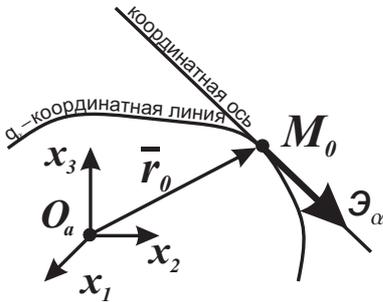


Рис. 8.

Пусть  $M_0$  какая-либо точка в пространстве. Ее криволинейные координаты  $(q_{10}, q_{20}, q_{30})$ .  $q_\alpha$ -**координатной линией**, проходящей через точку  $M$  называется кривая

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_\alpha, q_{\alpha+1,0}, q_{\alpha+2,0}),$$

получающаяся из  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_\alpha)$  путем изменения  $q_\alpha$  при фиксированных остальных координатах.

Касательную к координатной линии  $q_\alpha$  в точке  $M_0$  называют **координатной осью**, проходящей через  $M_0$ . Легко понять, что вектор

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right|_{M_0} = \mathbf{e}_\alpha$$

определяет касательный вектор к координатной линии  $q_\alpha$  в точке  $M_0$ .

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_{i=1}^3 x_i(q_1, q_2, q_3) \mathbf{k}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \mathbf{k}_i = \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial x_3}{\partial q_\alpha} \right)$$

Рассмотрим 3 вектора  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Каждый из них направлен по координатной оси. Объем параллелепипеда построенного на  $\mathbf{e}_\alpha$ :

$$V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \neq 0$$

Значит  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$  - некопланарны и могут быть взяты в качестве координатного базиса, который называется **ковариантным**. Обратим внимание, что  $\mathfrak{a}_\alpha = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right|_{M_0}$  зависит от точки  $M_0$ , значит для каждого положения точки в пространстве свой координатный базис  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ , т.е.  $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha(q_1, q_2, q_3)$  - вектор-функции. Но он определяется однозначно - т.е. единственный в каждой точке  $M_0$  пространства. В общем случае  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$  могут быть не ортогональны. Но мы будем рассматривать в дальнейшем только ортогональные системы координат.

Условие ортогональности  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ :  $\mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\beta = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ , т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\beta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} = 0, \quad \forall \alpha \neq \beta$$

получается 3 выражения. Кроме того, в общем случае  $\mathfrak{a}_\alpha$  - не единичные векторы. Обозначив за

$$h_\alpha = |\mathfrak{a}_\alpha| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_\alpha}\right)^2} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dq_\alpha} \right| \text{ - коэффициенты Ламе}$$

введем единичные вектора  $\mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathfrak{a}_\alpha}{|\mathfrak{a}_\alpha|} = \frac{1}{h_\alpha} \mathfrak{a}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}$

При этом очевидно:  $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$  т.е.  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  - ортонормированный базис (в точке  $M_0$ ).

Важность координатного криволинейного базиса  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  ясна из разложения произвольного вектора  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^* \mathbf{e}_{\alpha} \Rightarrow \boxed{c_{\alpha}^* = h_{\alpha} c_{\alpha}}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} = \sqrt{\sum_{\alpha} c_{\alpha}^* \mathbf{e}_{\alpha} \cdot c_{\beta}^* \mathbf{e}_{\beta}} = \sqrt{\sum_{\alpha} (c_{\alpha}^*)^2} \text{ - такой же вид как и декартовых координатах}$$

$$\cos \angle(\mathbf{c}, \mathbf{e}_{\alpha}) = \frac{c_{\alpha}^*}{c}, \quad c_{\alpha}^* = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}$$

Компоненты  $c_{\alpha}^*$  - **физические компоненты** вектора  $\mathbf{c}$  (проекция  $\mathbf{c}$  на координатную ось  $q_{\alpha}$ ), компоненты  $c_{\alpha}$  - **контрвариантные компоненты** вектора  $\mathbf{c}$ .

Отметим, что координатная линия имеет направление! И вектор  $\mathfrak{a}_{\alpha}$  направлен вдоль координатной оси строго по возрастанию  $q_{\alpha}$ . Т.е. если точка  $M: \mathbf{r}(q'_{\alpha}, q_{\alpha+1,0}, q_{\alpha+2,0})$  и точка  $M_0: \mathbf{r}(q_{\alpha,0}, q_{\alpha+1,0}, q_{\alpha+2,0})$  такие что  $q'_{\alpha} > q_{\alpha,0}$ , то вектор  $\mathfrak{a}_{\alpha}$  направлен от  $M_0$  к  $M$ .

### Физические компоненты скорости и ускорения точки в криволинейной ортогональной системе координат

Используем следующее представление для скорости точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

с другой стороны  $\mathbf{v} = \sum_{\alpha} v_{\alpha}^* \mathbf{e}_{\alpha}$  - единственное разложение в базисе (т.к. базис однозначен), где  $v_{\alpha}^*$  - проекции на координатные оси  $q_{\alpha}$  вектора  $\mathbf{v}$ . Поэтому компоненты скорости:

$$\boxed{v_{\alpha}^* = h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}} \quad \boxed{v = \sqrt{\sum_{\alpha} (v_{\alpha}^*)^2}, \quad \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_{\alpha}) = \frac{v_{\alpha}^*}{v}}$$

где  $\dot{q}_\alpha$  - обобщенная скорость.

Для вычисления ускорения используем представление

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^* \mathbf{e}_{\alpha}, \quad a_{\alpha}^* = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}$$

$$a_{\alpha}^* = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right]$$

Далее, т.к.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha} q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha} q_{\beta}} \dot{q}_{\beta}$$

поскольку  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  - трижды непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Отсюда:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}}}$$

Кроме того из выражения для скорости также видно:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}}}$$

Поэтому получим следующее выражение для физических компонент ускорения:

$$\boxed{a_{\alpha}^* = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} \right]}$$

здесь  $\mathbf{v} = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$ , т.е.  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, q, \dot{q})$

А если ввести обозначение  $T = \frac{v^2}{2}$  получим следующее выражение

$$\boxed{a_{\alpha}^* = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \right]}$$

(т.к.  $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$ ). При этом:

$$\boxed{a = \sqrt{\sum_{\alpha} (a_{\alpha}^*)^2}, \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{\alpha}) = \frac{a_{\alpha}^*}{a}}$$

### Цилиндрическая система координат $\{r, \varphi, z\}$

$M'$  - проекция  $M$  на плоскость  $Oxy$  (рис. 9).

Цилиндрические координаты :

$$q_1 = O_a M' = r, \quad q_2 = \angle x O_a M' = \varphi, \quad q_3 = z$$

Связь с декартовыми координатами  $x, y, z$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

Коэффициенты Ламе:  $h_r = 1, \quad h_{\varphi} = r, \quad h_z = 1$

Физические компоненты скорости и ускорения:

$$\begin{array}{lll} v_r^* = \dot{r} & a_r^* = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 & \text{— радиальная} \\ v_{\varphi}^* = r\dot{\varphi} & a_{\varphi}^* = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} & \text{— трансверсальная} \\ v_z^* = \dot{z} & a_z^* = \ddot{z} & \text{— осевая} \end{array}$$

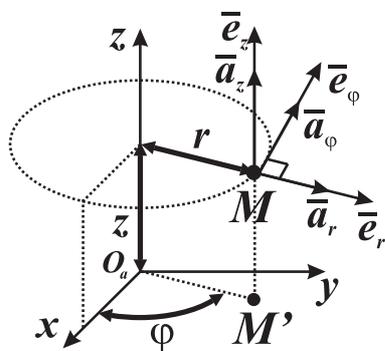


Рис. 9.

## ЕСТЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

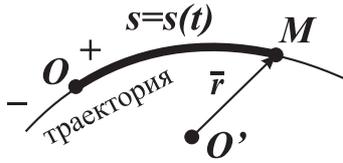


Рис. 10.

Пусть в пространстве задана траектория точки (Рис. 10). Для определения положения точки  $M$  на траектории возьмем произвольную точку  $O$  кривой за начало отсчета дуг и зададим положительное направление отсчета. Каждому положению точки  $M$  поставим в соответствие свою **дуговую координату**  $s$ . Величина  $s$  - положительная или отрицательная в зависимости от направления отсчета дуг. При этом длина дуги  $\widehat{OM} = |s|$ .

**Естественный способ задания движения точки** – состоит в задании траектории и функции  $s = s(t)$  - **уравнение движения точки по траектории**. Предполагаем  $s(t)$  - дважды непрерывно дифференцируемая функции.

### Естественный трехгранник (натуральный триэдр)

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки  $M$  относительно какой-нибудь фиксированной точки  $O'$  будет сложной функцией времени:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$ . Введем

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}} \quad - \text{касательный вектор к траектории}$$

Очевидно, что он всегда направлен по касательной к траектории и  $|d\mathbf{r}| = \sqrt{\sum (dx_i)^2} = ds \Rightarrow |\boldsymbol{\tau}| = 1$

Рассмотрим  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ . Обозначим через  $k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|$  - модуль, а через  $\mathbf{n}$  - единичный вектор направления. Определим таким образом:

$$\boxed{k\mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}$$

$\mathbf{n}$  - **главный нормальный вектор**. Он перпендикулярен касательной к траектории:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \quad \left| \frac{d}{ds} \right. \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \Rightarrow 2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \Leftrightarrow 2k\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{n} \perp \boldsymbol{\tau}}$$

Направлен  $\mathbf{n}$  в сторону вогнутости траектории.

Величина  $k = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\sum \left( \frac{d^2x_i}{ds^2} \right)^2}$  - **кривизна траектории**.

Величина  $\rho = \frac{1}{k}$  - **радиус кривизны траектории**.

Введем третий вектор  $\boxed{\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}}$  - **вектор бинормали** ( $\mathbf{b} \perp \boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{b} \perp \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b} = 1$ ).

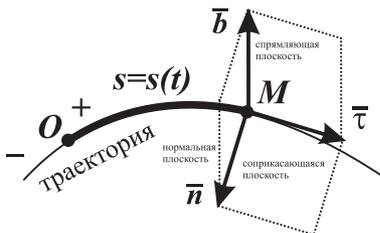


Рис. 11.

$\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  - **естественный базис (трехгранник, триэдр)**

**Свойства:**

1.  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  - являются функциями  $s$ , т.е. зависят от точки (как и в криволинейной ортогональной системе координат);
2.  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  - ортонормированный базис;
3.  $\boldsymbol{\tau}_\alpha = \boldsymbol{\tau}_{\alpha+1} \times \boldsymbol{\tau}_{\alpha+2}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$   $\alpha \leq 3$ ) - образуют правую тройку векторов ( $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{b}$ )

## Естественные компоненты скорости и ускорения точки

По определению  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \dot{s}$  Учитывая, что естественный базис определяется единственным образом, т.е. разложение любого вектора в нем также единственно:  $\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau} + v_n \mathbf{n} + v_b \mathbf{b}$  имеем

$$\boxed{v_\tau = \dot{s}, \quad v_n = v_b = 0}$$

что естественно, т.к.  $\mathbf{v}$  направлен по касательной к траектории.

Далее  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)\dot{s}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{s} + \boldsymbol{\tau} \frac{d\dot{s}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \ddot{s} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{n}$ . Аналогично, в силу единственности разложения имеем:

$$\boxed{a_\tau = \ddot{s}, \quad a_n = \dot{s}^2/\rho = v_\tau^2/\rho, \quad a_b = 0}$$

$$\left. \begin{array}{lll} v_\tau = \dot{s} & \mathbf{a}_\tau = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} & \text{— касательное} \\ v_n = 0 & \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{n} & \text{— нормальное} \\ v_b = 0 & \mathbf{a}_b = 0 & \text{— бинормальное} \end{array} \right\} \text{ скорость и ускорение (вектора!)}$$

Направлены соответствующие компоненты скорости и ускорения в те же стороны что и вектора естественного трехгранника (рис.12).

$$\boxed{v = |v_\tau|} \quad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Если  $v = \text{const}$  - движение называется **равномерным**.

$v_\tau$  - положительно, если  $\widehat{M}$  движется в положительном направлении отсчета дуг  $\widehat{OM}$ .

Если  $v(t)$  - возрастает - движение **ускоренное** ( $\frac{dv}{dt} > 0$ )

Если  $v(t)$  - убывает - движение **замедленное** ( $\frac{dv}{dt} < 0$ )

Т.к.  $v^2 = v_\tau^2 = \dot{s}^2 \Rightarrow \frac{dv^2}{dt} = 2\dot{s}\ddot{s} \Rightarrow \frac{dv^2}{dt} > 0 \Leftrightarrow \dot{s}, \ddot{s}$  - одного знака (**ускоренное**)

$\frac{dv^2}{dt} < 0 \Leftrightarrow \dot{s}, \ddot{s}$  - разных знаков (**замедленное**)

Если на интервале  $t_1 < t < t_2$  :  $\ddot{s} = 0$  ( $a_\tau = 0$ )  $\Rightarrow \dot{s} = \text{const} = v_\tau$  - **равномерное** движение.

Если  $a_n = 0$ , но  $v \neq 0$  - движение **прямолинейное** ( $\rho = \infty$ ).

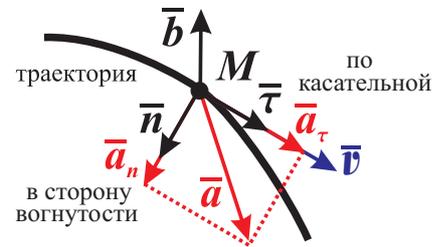


Рис. 12.

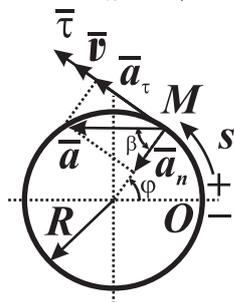


Рис. 13.

### Пример: Круговое движение

$$s = R\varphi \Rightarrow \dot{s} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_\tau = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = R\dot{\varphi}^2\mathbf{n}}$$

$$\boxed{\omega = \dot{\varphi}} \text{ — угловая скорость, } \boxed{\varepsilon = \ddot{\varphi}} \text{ — угловое ускорение}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = R\omega\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_\tau = R\varepsilon\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = R\omega^2\mathbf{n}}$$

$$\boxed{a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$$\boxed{\text{tg } \angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}_n) = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}}$$

При равномерном круговом движении:

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0 \quad (a_\tau = 0) \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = \text{const} \Rightarrow \text{tg } \angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}_n) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

## ЛЕКЦИЯ 3

### КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Абсолютно твердое тело** – это такая механическая система (т.е. система, совокупность взаимодействующих материальных точек), у которой взаимные расстояния между точками - постоянны (не меняются).

#### Векторно-матричное задание движения твердого тела

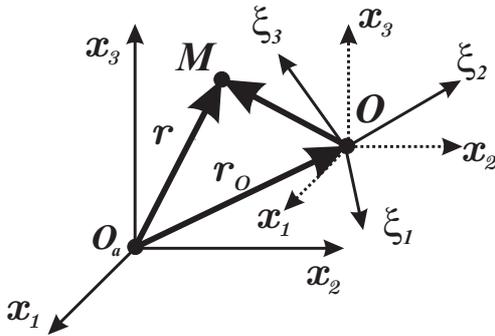


Рис. 14.

Пусть  $O_a x_1 x_2 x_3$  - **абсолютная** (неподвижная) декартова система координат.  $O$  - произвольная точка тела (фиксированная в теле) - **полюс**.

$O x_1 x_2 x_3$  - система координат, получающаяся из  $O_a x_1 x_2 x_3$  параллельным переносом в полюс  $O$ .

$O \xi_1 \xi_2 \xi_3$  - **сопутствующая** система координат, жестко связанная с твердым телом (вморожена).

Пусть  $M$  - некоторая точка тела. Будем обозначать через  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_O$  радиус-вектора для точек  $M$  и  $O$ , задаваемые покомпонентно в абсолютной системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$  (или, что то же в  $O x_1 x_2 x_3$ ) (рис. 14). Например  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Для вектора  $\overrightarrow{OM}$  введем следующие обозначения в зависимости от систем координат в которых он может быть выражен компонентами:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\rho}} & \text{— в сопутствующей системе } O\xi_i \\ \boldsymbol{\rho} & \text{— в абсолютной системе } O x_i \end{cases}$$

Очевидно, что вектор  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \text{const}$  - постоянен, а  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$  - является вектор-функцией времени. Между ними имеет место соотношение:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = A(t)\tilde{\boldsymbol{\rho}}$$

где  $A$  - **матрица перехода** от системы  $O \xi_1 \xi_2 \xi_3$  к системе  $O x_1 x_2 x_3$ . По сути дела  $A$  - матрица поворота.

Положение точки  $M$  в абсолютной системе координат очевидно задается равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\tilde{\boldsymbol{\rho}}$$

При движении тела в общем случае изменяется положение полюса  $O$ , т.е.  $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_O(t)$ , а также изменяется ориентация тела в абсолютном пространстве, т.е.  $A = A(t)$ . Будем считать их дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Матрица  $A$ , задавая переход от одного ортонормированного базиса к другому, является ортогональной:  $A^{-1} = A^*$  (транспонирование в  $\mathbb{R}$  эквивалентно сопряжению), т.е.  $AA^* = E$  значит её элементы связаны 6-тью независимыми соотношениями:

$$\sum_{j=1}^3 A_{ij} A_{jk} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

Следовательно из 9-и элементов  $A$  независимыми, через которые определяются все остальные - только 3. Т.е.  $A$  - можно задать с помощью 3-ех независимых параметров. В зависимости от конкретного выбора этих параметров  $A$  будет выглядеть по-разному.

## Углы Эйлера

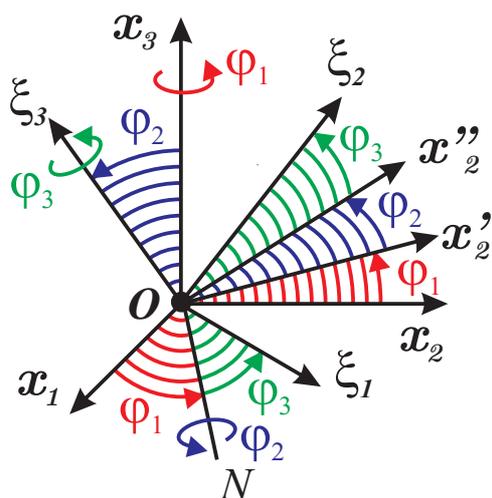


Рис. 15.

Плоскость  $O\xi_1\xi_2$  пересекается с плоскостью  $Ox_1x_2$  по прямой  $ON$  - которая называется *линия узлов*.

1. угол  $\varphi_1 = \angle(Ox_1, ON)$  - *угол прецессии* изменяется вокруг оси  $Ox_3$  ( $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$ ),
2. угол  $\varphi_2 = \angle(Ox_3, O\xi_3)$  - *угол нутации* изменяется вокруг оси  $ON$  ( $0 \leq \varphi_2 < \pi$ ),
3. угол  $\varphi_3 = \angle(ON, O\xi_1)$  - *угол собственного вращения* изменяется вокруг  $O\xi_3$  ( $0 \leq \varphi_3 < 2\pi$ )

Три угла  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  не зависят один от другого и могут быть выбраны совершенно произвольно, т.е. задавая 3 числа, являющиеся значениями  $\varphi_i$  мы определим однозначно ориентацию тела в абсолютном пространстве.

Переход от системы координат  $Ox_1x_2x_3$  к системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  осуществляется при помощи 3-х последовательных поворотов:

1.  $Ox_1, x_2, x_3 \xrightarrow{\varphi_1} ON, x'_2, x_3$
2.  $ON, x'_2, x_3 \xrightarrow{\varphi_2} ON, x''_2, \xi_3$
3.  $ON, x''_2, \xi_3 \xrightarrow{\varphi_3} O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$1. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} ON \\ x'_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} ON \\ x'_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} ON \\ x''_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} ON \\ x''_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица перехода  $A : Ox_1, x_2, x_3 \xrightarrow{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3} O\xi_1\xi_2\xi_3 : \boxed{A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3} : \rho(t) = A(t)\tilde{\rho}$

*Замечание:* Т.к. операция перемножения матриц - некоммутативна, значит конечные повороты, определяемые каждой матрицей - тоже некоммутативны. Т.е. в общем случае, ориентация тела, получаемая в результате 3-х последовательных поворотов зависит от порядка выполнения этих конечных поворотов.

## Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование

Если во все время движения у твердого тела остается неподвижной одна точка  $O$ , то говорят, что **тело движется (вращается) вокруг точки  $O$**  или совершает **сферическое движение**. Т.о. в сферическом движении  $r_0 = \text{const}$ .

Пусть при  $t = 0$  системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  и  $Ox_1x_2x_3$  совпадают, тогда  $A|_{t=0} = E \Rightarrow \rho|_{t=0} = \tilde{\rho}$ . Когда тело начнет двигаться, то оно будет «переносить» с собой (в себе) вектор  $\tilde{\rho}$  и систему координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , поворачивая их вокруг точки  $O$ . Через какое-то время  $t$  вектор  $\tilde{\rho}$  перейдет в вектор  $\rho(t) = A(t)\tilde{\rho}$ , т.е.

$$\tilde{\rho} \xrightarrow{t} \rho = A(t)\tilde{\rho}$$

Последняя формула определяет преобразование пространства, в котором выбрана система координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Матрица  $A(t)$  - ортогональна:  $AA^* = E$ , следовательно  $\det(A)^2 = \det(E) = 1$ , значит  $\det A = 1$  или  $\det A = -1$ . Но т.к.  $\det A = 1$  в начальный момент времени ( $A(0) = E$ ), стать  $\det A = -1$  в какой-то момент времени  $t$  он не может по непрерывности по  $t$ . Значит: *движение твердого тела вокруг неподвижной точки задает собственное ортогональное преобразование*. При этом, как было показано, элементы  $A$  определяются выбором 3-х углов Эйлера, зависят только от них (от полюса  $O$  независимость  $A$  будет показана ниже).

### Интерпретация произвольного движения тела

Если во все время движения твердого тела любая прямая, связанная с телом остается параллельной самой себе в любой момент времени, такое **движение** называется **поступательным (трансляционным)** (рис. 16).

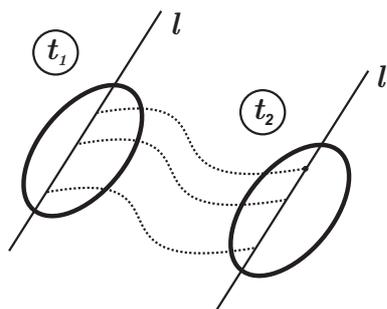


Рис. 16.

Очевидно, что при поступательном движении все точки выбранной прямой описывают геометрически одинаковые траектории (конгруэнтные). Т.к. прямая в теле выбирается произвольно, то все точки тела двигаются одинаково. Т.е. достаточно знать движение 1-ой точки тела, чтобы определить положения всех остальных точек (движение в лифте, колесо обозрения). В этом смысле можно говорить, что тело двигается как одна точка. Поэтому собственно определение самой *точки* как материального объекта можно трактовать как *тело, вращательным движением которого можно пренебречь*. (т.е. размеры, габариты тела не важны). Тогда выбирая некоторую точку  $O$  в теле и задавая закон движения ее в системе координат  $O_ax_1x_2x_3$ :

$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_O(t)$  мы определим поступательное движение, называя ее - полюсом тела.

Итак, если обратиться к начальной формуле:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_O(t) + A(t)\tilde{\rho}$ , определяющей положение точки тела в абсолютной системе координат, мы заключаем, что самое общее движение тела разлагается на:

- поступательное движение - вместе с выбранным полюсом  $O$ :  $\mathbf{r}_O(t)$
- сферическое движение (вращательное) вокруг данного полюса  $O$ :  $A(t)\tilde{\rho}$

Данное описание самого общего движения твердого тела составляет **теорему Шаля**.

Таким образом:

- $\mathbf{r}_O(t) = (x_1^O(t), x_2^O(t), x_3^O(t))$  - описывает поступательное движение,
- $A(t) = A(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$  - определяет ориентацию сопутствующей системы координат, т.е. описывает вращение вокруг полюса (сферическое движение).

Значит 6 параметров  $\{x_\alpha^O, \varphi_\alpha\}$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) - однозначно определяют положение тела в пространстве относительно абсолютной системы координат. Т.о. задавая 6 функций:

$x_\alpha^O = x_\alpha^O(t), \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) - называемых **уравнениями движения твердого тела**, решим кинематическую задачу. Будем предполагать все функции - 2-жды непрерывно дифференцируемые.

### Независимость сферического движения тела от выбора полюса

Как говорилось, полюс - некоторая точка тела. Ее выбор никак не конкретизирован - она произвольная. Т.е. если взять другую точку тела, то очевидно уравнения движения полюса  $x_\alpha^O = x_\alpha^O(t)$  - изменятся. А вращение вокруг разных полюсов - будут одинаковым.

**ТЕОРЕМА:** Вращательная часть движения тела не зависит от выбора полюса.

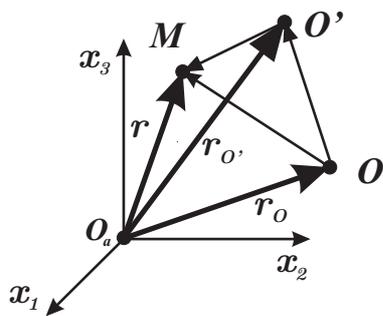


Рис. 17.

**Доказательство:** Пусть  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_O$ ,  $\mathbf{r}_{O'}$  - радиус-вектора точек тела  $M$ ,  $O$ ,  $O'$  (в системе координат  $O_a x_\alpha$ ) (рис. 17).

Обозначим  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}' = \overrightarrow{O'M}$ ,  $\widetilde{OO'}$  - вектора, заданные в сопутствующей системе координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  (т.е. постоянные).

Между  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  и  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}'$  - очевидна связь:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \widetilde{OO'} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}'$$

Имеем по формуле для любой точки тела  $M$  и  $O'$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_O + A\widetilde{OO'}$$

Аналогичная формула для другого полюса  $O'$  (со своей матрицей поворота  $A'$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + A'\tilde{\boldsymbol{\rho}}'$$

Вычитая первые 2 одно из другого имеем:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + A(\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \widetilde{OO'}) = \mathbf{r}_{O'} + A\tilde{\boldsymbol{\rho}}'$ .

Вычитая последние 2 одно из другого имеем:  $(A - A')\tilde{\boldsymbol{\rho}}' = 0$ , следовательно  $\boxed{A = A'}$ .

Т.о. матрица  $A$  от выбора полюса не зависит! И определяется только выбором углов (Эйлера). ■

### О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела

Мы рассмотрели описание движения твердого тела в смысле определения его положения в пространстве. Теперь займемся определением быстроты его перемещения. Определим скорости и ускорения точек твердого тела при его движении.

- Если в данный момент времени скорости  $\mathbf{v}$  всех точек тела одинаковы (равны между собой), то говорят, что тело совершает **мгновенно поступательное движение** со скоростью  $\mathbf{v}$ . В частности, если  $\mathbf{v} = 0$ , то тело находится в **мгновенном покое**.

*Замечание:* Речь идет только о распределении скоростей точек тела в данный момент времени. Ускорения точек совсем не обязаны быть одинаковыми.

- Если в данный момент времени точки некоторой прямой в твердом теле имеют скорости равные нулю, то говорят, что тело совершает **мгновенное вращение** вокруг этой прямой, которую называют **мгновенной осью вращения**.

*Замечание:* Речь идет о распределении скоростей точек некоторой прямой в твердом теле и только в данный момент времени. Мгновенная ось вращения, в частности, в разные моменты времени может занимать разные положения и в движущемся теле и в абсолютном пространстве.

### Скорости точек тела

**ТЕОРЕМА.** Существует единственный вектор  $\boldsymbol{\omega}$ , называемый **угловой скоростью тела**, с помощью которого скорость  $\mathbf{v}$  точки  $M$  тела может быть представлена в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ , где  $\mathbf{v}_O$  - скорость полюса  $O$ . Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  от выбора полюса не зависит.

*Доказательство.* Продифференцируем формулу  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}$  по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{v}_O + \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

используя формулу  $\rho(t) = A(t)\tilde{\rho}$  после дифференцирования по  $t$  получим (учитывая что  $\tilde{\rho} = \text{const}$ )

$$\dot{\rho} = \dot{A}\tilde{\rho} = \dot{A}A^{-1}\rho$$

Матрица  $\dot{A}A^{-1}$  - кососимметрическая (антисимметрическая) (свойство кососимметричности матрицы  $C$  означает:  $C^* = -C$ ). В самом деле, учитывая ортогональность  $A$  ( $A^* = A^{-1}$ ) имеем:  $AA^* = AA^{-1} = E$ . Дифференцируя это выражение по  $t$  получим:  $\dot{A}A^* + A\dot{A}^* = 0$ . Отсюда имеем  $\dot{A}A^{-1} = -\dot{A}A^* = -(\dot{A}A^*)^* = -(\dot{A}A^{-1})^*$ .

Поскольку в  $\mathbb{R}$  сопряжение является транспонированием матриц, свойство кососимметричности матрицы  $C$  означает для её элементов  $c_{ij} = -c_{ji}$ . Отсюда понятно, что все диагональные элементы матрицы - нулевые:  $c_{ii} = 0$ . Среди остальных элементов только 3 - независимых. Тогда вводя новые обозначения, вид  $\dot{A}A^{-1}$  должен быть такой:

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Если составить вектор  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  с компонентами, заданными в системе координат  $O_a x_\alpha$ , то результат умножения матрицы  $\dot{A}A^{-1}$  на вектор  $\rho$  может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\dot{A}A^{-1}\rho = \omega \times \rho$$

Откуда и следует **формула распределения скоростей точек твердого тела.**

$$\boxed{v = v_O + \omega \times \rho}$$

Попутно мы доказали и **формулу Эйлера:**

$$\boxed{\dot{\rho} = \omega \times \rho}$$

Независимость  $\omega$  от выбора полюса следует из того, что он целиком определяется элементами матрицы  $A$  и их производными, а матрица  $A$  от выбора полюса не зависит.  $\square$

### Свойства скоростей точек твердого тела (следствия из формулы распределения скоростей)

- В каждый момент времени проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой:

$$\boxed{v_A \cos \alpha_A = v_B \cos \alpha_B}$$

*Механический смысл равенства:* т.к. расстояние  $AB = \text{const}$ , точка  $A$  не может «ни догнать», «ни отстать» от  $B$ . Своего рода - это принцип недеформируемости или абсолютной твердости - тела (рис. 18).

*Доказательство:*  $v_B = v_A + \omega \times \overrightarrow{AB} \Big| \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow v_B \cdot \overrightarrow{AB} = v_A \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{пр}_{AB} v_A = \text{пр}_{AB} v_B}$$

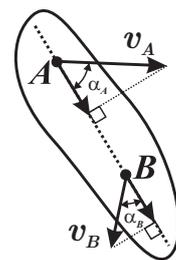


Рис. 18.

- Аналогично в каждый момент времени проекции скоростей на прямую коллинеарную  $\omega$  - равны между собой:  $\boxed{\text{пр}_\omega v_A = \text{пр}_\omega v_B}$
- Если скорости 3-х точек тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенное поступательное движение.

- Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через эту точку. Если есть еще одна точка тела скорость которой равна нулю, то данная мгновенная ось вращения проходит через данные точки.
- Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: 1. поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и 2. вращение вокруг оси, проходящей через этот полюс, направленной по  $\boldsymbol{\omega}$ .

### Ускорение точек тела

Дифференцируя по времени формулу распределения скоростей в твердом теле  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$  имеем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

Вектор  $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  называется **угловым ускорением** тела.

С учетом формулы Эйлера получим **формулу распределения ускорений точек твердого тела**:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

Вектор  $\boldsymbol{a}_O$  - называется **полюсным ускорением** (или ускорением полюса  $O$ ).

Вектор  $\boldsymbol{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$  - называется **вращательным ускорением** вокруг вектора углового ускорения.

Вектор  $\boldsymbol{a}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$  - называется **осеостремительным ускорением** при вращении вокруг вектора угловой скорости (или, что то же самое, вокруг мгновенной оси вращения).

Эти названия составляющие полного ускорения точки тела получили от своих направлений (тема следующей лекции). Итак мы получили:

**ТЕОРЕМА Ривальса.** *В произвольном движении твердого тела ускорение любой точки тела равно векторной сумме полюсного, вращательного и осеостремительного ускорений.*

## ЛЕКЦИЯ 4

### СФЕРИЧЕСКОЕ И ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Ранее мы получили кинематические формулы для скоростей и ускорений точек тела:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$  – формула распределения скоростей точек в твердом теле  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$  – формула распределения ускорений точек тела (формула Ривальса).

Здесь  $\mathbf{v}_O, \mathbf{a}_O$  – скорость и ускорение полюса  $O$  (некоторой точки тела).  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}$  – векторы угловой скорости и ускорения тела (независимые от полюса).  $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OM}$  – радиус-вектор в неподвижной системе координат, проведенной из полюса в точку  $M$  тела. Сегодня мы рассмотрим с кинематической точки зрения несколько практических частных случаев движения в силу их важности и наглядности демонстрации приложения приведенных формул. Как уже было сказано, при чисто поступательном движении тела, все его точки описывают конгруэнтные траектории и в каждый момент времени имеют равные друг другу скорости и ускорения. Для такого движения тела уравнения движений имеют вид:  $x_\alpha^0 = x_\alpha^0(t), \varphi_\alpha = 0, (\alpha = 1, 2, 3)$ , а вся кинематика вполне описывается кинематикой точки, которую мы уже рассмотрели. Следует иметь в виду, что при поступательном движении траектории точек могут быть самыми разнообразными конгруэнтными кривыми. Вид их полностью определяется уравнениями движения полюса. Равные у всех точек тела скорости и ускорения при поступательном движении называют соответственно **скоростью и ускорением тела**. Т.е. поступательное движение является единственным движением твердого тела, где можно говорить о скорости и ускорения тела в целом. Начнем с простейшего движения, не являющегося поступательным и входящим во вторую часть: абсолютное движение = поступательное (с полюсом) + вращательное (вокруг полюса).

#### Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

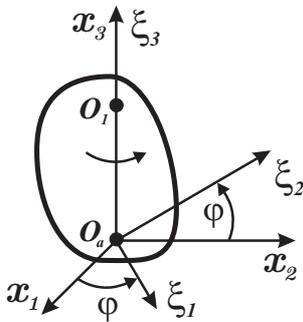


Рис. 19.

Если при движении тела расстояния всех его точек до 2-х неподвижных центров остаются неизменными, то такое движение тела называют **вращением вокруг неподвижной оси**, проходящей через эти центры (рис. 19).

Пусть в твердом теле неподвижные 2 точки  $O$  и  $O_1$ . Прямая, проходящая через них будет **осью вращения**. Ось  $Ox_3$  неподвижной системы координат и ось  $O\xi_3$  подвижной, жестко связанной с телом системы координат, направим по оси вращения (рис. 20). Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется единственным углом  $\varphi(t)$  между осями  $Ox_1$  и  $O\xi_1$ . Очевидно, что траектории всех точек тела, не принадлежащих оси вращения являются окружностями с центрами  $N$  на оси вращения и лежащими в плоскостях, перпендикулярными оси вращения:  $MN \perp Ox_3$ . Пусть точка  $M$  тела задана в сопутствующих осях радиус-вектором  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  ( $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \overrightarrow{OM}$  в  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ). Тогда

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} = A\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{A}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Т.е. угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  направлена по оси вращения в ту сторону, что если смотреть с конца вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , то вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon}$  также направлено по оси вращения, причем в ту же сторону, что и  $\boldsymbol{\omega}$ , если

$\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} > 0$  (вращение ускоренное) и противоположно, если  $\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} < 0$  (замедленное вращение). Так как угловые кинематические характеристики в данном случае имеют только одну ненулевую компоненту, то под угловой скоростью и угловым ускорением подразумевают  $\dot{\varphi} = \omega$  и  $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ . Так же будет и в плоском движении.

Для вычисления скорости и ускорения точки  $M$  примем начало координат  $O$  - за полюс. Тогда  $\mathbf{v}_O = \mathbf{a}_O = 0$ . Для скорости тогда имеем формулу  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ . Нетрудно понять, что  $\mathbf{v}$  лежит в плоскости перпендикулярной оси вращения, т.е. по направлению касательной к траектории являющейся окружностью. Т.е.  $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\rho}$ . Его модуль  $|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{\rho}| \cdot \sin \alpha = |\boldsymbol{\omega}| \cdot d = |\dot{\varphi}| \cdot d$  где  $\alpha = \angle(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})$ ,  $d$  - радиус окружности, по которой движется точка:  $d = MN$ .

Для ускорения из формулы Ривальса получим:  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ . **Вращательное ускорение**  $\mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$  направлено по касательной к траектории  $M$  (окружности радиуса  $d$ ), ее модуль  $a_\varepsilon = \varepsilon \cdot \rho \cdot \sin \alpha = \varepsilon \cdot d = |\ddot{\varphi}|d$ . **Осестремительное ускорение**  $\mathbf{a}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  лежит на перпендикуляре, проведенном к оси вращения из точки  $M$  ( $MN$ ) и направлено к оси вращения. Ее модуль  $a_\omega = \omega^2 d$ .

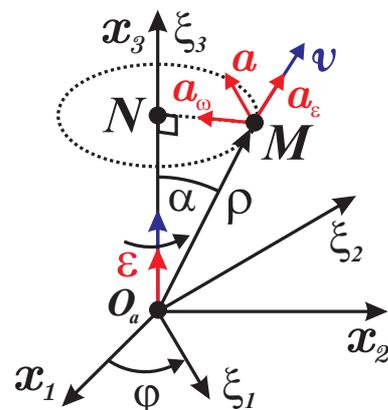


Рис. 20.

Отметим, что во вращательном движении тела вокруг неподвижной оси вращательное ускорение является ее касательным ускорением ( $\mathbf{a}_\varepsilon = \mathbf{a}_\tau$ ), а осестремительное ускорение является нормальным ( $\mathbf{a}_\omega = \mathbf{a}_n$ ) ускорением точки  $M$ . Модуль полного ускорения  $M$  (т.к.  $\mathbf{a}_\varepsilon \perp \mathbf{a}_\omega$ ):  $a = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ . Угол  $\beta$  между  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}_\omega$ :  $\text{tg } \beta = \varepsilon/\omega^2$  (сравнить эти формулы с формулами конца 2-ой лекции).

### Движение вокруг неподвижной точки (сферическое)

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку  $O$ , являющуюся полюсом. Тогда снова  $\mathbf{v}_O = \mathbf{a}_O = 0$  и формулы для  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  те же, что и в предыдущем случае вращения тела вокруг неподвижной оси. Т.о. в данный момент времени скорости точек тела такие, какими они были бы, если бы тело вращалось с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг неподвижной оси, на которой в данный момент времени лежит  $\boldsymbol{\omega}$ . Такая ось называется **мгновенной осью вращения**, а вектор  $\boldsymbol{\omega}$  – **мгновенной угловой скоростью**. Очевидно, что все точки мгновенной оси вращения имеют скорости равные нулю. Но только в данный момент времени, т.к. мгновенная ось вращения, как и вектор мгновенной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  перемещается и в теле и в абсолютном пространстве. В связи с этим заметим, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки (и в общем случае движения свободного твердого тела)  $\boldsymbol{\omega}$  не является производной некоторого угла  $\varphi$ , т.к. нет такого направления фиксированного, вокруг которого поворот на угол  $\varphi$  совершается.

Для дальнейшего изложения рассмотрим разложение радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}$ :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_\omega^\parallel + \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\parallel + \boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp$$

где  $\boldsymbol{\rho}_\omega^\parallel$  и  $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\parallel$  – вектора коллинеарные векторам  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (в данный момент времени), а вектора  $\boldsymbol{\rho}_\omega^\perp$  и  $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp$  лежат в плоскости перпендикулярной  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , соответственно.

**Вращательное ускорение:**

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\parallel + \boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp$$

т.е. вращательное ускорение представляет собой вектор, полученный при «вращении»  $M$  вокруг вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , проведенного из полюса  $O$ . Причем модуль:  $a_\varepsilon = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp|$ .

### Осестремительное ускорение:

$$\mathbf{a}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_\omega^\parallel + \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp)) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp) - \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp$$

Т.о. имеем:

$$\mathbf{a}_\omega = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp$$

т.е. оно совпадает с тем нормальным ускорением, которое имела бы точка  $M$ , если бы тело вращалось вокруг мгновенной оси вращения как вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , и направлено оно к мгновенной оси вращения, поэтому и называется осестремительным.

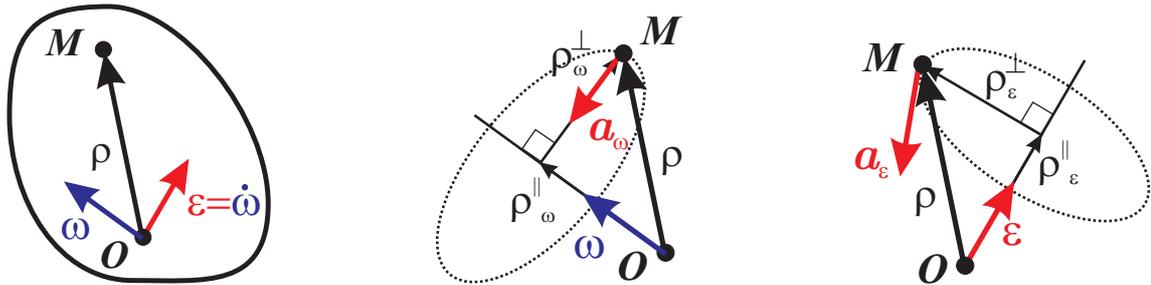


Рис. 21.

Следует иметь в виду, что в отличие от случая вращения тела вокруг неподвижной оси, при вращении тела вокруг неподвижной точки  $\mathbf{a}_\varepsilon$  и  $\mathbf{a}_\omega$  уже не обязаны быть касательной  $\mathbf{a}_\tau$  и нормальной  $\mathbf{a}_n$  составляющими ускорения точки  $M$ . Потому что  $\mathbf{a}_\tau$  и  $\mathbf{a}_n$  определяются траекторией точки, а  $\mathbf{a}_\varepsilon$  и  $\mathbf{a}_\omega$  определяются расположением полюса  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  (или мгновенной осью вращения) и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  для тела.

В общем случае движения к  $\mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_\varepsilon^\perp$  и  $\mathbf{a}_\omega = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_\omega^\perp$  ещё необходимо добавлять полюсное ускорение  $\mathbf{a}_0$ .

### Плоское движение твердого тела (плоское $\neq$ поступательное)

**Движение твердого тела** называется **плоским** если расстояние любой его точки до некоторой неподвижной плоскости сохраняется неизменным во все время движения (рис. 22). Все точки тела перемещаются в плоскостях параллельных данной неподвижной плоскости. Тогда легко понять, что все точки тела, лежащие на прямой  $l$ , перпендикулярной этой плоскости двигаются одинаково, т.е. данные прямые движутся поступательно. Поэтому для определения движения этой прямой достаточно знать движение какой-либо одной ее точки. Движение же всего тела будет известно, если известно движение любого сечения тела плоскостью параллельной неподвижной. Следовательно, изучение плоского движения тела сводится в изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Выберем эту плоскость так, чтобы она проходила через полюс тела точку  $O$ , а неподвижную систему координат так, чтобы оси  $O_a x_1$  и  $O_a x_2$  лежали в плоскости, а ось  $O_a x_3$  - перпендикулярна плоскости (т.е. ось  $O_a x_3$  неподвижной системы и ось  $O \xi_3$  подвижной системы координат совпадают) (рис. 22). Понятно, что при таком выборе осей из трех уравнений движения полюса остается 2:  $x_1^0 = x_1^0(t)$ ,  $x_2^0 = x_2^0(t)$  ( $x_3^0 \equiv 0$ ). Легко понять, что для выполнения требования плоского движения, т.е. неизменности расстояний точек тела до фиксированной плоскости, т.е. движения точек плоской фигуры в плоскости остается одно уравнение вращения вокруг полюса  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  *вращение в плоскости движения вокруг оси  $O \xi_3$* . Т.о. плоское движение сочетает в себе плоское поступательное движение

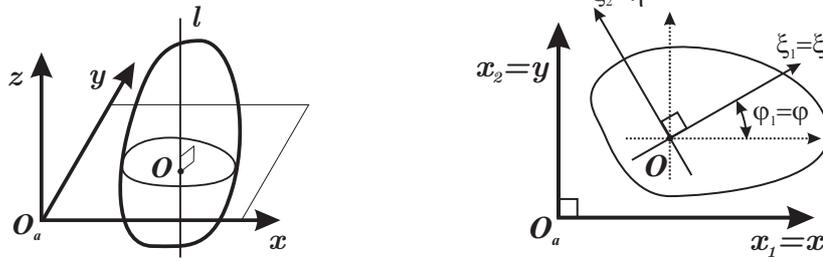


Рис. 22.

и вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости движения. Тогда легко понять, что

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}$$

т.е.  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – перпендикулярны плоскости движения.

Для дальнейших рассуждений полезными будут более простые выражения для формул распределения скоростей и ускорений точек тела при плоском движении:

$$\boxed{\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM}} \quad \boxed{\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} - \omega^2 \overrightarrow{OM}}$$

где радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  точки  $M$  тела – лежит в плоскости движения фигуры, а также скорость и ускорение полюса  $O$ :  $\mathbf{v}_O$  и  $\mathbf{a}_O$  – лежат в плоскости движения фигуры.

Таким образом при плоском движении имеем:

$$\boldsymbol{\omega} \perp \overrightarrow{OM} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \perp \overrightarrow{OM}$$

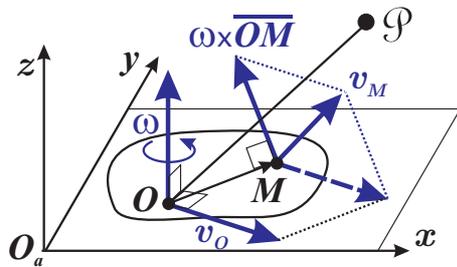
$$|\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM}| = |\boldsymbol{\omega}| |\overrightarrow{OM}|, \quad \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM} \perp \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM}$$

$$\text{Вращательное ускорение: } \mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} \Rightarrow \mathbf{a}_\varepsilon \perp \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{a}_\varepsilon \perp \overrightarrow{OM}, \quad |\mathbf{a}_\varepsilon| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\overrightarrow{OM}|$$

$$\text{Центростремительное ускорение: } \mathbf{a}_\omega = -\omega^2 \overrightarrow{OM} \text{ – к полюсу } O, \quad |\mathbf{a}_\omega| = \omega^2 |\overrightarrow{OM}|$$

Вращательное  $\mathbf{a}_\varepsilon$  и центростремительное  $\mathbf{a}_\omega$  ускорения лежат в плоскости движения.

**ТЕОРЕМА:** Если движение плоской фигуры в ее плоскости в данный момент времени не является мгновенно поступательным (т.е.  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ), то в этот момент времени существует единственная точка  $\mathcal{P}$  фигуры (плоскости), скорость которой равна нулю  $\boxed{\mathbf{v}_P = 0}$ . Скорости остальных точек таковы, какими они были бы при мгновенном вращении фигуры вокруг точки  $\mathcal{P}$ .



**Доказательство:** Найдем точку  $\mathcal{P}$ . Согласно формуле распределения скоростей:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = 0$$

Умножая выражение слева векторно на  $\boldsymbol{\omega}$  получим:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{OP} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$$

Второе слагаемое равно нулю т.к.  $\boldsymbol{\omega} \perp \overrightarrow{OP}$ , отсюда:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O}{\omega^2}} \quad \text{причем } \overrightarrow{OP} \perp \boldsymbol{\omega} \text{ и } \overrightarrow{OP} \perp \mathbf{v}_O \quad \blacksquare$$

$\mathcal{P}$  – называется **мгновенным центром скоростей** плоской фигуры (рис. 23).

Если за полюс взять  $\mathcal{P}$ , то для любой точки  $M$  тела  $\boxed{\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}M}}$  – т.е. чистое вращение вокруг мгновенного центра скоростей в данный момент времени.

*Замечание:*  $\mathcal{P}$  – не фиксированная точка тела, а просто точка «как бы тела», которая обладает указанным свойством. Фактически даже не обязательно принадлежит рассматриваемой фигуре, может лежать и вне фигуры.

**ТЕОРЕМА:** Пусть плоская фигура движется в своей плоскости. Если в некоторый момент времени хотя бы одна из величин  $\dot{\varphi}$  или  $\ddot{\varphi}$  не ноль, то в этот момент времени существует единственная точка  $Q$  фигуры (не обязательно):  $\boxed{\mathbf{a}_Q = 0}$ .

**Доказательство:** Найдем точку  $Q$ . Согласно формуле распределения ускорений:

$$0 = \mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ} - \omega^2 \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \omega^2 \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ}$$

Умножим последнее выражение слева векторно на  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ}) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{OQ}) - \overrightarrow{OQ}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$$

Второе слагаемое в последнем выражении равно нулю т.к.  $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \overrightarrow{OQ}$  отсюда

$$\omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O - \varepsilon^2 \overrightarrow{OQ}$$

Из исходного уравнения имеем:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OQ} = \omega^2 \overrightarrow{OQ} - \mathbf{a}_O$$

подставляя его в полученное выражение получим:

$$\omega^2(\omega^2 \overrightarrow{OQ} - \mathbf{a}_O) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O + \varepsilon^2 \overrightarrow{OQ}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{OQ}(\omega^4 + \varepsilon^2) = \omega^2 \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O$$

$$\boxed{\overrightarrow{OQ} = \frac{\omega^2 \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_O}{\omega^4 + \varepsilon^2}} \quad \blacksquare$$

Точка «фигуры»  $Q$ , обладающая данным свойством называется **мгновенным центром ускорений**.

Если взять точку  $Q$  в качестве полюса, то формула распределения ускорений:

$$\boxed{\mathbf{a}_M = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{QM} - \omega^2 \overrightarrow{QM}}$$

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{QM}, \quad \mathbf{a}_\omega = -\omega^2 \overrightarrow{QM}, \quad \mathbf{a}_\varepsilon \perp \mathbf{a}_\omega \Rightarrow \boxed{a_M = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$$|\mathbf{a}_\varepsilon| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\overrightarrow{QM}|, \quad |\mathbf{a}_\omega| = \omega^2 |\overrightarrow{QM}|, \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \beta = |\mathbf{a}_\varepsilon|/|\mathbf{a}_\omega| = \varepsilon/\omega^2 - \text{не зависит от точки } M$$

т.е. угол  $\beta$  между  $\mathbf{a}_M$  и  $\overrightarrow{QM}$  –

– одинаковый для любых точек тела. (рис. 25)

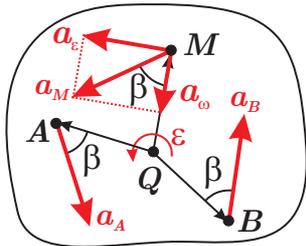


Рис. 25.

## ЛЕКЦИЯ 5

### КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ТЕЛА

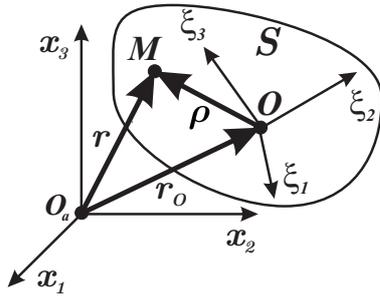


Рис. 26.

Иногда бывает необходимо изучить движение точки одновременно по отношению к двум системам координат. Например, когда мы рассматривали кинематику твердого тела и определяли скорости и ускорения точек тела, то эти точки тела были неподвижными в сопутствующей системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , т.е. радиус-вектор  $\tilde{\rho} = \overrightarrow{OM} = \text{const.}$

Теперь мы будем предполагать, что это вектор-функция  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t)$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ .

В более общем случае можно рассматривать не тело, а некоторую среду  $S$ ,двигающуюся как твердое тело, положение которой определяется системой координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  с заданным законом движения относительно неподвижной абсолютной системы координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ . Это значит, что известны движение полюса  $O$  через радиус-вектор  $\mathbf{r}_O(t)$  и матрица поворота  $A(t)$ , задающая ориентацию осей  $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$  относительно абсолютной системы координат  $O_a x_1 x_2 x_3$  (рис. 26).

Пусть в пространстве двигается точка  $M$ .

**Относительным движением** точки  $M$  называется ее движение по отношению к системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , определяемое радиус-вектором  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t)$ , т.е. это движение точки  $M$  относительно некоторой неизменяемой среды  $S$ .

**Абсолютным движением** точки  $M$  называется движение точки  $M$  относительно абсолютной системы координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ , определяемое радиус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

**Переносным движением** называют движение самой подвижной (сопутствующей) системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  (т.е. тела или среды  $S$ ) по отношению к абсолютной системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ .

Относительное и переносное движение называют еще **составляющими движениями**, а абсолютное - **результатирующим** или **сложным**.

Так возникает задача сложения движений, которое в абсолютной системе координат в векторной форме имеет вид (рис. 26):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_O(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$$

Задача состоит в установлении связи между основными кинематическими характеристиками движения точки в неподвижной  $O_a x_1 x_2 x_3$  и подвижной  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  системах координат.

#### Относительная и абсолютная производные вектора по времени

Любой вектор, заданный компонентами в сопутствующей системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  (обозначим как  $\tilde{\mathbf{c}}$ ) представляется компонентами в абсолютной системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$  (обозначается как  $\mathbf{c}$ ) с помощью ортогональной матрицы поворота  $A(t)$  по формуле:

$$\mathbf{c} = A\tilde{\mathbf{c}}$$

В том числе и вектор  $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t) & \text{в } O\xi_1\xi_2\xi_3 \\ \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t) & \text{в } O_a x_1 x_2 x_3 \end{cases} : \boldsymbol{\rho}(t) = A(t)\tilde{\rho}(t).$

Далее нам придётся встречаться с необходимостью дифференцирования вектора, *заданного своими компонентами* в подвижной системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , которая сама двигается произвольным образом.

Скорость изменения этого же вектора, но в абсолютной (неподвижной) системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ :  $\mathbf{c}(t) = A(t)\tilde{\mathbf{c}}(t)$  называют **абсолютной производной**, а скорость изменения исходного вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  - **относительной** или **локальной производной**. Т.к. движение системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  задано, то матрица поворота  $A(t)$ , определяющая ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной - известна. Таким образом вектор

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \dot{\mathbf{c}} \quad - \quad \underline{\text{абсолютная производная вектора } \mathbf{c}},$$

и обозначая  $\boxed{\frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt} = A(t)\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{dt} = A(t)\dot{\tilde{\mathbf{c}}}}$  - относительная производная вектора  $\mathbf{c}$ .

Отметим, что обе производные вектора  $\mathbf{c}$  заданы компонентами в неподвижной системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$  (причем вектор  $d\tilde{\mathbf{c}}/dt$  задан в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ).

Дифференцируя по  $t$  выражение  $\mathbf{c}(t) = A(t)\tilde{\mathbf{c}}(t)$  имеем:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \dot{A}\tilde{\mathbf{c}} + A\dot{\tilde{\mathbf{c}}} = \dot{A}A^{-1}\mathbf{c} + A\dot{\tilde{\mathbf{c}}}$$

Поскольку

$$\dot{A}A^{-1}\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} \quad (\text{см. лекцию 3})$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  относительно системы  $O_a x_1 x_2 x_3$ . Тогда, с учетом обозначения для относительной производной, этой формулой устанавливается связь между абсолютной и относительной производными вектора по времени

$$\boxed{\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} + \frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt}}$$

Отметим, что символ относительного дифференцирования  $\tilde{d}/dt$  введен только для вектора, т.е. при дифференцировании скалярной величины различия между ними нет. При этом относительное дифференцирование применяется только когда вектор задан своим разложением в подвижной системе координат.

*Замечание:* 1.  $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt}$  при  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , т.е. при поступательном движении среды  $S$  ( $A = \text{const}$ ).

$$2. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

### Скорости и ускорения сложного движения точки

**Абсолютной скоростью  $\mathbf{v}_a$  (абсолютным ускорением  $\mathbf{a}_a$ )** точки называют ее скорость (ускорение) относительно абсолютной системы координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ :

$$\boxed{\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}_a = \ddot{\mathbf{r}}}$$

**Относительной скоростью  $\mathbf{r}_r$  (относительным ускорением  $\mathbf{a}_r$ )** точки называют ее скорость (ускорение) относительно сопутствующей системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Т.к. положение точки относительно сопутствующей системы координат описывается (покомпонентно) вектором  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}(t)$ , то

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \tilde{\mathbf{v}}_r \quad - \quad \text{относительная скорость,} \quad \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = \ddot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} = \tilde{\mathbf{v}}_r = \tilde{\mathbf{a}}_r \quad - \quad \text{относительное ускорение}$$

в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Соответственно в абсолютной системе координат  $O_ax_1x_2x_3$  относительные скорость и ускорение (покомпонентно) имеют вид:

$$\boxed{\mathbf{v}_r = A\tilde{\mathbf{v}}_r = A\dot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}} \quad \boxed{\mathbf{a}_r = A\tilde{\mathbf{a}}_r = A\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_r = A\ddot{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}}$$

С учетом обозначения для относительной производной вектора, относительные скорость и ускорение точки имеют и другие выражения:

$$\boxed{\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt}} \quad \boxed{\mathbf{a}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}}$$

Собственно  $\mathbf{v}_r$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_r$  ( $\mathbf{a}_r$  и  $\tilde{\mathbf{a}}_r$ ) это одни и те же вектора - скорости (ускорения) точки  $M$  по отношению к телу. Но выраженные компонентами (координатами) в разных системах координат:  $\mathbf{v}_r$  ( $\mathbf{a}_r$ ) - в абсолютной  $O_ax_1x_2x_3$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}_r$  ( $\tilde{\mathbf{a}}_r$ ) - в сопутствующей  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ .

В результате относительного движения точки  $M$  по среде  $S$ , она совпадает с различными точками среды, последние же, вообще говоря, движутся по-разному. Поэтому **переносной скоростью**  $\mathbf{v}_e$  (**переносным ускорением**  $\mathbf{a}_e$ ) точки называют скорость (ускорение) той точки среды  $S$ , с которой точка  $M$  в данный момент времени совпадает. Иными словами, переносная скорость (ускорение) есть та скорость (ускорение) которую движущаяся точка  $M$  имела бы в данный момент, если бы она в этот момент оказалась жестко связанной с подвижной системой координат (телом или средой), т.е. не совершала бы относительного движения.

**ТЕОРЕМА сложения скоростей:** Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.

**Доказательство:** Т.к. радиус-вектор точки  $M$  в абсолютной системе координат выражается через  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_O(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$ , тогда дифференцируя его по  $t$ , с учетом зависимости между абсолютной и относительной производными получим

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt}$$

Вектор  $(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$  есть скорость той точки подвижной системы координат (среды  $S$ , двигающейся как твердое тело или просто тело) с которой совпадает в данный момент времени двигающаяся точка  $M$  (формула распределения скоростей точек тела), т.е. является переносной скоростью:  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ . Вектор  $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt}$  есть относительная скорость  $\mathbf{v}_r$ , выраженная в абсолютной системе координат (см. выше). Отсюда имеем:

$$\boxed{\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r} \quad \blacksquare$$

**ТЕОРЕМА Кориолиса (сложения ускорений):** Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и добавочного (кориолисова) ускорений.

**Доказательство:** Продифференцируем выражение из теоремы сложения скоростей по времени, с учетом зависимости между абсолютной и относительной производными:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a &= \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \\ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \frac{d(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} \right) = \\ &= \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  - угловое ускорение подвижной системы координат (среды или тела).

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r$$

Таким образом имеем:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r$$

Вектор  $(\mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}))$  есть ускорение той точки подвижной системы координат (тела), в которой в данный момент времени находится движущаяся точка  $M$  и является переносным ускорением  $\mathbf{a}_e$  (теорема Ривальса):  $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$ .

Сумма следующих 2-х одинаковых слагаемых называется **ускорением Кориолиса** (**кориолисовым** или **добавочным** ускорением):  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ .

Итак имеем:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad \blacksquare$$

Анализируя полученную формулу сложения ускорений в сложном движении точки можно сказать, что часть абсолютного ускорения - ускорение Кориолиса - связана с изменением абсолютной скорости из-за:

1. влияния переносного движения на относительную скорость (при  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ,  $\mathbf{v}_r$  - поворачивается вокруг абсолютной системы координат за счет вращения).
2. влияния относительного движения на переносную скорость (при  $\mathbf{v}_r \neq 0$  положение точки в подвижной системе координат меняется, следовательно, меняется и переносная скорость).

При этом влияние 1-го и 2-го факторов на абсолютное ускорение - одинаковы.

*Замечания:*

1.  $\mathbf{a}_c = 0$  при  $\begin{cases} \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_r = 0 \\ \boldsymbol{\omega} = 0 \end{cases}$  - **относительный покой**  $\Rightarrow \mathbf{a}_r = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e$   
- поступательное переносное движение (мгновенное)

В этом случае  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$  - т.е. сложение ускорений как сложение скоростей.

2. При поступательном ( $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ), прямолинейном и равномерном ( $\mathbf{a}_O = 0$ ) движении подвижной системы координат (переносном движении) имеем:  $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_c = 0$  тогда  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r$  т.е. абсолютное и относительное ускорения в данном случае - совпадают. Такие подвижные системы координат,двигающиеся указанным образом, называются инерциальными системами координат и они играют важную роль в динамике.

3. Все приведенные теоремы имеют «мгновенный» характер, т.е. для некоторого конкретного момента времени (как и все кинематические теоремы).

### Сложное движение твердого тела

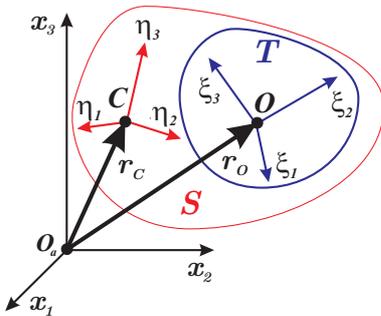


Рис. 27.

В ряде случаев движение твердого тела также удобно представить как результирующее нескольких, более простых в описании, одновременно происходящих составляющих движений (рис. 27).

Пусть некоторое тело  $T$  движется относительно некоторой неизменяемой среды  $S$  (т.е.  $S$  как твердое тело) и сама среда  $S$  перемещается относительно абсолютной, неподвижной системы координат  $O_a x_1 x_2 x_3$ . Очевидно, что тело  $T$  также будет перемещаться относительно неподвижной системы координат.

Свяжем с телом  $T$  и его средой  $S$  сопутствующие системы координат:  $O\xi_i$  - с телом  $T$ ,  $C\eta_i$  - со средой  $S$ .  $O$  и  $C$  - некоторые фиксированные точки тела и среды, соответственно.

**Относительным движением тела** называют его движение по отношению к среде  $S$ , т.е. движение системы координат  $O\xi_i$  по отношению к  $C\eta_i$ .

**Переносное движение тела** - движение среды  $S$  в неподвижной системе координат: т.е. системы  $C\eta_i$  к  $O_ax_i$ .

**Абсолютное движение тела** - движение тела  $T$  по отношению к неподвижной системе координат: т.е. системы  $O\xi_i$  к  $O_ax_i$ .

В качестве полезного примера рассмотрим сферическое движение тела, т.е. вращением вокруг неподвижной точки и заодно получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела на оси подвижной и неподвижной систем координат через углы Эйлера и их производные.

Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из 3-х вращений (мгновенных) (рис. 28):

1. с угловой скоростью прецессии  $\dot{\varphi}_1$  вокруг оси  $Ox_3$
2. с угловой скоростью нутации  $\dot{\varphi}_2$  вокруг линии узлов  $ON$
3. с угловой скоростью собственного вращения:  $\dot{\varphi}_3$  вокруг оси  $O\xi_3$ .

Мгновенная угловая скорость тела  $\omega = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3$  - сумма угловых скоростей составляющих вращений. Представление  $\omega$  в подвижном базисе  $O\xi_i$  и неподвижном  $Ox_i$  обозначим через:  $\tilde{\omega} = (\omega_{\xi_1}, \omega_{\xi_2}, \omega_{\xi_3})$  и  $\omega = (\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \omega_{x_3})$ , соответственно. Для получения уравнений Эйлера, т.е. выражения компонент  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$  в разных базисах введем вспомогательную прямую  $Ox'_2$  в плоскости  $Ox_1x_2$  так, что  $Ox'_2 \perp ON$  и прямую  $Ox''_2$  в плоскости  $O\xi_1\xi_2$  так что  $Ox''_2 \perp ON$ . Собственно линии  $Ox'_2$  и  $Ox''_2$  - это прямые в которые переходит ось  $Ox_2$  при поворотах последовательно:  $Ox_2 \xrightarrow{\varphi_1} ON \xrightarrow{\varphi_2} Ox'_2 \xrightarrow{\varphi_3} Ox''_2$

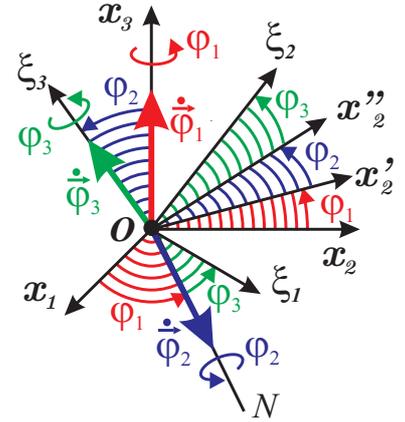


Рис. 28.

### Кинематические формулы Эйлера

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{\xi_1} = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \\ \omega_{\xi_2} = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3 \\ \omega_{\xi_3} = \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x_1} = \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \\ \omega_{x_2} = \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ \omega_{x_3} = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_2 \end{array} \right.$$

Они широко применяются при исследовании движения твердого тела.

Как мы видели любые вектора (в т.ч. угловую скорость) можно раскладывать в различных базисах (осях). В дальнейшем, чтобы не путаться будем обозначать вектора разложенные в неподвижном базисе  $O_ax_i$  обычно - как  $\mathbf{c}$ , а вектора (те же самые) в подвижной системе координат  $C\eta_i$  как  $\tilde{\mathbf{c}}$ , т.е. помечать сверху волнистой линией. Связь между одноименными векторами осуществляется через матрицу поворота  $A(t)$ :  $\mathbf{c} = A\tilde{\mathbf{c}}$ . Тогда в введенных терминах:

**Относительной угловой скоростью** тела:  $\omega_r$  (в  $O_ax_i$ ) или  $\tilde{\omega}_r$  (в  $C\eta_i$ ) называется угловая скорость относительного движения тела, т.е. движения тела в системе координат  $C\eta_i$  ( $\omega_r = A\tilde{\omega}_r$ ).

**Относительным угловым ускорением** тела:  $\varepsilon_r$  (в  $O_ax_i$ ) или  $\tilde{\varepsilon}_r$  (в  $C\eta_i$ ) называется угловое ускорение относительного движения  $\left( \tilde{\varepsilon}_r = \frac{d\tilde{\omega}_r}{dt}, \quad \varepsilon_r = A\tilde{\varepsilon}_r = A \frac{d\tilde{\omega}_r}{dt} = \frac{d\omega_r}{dt} \right)$ .

Аналогично определяются угловые скорости и ускорения переносного и абсолютного движения:

**Переносная угловая скорость (ускорение)** тела -  $\omega_e$  ( $\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt}$ ) - для движения системы координат  $C\eta_i$  относительно  $O_ax_i$ .

**Абсолютная угловая скорость (ускорение)** тела –  $\omega_a \left( \varepsilon_a = \frac{d\omega_a}{dt} \right)$  – для движения системы координат  $O\xi_i$  относительно  $O_ax_i$ .

**ТЕОРЕМА сложения угловых скоростей:** Абсолютная угловая скорость тела равна векторной сумме переносной и относительной угловых скоростей тела.

**Доказательство:** Рассмотрим произвольную точку  $M$  тела  $T$  (рис. 4). При сложном движении тела эта точка также совершает движение. По теореме сложения скоростей:

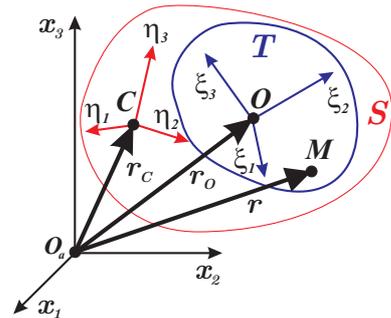


Рис. 4.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

Здесь  $\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_a - \text{абсолютная} \\ \mathbf{v}_e - \text{переносная} \\ \mathbf{v}_r - \text{относительная скорость относительно } C\eta_i \end{array} \right\} \text{ скорости относительно } O_ax_i \left. \begin{array}{l} \text{заданы} \\ \text{компонентами} \\ \text{в } O_ax_i \end{array} \right\}$

Причем  $\mathbf{v}_r = A\tilde{\mathbf{v}}_r$ , где  $\tilde{\mathbf{v}}_r$  относительная скорость относительно  $C\eta_i$ , заданная в  $C\eta_i$ .

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O + \omega_a \times \rho_{OM}, \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_O - \text{скорость полюса } O \\ \omega_a - \text{абсолют. угл. скорость } T \\ \rho_{OM} - \text{радиус-вектор } \overrightarrow{OM} \end{array} \right\} \text{ относительно } \left. \begin{array}{l} O_ax_i \\ \text{заданы} \\ \text{компонентами} \\ \text{в } O_ax_i \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CM}, \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_C - \text{скорость точки } C \\ \omega_e - \text{перенос. угл. скорость } S \\ \rho_{CM} - \text{радиус-вектор } \overrightarrow{CM} \end{array} \right\} \text{ относительно } \left. \begin{array}{l} O_ax_i \\ \text{заданы} \\ \text{компонентами} \\ \text{в } O_ax_i \end{array} \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_r = \tilde{\mathbf{v}}_{rO} + \tilde{\omega}_r \times \tilde{\rho}_{OM}, \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{v}}_{rO} - \text{скорость полюса } O \\ \tilde{\omega}_r - \text{относит. угл. скорость } T \\ \tilde{\rho}_{OM} - \text{радиус-вектор } \overrightarrow{OM} \end{array} \right\} \text{ относительно } \left. \begin{array}{l} C\eta_i \\ \text{заданы} \\ \text{компонентами} \\ \text{в } C\eta_i \end{array} \right\}$$

Для последних векторов, заданных в  $C\eta_i$ , очевидны выражения в  $O_ax_i$ :

$$\mathbf{v}_{rO} = A\tilde{\mathbf{v}}_{rO}, \quad \omega_r = A\tilde{\omega}_r, \quad \rho_{OM} = A\tilde{\rho}_{OM}$$

Итак, после подстановки приведенных выше выражений для скоростей имеем:

$$\mathbf{v}_O + \omega_a \times \rho_{OM} = \mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CM} + A(\tilde{\mathbf{v}}_{rO} + \tilde{\omega}_r \times \tilde{\rho}_{OM})$$

Учитывая, что:  $\rho_{CM} = \rho_{CO} + \rho_{OM} = \rho_{CO} + A\tilde{\rho}_{OM}$ , получим после перестановки местами слагаемых:

$$\mathbf{v}_O + \omega_a \times \rho_{OM} = \mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CO} + A\tilde{\mathbf{v}}_{rO} + \omega_e \times \rho_{OM} + A(\tilde{\omega}_r \times \tilde{\rho}_{OM})$$

Заметим, что  $(\mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CO})$  - переносная скорость точки  $O$ , т.е.  $\mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CO} = \mathbf{v}_{eO}$ , а  $A\tilde{\mathbf{v}}_{rO} = \mathbf{v}_{rO}$  - относительная скорость  $O$  (относительно  $C\eta_i$ ), заданная компонентами в  $Ox_i$ . Таким образом по теореме сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_C + \omega_e \times \rho_{CO} + A\tilde{\mathbf{v}}_{rO} = \mathbf{v}_{eO} + \mathbf{v}_{rO} = \mathbf{v}_O$$

Далее учтем свойство для ортогональных матриц:

**Свойство:** для любой ортогональной матрицы  $A$  и любых векторов  $\mathbf{a} = A\tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b} = A\tilde{\mathbf{b}}$  справедливо равенство:  $A(\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}}) = A\tilde{\mathbf{a}} \times A\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

**Объяснение:** Т.к.  $A$  - матрица поворота, т.е. если помножим вектора и потом повернем или сначала повернем, а потом перемножим – результирующий вектор всегда одинаковый.

Тогда для последнего слагаемого имеем:

$$A(\tilde{\omega}_r \times \tilde{\rho}_{OM}) = A\tilde{\omega}_r \times A\tilde{\rho}_{OM} = \omega_r \times \rho_{OM}$$

Подставляя последние два выражения в формулу сложения скоростей имеем

$$\mathbf{v}_O + \omega_a \times \rho_{OM} = \mathbf{v}_O + \omega_e \times \rho_{OM} + \omega_r \times \rho_{OM}$$

Отсюда:  $\omega_a \times \rho_{OM} = (\omega_e + \omega_r) \times \rho_{OM}$

Т.к.  $M$  - произвольная точка тела, значит вектор  $\rho_{OM}$  - любой, тогда получим:

$$\boxed{\omega_a = \omega_e + \omega_r} \quad \blacksquare$$

Здесь  $\omega_a$  и  $\omega_e$  - относительно неподвижной системы координат  $O_a x_i$ , а  $\omega_r$  - относительно подвижной системы координат  $C \eta_i$ . Но все вектора покомпонентно заданы в терминах неподвижной системы координат  $O_a x_i$ .

**ТЕОРЕМА сложения угловых ускорений:** Если твердое тело совершает сложное движение, то в каждый момент времени его абсолютное угловое ускорение равно векторной сумме переносного, относительного и добавочного угловых ускорений.

**Доказательство:** Продифференцируем по времени формулу из теоремы сложения угловых скоростей тела, учитывая относительно каких систем координат заданы, входящие в неё угловые скорости:

$$\varepsilon_a = \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} + \frac{d\omega_r}{dt} = \varepsilon_e + \frac{\tilde{d}\omega_r}{dt} + \omega_e \times \omega_r = \varepsilon_e + \varepsilon_r + \varepsilon_c$$

Итак

$$\boxed{\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_r + \varepsilon_c}$$

где  $\boxed{\varepsilon_c = \omega_e \times \omega_r}$  - добавочное ускорение.  $\blacksquare$

*Замечание:* Видно, что переносная и относительная угловые скорости входят несимметрично в добавочное ускорение, поэтому важно какое вращение считать за переносное, а какое за относительное.

## ЛЕКЦИЯ 6

### ДИНАМИКА ТОЧКИ

До сих пор мы рассматривали точку и ее движение с геометрической точки зрения, не касаясь специфики ее как частицы материи, т.е. как материальной точки. Теперь мы займемся исследованием причин, вызывающих движение точки и факторов, влияющих на движение.

**Свободная (изолированная) материальная точка** – точка, которая может занимать в пространстве произвольное положение и двигаться в любом направлении с какой угодно скоростью.

Иначе точка называется – **несвободной**, а условия стесняющие ее движением называются – **связями**.

Законы механики сформулированы для свободных тел (свободных материальных точек)

#### Сила

Путем наблюдений и опытов было установлено, что: движение тела определяется его взаимодействием с другими телами, т.е. причиной движения тела и изменения его движения является взаимодействие. В механике принимается, что такое взаимодействие определяется векторной величиной  $\mathbf{F}$ , называемой силой. Т.е.

**Сила** – является мерой механического взаимодействия тел, т.е.  $\mathbf{F}$  обладает величиной (модулем)  $|\mathbf{F}|$  и направлением (рис. 29).



Принимается (установлено в эксперименте) что в общем случае

Рис. 29.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$$

т.е. вектор силы является вектор-функцией времени  $t$ , координат (радиус-вектора)  $\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{v}$  точки  $M$  к которой сила приложена. При этом имеется в виду положение (радиус-вектор)  $\mathbf{r}$  и скорость  $\mathbf{v}$  точки - по отношению к другим телам, с которыми оно находится во взаимодействии. Например от  $t$  зависят силы вибрации ( $\mathbf{F} = a \sin \omega t$ ), от  $\mathbf{r}$  - гравитация ( $\mathbf{F} = -\alpha r r$ ), сила упругости ( $\mathbf{F} = c r$ ), от  $\mathbf{v}$  - силы трения, сопротивления движению ( $\mathbf{F} = -\alpha v v$ ). От ускорения  $\mathbf{a}$  точки  $M$  сила  $\mathbf{F}$  в классической механике не зависит.

Различают **силы контактного взаимодействия** (непосредственного соприкосновения, давление прижатых тел, трение) и **силы дальнего действия** (гравитационные, электромагнитные).

Измерять силу можно статически – уравновесивая ее известной силой (с помощью динамометра), и динамически на основе законов механики.

Как действуют эти силы, т.е. к чему, каким последствиям приводят, отвечают аксиомы, постулаты, законы механики. Но гораздо важнее знать, что происходит с телом, когда на него не действует никаких сил. Логично предположить, что в этом случае тело покоится. Но на 1-ой лекции мы убедились, что понятие покоя и движения - относительно. Т.е. все зависит с каким телом мы свяжем систему отсчета. Естественно поэтому отдать предпочтение тем из них, где закономерности движения имеют наиболее простой вид. Такими системами являются так называемые

**Инерциальные системы отсчета** - системы, в которых всякое свободное тело, не подверженное действию сил, движется равномерно и прямолинейно (или покоится как частный случай движения)

Именно для таких систем сформулировал основные законы механики И.Ньютон.

Все фактически рассматриваемые системы отсчета являются инерциальными лишь с определенной точностью. Установлено, что *гелиоцентрическая* система отсчета (начало в центре масс Солнца, координатные оси фиксируются по удаленным звездам) - инерциальна с огромной степенью точности. Однако для многих явления инерциальной можно считать систему, связанную с Землей (*геоцентрическая*). Все зависит от скорости исследуемого явления или процесса, продолжительности, размеров или габаритов тел-участников и т.д. – все относительно.

Законы классической механики открыты И.Ньютоном и опубликованы в 1687 г. в трактате «Математические принципы натуральной философии».

### I Закон Ньютона (закон инерции)

Всякое свободное тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения пока и поскольку оно не вынуждается приложенными силами изменить это состояние.

**1 утверждение:** постулирование существования инерциальной системы координат

**2 утверждение:** *естественным состоянием тела* (в отсутствии сил) является

Покой или равномерной прямолинейное движение

Никакой разницы между ними не делается. Отсюда, логически вытекает вывод: если одна система инерциальная (а такие есть по первому утверждению), а другая относительно нее покоится либо поступательно (т.е. без вращения), равномерно и прямолинейно движется – то она тоже инерциальна, поскольку относительно нее тело не подвержено действию сил также будет покоится либо равномерно и прямолинейно двигаться. Т.е. эти системы эквивалентны: **Принцип относительности Галилея**.

**3 утверждение:** только силы (как причины) могут вывести тело из естественного состояния, т.е. только сила может сообщить телу ускорение, т.е. изменить его равномерное прямолинейное движение или вывести из покоя. Именно в этом смысле мы говорим о существовании силы, приложенной к материальной точке

Только в результате действия силы у точки возникает ускорение (уже здесь наблюдается связь между силовым, т.е. динамическим воздействием и результатом кинематического восприятия). Какое именно ускорение приобретает точка в результате действия на нее силы отвечает II-ой закон Ньютона (основной). Но сначала

### Масса

Наблюдение и опыт показывают, что все материальные тела обладают «врожденным» (внутренним) свойством, из-за которого тело «с трудом» (не сразу, а постепенно, т.е. когда это можно зафиксировать) выводится из состояния покоя или изменяет свое движение. «Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называют **инертностью (инерцией)**. Т.е. у каждого материального тела существует некоторая внутренняя характеристика, которая приводит к различным «откликам», т.е. изменениям движения, для различных тел - при одинаковом силовом воздействии.

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в точке, называют – **массой** ( $m$ ).

**Материальная точка** - геометрическая точка, обладающая инертностью, и, следовательно, с динамической стороны характеризуется своей массой.

Масса - скалярная, существенно положительная величина, обладающая свойством аддитивности: массы материальных точек складываются.

Масса материальной точки - постоянная величина, не зависящая от обстоятельств движения (если её скорость существенно меньше световой скорости  $c \approx 300000$  км/сек).

## II Закон Ньютона (основной закон)

Произведение массы точки на ее ускорение равно силе, действующей на точку

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Т.к.  $m > 0$  то вектор ускорения  $\mathbf{a}$  всегда коллинеарен вектору силы  $\mathbf{F}$  т.е.  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{F}$  направлены в одну сторону. Альтернативная математическая запись основного закона динамики:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$$

В представленном виде II Закон Ньютона можно ещё сформулировать так: ускорение  $\mathbf{a}$  приобретаемое свободной материальной точкой в результате действия силы  $\mathbf{F}$ , направлено в ту же сторону что и сила, и пропорционально этой силе. Коэффициентом пропорциональности между получаемым ускорением и действующей силой является мера инертности точки - масса  $m$ . Т.о. чем больше  $m$ , тем меньше по величине (по модулю)  $\mathbf{a}$ .

$\mathbf{F}$ ,  $m$  - динамические величины,  $\mathbf{a}$  - кинематическая величина.

При  $\mathbf{F} = 0$  имеем  $\mathbf{a} = 0$ , т.е.  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = 0$ , отсюда получим  $v = \text{const}$  - т.е. получили закон инерции. Но хоть I Закон Ньютона и получен как следствие из II Закона Ньютона (при частном случае силы), важность его не утрачивается, поскольку сам II Закон Ньютона изначально справедлив только в инерциальной системе координат (существование которых как раз и постулируется в I Законе Ньютона).

Взаимодействие 2-х тел определяется (уже система тел, а не одно)

## III Закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия)

Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположно направленными вдоль прямой, соединяющей точки

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие

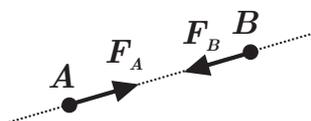


Рис. 30.

$\mathbf{F}_A$  - сила на A со стороны B,  $\mathbf{F}_B$  - сила на B со стороны A.

$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$  - математическая запись III Закона Ньютона

**Замечание:** Классическая механика рассматривает взаимодействие материальных точек только по III Закону Ньютона.

## Аксиома независимости действия сил

Силы взаимодействия 2-х материальных точек не могут быть изменены возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорости этих точек остаются неизменными.

Отсюда имеем: если точки  $M_i$  одновременно действуют на точку  $M$  с силами  $\mathbf{F}_i$ , то полное ускорение  $\mathbf{a}$  точки  $M$  складывается из ускорений  $\mathbf{a}_i$ , получаемых точкой  $M$ , при действии каждой силы от точек  $M_i$  - по отдельности:  $\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i$

Учитывая, что по II Закону Ньютона  $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m$ , где  $m$  - масса точки, имеем:

$$\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_i = \frac{1}{m} \mathcal{F} \quad \text{где обозначено } \mathcal{F} = \sum \mathbf{F}_i \text{ - равнодействующая сил } \mathbf{F}_i$$

Т.о. получили

**Закон сложения сил** (альтернативная формулировка аксиомы независимости действия сил) ускорение точки, получаемое в результате действия нескольких сил  $\mathbf{F}_i$  равно ускорению сообщаемому точке силой  $\mathcal{F}$ , являющейся равнодействующей системы действующих сил (векторной суммой системы сил  $\mathbf{F}_i$ ).

## Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Основной закон динамики, устанавливающий зависимость между кинематическими и динамическими характеристиками движения точки, позволяет получить дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять координаты точки. По сути II Закон Ньютона в форме

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathcal{F} \left( t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$$

является дифференциальным уравнением движения свободной точки в векторной форме, относительно инерциальной системы отсчета, т.е. дифференциальным уравнением 2-го порядка на  $\mathbf{r}(t)$ .

Каждому векторному уравнению соответствует 3 скалярных покомпонентных в фиксированной системе координат. Для этого необходимо разложить обе части векторного уравнения в нужном базисе:  $\mathbf{a} = \sum a_i^* \mathbf{e}_i$ ,  $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_i^* \mathbf{e}_i$  (например ортогональном криволинейном базисе), где  $a_i^*$ ,  $\mathcal{F}_i^*$  - физические компоненты ускорения и силы, т.е. проекции на оси выбранной системы координат. Таким образом получим скалярные дифференциальные уравнения движения материальной точки вида:

$$ma_i^* = \mathcal{F}_i^*, \quad (i = 1, 2, 3)$$

В декартовых осях:  $m\ddot{x}_i(t) = \mathcal{F}_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$   $(i = 1, 2, 3)$

В цилиндрических осях:

$ma_r =$	$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \mathcal{F}_r(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$	– радиальное
$ma_\varphi =$	$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \mathcal{F}_\varphi(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$	– трансверсальное
$ma_z =$	$m\ddot{z} = \mathcal{F}_z(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$	– осевое

В естественных осях:

$ma_\tau =$	$m\ddot{s} = \mathcal{F}_\tau(t, s, \dot{s})$	– касательное
$ma_n =$	$m\dot{s}^2/\rho = \mathcal{F}_n(t, s, \dot{s})$	– нормальное
$ma_b =$	$0 = \mathcal{F}_b(t, s, \dot{s})$	– бинормальное

### Основные задачи динамики точки

**Прямая задача** – определение силы по заданному движению точки.

**Обратная задача** – определение движения по заданным силам и начальному состоянию.

Для решения прямой задачи необходимо знание движение точки в какой-либо инерциальной системе отсчета (закон движения). Например, в криволинейных координатах:  $q_\alpha = q_\alpha(t)$  - уравнения движения. Причем считаем (предполагаем), что  $q_\alpha(t) \in \mathcal{C}^2$  т.е. являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями. Тогда из дифференциальных уравнений движения (в криволинейных координатах в общем виде):

$$ma_\alpha^* = \frac{m}{h_\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_\alpha} \right] = \mathcal{F}_\alpha^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

где  $\mathbf{v} = \sum_{\alpha} h_\alpha \dot{q}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  определим силу в любой момент времени,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ .

Для ответа на вопрос о существовании и единственности решения обратной задачи динамики, вначале сформулируем теорему из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) о разрешимости начальной задачи для нормальной системы ДУ (без доказательства):

$$\text{Задача Коши:} \quad \begin{cases} \frac{du_k(t)}{dt} = f_k(t, u_1, \dots, u_n) & - \text{нормальная система ДУ} \\ u_k(0) = u_k^0, \quad (k = 1, \dots, n) & - \text{начальные условия} \end{cases}$$

(начальная задача)

**ТЕОРЕМА:** Пусть правые части ДУ из задачи Коши  $f_k(t, u_1, \dots, u_n)$  являются непрерывными функциями и обладают непрерывными производными (т.е. являются непрерывно-дифференцируемыми) в некоторой окрестности начальных значений  $u_k^0$ , тогда на некотором интервале начальных значений существует единственная система функций  $u_k(t)$ , удовлетворяющая уравнениям системы и начальным условиям (т.е. решение).

*Замечание:* требование гладкости правых частей ДУ на самом деле можно ослабить формулируя их отдельно для  $t$  и  $u_k$ , а именно необходима лишь непрерывность по  $t$  и непрерывная дифференцируемость по  $u_k$ .

Представим наши дифференциальные уравнения движения в нормальной форме. Для ускорения точки в криволинейном базисе справедливо представление:

$$a_\alpha^* = \frac{1}{h_\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \quad \text{где} \quad T = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_\sigma (v_\sigma^*)^2 = \frac{1}{2} \sum_\sigma (h_\sigma \dot{q}_\sigma)^2$$

Здесь  $h_\sigma = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dq_\sigma} \right|$  - коэффициенты Ламе - известные функции обобщенных координат  $q_\alpha$ .  
Выполняя дифференцирование получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = h_\alpha^2 \dot{q}_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} (h_\alpha^2 \dot{q}_\alpha) = h_\alpha^2 \ddot{q}_\alpha + \sum_\sigma \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_\sigma \frac{\partial h_\sigma^2}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\sigma^2$$

Поставляя в выражение для ускорения имеем:

$$a_\alpha^* = \frac{1}{h_\alpha} \left[ h_\alpha^2 \ddot{q}_\alpha + \sum_\sigma \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\alpha - \frac{1}{2} \sum_\sigma \frac{\partial h_\sigma^2}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\sigma^2 \right]$$

Тогда дифференциальные уравнения движения точки примут вид:

$$m \left[ h_\alpha \ddot{q}_\alpha + \frac{1}{2h_\alpha} \sum_\sigma \left( 2 \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma - \frac{\partial h_\sigma^2}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\sigma \right) \dot{q}_\alpha \right] = \mathcal{F}_\alpha^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Отсюда получим нормальную систему дифференциальных уравнений на  $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\dot{q}_\alpha(t)}{dt} &= G_\alpha^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{mh_\alpha} \mathcal{F}_\alpha^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2h_\alpha^2} \sum_\sigma \left( 2 \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma - \frac{\partial h_\sigma^2}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\sigma \right) \dot{q}_\alpha \\ \frac{dq_\alpha(t)}{dt} &= \dot{q}_\alpha(t) \end{aligned}} \quad \leftarrow \text{добавим уравнение для нормальности системы ДУ}$$

Для формулировки начальной задачи добавим начальные условия:

$$\boxed{q_\alpha(0) = q_\alpha^0, \quad \dot{q}_\alpha(0) = \dot{q}_\alpha^0}$$

Тогда обращаясь к сформулированной теореме о разрешимости начальной задачи для нормальной системы ДУ, получим:

**ТЕОРЕМА:** Если задана масса точки, выражения радиус-вектора точки от обобщенной координат  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ , т.е.  $x_i(q_1, q_2, q_3)$  ( $i = 1, 2, 3,$ ) которые являются трижды

непрерывно-дифференцируемыми функциями, физические компоненты силы  $\mathcal{F}_\alpha^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  как непрерывно-дифференцируемые функции координат и скоростей, то существует и единственно решение уравнений движения точки  $q_\alpha(t)$ , удовлетворяющее заданным начальным условиям (в некоторой окрестности начального состояния).

Аналогом данной теоремы в классической механике является, считаемый справедливым, **принцип детерминированности Ньютона-Лапласа**. Согласно принципу состояние механической системы в любой фиксированный момент времени однозначно определяет всё её движение (как будущее, так и прошлое). Т.о. движение системы  $N$  материальных точек является вполне детерминированным: задание начальных положений  $\mathbf{r}_\nu^0$  и скоростей  $\mathbf{v}_\nu^0$  точек единственным образом определяет их дальнейшее движение, т.е. векторные функции  $\mathbf{r}_\nu(t)$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ).

## ЛЕКЦИЯ 7

### ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Материальное тело всегда движется в окружении других материальных тел, с которыми оно взаимодействует, например, касаясь друг друга. При этом, конечно, ограничиваются возможности движения тела: на положение тела и его скорость накладываются определенные ограничения называемые **связями**, которые должны выполняться при любых силах, действующих на тело. При наличии связей, материальная точка уже не может двигаться как угодно и становится несвободной. Мы рассмотрим самый простейший вид ограничений на положение точки. Уравнения движения несвободной точки существенно отличается от уравнений свободной точки.

#### Движение точки по неподвижной поверхности

Пусть точка движется по поверхности описываемой скалярным уравнением  $f(\mathbf{r}) = 0$  (или  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ) (такая связь называется **геометрической**, и поскольку время явно не входит в выражение - неподвижная поверхность, связь называется **стационарной**). Найдем какие ограничения на скорость и ускорение точки возникают. Так как радиус-вектор точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  должен удовлетворять уравнению связи, т.е.

$$f(\mathbf{r}(t)) = 0$$

продифференцируем это выражение по  $t$ , считая функцию  $f(\mathbf{r})$  непрерывно-дифференцируемой нужное количество раз:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \frac{df}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{df}{d\mathbf{r}} = 0$$

Таким образом получили  $\mathbf{v} \cdot \frac{df}{d\mathbf{r}} = 0$  т.е.  $\mathbf{v} \perp \frac{df}{d\mathbf{r}}$

Вектор  $\frac{df}{d\mathbf{r}} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$  в математическом анализе называют *градиентом* ( $\nabla f$ ).

Он направлен по *нормали* к поверхности:  $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ , т.е. перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в данной точке. Заметим, что  $|\mathbf{n}| = 1$  - единичный вектор. Значит полученное условие является ограничением на скорость точки:  $\mathbf{v}$  ортогонален нормальному вектору, а следовательно вектор скорости  $\mathbf{v}$  лежит в касательной плоскости.

Еще раз продифференцируем по  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{df}{d\mathbf{r}} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{df}{d\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d^2 f}{d\mathbf{r}^2} \cdot \mathbf{v} \right) = \nabla f \cdot \mathbf{a} + D_2 f = 0$$

получили ограничение на ускорение:

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} + D_2 f = 0$$

где за  $D_2 f$  обозначена однородная квадратичная функция компонентов скоростей:

$$D_2 f = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d^2 f}{d\mathbf{r}^2} \cdot \mathbf{v} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} v_\alpha v_\beta$$

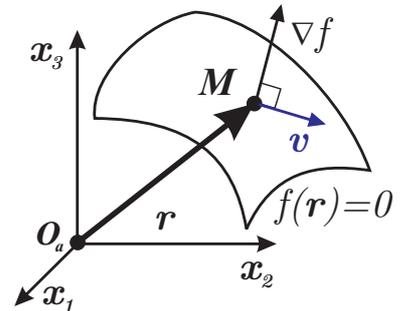


Рис. 31.

## Обобщение второго закона Ньютона на движение несвободной точки

Пусть точка перемещается по поверхности  $f(\mathbf{r}) = 0$  под действием силы  $\mathbf{F}$ . Если бы она была свободна, т.е. никаких ограничений, тогда по основному закону динамики, ускорение точки:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ . Однако в общем случае ниоткуда не следует, что условие на ускорение

$$\nabla f \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} + D_2 f = 0$$

будет выполняться. Выход из этого противоречия находится если основной закон динамики в случае несвободной точки обобщить в виде:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

т.е. кроме силы  $\mathbf{F}$  действует ещё сила  $\mathbf{R}$ , обусловленная присутствием связи. Сила  $\mathbf{R}$  называется **реакцией связи**. И реакция  $\mathbf{R}$  должна быть такой чтобы новое равенство было совместимо с условием на ускорение.

Найдем его. Выразим ускорение из последнего выражения:  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{R}}{m}$ . Подставляя его в условие на ускорение для несвободной точки имеем:

$$\nabla f \cdot \frac{\mathbf{F} + \mathbf{R}}{m} + D_2 f = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot \mathbf{R} = -(\nabla f \cdot \mathbf{F} + mD_2 f)$$

Отсюда

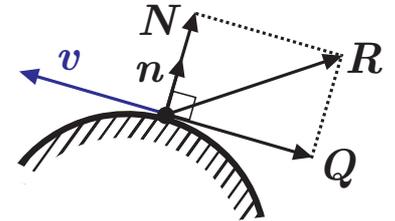
$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \cdot \mathbf{R} = \boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = -\frac{\nabla f \cdot \mathbf{F} + mD_2 f}{|\nabla f|}}$$

Т.е. получается уравнение связи не полностью определяет реакцию, а только ее нормальную составляющую.

Представим реакцию связи в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{Q}$$

где  $\mathbf{N}$  - **нормальная реакция** - проекция  $\mathbf{R}$  по нормаль к поверхности, а  $\mathbf{Q}$  - **тангенциальная реакция** - проекция  $\mathbf{R}$  на касательную плоскость к поверхности (рис. 32). Т.е.



$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \perp \mathbf{Q}$$

Рис. 32.

Величина  $N$  определяется полученной выше формулой, а тангенциальная реакция, лежащая в касательной плоскости, вообще говоря, может быть произвольной.

Выразим  $\mathbf{N}$  в виде:

$$\mathbf{N} = \lambda \nabla f, \quad \text{где} \quad \lambda = -\frac{\nabla f \cdot \mathbf{F} + mD_2 f}{|\nabla f|^2}$$

$\lambda$  - коэффициент пропорциональности, вообще говоря - переменный, называется **множителем связи**. Его введение позволяет заменить три неизвестных  $(N_1, N_2, N_3) = \mathbf{N}$  - одной величиной  $\lambda$ .

Для установления вида тангенциальной реакцией требуется привлечь дополнительные соображения. На основе экспериментального изучения движения тела по поверхности было установлено, что тангенциальная реакция пропорциональна по модулю нормальной реакции и направлена против движения:

$$\boxed{\mathbf{Q} = -kN \frac{\mathbf{v}}{v}}$$

где  $\mathbf{v}$  - скорость движения точки по поверхности.

При равновесии точки на поверхности  $\mathbf{Q}$  направлена против возможного движения точки под действием приложенных сил, а ее модуль принимает одно из значений в интервале:

$$0 \leq Q \leq k_1 N$$

Приведенные зависимости называются **Законы Кулона для движения и равновесия**. При этом  $\mathbf{Q}$  называют также **силой трения**, а  $k(k_1)$  - **коэффициент трения (скольжения)**. Коэффициенты  $k$  и  $k_1$  определяются экспериментально и зависят от материалов движущихся тела и поверхности (обычно  $k_1 > k$ ).

Итак, полная реакция для точки, движущейся по поверхности, имеет вид:

$$\mathbf{R} = \lambda \nabla f - k |\lambda \nabla f| \frac{\mathbf{v}}{v}$$

В общем случае при  $k \neq 0$  поверхность называется **шероховатой** (поверхность с трением). В частном случае при  $k = 0$  поверхность называют **идеальной** или **гладкой**.

Реакции связей называют иногда **пассивными силами**, т.к. они заранее не известны, зависят не только от связи (формы, материала), но и от других действующих сил, называемых активными, и от движения самой точки. **Активные силы**, действуя на покоящуюся точку могут сообщить ей определенное движение (отсюда и «активные»), а реакции не могут. Реакция наперед не известна и подлежит определению.

С учетом полученного выражения реакции **основной закон динамики для несвободной точки** выглядит так:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f - k |\lambda \nabla f| \frac{\mathbf{v}}{v}$$

Т.е. внешне имеет тот же вид, что и закон движения свободной точки ( $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ ), если к активным силам добавить реакцию связи. Т.о. можно сформулировать

**Принцип освобожденности от связей:** всякую несвободную точку можно рассматривать как свободную, если мысленно отбросить связь, а ее действие заменить силой - реакцией связи (неизвестной)

В основном законе динамики фигурирует функция  $f(\mathbf{r})$ , определяющая уравнение поверхности. Поэтому для замыкания задачи о движении точки по поверхности к дифференциальным уравнениям движения необходимо добавить уравнение связи:  $f(\mathbf{r}(t)) = 0$ .

### Движение точки по линии

Пусть точка  $M$  движется по линии  $L$ . Представим линию как пересечение 2-х поверхностей:  $f_1(\mathbf{r}) = 0$  и  $f_2(\mathbf{r}) = 0$  (рис. 33).

Реакции поверхностей  $f_1$  и  $f_2$  сводятся к силам:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{Q}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{N}_2 + \mathbf{Q}_2$$

где  $\mathbf{N}_1 = \lambda_1 \nabla f_1$ ,  $\mathbf{Q}_1$  - в касательной плоскости к  $f_1(\mathbf{r}) = 0$ ,  $\mathbf{N}_2 = \lambda_2 \nabla f_2$ ,  $\mathbf{Q}_2$  - в касательной плоскости к  $f_2(\mathbf{r}) = 0$ .

Отметим, что вектор скорости  $\mathbf{v}$  точки  $M$  направлен по касательной к линии  $L$  (и поверхностям). Т.к. поверхность действует на точку с некоторой силой-реакцией, то логично положить, что

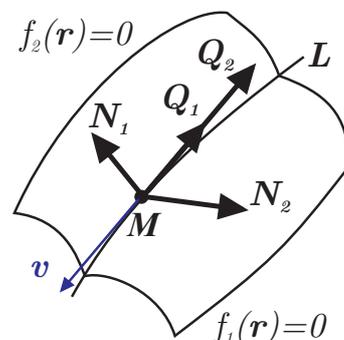


Рис. 33.

воздействие линии также сводится к реакции  $\mathbf{R}$  равной сумме реакций поверхностей:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 + \mathbf{Q}$$

где  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = -kN \frac{\mathbf{v}}{v}$ ,  $k$  - коэффициент трения,

$$N = N_1 + N_2, \quad N = \sqrt{(\lambda_1 \nabla f_1)^2 + (\lambda_2 \nabla f_2)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \nabla f_1 \nabla f_2}$$

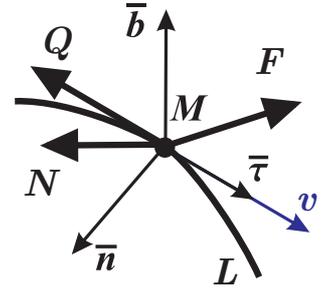
Т.о. при движении по линии основной закон движения следует брать внешне таким же:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 - kN \frac{\mathbf{v}}{v}$$

### Дифференциальные уравнения движения точки вдоль линии в естественных осях

Пусть траектория  $L$  точки  $M$ , являющаяся шероховатой линией - известна:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , где  $s = s(t)$  - дуговая координата, характеризующая закон движения по траектории, который требуется найти. На точку действует сила  $\mathbf{F}$  и реакции  $\mathbf{N}$  - нормальная,  $\mathbf{Q}$  - сила трения. Основной закон движения несвободной точки имеет вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{Q}$$



Спроектируем все силы на естественные оси  $(\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  (рис. 34):

Рис. 34.

$$\mathbf{F} = (F_\tau, F_n, F_b) - \text{компоненты активной силы}$$

$\mathbf{N}$  - лежит в нормальной плоскости, поэтому:  $\mathbf{N} = (0, N_n, N_b)$

$\mathbf{Q} = -kN \frac{\mathbf{v}}{v} = -kN \boldsymbol{\tau}$  - лежит в касательном направлении, поэтому:  $\mathbf{Q} = (-kN, 0, 0)$

Дифференциальные уравнения движения точки вдоль линии в естественных осях:

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= F_\tau - kN \\ m\dot{s}^2/\rho &= F_n + N_n \\ 0 &= F_b + N_b \end{cases}$$

где  $N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$ .

Последние 2 уравнения дают выражения компонентов нормальной реакции от  $t, \dot{s}, \ddot{s}$ :

$$N_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} - F_n, \quad N_b = -F_b \quad \text{отсюда} \quad N = \sqrt{\left(m \frac{\dot{s}^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}$$

А первое уравнение позволяет определить движение, из **закона движения точки в естественной форме**:

$$m\ddot{s} = F_\tau - k \sqrt{\left(m \frac{\dot{s}^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}$$

где  $F_\tau, F_n, F_b$  - известные функции  $t, \dot{s}, \ddot{s}$ , считаемые непрерывно-дифференцируемыми.

Добавляя к ним начальные данные  $s(0) = s_0, \dot{s}(0) = \dot{s}_0$  получим задачу Коши, имеющую единственное решение.

## Равновесие точки

Говорят, что **точка находится в равновесии** относительно некоторой инерциальной системы отсчета, если ее положение в этой системе не меняется со временем (или, что то же самое, если ее скорость тождественно равна нулю).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv 0 \iff \mathbf{v}(t) \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v} dt + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \text{const}$$

**ТЕОРЕМА:** Для равновесия первоначально покоившейся точки необходимо и достаточно равенство нулю равнодействующих всех приложенных сил.

**Доказательство:** *Необходимость:* Пусть точка покоится:  $\mathbf{v}(t) = \text{const}$ , тогда по II Закону Ньютона:  $\mathcal{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ .

*Достаточность:* Пусть  $\mathbf{v}(0) = 0$ , и  $\mathcal{F} = 0$  тогда по II Закону Ньютона:  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F} = 0$  т.е.  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ , следовательно  $\mathbf{v}(t) = \text{const} = \mathbf{v}(0) = 0$ . ■

Таким образом, II Закон Ньютона в равновесии принимает специальную форму:

$$\boxed{\mathcal{F} = 0} \quad - \quad \text{уравнения равновесия точки}$$

Заметим, что хоть в общем случае  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  для равновесия  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r})$  (от скорости очевидно не зависит т.к. она равна нулю, а в независимости от времени убеждаемся дифференцируя II Закон Ньютона по времени:  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = 0$ ).

*Замечание:* Если точка не свободна, то согласно основному закону динамики для несвободной точки необходимо к активным силам добавить реакции связей:

$$\boxed{\mathcal{F} + \mathbf{R} = 0} \quad - \quad \text{уравнения равновесия несвободной точки.}$$

Например, если поверхность гладкая, то уравнения равновесия принимают вид:

$$\mathcal{F} + \mathbf{N} = 0 \quad \text{или} \quad \mathcal{F} + \lambda \nabla f = 0$$

Добавляя к этим 3-м уравнениям выражение связи  $f(\mathbf{r}) = 0$  получим 4 уравнения которые позволяют найти 4 неизвестных:  $\lambda, x_1, x_2, x_3$ .

Если поверхность шероховатая, тогда возникает тангенциальная реакция  $Q$  которая по закону Кулона:  $Q \leq k_1 N$ , а уравнения равновесия принимают вид:

$$\mathcal{F} + \mathbf{N} + \mathbf{Q} = 0$$

Для замыкания задачи к ним следует добавить уравнение поверхности  $f(\mathbf{r}) = 0$ .

Из Закона Кулона имеем выражение:  $\frac{Q^2}{N^2} \leq k_1^2$ , а из уравнений равновесия  $\mathcal{F} = -\mathbf{N} - \mathbf{Q}$ .

Отсюда  $\mathcal{F}^2 = N^2 + Q^2 + 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q} = N^2 + Q^2$  (т.к.  $\mathbf{N} \perp \mathbf{Q}$ ), значит  $Q^2 = \mathcal{F}^2 - N^2$

Подставляя полученное выражения для  $Q$  в Закон Кулона получим:

$$\frac{Q^2}{N^2} = \frac{\mathcal{F}^2 - N^2}{N^2} = \frac{\mathcal{F}^2}{N^2} - 1 \leq k_1^2 \quad \text{т.е. Закон Кулона принимает форму: } \frac{N^2}{\mathcal{F}^2} \geq \frac{1}{1 + k_1^2}$$

Кроме того из уравнений равновесия:  $\mathcal{F} \cdot \nabla f = -\mathbf{N} \cdot \nabla f - \mathbf{Q} \cdot \nabla f = -\lambda |\nabla f|^2$  (т.к.  $\mathbf{N} = \lambda \nabla f$ ).

Отсюда  $(\mathcal{F} \cdot \nabla f)^2 = \lambda^2 |\nabla f|^4 = N^2 |\nabla f|^2$ , значит  $N^2 = \frac{(\mathcal{F} \cdot \nabla f)^2}{|\nabla f|^2}$

Подставляя последнее выражение в новую форму Закона Кулона получим

$$\boxed{\frac{(\mathcal{F} \cdot \nabla f)^2}{\mathcal{F}^2 |\nabla f|^2} \geq \frac{1}{1 + k_1^2}}$$

Полученное неравенство представляет собой условие для равновесия точки на шероховатой поверхности и определяет некоторую часть поверхности - **область равновесия** (рис. 35).

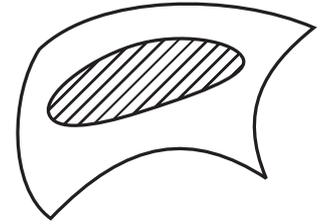


Рис. 35.

### Принцип Даламбера

**Силой инерции** точки называется вектор, равный по величине произведению массы точки на ее ускорение и направленный против ускорения:  $\mathbf{J} = -m\mathbf{a}$  (это не обычная сила, только вектор имеющий размерность силы).

**Принцип Даламбера:** Если в любой момент времени к движущейся несвободной точке приложить ее силу инерции, то она уравновесит действующие на точку активные силы и реакции связей:

$$\mathcal{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0$$

- форма уравнений равновесия, но для динамики (эффективен в динамике систем точек).

## ЛЕКЦИЯ 8

### ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Ньютоновские законы механики, как уже говорилось, справедливы не в любой, а только в инерциальной системе отсчета. Такая система характеризуется тем, что свободная от сил точка движется относительно неё прямолинейно и равномерно, т.е. по инерции. Однако, в ряде случаев представляет интерес движение точки относительно системы отсчета, не являющейся инерциальной, т.е. которая может как угодно перемещаться по отношению к инерциальной системе отсчета. Такое движение называют **относительным**. Важно поэтому установить основной закон, управляющий относительным движением. Это позволит рассматривать широкий класс задач и, в частности, оценить ту ошибку, которую допускают пренебрегая неинерциальностью системы.

Рассмотрим материальную точку  $M$  массой  $m$ , находящуюся под действием силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Свяжем с некоторым телом сопутствующую систему координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , которая перемещается относительно инерциальной системы координат  $O_ax_1x_2x_3$  произвольным заданным образом (рис. 36).

Уравнение (векторное) движения точки  $M$  в системе координат  $O_ax_i$  по II Закону Ньютона:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$$

Заменим  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$  по теореме Кориолиса:

$$\boxed{m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}^e + \mathbf{J}^c}$$

где вектора  $\mathbf{J}^e$ ,  $\mathbf{J}^c$  имеют вид:

$$\boxed{\mathbf{J}^e = -m\mathbf{a}^e = -m(\mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}))} \quad - \quad \text{переносная сила инерции}$$

$$\boxed{\mathbf{J}^c = -m\mathbf{a}^c = -m2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r} \quad - \quad \text{кориолисова сила инерции}$$

Согласно кинематическим формулам Эйлера угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  выражается через углы Эйлера, являющиеся функциями  $t$ , значит  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ . Отсюда угловое ускорение:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  — также функция времени:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ . Т.о. силы инерции являются функциями переменных:  $t$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{v}_r = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}$ :  $\mathbf{J}^e = \mathbf{J}^e(t, \boldsymbol{\rho})$ ,  $\mathbf{J}^c = \mathbf{J}^c\left(t, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right)$

Сила  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  определяет, как и говорилось, величину механического взаимодействия материальной точки с другими материальными телами. И зависит, фактически, не от абсолютного положения ( $\mathbf{r}$ ) и абсолютной скорости ( $\mathbf{v}$ ), а от взаимного относительного расположения и от относительной скорости взаимодействующих тел (скоростей точек относительно друг друга). По этой причине силу  $\mathbf{F}$  можно представить как:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}_*, \mathbf{v} - \mathbf{v}_*)$$

где  $\mathbf{r}_*$  и  $\mathbf{v}_*$  абсолютные радиус-вектор и скорость точки с которой взаимодействует  $M$ .

Для любых двух точек справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_2 \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$$

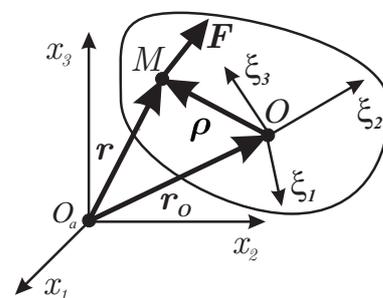


Рис. 36.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_1 + \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1}{dt} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2} = \mathbf{v}_O + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_2}{dt} \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_2}{dt} - \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1}{dt} = \mathbf{v}_{r2} - \mathbf{v}_{r1}$$

потому что силы, зависящие от скорости, это силы контактного взаимодействия (вязкого трения, сопротивления). Поэтому для этих сил  $\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_1$ , а значит переносное вращение  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) = 0$ . Отсюда:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}_*, \mathbf{v} - \mathbf{v}_*) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_*, \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_{r*}) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_r)$$

Далее, учитывая, что относительное ускорение  $\mathbf{a}_r$  равно 2-ой относительной производной от радиус-вектора:  $\mathbf{a}_r = \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2}$ , а также зависимость сил инерции от переменных (см. выше), получим:

$$\boxed{m \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \boldsymbol{\rho}, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right) + \mathbf{J}^e(t, \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{J}^c\left(t, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right)}$$

Или в сопутствующей системе координат  $O\xi_\alpha$ , с учетом введенных ранее обозначений:

$$\boldsymbol{\rho} = A\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt} = A \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}, \quad \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = A \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2}, \quad \mathbf{F} = A\tilde{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{J}^e = A\tilde{\mathbf{J}}^e, \quad \mathbf{J}^c = A\tilde{\mathbf{J}}^c$$

где  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{J}}^e, \tilde{\mathbf{J}}^c$  - вектора, заданные по координатам в сопутствующих осях ( $A$  - матрица перехода от  $O\xi_\alpha$  к  $Ox_i$ ) получим:

**Основной закон динамики относительного движения точки**

$$\boxed{m \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = \tilde{\mathbf{F}}\left(t, \boldsymbol{\rho}, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right) + \tilde{\mathbf{J}}^e(t, \boldsymbol{\rho}) + \tilde{\mathbf{J}}^c\left(t, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right)}$$

Обратим внимание, что он записан в неинерциальной системе координат  $O\xi_\alpha$ . А соотношение, приведенное выше, является аналогичной формой основного закона относительного движения точки, но в инерциальной системе координат  $O_a x_i$ .

Сравнивая его со II Законом Ньютона  $m \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ , заключаем, что уравнение относительного движения можно составить так же, как и уравнения абсолютного движения, если к действительным силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции. Т.е.  $\mathbf{J}^e$  и  $\mathbf{J}^c$  являются поправками на неинерциальность системы координат. Эти векторы были названы силами, благодаря их силовой размерности (масса-ускорение) и непосредственной возможности измерять их динамометром. На самом деле их нельзя отождествлять с реальными действительными силами, потому что действительные силы - всегда силы взаимодействия материальных тел, а силы инерции этим свойством не обладают. Поэтому иногда их еще называют «фиктивными» силами.

### Принцип относительности Галилея

Рассмотрим частный случай, когда подвижная система координат  $O\xi_\alpha$  движется поступательно, прямолинейно и равномерно. Тогда легко видеть, что  $\mathbf{a}_O = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega} = 0$  и матрица поворота  $A = \text{const}$ . Значит  $\tilde{\mathbf{J}}^e = -m\tilde{\mathbf{a}}^e = -m(\tilde{\mathbf{a}}_O + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}})) = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{J}}^c = -2m\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{v}}_r = 0$ , основной закон динамики относительного движения принимает вид

$$m \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = \tilde{\mathbf{F}}\left(t, \boldsymbol{\rho}, \frac{d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{dt}\right)$$

такой же как и динамическое уравнение абсолютного движения (II Закон Ньютона). Это означает, что при таком движении среды, относительное движение будет происходить по тем же законам, что и абсолютное. Следовательно любая подвижная система координат, двигающаяся указанным способом также будет инерциальной. Т.о. инерциальных систем отсчета оказывается бесчисленное множество в силу предыдущего. Мы получили:

**Принцип Галилея:** Всякая система, движущаяся поступательно, прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы также будет инерциальной.

Во всех инерциальных системах отсчета (система координат + часы) динамические уравнения движения имеют одинаковый вид, и, значит, все эти системы - равноправны. Следовательно, нет никаких оснований предпочесть одну из этих систем другой. Т.о. вопрос о том, какая из двух инерциальных систем отсчета покоится, а какая движется, оказывается лишенным физического смысла. Равноправность всех инерциальных систем является объективной реальностью.

### Относительное равновесие точки

Частным видом относительного движения является **относительный покой** при котором  $\tilde{\rho} \equiv \text{const}$ . Условие его дается в

**ТЕОРЕМА:** Для относительного равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы точка первоначально покоилась и равнялась нулю равнодействующая обычных (действительных) сил и переносной силы инерции.

**Доказательство:** *Необходимость.* Если точка находится в относительном покое:  $\tilde{\rho} \equiv \text{const}$ , тогда  $\tilde{v}_r(t) = \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = 0$ ,  $\tilde{a}_r = \frac{d\tilde{v}_r}{dt} = 0$ ,  $\tilde{J}^e = -2m\tilde{\omega} \times \tilde{v}_r = 0$  и уравнения относительного движения дают:  $\tilde{F} + \tilde{J}^e = 0$ .

*Достаточность.* Если точка вначале покоилась  $\tilde{v}_r(0) = 0$  и  $\tilde{F} + \tilde{J}^e = 0$  тогда из закона относительного движения точки следует:  $m \frac{d^2\tilde{\rho}}{dt^2} = -2m\tilde{\omega} \times \tilde{v}_r$ . Умножая выражение скалярно на  $\tilde{v}_r$  получим:  $\tilde{v}_r \cdot \frac{d^2\tilde{\rho}}{dt^2} = 0$ . Учитывая, что  $\tilde{v}_r = \frac{d\tilde{\rho}}{dt}$  отсюда имеем:  $\tilde{v}_r \cdot \frac{d^2\tilde{\rho}}{dt^2} = \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \cdot \frac{d^2\tilde{\rho}}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right)^2 = 0$ , следовательно  $\tilde{v}_r = \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \text{const}$ , а в силу начальных условий получаем  $\tilde{v}_r(t) = 0$ . ■

$\tilde{F} + \tilde{J}^e = 0$  — называются **уравнениями относительного равновесия точки**

### Равновесие точки в окрестностях Земли

Рассмотрим равновесие точки подвешенной на нити вблизи поверхности Земли (рис. 37). Условие относительного равновесия будет

$$\mathbf{G} + \mathbf{P} = 0$$

где  $\mathbf{G}$  - реакция нити,  $\mathbf{P}$  - та сила, которая уравновешивает  $\mathbf{G}$ . Силу  $\mathbf{P}$  пружинный динамометр регистрирует как **силу тяжести**, таким образом наименование её тяжестью - вполне оправдано.  $\Omega = \text{const}$  - угловая скорость вращения Земли. Направление веса  $\mathbf{P}$  дает направление «вертикали» в данной точке земной поверхности. Эта вертикаль, вообще говоря, не обязана совпадать с направлением земного радиуса, если учитывать вращение Земли.

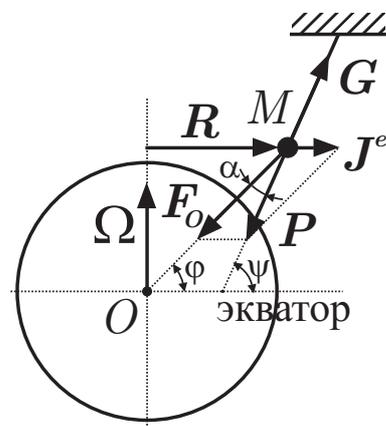


Рис. 37.

Угол  $\varphi$  между радиусом и плоскостью экватора называют **геоцентрической широтой** места. Угол  $\psi$  между вертикалью и плоскостью экватора называют **географической широтой**. Из рисунка видно  $\psi = \varphi + \alpha$ , где  $\alpha$  - угол отклонения радиуса от вертикали.

Появление отклонения и сама величина силы тяжести  $\mathbf{P}$  является равнодействующей так называемой **гравитационной силы**  $\mathbf{F}_O$ , направленной к центру  $O$  Земли и вблизи поверхности Земли численно равной

$$m\mathbf{g}_0 = \mathbf{F}_O$$

( $\mathbf{g}_0$  - ускорение свободного падения,  $g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2$ ), а также переносной силы инерции

$$\mathbf{J}^e = -m(\mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OM})) = m\Omega^2 \mathbf{R}$$

где  $\mathbf{R}$  - радиус-вектор вращения вокруг земной оси, т.е.  $R = \rho \cos \varphi$ , ( $\rho$  - радиус Земли). Из-за направления силы инерции  $\mathbf{J}^e$  от оси вращения (в данном случае), она называется **центробежной силой инерции**. Таким образом

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_O + \mathbf{J}^e$$

Оценим  $\alpha$ . Из теоремы синусов:  $\frac{\sin \alpha}{J^e} = \frac{\sin(\pi - \psi)}{F_O}$ ,  $\sin(\pi - \psi) = \sin \psi = \sin(\varphi + \alpha)$ , име-

ем:  $\frac{\sin \alpha}{m\Omega^2 \rho \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha}{mg_0}$ , отсюда  $\text{tg } \alpha = \frac{\Omega^2 \rho}{g_0} \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi \text{tg } \alpha)$ , таким

$$\text{образом: } \text{tg } \alpha = \frac{\Omega^2 \rho \cos \varphi \sin \varphi}{g_0 - \Omega^2 \rho \cos^2 \varphi} = \frac{\frac{\Omega^2 \rho}{2g_0} \sin 2\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 \rho}{g_0} \cos^2 \varphi}$$

Конкретные значения:  $\rho = 6370 \text{ км} = 6.37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ,  $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$  ( $\approx \frac{2\pi}{24 \text{ ч}} \approx \frac{1}{4 \text{ ч}} = \frac{1}{14400 \text{ с}}$ )

Следовательно  $\frac{\Omega^2 \rho}{g_0} \approx \frac{1}{289} \approx 0.0034 \sim \varepsilon$  - очень малая величина (по сравнению с 1).

Учитывая ограниченность тригонометрических функций  $|\sin| \leq 1$ ,  $|\cos| \leq 1$  после обозначений  $\varepsilon_1 = \frac{\Omega^2 \rho}{2g_0} \sin 2\varphi$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\Omega^2 \rho}{g_0} \cos^2 \varphi$  - каждая из которых очень малая величина:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_1(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^3 + \dots) \approx \varepsilon_1 = \frac{\Omega^2 \rho}{2g_0} \sin 2\varphi$$

(здесь использовали бином Ньютона или, что то же самое, разложение в ряд Маклорена). Отсюда  $\boxed{\text{tg } \alpha = 0.0017 \sin 2\varphi}$  - очень малая величина. Учитывая, что в окрестности нуля  $\alpha \approx \text{tg } \alpha$ , окончательно получаем:

$\alpha_{\max} \approx 0.0017 \approx 0^\circ 6' - 0^\circ 7'$  достигается на широте  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha_{\min} = 0$  при  $\varphi = 0, \pi/2$ .

Таким образом, отклонение вертикали от радиуса Земли наибольшее в средних широтах и совсем отсутствует на экваторе и полюсах. Как видно, это отклонение невелико, поэтому зачастую им пренебрегают.

### Зависимость веса от широты места

Вычислим теперь величину силы веса  $\mathbf{P}$ . Спроектируем  $\mathbf{P} = \mathbf{F}_O + \mathbf{J}^e$  на вертикаль:  $P = F_O \cos \alpha - J^e \cos \psi = F_O \cos \alpha - J^e \cos(\varphi + \alpha)$ . Ввиду малости угла  $\alpha$  можно положить  $\alpha = 0$ , тогда  $P = F_O - J^e \cos \varphi = F_O - m\Omega^2 \rho \cos^2 \varphi = F_O \left(1 - \frac{m\Omega^2 \rho \cos^2 \varphi}{F_O}\right) = P(\varphi)$  Получается, что гравитационная сила  $F_O$  больше силы тяжести  $P$  везде на Земле кроме полюсов, где  $\varphi = \pm\pi/2$  т.е.  $\cos \varphi = 0$ , тогда  $P(\pm\pi/2) = F_O = mg_0$

$\frac{\Omega^2 \rho}{g_0} \approx \frac{1}{289}$  следовательно  $P(\varphi) = F_O \left(1 - \frac{\Omega^2 \rho \cos^2 \varphi}{g_0}\right) = F_O \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{289}\right)$  отсюда получим наименьшее  $P(\varphi)$  при  $\varphi = 0$ , т.е. на экваторе, где  $P(0) = F_O \left(1 - \frac{1}{289}\right) = P_{\min}$ . Отсюда ясно, что наибольшее *относительное изменение веса*:  $\frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{1}{289} \approx 0.0034$ , т.е. составляет всего 0,34%. Поэтому в большинстве технических вопросов этой разницей обычно пренебрегают. Тем не менее эта разница существенна в задачах космических полетов ракет, из-за чего все космодромы стараются сделать поближе к экватору, чтобы минимизировать расход горючего на старте ракеты, т.к. основная часть тратится там. (Прикольный пример - байка (легенда) о безуспешных попытках разбогатеть на разнице в весе золота (бриллиантов) на экваторе и в Лондоне т.к. взвешивается все на обычных мерных весах с гирьками).

### Маятник Фуко

В качестве другого примера относительного движения точки вблизи поверхности Земли, подтверждающего факт вращения Земли вокруг своей оси, рассмотрим колебания маятника (сферического) длиной  $l$  (рис. 38).

Пусть груз  $M$  массой  $m$  укреплен нитью длиной  $l$  на подвесе  $O$  (определяемом широтой  $\varphi$ ), не оказывающий сопротивления повороту плоскости качания. Будем рассматривать малые колебания маятника относительно сопутствующей системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , связанной с Землей: ось  $O\xi_3$  - через  $CO$ ,  $O\xi_1$  - по меридиану к югу,  $O\xi_2$  - по параллели на восток.

На маятник (груз) действует сила тяжести  $\mathbf{P}$  и реакция нити  $\mathbf{N} = \lambda \nabla f$ , где  $f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - l^2 = 0$  - уравнение связи,  $\lambda$  - неизвестный множитель Лагранжа. Кроме того, необходимо к маятнику приложить кориолисову силу инерции  $\tilde{\mathbf{J}}^c = -2m\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{v}}_r$  (где  $\boldsymbol{\Omega}$  - угловая скорость вращения Земли). Что касается переносной силы инерции  $\tilde{\mathbf{J}}^e$ , то мы ею пренебрежем в силу малости ее влияния и будем считать вес маятника  $\mathbf{P}$  направленным всегда вдоль оси  $O\xi_3$ .

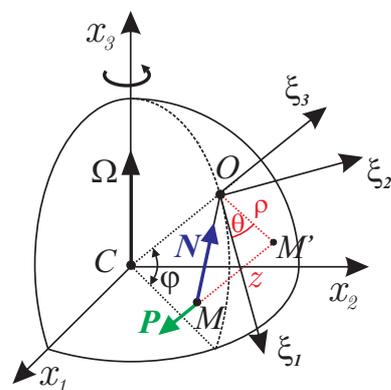


Рис. 38.

Тогда основной закон динамики относительного движения - уравнение движения маятника:

$$m\tilde{\mathbf{a}}_r = m\tilde{\mathbf{g}} + \lambda \nabla f - 2m\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{v}}_r$$

Спроектируем его на цилиндрические сопутствующие оси, т.е. будем решать задачу в системе координат  $\{\rho, \theta, z\}$  где:  $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = OM'$ ,  $\theta = \angle(O\xi_1, OM')$ ,  $z = \xi_3$ .

Компоненты относительных скорости и ускорения точки  $M$  в цилиндрических осях:  $\tilde{\mathbf{v}}_r = (v_\rho, v_\theta, v_z)$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_r = (a_\rho, a_\theta, a_z)$  имеют вид:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}, \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}$$

Уравнение связи в цилиндрических координатах имеет вид:  $f = \rho^2 + z^2 - l^2 = 0$ .

Для цилиндрической системы координат  $\{\rho, \theta, z\}$  градиент функции связи имеет вид:

$$\nabla f = \left( \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{h_z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2\rho, 0, 2z)$$

(коэффициенты Ламе  $h_\rho = 1$ ,  $h_\theta = \rho$ ,  $h_z = 1$ ). Получение выражения градиента функции в любой криволинейной системе координат находится в Приложении после лекции.

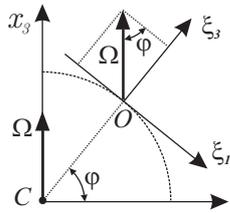


Рис. 39.

Вектор  $\tilde{\Omega}$  сопутствующих осей  $O\xi_\sigma$  (рис. 39):

$$\tilde{\Omega} = (-\Omega \cos \varphi, 0, \Omega \sin \varphi),$$

а в проекциях на цилиндрические оси (рис. 40):

$$\tilde{\Omega} = (\Omega_\rho, \Omega_\theta, \Omega_z) = \Omega(-\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

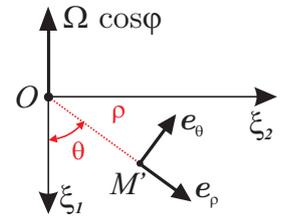


Рис. 40.

Ускорение свободного падения  $\mathbf{g} = (g_\rho, g_\theta, g_z) = (0, 0, -g)$

$$\tilde{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}}_r = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \Omega_\rho & \Omega_\theta & \Omega_z \\ v_\rho & v_\theta & v_z \end{bmatrix} = \mathbf{e}_\rho(\Omega_\theta v_z - \Omega_z v_\theta) + \mathbf{e}_\theta(\Omega_z v_\rho - \Omega_\rho v_z) + \mathbf{e}_z(\Omega_\rho v_\theta - \Omega_\theta v_\rho)$$

Тогда скалярные уравнения движения маятника Фуко в цилиндрических осях имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= 2\frac{\lambda\rho}{m} - 2\Omega(\cos \varphi \sin \theta \cdot \dot{z} - \sin \varphi \cdot \rho\dot{\theta}) \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= -2\Omega(\sin \varphi \cdot \dot{\rho} + \cos \varphi \cos \theta \cdot \dot{z}) \\ \ddot{z} &= -g + 2\frac{\lambda z}{m} - 2\Omega(-\cos \varphi \cos \theta \cdot \rho\dot{\theta} - \cos \varphi \sin \theta \cdot \dot{\rho}) \end{aligned}$$

К ним следует добавить условие связи:  $\rho^2 + z^2 = l^2$ , из которого  $z = -l\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{l^2}}$ .

Для замыкания задачи Коши добавим начальные условия:  $\rho = 0, \dot{\rho} = 0$  при  $t = 0$ .

Система дифференциальных уравнений, полученная, достаточно сложна и точное ее решение представляет значительные трудности. Однако для малых движений, при заданных начальных данных решение удается выразить через элементарные функции.

Рассмотрим *малые колебания*:  $\frac{\rho}{l} \ll 1$  ( $\rho$  - отклонение маятника от вертикали). Тогда пренебрегая везде членами второго порядка  $\left(\frac{\rho}{l}\right)^2$  и выше в силу их малости получим:

из уравнения связи:  $z = -l$   $\Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$  т.е. движение маятника - плоское,

второе уравнение преобразуется к виду:  $\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + 2\Omega \sin \varphi \cdot \dot{\rho} = 0$ ,

умножая его на  $\rho$  получим:  $\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + 2\Omega\rho \sin \varphi \cdot \dot{\rho} = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta} + \Omega\rho^2 \sin \varphi) = 0$ ,

интегрируя его по  $t$  имеем:  $\rho^2(\dot{\theta} + \Omega \sin \varphi) = \text{const}$ . Из начальных условий  $\text{const} = 0$ ,

отсюда получаем первый интеграл уравнений движения:  $\rho^2(\dot{\theta} + \Omega \sin \varphi) = 0$ .

При движении  $\rho \neq 0$ , поэтому из интеграла движения имеем:  $\dot{\theta} = -\Omega \sin \varphi$ , отсюда  $\theta = -\Omega t \sin \varphi + \theta_0$ . Координата  $\theta$  характеризует положение плоскости качания маятника, а координаты  $\rho, z$  - положение маятника в этой плоскости.

Формулы показывают, что с течением времени плоскость качания маятника поворачивается в сторону отрицательного направления отсчета угла  $\theta$  (с юга на запад), т.е. против вращения Земли. Этот эффект вращения плоскости качания маятника обнаружен Фуко в 1851г. и назван **эффектом Фуко**.

Т.к.  $|\dot{\theta}| = \Omega \sin \varphi$  значит период вращения маятника:  $T_\theta = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \varphi}$ . Т.к.  $\frac{2\pi}{\Omega} = 24$  земных часа - есть время (период) полного оборота Земли вокруг своей оси (звездное время), то время оборота маятника на широте  $\varphi$ :  $T_\theta = \frac{24}{\sin \varphi}$ . За 1 час звездного времени плоскость маятника повернется на угол  $\Delta\theta = \Omega \sin \varphi = \frac{360^\circ}{24\text{ч}} \sin \varphi \simeq 15^\circ \sin \varphi$ . Т.е. эффект

Фуко наиболее ярко выражен на полюсах ( $\varphi = \pm\pi/2$ ) и совсем отсутствует на экваторе. Для С-Петербурга  $\varphi = 59^\circ$  значит  $\Delta\theta = 13^\circ/\text{час}$  т.е. за 5 минут  $\Delta\theta = \frac{13^\circ}{60} \cdot 5 = \frac{13^\circ}{12} \approx 1^\circ$ .

Из третьего уравнения, пренебрегая последним членом, содержащим малый параметр  $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$ , получим выражение для множителя Лагранжа:  $\lambda \approx -\frac{mg}{2l}$ .

Подставляя его в первое уравнение, а также полученное выражение для  $\dot{\theta}$  и пренебрегая последним членом, содержащим малый параметр  $\Omega$  получим:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = \ddot{\rho} - \rho(\Omega \sin \varphi)^2 \approx \ddot{\rho} = 2\frac{\lambda\rho}{m} = 2\frac{\rho}{m} \left(-\frac{mg}{2l}\right) = -\frac{g\rho}{l}$$

Т.е. получили уравнение колебаний:  $\ddot{\rho} + \omega^2\rho = 0$  ( $\omega^2 = g/l$ ) общее решение которого имеет вид:  $\rho = A \sin(\omega t + \alpha)$ .

### Приложение: физические компоненты градиента

Установим физические компоненты градиента скалярной функции координат  $f$  в криволинейной системе координат  $q_1, q_2, q_3$ . По определению  $\nabla f = \frac{df}{d\mathbf{r}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \mathbf{k}_i$ , где  $\mathbf{k}_i$  - орты декартовых осей  $O\xi_i$ . С другой стороны справедливо выражение градиента функции (как и для любого вектора) в криволинейной системе координат:  $\nabla f = \sum_\sigma (\nabla f)_\sigma \mathbf{e}_\sigma$ ,

где  $(\nabla f)_\sigma$  - искомые физические компоненты градиента, а  $\mathbf{e}_\sigma$  - орты соответствующих координатных осей  $q_\sigma$ . Т.о. имеем:  $\sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \mathbf{k}_i = \sum_\sigma (\nabla f)_\sigma \mathbf{e}_\sigma$ . Умножая последнее равенство

скалярно на вектор  $\mathbf{e}_\sigma$  получим:  $(\nabla f)_\sigma = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_\sigma$  По определению  $\mathbf{e}_\sigma = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{h_\sigma} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \mathbf{k}_i$ , отсюда имеем:  $\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{k}_i = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}$ . Подставляя это выражение в формулу для физических компонент градиента получим:

$$(\nabla f)_\sigma = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{h_\sigma} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}$$

т.е.  $(\nabla f)_\sigma = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}$

## ЛЕКЦИЯ 9

### ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Предположим, что на материальную точку, движущуюся относительно некоторой инерциальной системы отсчета во всем пространстве, действует сила, зависящая только от положения точки (и, может быть, от времени), но не зависящая от скорости точки. В этом случае, говорят, что в пространстве задано силовое поле, а также, что точка движется в силовом поле, т.е. **силовое поле**:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ . (сила пружины, гравитационная сила).

Силовое поле называется **центральной**, если сила, приложенная к движущейся в нём точке, направлена вдоль прямой, проходящей через заданный центр - неподвижную точку  $O$  (приведенные примеры - центральных сил). Т.е. центральная сила имеет вид:

$\mathbf{F} = F(t, \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}$ , где  $F(t, \mathbf{r})$  - закон изменения силы. Центральные силы это так называемые силы **притяжения** ( $F < 0$ ) или силы **отталкивания** ( $F > 0$ ) (рис. 41).

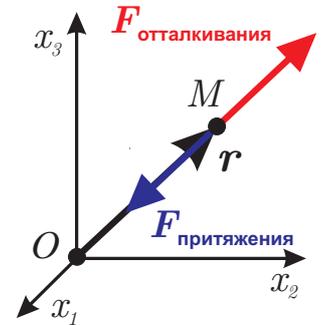


Рис. 41.

Установим некоторые свойства движения точки в центральном силовом поле.

Пусть точка двигается в некоторой инерциальной системе координат с началом в центре притяжения, и на нее действуют центральная сила. Тогда по основному закону динамики:  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \frac{\mathbf{r}}{r}$

Умножая его справа векторно на  $\mathbf{r}$  получим:  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = 0$ , интегрируя по  $t$  окончательно получаем первый интеграл уравнения движения (векторный):

$$\boxed{\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0} \quad - \quad \text{интеграл (закон) площадей}$$

Вообще, в теории дифференциальных уравнений  **$i$ -ым интегралом дифференциального уравнения** (или системы дифференциальных уравнений)  **$n$ -го порядка** называют выражение, содержащее производные на  $i$  единиц меньше чем исходное уравнение, обращающееся в тождество на любом решении исходного уравнения. Т.е. порядок этого дифференциального уравнения (вообще говоря нелинейного)  $n - i$ . Для дифференциальных уравнений движения точки (или системы), порядок которых 2, **первым интегралом** называется зависимость вида  $f(t, q, \dot{q}) = C$ , т.е. обязательно содержащая хотя бы одну скорость и тождественно выполняющаяся при любом решении  $q_\alpha = q_\alpha(t)$  системы дифференциальных уравнений движения. Важность значения интегралов движения трудно переоценить. Ведь если мы знаем 3 первых скалярных интеграла вида  $f_\alpha(t, q, \dot{q}) = C_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), которые являются *независимыми по скоростям* если отличен от нуля функциональный определитель:  $\det \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)} \neq 0$ , тогда данную систему первых интегралов можно разрешить относительно скоростей и получить зависимости вида  $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3)$ , что позволяет интегрирование исходной системы 3-х уравнений 2-го порядка заменить интегрированием системы 3-х уравнений, но уже 1-го порядка, и, тем самым, существенно продвинуться по пути получения общего решения исход. Не говоря уже о **вторых интегралах**, т.е. зависимостях вида  $\varphi_\alpha(t, q_1, q_2, q_3) = B_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), которые в случае взаимной независимости при отличности от нуля определителя  $\det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$  позволяют вообще получить единственное решение обратной задачи динамики:  $q_\alpha = q_\alpha(t, C_1, C_2, C_3, B_1, B_2, B_3)$ . Одним словом знание интегралов движения существенно упрощает процесс решения.

Интеграл площадей (хотя и векторный, пока) тоже представляет собой 1-ый интеграл, т.к. содержит лишь скорость (т.е. 1-ю производную)  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ , где векторная константа  $\mathbf{c}$  определяется по начальным данным:  $\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ . Домножая скалярно интеграл площадей на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  получим:  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = 0$ . Таким образом получили:  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$ . Т.к.  $\mathbf{c} = \text{const}$  из последнего выражения следует, что точка движется по плоской траектории, т.е. по линии, которая лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{c}$ . Напомним, что точка движется под действием центральной силы  $\mathbf{F} = F(t, r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

### Секторная скорость

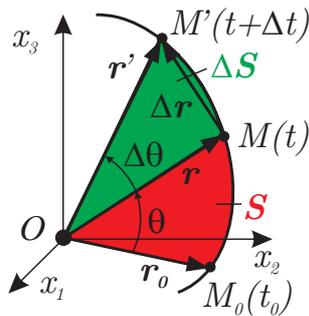


Рис. 42.

Обозначим за  $S$  величину площади конической поверхности, ограниченной кривой  $\widehat{M_0M}$  и радиус-векторами  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$ . За время  $\Delta t$ , точка  $M$  перейдет в положение  $M'$ , так что  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ . Приращение площади поверхности  $S$  за это время, можно приближенно, с точностью до величин 1-го порядка малости, представить в виде вектора  $\overrightarrow{\Delta S}$ , модуль которого равен площади  $\Delta OMM'$ :

$$\overrightarrow{\Delta S} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}) \quad \text{Предел отношения}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{S}$$

называется **секторной скоростью** точки  $M$  в момент времени  $t$ . Т.е. секторная скорость характеризует темп изменения площади, заметаемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в единицу времени. Причем  $\mathbf{S} \perp \mathbf{r}$  и  $\mathbf{S} \perp \mathbf{v}$ . А поскольку мы установили ранее интеграл площадей:  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ , устанавливаем, что векторная константа  $\mathbf{c}$  имеет смысл удвоенной секторной скорости:  $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{S}$ . Кроме того, секторная скорость перпендикулярна плоскости движения точки по плоской траектории, и всегда постоянна.

Учитывая смысл секторной скорости (изменение заметаемой площади радиус-вектором в единицу времени) дающий геометрическую интерпретацию и название интеграл площадей, можем сформулировать

### II Закон Кеплера

Все планеты описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей (постоянство секторной скорости).

Закон Кеплера формулировался для силы всемирного тяготения, но оказывается он справедлив и в общем случае центральной силы.

В дальнейшем нам удобнее будет работать в цилиндрической системе координат. Точнее в полярной, при  $z = \text{const}$ . Примем эту плоскость движения точки за  $z = 0$  (для определенности). Вектор скорости в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  имеет вид:

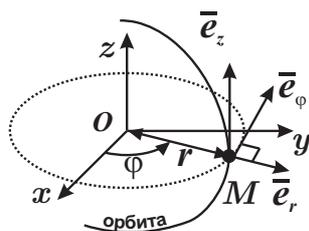


Рис. 43.

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z) \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z$$

$$\text{где} \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z} = 0$$

$$\text{аналогично} \quad \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{r} = (r, 0, 0)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_z (r^2 \dot{\varphi})$$

$$\text{кроме того} \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} = c\mathbf{e}_z$$

отсюда получим  $\boxed{r^2\dot{\varphi} = c} = \text{const}$  – значение удвоенной секторной скорости. Это выражение называется **скалярный интеграл (закон) площадей**. Постоянная  $c$  определяется по начальным данным:  $c = r_0^2\dot{\varphi}_0$ .

Легко получить иной вид интеграла площадей:  $r^2\dot{\varphi} = r(r\dot{\varphi}) = \boxed{rv_\varphi = c}$ . Постоянная  $c$  также определяется по начальным данным:  $c = r_0v_\varphi^0$ .

На самом деле аналогичное выражение можно было получить также из дифференциальных уравнений движения в полярной системе координат, что и будет показано ниже.

### Формулы Бине

Учтем, что центральная сила в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\mathbf{F} = F(t, \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} = F(t, \mathbf{r}) \mathbf{e}_r \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{F} = (F_r, F_\varphi) = (F(t, \mathbf{r}), 0)$$

Дифференциальные уравнения движения точки в центральном силовом поле в полярной системе координат, имеют вид:

$$\begin{cases} ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r = F(t, \mathbf{r}) \\ ma_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем:  $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = 0$ . Отсюда, после интегрирования по  $t$ , получим уже знакомый интеграл площадей:  $\boxed{r^2\dot{\varphi} = c}$ .

Преобразуем первое уравнение с помощью замены переменных, положив:  $r = r(\varphi(t))$  вместе  $t = t(\varphi)$ . При этом  $\varphi = \varphi(t)$  как обычно. Воспользуемся интегралом площадей для следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{d(1/r)}{d\varphi} \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -c \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right) = -c \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} \end{aligned}$$

Тогда первое уравнение принимает форму:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m \left( -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - r \frac{c^2}{r^4} \right) = -\frac{mc^2}{r^2} \left( \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right) = F(t, \mathbf{r})$$

Выражение  $\boxed{F(t, \mathbf{r}) = -\frac{mc^2}{r^2} \left( \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right)}$  называется **формула Бине для силы**.

В дальнейшем с помощью этой формулы мы определим форму орбиты.

Для квадрата скорости в центральном силовом поле:  $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$  после подстановки формул преобразования от замены переменных имеем:

$$v^2 = c^2 \left( \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \left( r \frac{c}{r^2} \right)^2 = c^2 \left[ \left( \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right]$$

Выражение  $\boxed{v^2 = c^2 \left[ \left( \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right]}$  называется **формула Бине для скорости**.

## Интегралы уравнений движения для закона всемирного тяготения

Для дальнейших исследований мы воспользуемся конкретным выражением для  $F(t, \mathbf{r})$ , а именно считаем, что сила имеет вид:

### Закон всемирного тяготения

Два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{Mm \mathbf{r}}{r^2 r}$$

Таким образом  $F(t, \mathbf{r}) = F(r) = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$  - не зависит от времени  $t$ , а только от расстояния  $r$  между телами (не от вектора  $\mathbf{r}$ ).

Здесь  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  - **гравитационная постоянная** (коэффициент пропорциональности). Определена экспериментально.

$M$  - масса одной планеты (Солнце, Земля),  $m$  - масса другой планеты (Земли, спутника).

Причина возникновения этой силы до сих пор не выяснена (теория суперструн?, бозон Хигса (большой адронный коллайдер)?).

Ньютон получил это выражение опираясь на законы Кеплера (после эффекта падения яблока?), а мы сделаем наоборот.

Будем использовать иное выражение силы:  $\mathbf{F} = -\mu \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$ , где  $\mu = M \cdot \gamma$  - **постоянная Гаусса** (для Солнца или для Земли).

Значит в наших обозначениях для центрального силового поля:  $\mathbf{F} = F \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mu \frac{m \mathbf{r}}{r^2 r}$  имеем  $F = -\mu \frac{m}{r^2}$  и направлена сила  $\mathbf{F}$  к притягивающему центру, имеющему массу  $M$  и являющемуся началом системы координат. Таким образом, векторное дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu \frac{m \mathbf{r}}{r^2 r}$$

Умножая скалярно его на скорость  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  получим:

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \implies \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt}$$

Выражение в правой части равенства преобразуется к виду:

$$-\frac{1}{2r^3} \frac{dr^2}{dt} = \left|_{r^2=x} \right. = -\frac{1}{2x^{3/2}} \frac{dx}{dt} = \frac{dx^{-1/2}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{r}$$

Таким образом имеем:  $\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\mu}{r}$ . После интегрирования по  $t$  получим  $\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{const}$ .

Выражение  $v^2 - \frac{2\mu}{r} = h$  называется **интеграл энергии**, где  $h = \text{const}$  - определяется по начальным данным:  $h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ .

Представив интеграл энергии в форме  $v^2 = h + \frac{2\mu}{r}$  легко получить

*Свойство 1.* при удалении точки  $M$  от центра  $O$  ( $r$  - возрастает) – скорость  $v$  - убывает; при приближении  $M$  к центру  $O$  ( $r$  - убывает) – скорость  $v$  - возрастает.

*Свойство 2.* если  $h \geq 0$ , то  $M$  может уйти от центра  $O$  на сколь угодно большое расстояние. Если же  $h < 0$ , то, как видно из формулы, расстояние  $r$  между  $M$  и  $O$  не может превзойти величину  $\frac{2\mu}{|h|}$ , т.е. в этом случае движение  $M$  происходит в ограниченной части пространства.

Получим еще один (третий) первый интеграл уравнения движения. Умножим дифференциальное уравнение движения векторно слева на  $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ :

$$\mathbf{c} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}\right) = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}$$

Поскольку  $\mathbf{c} = \text{const}$ , тогда  $\mathbf{c} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \mathbf{v})$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$$

Т.к.  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ , а  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ , значит  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{e}_r \cdot (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = r\dot{r} (\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\varphi)$ , отсюда

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot r^2 - \mathbf{r}r\dot{r} = r(r\dot{r} - r\dot{r}) = r^3 \frac{r\dot{r} - r\dot{r}}{r^2} = r^3 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Окончательно имеем:  $\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -\mu \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r}$

После интегрирования по  $t$  получим:  $\mathbf{c} \times \mathbf{v} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{f}$  – **интеграл Лапласа**.

А вектор  $\mathbf{f}$  – **вектор Лапласа**. «-» взят для удобства дальнейшего использования.

Отсюда следует:  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = 0$ . Т.е. вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей  $\mathbf{c}$  и, следовательно, лежит в плоскости орбиты.

Модуль вектора Лапласа можно выразить через гауссову постоянную  $\mu$  и постоянные  $c$  и  $h$  интегралов площадей и энергии. В самом деле, возводя интеграл Лапласа в квадрат и учитывая ортогональность  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{v}$  получим:

$$f^2 = (\mathbf{c} \times \mathbf{v})^2 + \mu^2 \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)^2 + 2\frac{\mu}{r}(\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = c^2 \cdot v^2 + \mu^2 - \frac{2\mu}{r}c^2 = \mu^2 + c^2 \left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right)$$

В итоге  $f^2 = \mu^2 + c^2 \cdot h$  (использовали:  $(\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = -c^2$ )

### Формы орбит

Установим форму орбиты, т.е. получим уравнение орбиты.

Из интеграла Лапласа при  $\mathbf{c} = 0$  следует, что орбита точки будет прямолинейной:  $\mathbf{r} = -\frac{r}{\mu} \mathbf{f}$

Если  $\mathbf{c} \neq 0$ , тогда умножая скалярно на  $\mathbf{r}$  интеграл Лапласа получим:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) + \frac{\mu}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad -c^2 + \mu r = -fr \cos \nu$$

где  $\nu$  – угол между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  т.  $M$  и вектором Лапласа  $\mathbf{f}$  называется **истинной аномалией** (рис. 44).

Обозначим  $e = \frac{f}{\mu}$ ,  $p = \frac{c^2}{\mu}$  тогда из последнего выражения получим:

$$\text{уравнение орбиты} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

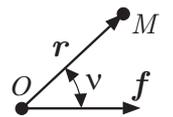


Рис. 44.

Полученное соотношение представляет собой *уравнение конического сечения* (рис. 45), фокус которого находится в т.  $O$ ,  $p$  - **фокальный параметр**,  $e$  - **эксцентриситет** орбиты.

Орбита т.  $M$  относительно  $O$  будет: эллипс ( $e < 1$ ), парабола ( $e = 1$ ), гипербола ( $e > 1$ ). При  $e = 0$  - орбита окружность. Итак мы получили:

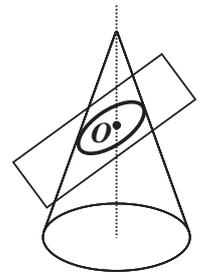


Рис. 45.

**I Закон Кеплера**  
Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце

хотя, как видно из уравнения, орбитами могут быть и другие кривые.

Из уравнения орбиты легко установить направление вектора Лапласа. Если  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{f}$  направлены в одну сторону, тогда  $\nu = 0$ , значит  $\cos \nu = 1$ , этот случай соответствует  $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ , т.е. точке орбиты, ближайшей к фокусу.

В случае орбиты в виде эллипса такая точка орбиты называется **перигелием** (точка  $\pi$ ) (если фокус Солнце - *перигелий* (Гелиос, греч.), если фокус Земля - *перигей* (Гейя, греч)). Наиболее удаленная точка орбиты от фокуса называется **апоцентром** (точка  $\alpha$ ) (Солнце - *апогелий*, Земля - *апогей*) (рис. 46). Т.е. фактически - истинная аномалия  $\nu$  является полярным углом  $\varphi$ :  $\varphi = \nu$  (конечно без учета поворота орбиты относительно полярной оси)

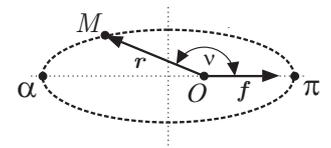


Рис. 46.

### Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости, I-я и II-я космические скорости

Пусть орбита  $M$  - не прямолинейна, т.е.  $\mathbf{c} \neq 0$ . Если задано начальное расстояние  $r_0$  т.  $M$  от т.  $O$ , то характер орбиты  $M$  вполне определяется величиной ее начальной скорости  $v_0$ . Выражение эксцентриситета:  $e = \frac{f}{\mu} = \frac{\sqrt{\mu^2 + c^2 h}}{\mu} = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}}$ . Но константа энергии

$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ . Тогда если орбита:

**эллипс** :  $e < 1 \Rightarrow h < 0 \Rightarrow v_0 < \sqrt{2\mu/r_0}$  - *эллиптические скорости*

**парабола** :  $e = 1 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\mu/r_0}$  - *параболические скорости*

Она является наименьшей скоростью, которую необходимо сообщить т.  $M$  на расстоянии  $r_0$ , чтобы она удалилось на сколь угодно большое расстояние от точки  $O$ .

**гипербола** :  $e > 1 \Rightarrow h > 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{2\mu/r_0}$  - *гиперболические скорости*

**I-я космическая скорость  $v_I$**  - это круговая скорость у поверхности Земли. Пусть  $m$  - масса спутника,  $M$  - масса Земли,  $g$  - ускорение свободного падения у Земли. По II

Закону Ньютона на нормаль:  $m \frac{v_I^2}{R} = mg$  или  $m \frac{v_I^2}{R} = \gamma \frac{Mm}{R^2}$ . Отсюда:  $v_I = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{\mu_T}{R}}$

Где  $\mu_T = \gamma M$  - постоянная Гаусса Земли. При  $g = 9/81$  м/с<sup>2</sup>,  $R = 6371$  км.  $v_I \approx 7.91$  км/с

**II-я космическая скорость  $v_{II}$**  - параболическая скорость у поверхности Земли:

$$v_{II} = \sqrt{2\mu_T/R} = \sqrt{2} \cdot v_I \approx 11.2 \text{ км/с}$$

Пусть орбита  $M$  представляет собой эллипс с полуосями:  $a$  - большой и  $b$  - малой (рис. 7). Из аналитической геометрии известны выражения:  $a = \frac{p}{1-e^2}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ .

За время, равное *периоду*  $T$  обращения точки по орбите радиус-вектор  $\mathbf{r}$  заметёт всю площадь эллипса. Учитывая, что площадь эллипса равна  $\pi ab$ , и что секторная скорость, согласно закону площадей постоянна и равна  $c/2$  имеем соотношение

$$\boxed{\pi ab = T \cdot c/2}$$

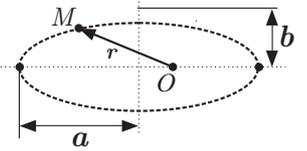


Рис. 47.

Однако  $c = \sqrt{p \cdot \mu}$ , а  $p = \frac{b^2}{a}$ , поэтому  $c = b\sqrt{\mu/a}$ , тогда получим:

$$\pi a = T \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \Rightarrow T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const}}$$

### III Закон Кеплера

Квадраты звездных времен (периодов) обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит

Для завершения задачи о движении точки в ньютоновском поле силы, необходимо найти закон движения точки по ее орбите. Будем считать орбиту эллиптической и исходить из закона площадей:  $r^2 \dot{\nu} = c$  (т.к.  $\varphi = \nu$  в случае отсутствия поворота орбиты). Тогда:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p^2} (1 + e \cos \nu)^2 \Rightarrow \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{c}{p^2} dt$$

где  $c/p^2 = \text{const}$  для фиксированной планеты (орбиты).

Пусть  $t_0$  - момент времени прохождения  $M$  через перигелий, тогда из последнего получим неявную зависимость  $\nu = \nu(t)$ :

$$\boxed{\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{c}{p^2} (t - t_0)}$$

Однако нахождение  $\nu = \nu(t)$  - явной зависимости представляет собой довольно трудную задачу из этого трансцендентного уравнения. Введем новую переменную  $E$ , через которую  $\nu$  выражается очень просто, а зависимость  $E = E(t)$  определяется уравнением, хотя тоже трансцендентным, но значительно более простым:

$$\text{tg } \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg } \frac{\nu}{2}$$

$E$  называют **эксцентрической аномалией**. Легко установить выражения:

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE, \quad 1 + e \cos \nu = \frac{1-e^2}{1-e \cos E}$$

Подробности получения этих выражений в Приложении к лекции. Отсюда:

$$\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (E - e \sin E)$$

В итоге получим **уравнение Кеплера**:  $\boxed{E - e \sin E = \lambda(t - t_0)}$  где  $\lambda = \frac{c}{p^2} (1 - e^2)^{3/2}$

## Приложение: выражения истинной аномалии через эксцентрискую

Получим вспомогательное соотношение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 E/2} - 1 = \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{1}{\cos^2 \nu/2} - 1 \right) \xrightarrow{\cdot \cos^2 E/2} \\ 1 - \cos^2 E/2 = \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{\cos^2 E/2}{\cos^2 \nu/2} - \cos^2 E/2 \right) &\Rightarrow \frac{1+e}{1-e} \sin^2 E/2 = \frac{\cos^2 E/2}{\cos^2 \nu/2} - \cos^2 E/2 \Rightarrow \\ \frac{\cos^2 E/2}{\cos^2 \nu/2} = \frac{(1+e) \sin^2 E/2 + (1-e) \cos^2 E/2}{1-e} &\Rightarrow \boxed{\frac{\cos^2 \nu/2}{\cos^2 E/2} = \frac{1-e}{1-e \cos E}} \end{aligned}$$

Получим первое выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \xrightarrow{d} \frac{1}{\cos^2 E/2} \frac{dE}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{1}{\cos^2 \nu/2} \frac{d\nu}{2} &\Rightarrow d\nu = \frac{\cos^2 \nu/2}{\cos^2 E/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} dE \\ \Rightarrow d\nu = \frac{1-e}{1-e \cos E} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} dE &\Rightarrow \boxed{d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE} \end{aligned}$$

Получим второе выражение

$$\begin{aligned} 1 + e \cos \nu = 1 + e(2 \cos^2 \nu/2 - 1) = 1 + e \left( 2 \frac{(1-e) \cos^2 E/2}{1-e \cos E} - 1 \right) &= \\ = 1 + e \frac{2 \cos^2 E/2 - 2e \cos^2 E/2 - 1 + e \cos E}{1-e \cos E} = \frac{1-e \cos E + e(\cos E - 2e \cos^2 E/2 + e \cos E)}{1-e \cos E} &= \\ = \frac{1 + e^2(-2 \cos^2 E/2 + \cos E)}{1-e \cos E} = \frac{1 + e^2(-1)}{1-e \cos E} &\Rightarrow \boxed{1 + e \cos \nu = \frac{1-e^2}{1-e \cos E}} \end{aligned}$$

## ЛЕКЦИЯ 10

### ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (МЕРЫ) ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ

Механической системой называется такое множество материальных точек, в котором движение каждой точки зависит от положений и движений остальных точек. Т.о. **механическая система** это совокупность взаимодействующих материальных точек. Пример: Солнечная система, а вот горсть песчинок, подброшенных в воздух систему не образуют, т.к. не взаимодействуют.

На прошлой лекции мы рассматривали движение материальной точки в центральном силовом поле, т.е. под действием силы тяготения к неподвижному центру относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Уточним теперь результаты, учитывая взаимное притяжение движущейся точки  $P$  и двигающегося притягивающего центра  $S$  (Солнца или другая планета).

#### Задача 2-х тел:

В пустом пространстве движутся две материальные точки, притягивающиеся друг к другу по закону всемирного тяготения. Заданы их начальные скорости и начальные положения. Требуется найти положения точек в любой последующий момент времени.

Пусть  $M$  и  $m$  - массы точек  $S$  и  $P$ , соответственно. Тогда со стороны  $S$  на  $P$  действует сила  $\mathbf{F}$  определяемая законом всемирного тяготения:  $\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}$  (рис. 48). На точку  $S$  со стороны  $P$  действует сила  $-\mathbf{F}$  (III-ий закон Ньютона). Тогда дифференциальные уравнения движения  $S$  и  $P$  в неподвижной (абсолютной) системе координат  $O_a x_1 x_2 x_3$  имеют вид:

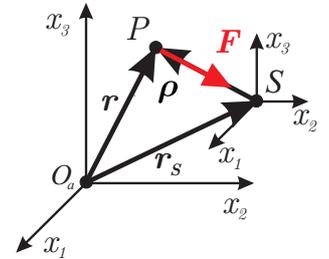


Рис. 48.

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_S}{dt^2} = \gamma \frac{Mm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}, \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{Mm}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}$$

т.к.  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_S$  получим:  $\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \gamma \frac{m}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} = -\gamma(m + M) \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \Rightarrow \boxed{m \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\mu' m \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}}$

где  $\mu' = \gamma(m + M)$ . Здесь везде стоят абсолютные производные от векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_S$ ,  $\boldsymbol{\rho}$ . Однако, т.к. система  $Sx_\alpha$  движется поступательно (направления осей одинаковы с неподвижной, инерциальной), то абсолютная и относительная производные совпадают. Следовательно, полученное уравнение описывает движение  $P$  относительно  $S$ . Сравнивая его с использованным в предыдущей лекции:  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  (где  $\mu = \gamma M$ ) убеждаемся, что относительное движение  $P$  вокруг  $S$  происходит как вокруг неподвижного центра, в котором сосредоточена масса, равная массе не только  $S$ :  $M$ , а сумме масс  $M + m$ . Поэтому в установленных ранее формулах этот результат легко учесть, заменяя всюду  $\mu = \gamma M$  на  $\mu' = \gamma(m + M)$ . Следует сказать, что гауссова постоянная  $\mu$  центра  $S$  (Солнца) получается фактически равна не  $\gamma M$ , а  $\mu' = \gamma(M + m)$ , т.е. не является постоянной и зависит от не только от массы притягивающего центра  $M$ , но и от массы самого тела  $m$ , двигающегося в поле притяжения. Считать  $\mu = \text{const}$ , в этих условиях, можно только приближенно в случаях, когда  $M \gg m$ .

**Уточнение (обобщение, поправка) III Закона Кеплера:**  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const}$ .

Подставляя (заменяя)  $\mu \rightarrow \mu'$  получим обобщение:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu'} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m + M)} \Rightarrow \frac{T^2(m + M)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} = \text{const}$$

$$\frac{T^2}{a^3} \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{4\pi^2}{M\gamma} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const}$$

Для Юпитера (самой большой планеты Солнечной системы) эта поправка составляет приблизительно 0,001 т.е. очень мала, поэтому отношением  $\frac{m}{M}$  обычно пренебрегают по сравнению с 1. В таком случае получим тогда обычный III Закон Кеплера. Но теперь мы знаем, что он приближенный.

Вообще же задача уже даже 3-х тел до сих пор аналитически не решена, невозможно точно построить решение с помощью известных в анализе функций.

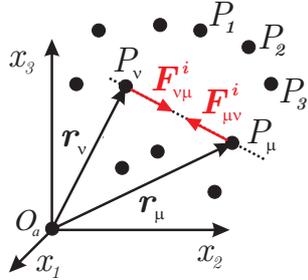


Рис. 49.

Итак, рассмотрим произвольную механическую систему из  $N$  материальных точек  $P_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) (рис. 49).

Силы, действующие на точки системы (приложенные к точкам) можно условно разделить на внутренние и внешние:

**Внутренние силы** - силы взаимодействия между точками данной системы. Будем их обозначать индексами  $[i]$ .

**Внешние силы** - силы действующие на точки системы от точек не включенных в рассматриваемую систему. Индекс  $[e]$ .

Т.о. силу, действующую на  $\nu$ -ую точку: можно представить из

$$\text{двух составляющих: } \mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e.$$

*Замечание:* деление систем сил на внутренние и внешние силы и на активные и пассивные (реакции связей) не взаимосвязаны.

Будем считать, что силы определены как функции времени, положений точек и их скоростей:  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ . Тогда для каждой точки справедливо установленное ранее дифференциальное уравнение (II закон Ньютона):

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

эквивалентное  $3N$  скалярным дифференциальным уравнениям:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu^\alpha = F_\nu^\alpha(t, x_\mu^\beta, \dot{x}_\mu^\beta) \quad (\nu, \mu = 1, \dots, N; \alpha, \beta = 1, \dots, N)$$

которые определяют математическую модель «система материальных точек».

Предполагая известными начальными условиями:

$$x_\nu^\alpha = x_{\nu 0}^\alpha, \quad \dot{x}_\nu^\alpha = \dot{x}_{\nu 0}^\alpha \quad \text{при } t = 0$$

получим соответствующую задачу Коши для функций  $x_\nu^\alpha(t)$ .

Разрешимость полученной задачи (т.е. существование и единственность) обеспечивается при условии на силы  $F_\nu^\alpha$  - непрерывность по времени и непрерывная дифференцируемость по координатам  $x_\mu^\beta$  и скоростям  $\dot{x}_\mu^\beta$ .

Следует отметить, что под силой  $\mathbf{F}_\nu$ , действующей на  $\nu$ -ую точку системы, подразумевается **равнодействующая**. Т.е. сумма всех сил от точек системы (внутренних) на  $\nu$ -ую точку формирует  $\mathbf{F}_\nu^i$  - **равнодействующая внутренних сил**, а сумма всех остальных сил - от точек не включенных в систему (внешних) определяет  $\mathbf{F}_\nu^e$  - **равнодействующая внешних сил**. Т.е.

$$\mathbf{F}_\nu^i = \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\nu\mu}^i$$

где  $\mathbf{F}_{\nu\mu}^i$  сила, действующая на  $\nu$ -ую точку со стороны остальных  $N - 1$  точек системы.

**Главным вектором системы сил** называется сумма всех сил (равнодействующих) приложенных к точкам системы:

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}$$

Поскольку равнодействующая сила  $\mathbf{F}_{\nu}$ , приложенная к  $\nu$ -ой точке равна сумме равнодействующих внутренних сил  $\mathbf{F}_{\nu}^i$  и внешних сил  $\mathbf{F}_{\nu}^e$  тогда:

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^i + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^e = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\nu\mu}^i + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^e$$

Но согласно III-му закону Ньютона силы, с которыми взаимодействуют две любые точки системы, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей точки, в противоположные стороны (силы взаимного притяжения или отталкивания) (рис. 49)  $\mathbf{F}_{\nu\mu}^i = -\mathbf{F}_{\mu\nu}^i$ , поэтому, в полученном выражении для главного вектора сил, внутренние силы - взаимно уничтожаются. Т.о. получим

1 Свойство внутренних сил: главный вектор внутренних сил равен нулю:

$$\mathcal{F}^i = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^i = \sum_{\nu,\mu=1}^N \mathbf{F}_{\nu\mu}^i = 0$$

Поэтому для главного вектора системы сил справедливо выражение:  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^e = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^e$ .

**Моментом силы  $\mathbf{F}$  относительно точки (центра)  $O$ ,** называется вектор

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки  $P$  приложения силы  $\mathbf{F}$  относительно точки  $O$ :  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  (рис. 50).

Из свойств векторного произведения определяем модуль момента силы по формуле:  $|\mathbf{m}_O(\mathbf{F})| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{F})$  - наименьший угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ .

Направлен момент - по нормали к плоскости, содержащей  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ , в сторону, откуда «вращение», вызванное силой, происходило бы против хода часовой стрелки (т.н. положительное направление).

Нетрудно видеть, что величина  $d = |\mathbf{r}| \cdot \sin \alpha$  называемое **плечом силы** равно расстоянию от точки  $O$  до **линии действия силы** - прямой на которой лежит сила  $\mathbf{F}$ . Т.е. плечо  $d$  - длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы. Тогда

$$m_O(\mathbf{F}) = d \cdot F$$

**Моментом силы  $\mathbf{F}$  относительно оси  $l$**  называется проекция на эту ось момента силы  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  относительно произвольной точки  $O$ , взятой на этой оси:

$$m_l(\mathbf{F}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}$$

где  $\mathbf{e}$  - единичный вектор направления оси  $l$  (рис. 51). Т.е.  $m_l(\mathbf{F})$  - скаляр.

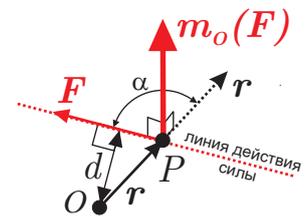


Рис. 50.

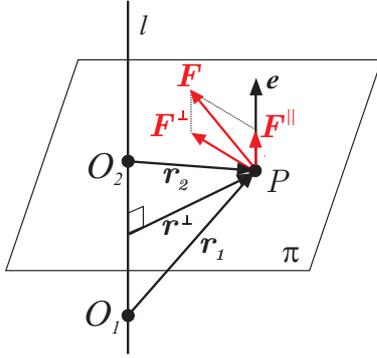


Рис. 51.

Убедимся, что момент силы относительно оси не зависит от выбора точки  $O$  на оси.

Для  $O_1$ :  $\mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{F}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$ , для  $O_2$ :  $\mathbf{m}_{O_2}(\mathbf{F}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$ .

Составим разность:

$$\mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} - \mathbf{m}_{O_2}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} - (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} = ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}$$

но  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{O_1O_2}$ , который коллинеарен  $\mathbf{e}$ , а вектор  $\overrightarrow{O_1O_2} \times \mathbf{F}$  - ортогонален  $\mathbf{e}$ . Следовательно

$$\mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} - \mathbf{m}_{O_2}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} = ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} = 0$$

Т.е моменты силы вычисленные относительно разных точек на этой оси - совпадают.

Рассмотрим плоскость  $\pi$ , перпендикулярную оси  $l$  и содержащей точку  $P$ , к которой приложена сила  $\mathbf{F}$  (рис. 51). Представим радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и силу  $\mathbf{F}$  в виде суммы двух составляющих:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\perp + \mathbf{r}^\parallel, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^\perp + \mathbf{F}^\parallel,$$

где  $\mathbf{r}^\perp$ ,  $\mathbf{F}^\perp$  - проекции  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  на плоскость  $\pi$ , а  $\mathbf{r}^\parallel$ ,  $\mathbf{F}^\parallel$  - проекции на ось  $l$ . Подставляя эти разложения в формулу для момента силы относительно оси  $l$  и пользуясь свойствами векторного и скалярного произведений получим:

$$m_l(\mathbf{F}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} = ((\mathbf{r}^\perp + \mathbf{r}^\parallel) \times (\mathbf{F}^\perp + \mathbf{F}^\parallel)) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{r}^\perp \times \mathbf{F}^\perp) \cdot \mathbf{e}$$

отсюда имеем:

$$m_l(\mathbf{F}) = \pm |\mathbf{r}^\perp \times \mathbf{F}^\perp|$$

где «+» - если  $\mathbf{r}^\perp \times \mathbf{F}^\perp$  и  $\mathbf{e}$  направлены в одну сторону и «-» - если в разные стороны. Поскольку  $|\mathbf{r}^\perp \times \mathbf{F}^\perp| = |\mathbf{r}^\perp| \cdot |\mathbf{F}^\perp| \cdot \sin \alpha$  где  $\alpha$  - наименьший угол между  $\mathbf{r}^\perp$  и  $\mathbf{F}^\perp$ , тогда вводя плечо силы  $\mathbf{F}^\perp$  по аналогии с предыдущим:  $d = |\mathbf{r}^\perp| \cdot \sin \alpha$ , получим альтернативное выражение для момента силы:  $m_l(\mathbf{F}) = \pm d \cdot F^\perp$

Пусть  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  - компоненты силы и радиус-вектора точки приложения силы  $P$ , соответственно, в декартовой прямоугольной системе координат  $Oxyz$  с началом в  $O$ . Тогда из определения момента силы относительно т.О получим компоненты в этой системе координат.

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x)$$

Очевидно, что величины  $m_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y$ ,  $m_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z$ ,  $m_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x$  по определению являются моментами силы  $\mathbf{F}$  относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Отсюда сразу следует полезное

*Свойство:* момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда сила и ось лежат в одной плоскости.

Например, пусть сила  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , приложенная к точке  $P$  с радиус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  лежит в плоскости, содержащей ось  $Oz$ . Это означает, справедливость отношения:  $\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y}$ . Отсюда имеем:  $m_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x = 0$ .

Рассмотрим систему  $N$  точек  $P_\nu$ , пусть  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e$  - равнодействующая всех сил, приложенных к точке  $P_\nu$ , а  $\mathbf{r}_\nu$  - радиус-вектора точек  $P_\nu$  относительно центра  $O$ .

**Главным моментом системы сил относительно точки  $O$**  называется сумма моментов всех сил, приложенных к точкам системы относительно того же центра:

$$\mathcal{M}_O = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$$

**Главным моментом системы сил относительно оси  $l$**  называется проекция на эту ось главного момента  $\mathcal{M}_O$ , вычисленного относительно какой-либо точки  $O$  на этой оси:

$$\mathcal{M}_l = \mathcal{M}_O \cdot \mathbf{e}$$

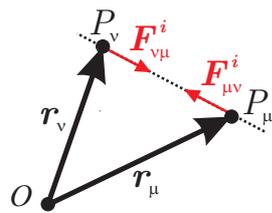
где  $\mathbf{e}$  - единичный вектор направления оси  $l$ . Независимость  $\mathcal{M}_l$  от выбора точки на оси очевидна.

Представим главный момент сил в виде:  $\mathcal{M}_O = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times (\mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e) = \mathcal{M}_O^i + \mathcal{M}_O^e$ , где

$$\mathcal{M}_O^i = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu^i) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^i \quad - \quad \text{главный момент внутренних сил,}$$

$$\mathcal{M}_O^e = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu^e) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e \quad - \quad \text{главный момент внешних сил.}$$

Ранее мы вводили выражение для равнодействующей внутренних сил:  $\mathbf{F}_\nu^i = \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\nu\mu}^i$ , тогда



$$\mathcal{M}_O^i = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu^i) = \sum_{\nu,\mu=1}^N m_O(\mathbf{F}_{\nu\mu}^i) = \sum_{\nu,\mu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^i.$$

Согласно III-му Закону Ньютона:  $\mathbf{F}_{\nu\mu}^i = -\mathbf{F}_{\mu\nu}^i$ , так что для любых 2-х точек системы  $P_\nu, P_\mu$  ( $\nu, \mu = 1, \dots, N$ ) имеем:

$$m_O(\mathbf{F}_{\nu\mu}^i) + m_O(\mathbf{F}_{\mu\nu}^i) = \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^i + \mathbf{r}_\mu \times \mathbf{F}_{\mu\nu}^i = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu) \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^i$$

Рис. 52.

но вектор  $\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu = \overrightarrow{P_\nu P_\mu}$  - коллинеарен  $\mathbf{F}_{\nu\mu}^i$  (рис. 52), поэтому:

$$\overrightarrow{P_\nu P_\mu} \times \mathbf{F}_{\nu\mu}^i = 0 = m_O(\mathbf{F}_{\nu\mu}^i) + m_O(\mathbf{F}_{\mu\nu}^i). \quad \text{Т.к. } P_\nu, P_\mu \text{ любые, получим}$$

2 Свойство внутренних сил: главный момент внутренних сил равен нулю:

$$\mathcal{M}_O^i = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu^i) = 0$$

Т.е. для главного момента системы сил справедливо выражение:  $\mathcal{M}_O = \mathcal{M}_O^e = \sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu^e)$

### Работа и мощность системы сил.

#### Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия

Введем **вектор элементарного перемещения  $d\mathbf{r}$** , определяющий смещение точки вдоль траектории за бесконечно малый промежуток времени. Направлен  $d\mathbf{r}$  очевидно по касательной к траектории, что наглядно видно из определения скорости:  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  откуда

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$$

Пусть  $\mathbf{F}_\nu = (F_{\nu x_1}, F_{\nu x_2}, F_{\nu x_3})$  - равнодействующая всех сил (внутренних и внешних), приложенных к точке  $P_\nu$ , а  $d\mathbf{r}_\nu = (dx_1, dx_2, dx_3)$  - ее элементарное перемещение. **Элементарной работой  $\delta A_\nu$  силы  $\mathbf{F}_\nu$  на перемещении  $d\mathbf{r}$**  называется скалярное произведение:

$$\delta A_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\nu x_\alpha} dx_\alpha$$

Далее мы опустим индекс  $\nu$  для сокращения записи. Выражение для элементарной работы можно полнее раскрыть если рассмотреть величины, происходящие из нее:

$$\frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boxed{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = N} \quad - \text{мощность силы (в некоторый момент времени)}.$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \delta A = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad - \quad \begin{array}{l} \text{полная работа силы на конечном перемещении} \\ \text{из начального положения } \mathbf{r}_0 \text{ (при } t_0) \\ \text{в конечное положение } \mathbf{r}_1 \text{ (при } t_1) \end{array}$$

Например для постоянной силы  $\mathbf{F} = \text{const}$  на прямолинейном пути:  $A = F \cdot S$  где  $S$  - длина пройденного пути.

**Замечание:**  $\boxed{\text{если } \mathbf{F} \perp d\mathbf{r}, \text{ тогда } \delta A = 0}$

Обозначение  $\delta A$  указывает, что элементарная работа не обязательно является полным дифференциалом некоторой функции координат. Ведь в общем случае  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  и ниоткуда не следует, что выражение элементарной работы

$$\delta A = F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 + F_{x_3} dx_3$$

**полный дифференциал** какой-то скалярной функции  $U(x_1, x_2, x_3)$ , т.е. выражение вида

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3$$

Т.е. никто не сказал, что обязательно:  $\boxed{F_{x_\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha}}$

Во-первых, понятно, что такое возможно это только для случая силового поля, когда  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  - сила от скорости не зависит.

Во-вторых, необходимо выполнение определенного критерия на силу  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  для существования скалярной функции  $U(t, \mathbf{r})$ , которая называется **силовой функцией**, зависящей от положения точки  $\mathbf{r}$ , т.е. координат  $x_\alpha$  и, ещё может быть, от времени  $t$ , которая определяет силу указанным выше способом через частные производные. Этот критерий мы приведем ниже практически без доказательства.

Функция противоположная силовой функции:  $\boxed{\Pi = -U}$  называется **потенциалом** или

**потенциальной энергией**, а силы для которых  $\boxed{F_{x_\alpha}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \Pi(t, \mathbf{r})}{\partial x_\alpha}}$  называются **потенциальными**. Иначе говоря:

Силовое поле  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$  называется **потенциальным** если существует однозначная скалярная функция  $\Pi(t, \mathbf{r})$ , такая что сила выражается с помощью неё в виде:  $\boxed{\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}}}$

Силовое поле называется **стационарным** если  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , т.е. не зависит явно от времени. Потенциальное стационарное силовое поле называется **консервативным**. В случае консервативного силового поля потенциальная энергия также является функцией, независимой от времени:  $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$ , а для определяемых ею потенциальных сил справедливо

выражение  $\mathbf{F} = -\frac{d\Pi}{d\mathbf{r}}$ .

Собственно сформулированный ниже критерий потенциальности сил относится только к случаю стационарного силового поля - это критерий существования полного дифференциала для работы стационарного силового поля. Однако, приведенное определение потенциальных сил используется и для общего случая сил, зависящих от времени.

**Критерий потенциальности стационарных сил:** для потенциальности силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (силового поля), являющейся непрерывно-дифференцируемой функцией координат, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\boxed{\frac{\partial F_{x_\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial F_{x_\beta}}{\partial x_\alpha} \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3}$$

Доказательство необходимости - элементарно: пусть сила  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  потенциальна, т.е. существует функция  $\Pi(\mathbf{r})$ , такая что компоненты силы выражаются в виде:  $F_{x_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha}$ . Тогда

$$\frac{\partial F_{x_\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\beta} \right) = \frac{\partial F_{x_\beta}}{\partial x_\alpha}$$

где изменение порядка дифференцирования обеспечивается предположением о дважды непрерывно-дифференцируемости компонент силы.

Доказательство достаточности критерия несколько трудоемкое и не необходимое для дальнейшего, поэтому с ним можно познакомиться в рекомендуемой литературе.

*Замечание:* Функция  $\Pi(\mathbf{r})$  для консервативного поля определяется с точностью до аддитивной постоянной (постоянного слагаемого). Для неконсервативного потенциального силового поля, т.е. нестационарного, потенциал  $\Pi(t, \mathbf{r})$  определяется с точностью до аддитивной функции, зависящей от времени  $f(t)$ .

Таким образом, элементарная работа консервативного силового поля представляет собой полный дифференциал:

$$\boxed{\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Pi}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -d\Pi}$$

Тогда полная работа консервативного силового поля на конечном перемещении точки:

$$\boxed{A = \int_{t_0}^{t_1} -d\Pi = \Pi_0 - \Pi_1}$$

равна разности значений потенциальной энергии системы в начальный  $t_0$  и конечный  $t_1$  моменты времени. Видно, что в этом случае полная работа не зависит от пути перехода точки из начального положения  $r_0$  в конечное положение  $r_1$  (это свойство часто берут в качестве определения потенциального силового поля).

**Элементарная работа  $\delta A$  всех сил системы точек** определяется путем суммирования по всем точкам системы:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \delta A_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N (F_{\nu x_1} dx_1 + F_{\nu x_2} dx_2 + F_{\nu x_3} dx_3)$$

Заметим, что равнодействующая сила, приложенная к  $\nu$ -ой точке выражается в виде  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e$ , отсюда

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^i \cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu^e \cdot d\mathbf{r}_\nu = \delta A^i + \delta A^e$$

т.е. в работу сил системы входит работа и внешних и внутренних сил. Работа внутренних сил в общем случае не равна нулю - в отличие от главного вектора и главного момента системы сил - т.к. работа выражается через скалярное произведение: силы на перемещение, а перемещения точек системы, в принципе, могут быть совершенно произвольными.

## ЛЕКЦИЯ 11

### МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек  $P_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ), пусть  $m_\nu$  - масса,  $\mathbf{r}_\nu$  - радиус-вектора точек относительно начала некоторой абсолютной системы координат  $O_a x_\alpha$  (рис. 53).

**Центром масс системы** называется геометрическая точка  $C$  пространства определяемая радиус-вектором:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu m_\nu \quad \text{где } M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu - \text{масса системы.}$$

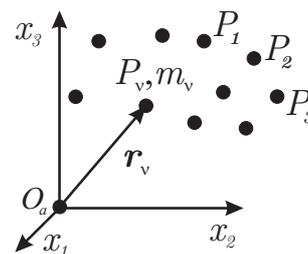


Рис. 53.

В скалярной (координатной) форме: 
$$x_{\alpha C} = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^N x_{\alpha\nu} m_\nu$$

*Замечание:* это не какая-то конкретная точка системы (материальная частица), а некоторая геометрическая точка в пространстве, определяемая по данной формуле. Центр масс системы иногда называют также **центром инерции**.

**Количеством движения системы материальных точек** называется вектор

$$\mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{q}_\nu$$

где  $\mathbf{q}_\nu = m_\nu \mathbf{v}_\nu$  - количество движения материальной точки,  $\mathbf{v}_\nu$  - скорость точки.

Т.к. центр масс системы определяется выражением  $M\mathbf{r}_C = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu m_\nu$ , то дифференцируя

его по времени получим:  $M\mathbf{v}_C = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{v}_\nu m_\nu = \mathbf{Q}$ , таким образом имеем альтернативное

выражение количества движения системы:  $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C$ , где  $M$  - масса всей системы,  $\mathbf{v}_C$  - скорость центра масс. Т.е. количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра масс. Количество движения иногда называют **импульсом**.

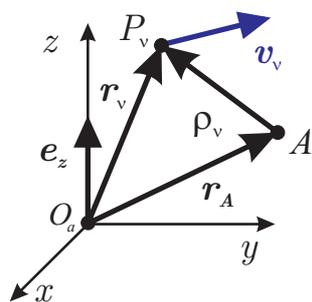


Рис. 54.

Пусть  $\rho_\nu$  - радиус-вектора точек  $P_\nu$  системы относительно некоторой точки  $A$  - называемой *центром* (рис. 54).

**Моментом количества движения точки  $P_\nu$  (кинетическим моментом) относительно центра  $A$**  называют вектор:

$$\mathbf{l}_{\nu A} = \rho_\nu \times \mathbf{q}_\nu \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{l}_{\nu A} = \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = m_\nu \rho_\nu \times \mathbf{v}_\nu$$

**Моментом количества движения (кинетическим моментом) точки  $P_\nu$  относительно оси** называется проекция на эту ось момента количества движения точки относительно любого центра, выбранного на данной оси: (например относительно оси  $Oz$ )

$$l_{\nu z} = \mathbf{l}_{\nu A} \cdot \mathbf{e}_z$$

( $A \in Oz$ ,  $\mathbf{e}_z$  - единичный вектор оси  $Oz$ ). В независимости кинетического момента относительно оси от выбора центра на этой оси можно убедиться также как и при определении момента силы относительно оси в прошлой лекции.

Моментом количества движения (кинетическим моментом) системы относительно центра  $A$  называют вектор:

$$\mathcal{L}_A = \sum_{\nu=1}^N l_{\nu A} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu} \times \mathbf{q}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \rho_{\nu} \times \mathbf{v}_{\nu}$$

Моментом количества движения (кинетическим моментом) системы относительно оси называется проекция на эту ось момента количества движения системы относительно любого выбранного на данной оси центра: (например относительно оси  $Oz$ )

$$\mathcal{L}_z = \mathcal{L}_A \cdot \mathbf{e}_z$$

( $A \in Oz$ ,  $\mathbf{e}_z$  - единичный вектор оси  $Oz$ ).

Кинетической энергией системы называют величину  $T$ , определяемую по формуле:

$$T = \sum_{\nu=1}^N T_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_{\nu} v_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} v_{\nu}^2$$

где  $T_{\nu} = \frac{1}{2} m_{\nu} v_{\nu}^2$  - кинетическая энергия точки  $P_{\nu}$ .

Как говорилось в прошлый раз, дифференциальные уравнения движения механической системы из  $N$  точек  $P_{\nu}$ , имеющих массы  $m_{\nu}$  и определяемых радиус-векторами  $\mathbf{r}_{\nu}$  в инерциальной системе координат имеют вид II Закона Ньютона:

$$m_{\nu} \ddot{\mathbf{r}}_{\nu}(t) = \mathbf{F}_{\nu}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$$

Представляя равнодействующую, приложенную к  $\nu$ -ой точке на равнодействующие внутренних и внешних сил:  $\mathbf{F}_{\nu} = \mathbf{F}_{\nu}^i + \mathbf{F}_{\nu}^e$  имеем  $N$  векторных дифференциальных уравнений:

$$m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} = \mathbf{F}_{\nu}^i + \mathbf{F}_{\nu}^e,$$

где  $\mathbf{a}_{\nu}$  - ускорение  $\nu$ -ой точки, из которых после проектирования на оси системы координат получается  $3N$  скалярных дифференциальных уравнений движения системы.

Для исследования движения надо при заданных начальных условиях (Задача Коши) проинтегрировать систему уравнений и найти зависимость  $\mathbf{r}_{\nu}(t)$ . Это в большинстве случаев невозможно, особенно если число уравнений (точек) велико. Однако, при практическом исследовании движения очень часто нет необходимости изучать всю систему дифференциальных уравнений движения системы, а достаточно знать изменение со временем лишь некоторых величин, общих для всей материальной системы и являющимися функциями координат и скоростей точек системы (и может быть времени), т.е. не зависящих от ускорений. В частности если такая функция (дифференциальное выражение) остается постоянной при действительном движении системы, то оно называется и является **первым интегралом уравнений движения** т.е. имеет вид  $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \text{const}$ . Использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы, а иногда и решить ее до конца.

Самый распространенный прием получения первых интегралов уравнений движения системы основан на изучении поведения основных динамических величин системы: количества движения, кинетического момента, кинетической энергии. Изменение этих величин во времени описывается основными теоремами динамики системы, которые являются непосредственными следствиями уравнений движения. Утверждения, описывающие условия, при которых некоторые из основных динамических величин, остаются постоянными (т.е. первые интегралы уравнений движения) называют **законами сохранения**.

## Теорема об изменении количества движения (системы)

Сложив почленно уравнения движения системы получим:

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^i + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^e,$$

Согласно 1-му свойству внутренних сил  $\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^i = \mathcal{F}^i = 0$ , поэтому справа остается только

$\mathcal{F}^e = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}^e$  - главный вектор внешних сил. Принимая во внимание постоянство массы

каждой из точек системы  $m_{\nu}$  имеем:  $\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\mathbf{v}_{\nu}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathcal{F}^e$$

**Производная по времени (изменение) количества движения системы  
равна главному вектору всех внешних сил системы**

Эту теорему можно представить в *интегральной форме* проинтегрировав по времени от  $t_1$  (начальный момент времени) до  $t_2$  (конечный момент времени):

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}^e dt$$

Выражение  $\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$  - называется **импульсом силы** за время  $t_2 - t_1$ , причем очевидно:

$\mathbf{S}(\mathcal{F}) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{S}(\mathbf{F}_{\nu})$ , если  $\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu}$ . Тогда получим альтернативную формулировку:

**Разность значений количества движения системы в конечный и начальный  
момент времени (приращение за конечное время) равно сумме импульсов  
внешних сил (импульсу главного вектора внешних сил) за это время**

Интегральная форма теоремы используется в случае, когда можно вычислить интеграл в правой части выражения, т.е. когда  $\mathcal{F}^e = \mathcal{F}^e(t)$ , т.е. не зависит от положений  $\mathbf{r}_{\nu}$  и скоростей  $\dot{\mathbf{r}}_{\nu}$  точек.

Дифференциальной форме теоремы об изменении количества движения придадим еще другой вид: т.к.  $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C$ , то с учетом постоянства массы системы  $M$  имеем

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathcal{F}^e$$

### Теорема о движении центра масс системы

**Центр масс системы движется так же, как двигалось бы материальная точка,  
масса которой равнялась бы массе системы, под действием силы, равной  
главному вектору всех внешних сил системы**

Отметим, что система, в частности, может состоять из одной единственной точки, поэтому для точки также справедлива теорема об изменении её количества движения:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathcal{F} = \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\mu}, \text{ где } \mathbf{q} = m\mathbf{v}, \text{ Причем для одной точки все силы - внешние - поэтому}$$

индекс  $e$  отсутствует. Учитывая, что  $m = \text{const}$  отсюда следует  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F}$  т.е. получили основной закон динамики точки (II Закон Ньютона). Кстати, Ньютон изначально сформулировал свой закон именно в таком виде - для количества движения точки. Поэтому для точки обычно используется только интегральная форма теоремы.

### Закон сохранения количества движения

Если все время движения главный вектор внешних сил - ноль:  $\mathcal{F}^e = 0$ , то из теоремы об изменении количества движения следует первый векторный интеграл или закон сохранения количества движения:

$$\boxed{Q = \text{const}} \iff \boxed{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \text{const}}$$

**Если главный вектор внешних сил - ноль, то количество движения - постоянно**

А из формулировки теоремы об изменении количества движения системы в виде теоремы о движении центра масс системы, если главный вектор внешних сил - ноль, получим:

$$\boxed{\mathbf{v}_C = \text{const}}$$

**Если главный вектор внешних сил - ноль, то скорость центра масс - постоянна**

Такое происходит, например, для так называемых *замкнутых (изолированных) систем*, которые двигаются только под влиянием внутренних взаимодействий, т.е. взаимодействий точек, входящих в систему, а взаимодействия с внешними телами, не входящими в систему отсутствуют, т.е. этих внешних тел как будто нет, или они не влияют на движение системы материальных точек. Строго говоря, замкнутых систем в таком смысле не существует, хотя бы потому что гравитационное взаимодействие существует, на каком бы расстоянии точки друг от друга не находились, поэтому замкнутость системы можно считать условно. Однако закон сохранения количества движения справедлив и не только для замкнутых систем, но и для общего случая, лишь бы во все время движения главный вектор внешних сил был ноль:  $\mathcal{F}^e = 0$ .

Проектируя закон на оси координат, получаем 3 скалярных первых интеграла:

$$\boxed{Q_x = C_1, \quad Q_y = C_2, \quad Q_z = C_3} \quad \text{или} \quad \boxed{v_{Cx} = C'_1, \quad v_{Cy} = C'_2, \quad v_{Cz} = C'_3}$$

На практике как раз зачастую бывает справедливы не все а 1 и 2 интеграла, т.е. если  $\mathcal{F}_{x_{\alpha}}^e = 0$  (проекция главного вектора внешних сил на ось  $Ox_{\alpha}$ ) тогда  $Q_{x_{\alpha}} = \text{const}$  или  $v_{Cx_{\alpha}} = \text{const}$ .

### Теорема об изменении кинетического момента

Кинетический момент системы относительно центра  $A$  определялся нами по формуле:  $\mathcal{L}_A = \sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$ , где  $\boldsymbol{\rho}_{\nu}$  - радиус-вектор  $\nu$ -ой точки системы относительно точки  $A$ ,  $m_{\nu}$  - ее масса. При этом точка  $A$  - совершенно произвольная, может и не совпадать с какой-либо материальной точкой системы во все время движения. Точка  $A$  может быть

неподвижной, а может и совершать произвольное движение. Обозначим  $\mathbf{v}_A$  - её скорость в выбранной инерциальной системе координат.

Дифференцируя по времени обе части выражения и учитывая  $m_\nu = \text{const}$  получим:

$$\frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \mathbf{a}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} \times m_\nu \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_\nu \times (\mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e)$$

Последняя сумма с учетом 2-го свойства внутренних сил равна главному моменту внешних

сил относительно центра  $A$ :  $\mathcal{M}_A^e = \sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e$ .

Учитывая, что  $\boldsymbol{\rho}_\nu = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_A$ , откуда  $\frac{d\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_A$ , окончательно получим:

$$\frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_A) \times m_\nu \mathbf{v}_\nu + \mathcal{M}_A^e = \left( \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu \right) \times \mathbf{v}_A + \mathcal{M}_A^e = M \mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A + \mathcal{M}_A^e$$

**Теорема об изменении кинетического момента  
относительно произвольно движущегося центра  $A$**

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A^e + M \mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A}$$

Наибольшее практическое применение имеют две формы этой теоремы: для неподвижной точки  $A$ , т.е.  $\mathbf{v}_A = 0$  и когда  $A$  совпадает (движется) с центром масс системы, т.е.  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C$ :

**Теорема об изменении  
кинетического момента  
относительно неподвижного центра**

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A^e}$$

**Теорема об изменении  
кинетического момента  
относительно центра масс системы**

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}_C}{dt} = \mathcal{M}_C^e}$$

**Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра (центра масс системы) равна главному моменту внешних сил относительно этого центра (центра масс системы)**

Таким образом теоремы об изменении кинетического момента системы для неподвижного центра  $A$  и для центра масс  $C$  имеют одинаковый вид: в левой части уравнения стоит производная времени от кинетического момента относительно рассматриваемой точки ( $A$  или  $C$ ), а в правой - главный момент внешних сил относительно этой же точки.

Следует сказать, что при вычислении кинетического момента системы используются абсолютные скорости точек. Поэтому теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс в приведенном виде, на самом деле, почти не используется. На следующей лекции мы приведем другой вид последней теоремы, более ценный для приложений, для так называемого относительного кинетического момента системы  $\mathcal{L}_{Cr}$  в её движении относительно центра масс, при определении которого используются относительные скорости точек.

Теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра можно записать в *интегральной форме*, проинтегрировав от начального  $t_1$  до конечного  $t_2$  моментов времени:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A_2} - \mathcal{L}_{A_1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_A^e dt}$$

справа в выражении стоит **импульс момента внешних сил**. Используется такая форма крайне редко, т.к.  $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_A^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times \mathbf{F}_\nu^e dt$  и его интегрирование требует знания функций  $\rho_\nu(t)$  и  $\mathbf{F}_\nu^e(t)$ .

### Закон сохранения кинетического момента относительно неподвижного центра

Если все время движения главный момент системы сил  $\mathcal{M}_A^e = 0$  (например в случае замкнутых систем) то из теоремы следует закон сохранения кинетического момента:

$$\mathcal{L}_A = \text{const}$$

**Если главный момент внешних сил относительно неподвижного центра – ноль, то кинетический момент системы относительно этого же центра – постоянен**

Если  $\mathcal{L}_A = (\mathcal{L}_{Ax}, \mathcal{L}_{Ay}, \mathcal{L}_{Az})$  - проекции вектора кинетического момента на соответствующие оси координат, то в этом случае получаем 3 первых скалярных интеграла:

$$\mathcal{L}_{Ax} = \text{const} = C_1, \quad \mathcal{L}_{Ay} = C_2, \quad \mathcal{L}_{Az} = C_3$$

Чаще всего справедливы на все 3, а лишь 1 или 2 интеграла, при условии равенства нулю главного момента внешних сил относительно соответствующих осей. Т.е. если  $\mathcal{M}_{Ax_\alpha}^e = 0$  тогда  $\mathcal{L}_{Ax_\alpha} = \text{const}$ .

### Теорема об изменении кинетической энергии системы

Пусть точки  $P_\nu$  системы переместились так, что их радиус-векторы  $\mathbf{r}_\nu$  в инерциальной системе отсчета получили приращения  $d\mathbf{r}_\nu$ . Найдем, как при этом изменилась кинетическая энергия системы  $T$ .

Т.к.  $T = \sum_{\nu} m_\nu v_\nu^2$ , то для дифференциала кинетической энергии имеем:

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{\nu} m_\nu \mathbf{v}_\nu d\mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu} m_\nu \mathbf{v}_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} dt = \sum_{\nu} m_\nu \mathbf{a}_\nu \mathbf{v}_\nu dt = \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} dt = \\ &= \sum_{\nu} (\mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e) d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu^i d\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu^e d\mathbf{r}_\nu = \delta A^i + \delta A^e \end{aligned}$$

$$dT = \delta A^i + \delta A^e$$

**Дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы**

Подчеркнем, что в отличие от рассмотренных ранее основных теорем динамики в теории об изменении кинетической энергии речи идет о всех силах системы: как внешних так и внутренних. Тот факт, что силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и противоположно направлены, не приводит к равенству нулю работы внутренних сил  $\delta A^i$ , т.к. при подсчете работы важны и перемещения точек, а они у двух взаимодействующих точек не обязательно одинаковы.

Проинтегрировав обе части равенства от  $t_1$  (начального) до  $t_2$  (конечного) по времени, получим *интегральную форму* теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \delta A^i + \int_{t_1}^{t_2} \delta A^e = A^i + A^e$$

$$T_2 - T_1 = A^i + A^e$$

**Разность значений кинетической энергии в конечный и начальный моменты времени (в конечном и начальном положениях системы) (или приращение кинетической энергии системы за конечное время) равно работе всех сил системы за то же время**

Обратим внимание, что теорема об изменении кинетической энергии имеет скалярный вид в отличие от предыдущих теорем векторного характера.

### Закон сохранения полной механической энергии

Пусть все силы системы (внешние и внутренние) - потенциальны, т.е.

$$\delta A^e = -d\Pi^e, \quad \delta A^i = -d\Pi^i$$

где  $\Pi^e$ ,  $\Pi^i$  потенциалы внешних и внутренних сил, соответственно, а их общий потенциал  $\Pi = \Pi^e + \Pi^i$  не зависит явно от времени (т.е. случай консервативного силового поля), тогда

$$dT = \delta A^e + \delta A^i = -d\Pi^e - d\Pi^i = -d\Pi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{dT + d\Pi = d(T + \Pi) = 0}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется **полная механическая энергия** системы:  $\boxed{E = T + \Pi}$ . Из последнего равенства следует:

$$\boxed{E = T + \Pi = \text{const}} \quad - \text{интеграл энергии}$$

**Если механическая система находится в консервативном силовом поле (все силы системы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени) то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна**

Следует иметь в виду, что для справедливости закона сохранения механической энергии требование о том, чтобы все силы системы были потенциальными, необязательно! Достаточно потребовать это от только сил, работа которых на действительном перемещении системы  $d\mathbf{r}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) отлична от нуля. Например, нормальная реакция:  $\mathbf{N} \perp d\mathbf{r}$ , поэтому  $\delta A(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0$  (так называемые идеальные связи). И если остальные все силы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии.

## ЛЕКЦИЯ 12

### ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Введем важное понятие: **движение системы относительно ее центра масс** - это движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Т.е. относительно системы координат  $Cxyz$  - которая называется **кениговой системой координат**. У нее оси  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  совпадают с направлениями осей  $O_ax$ ,  $O_ay$ ,  $O_az$  некоторой инерциальной (неподвижной) системы координат  $O_axyz$  (рис. 55). Введение этого движения позволяет получить новые выражения для мер движения системы и новые уравнения для них.

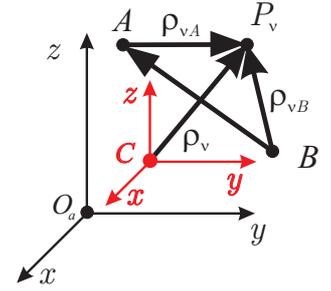


Рис. 55.

На прошлой лекции мы ввели понятие кинематического момента относительно некоторого центра  $A$ :  $\mathcal{L}_A = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu A} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$ , где  $\rho_{\nu A}$  - радиус-вектор точки системы  $P_{\nu}$  относительно  $A$ , т.е.  $\rho_{\nu A} = \overrightarrow{AP_{\nu}}$  (рис. 55),  $m_{\nu}$  - ее масса,  $\mathbf{v}_{\nu}$  - скорость в инерциальной системе координат  $O_axyz$ .

При этом точка  $A$  (центр) может, вообще говоря, перемещаться как угодно (необязательно неподвижная). При изменении центра кинетический момент - изменяется. Найдем зависимость между его значениями для двух различных центров  $A$  и  $B$ . Пусть  $\rho_{\nu A}$  и  $\rho_{\nu B}$  радиус-векторы точки  $P_{\nu}$  относительно центров  $A$  и  $B$ , соответственно. Тогда (рис. 55)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu B} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N (\overrightarrow{BA} + \rho_{\nu A}) \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^N \overrightarrow{BA} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu A} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = \overrightarrow{BA} \times \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \mathcal{L}_A = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{Q} + \mathcal{L}_A \end{aligned}$$

т.е.  $\boxed{\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{Q}}$  где  $\mathbf{Q}$  - количество движения системы точек.

Отсюда, например, если  $A = C$  т.е. является центром масс системы имеем:

$\boxed{\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_C + \overrightarrow{BC} \times \mathbf{Q}}$  Альтернативное выражение:  $\boxed{\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_C + m_B(\mathbf{Q})}$  считая  $\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_C$  приложенным в центре масс,  $m_B(\mathbf{Q}) = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{Q}$  - момент количества движения около  $B$ .

В терминах введенного понятия движения системы относительно ее центра масс рассмотрим **относительный кинетический момент относительно центра масс  $C$** :

$$\boxed{\mathcal{L}_{Cr} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu r}}$$

где  $\mathbf{v}_{\nu r}$  - скорость точки  $P_{\nu}$  в её движении относительно центра масс, т.е. в кениговой системе координат  $Cxyz$ , т.е. является относительной скоростью.

По аналогии с этим, назовем вектор:  $\boxed{\mathcal{L}_C = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}}$  - **абсолютным кинетическим моментом системы относительно центра масс**. Здесь  $\mathbf{v}_{\nu}$  - абсолютная скорость точки  $P_{\nu}$  системы, т.е. относительно неподвижной системы координат  $O_axyz$ . В силу того, что кенигова система координат движется поступательно, переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_C$ . Поэтому абсолютная скорость точки  $P_{\nu}$ , участвующей в сложном движении, будет определяться формулой:  $\mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r}$ .

Вычислим теперь абсолютный кинетический момент системы относительно  $C$ :

$$\mathcal{L}_C = \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r}) = \left( \sum_{\nu=1}^N m_\nu \rho_\nu \right) \times \mathbf{v}_C + \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r}$$

Последнее слагаемое является относительным кинетическим моментом системы относи-

тельно центра масс:  $\mathcal{L}_{Cr} = \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r}$ . Так как центр масс находится в начале кениговой системы координат, т.е.  $\rho_C = 0$ , тогда выражение в скобках первого слагаемого

преобразуется:  $\sum_{\nu=1}^N m_\nu \rho_\nu = M \rho_C = 0$ . Тогда имеем:

$$\boxed{\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_{Cr}}$$

т.е. абсолютный кинетический момент системы относительно центра масс равен относительному кинетическому моменту относительно центра масс. Более того если рассмотреть **относительный кинетический момент относительно любой другой точки  $A$** , не являющейся центром масс, имеем:

$$\mathcal{L}_{Ar} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu A} \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} = \sum_{\nu=1}^N (\overrightarrow{AC} + \rho_\nu) \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} = \overrightarrow{AC} \times \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} + \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r}$$

Последнее слагаемое является относительным кинетическим моментом системы относи-

тельно центра масс:  $\mathcal{L}_{Cr} = \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{\nu r}$ . А сумма в первом слагаемом преобразуется:

$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} = M \mathbf{v}_C = 0$  поскольку скорость центра масс в кениговой системе координат - это

скорость начала координат, т.е. равна нулю. Тогда имеем:

$$\boxed{\mathcal{L}_{Ar} = \mathcal{L}_{Cr}}$$

Т.е. кинетический момент механической системы точек в ее движении относительно центра масс одинаков для всех точек пространства и равен:

$$\boxed{\mathcal{L}_{Ar} = \mathcal{L}_C}$$

Поэтому справедливо следующее выражение

$$\boxed{\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{Ar} + \overrightarrow{AC} \times \mathbf{Q}}$$

т.е. абсолютный кинетический момент системы относительно центра  $A$  равен сумме ее относительного кинетического момента (одинакового для всех точек пространства:  $\mathcal{L}_{Ar} = \mathcal{L}_{Cr} = \mathcal{L}_C$ ) и момента вектора  $\mathbf{Q}$  относительно центра  $A$  в предположении, что он приложен в центре масс системы.

Своеобразный аналог полученного выражения для кинетического момента можно сформулировать и для кинетической энергии, если ввести  $T_r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_{\nu r}^2$  - **относительная кинетическая энергия системы** (т.е. кинетическая энергия относительного движения системы по отношению к центру масс).

**ТЕОРЕМА Кёнига:** Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, двигающаяся как центр масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс системы.

**Доказательство:**

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_C^2 + \left( \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} \right) \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_{\nu r}^2$$

$$\text{имеем: } T = \frac{1}{2} M v_C^2 + (M \mathbf{v}_{Cr}) \cdot \mathbf{v}_C + T_r$$

т.к. относительная скорость центра масс:  $\mathbf{v}_{Cr} = 0$  окончательно получим выражение:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r} \quad \text{где} \quad \boxed{T_r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_{\nu r}^2} \quad \blacksquare$$

Вспоминая теперь выражения для производной абсолютного кинетического момента системы относительно центра масс в теореме в одноименной теореме с прошлой лекции:

$$\frac{d\mathcal{L}_C}{dt} = \mathcal{M}_C^e$$

и полученное равенство абсолютного и относительного кинетических моментов  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_{Cr}$  получаем **теорему об изменении относительного кинетического момента системы относительно центра масс:**

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = \mathcal{M}_C^e}$$

Т.е. вид этой теоремы для абсолютного и относительного кинетических моментов – одинаков. Чаще всего именно эта теорема об изменении относительного кинетического момента системы относительно центра масс используется на практике.

### Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета

Если рассмотреть движение механической системы в вообще произвольно двигающейся, неинерциальной, системе отсчета (подвижная среда типа моря или воздуха, но перемещающаяся как абсолютное твердое тело), то как мы видели ранее (8 лекция), для описания движения любой точки в таком сложном движении, необходимо добавить к обычным силам - силы инерции:  $\mathbf{J}_\nu^e = -m_\nu \mathbf{a}_\nu^e$ ,  $\mathbf{J}_\nu^c = -m_\nu \mathbf{a}_\nu^c$  - переносную и кориолисову, где  $\mathbf{a}_\nu^e$  - переносное ускорение точки  $P_\nu$  (т.е. ускорение той точки среды или тела, с которой  $P_\nu$  совпадают в данный момент времени) и  $\mathbf{a}_\nu^c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu r}$  - кориолисово ускорение точки.

Таким образом дифференциальные уравнения относительного движения имеют вид:

$$\boxed{m_\nu \mathbf{a}_{\nu r} = \mathbf{F}_\nu^e + \mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{J}_\nu^e + \mathbf{J}_\nu^c} \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

записанные покомпонентно в некоторой инерциальной системе координат, или

$$\boxed{m_\nu \tilde{\mathbf{a}}_{\nu r} = \tilde{\mathbf{F}}_\nu^e + \tilde{\mathbf{F}}_\nu^i + \tilde{\mathbf{J}}_\nu^e + \tilde{\mathbf{J}}_\nu^c} \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

представленные покоординатно в неинерциальной, переносной системе координат.

Как обычно принято:  $\mathbf{a}_{\nu r}$  и  $\mathbf{v}_{\nu r}$  - ускорение и скорость точки системы в относительном движении. Связь между одноименными векторами, записанными координатами в инерциальной ( $\mathbf{c}$ ) и неинерциальной системе ( $\tilde{\mathbf{c}}$ ) - традиционная:  $\mathbf{c} = A\tilde{\mathbf{c}}$ , где  $A$  - матрица перехода от одной системы к другой (матрица поворота).

Полученные ранее все теоремы динамики как раз вытекают из дифференциальных движения точек (II-ой закон Ньютона для каждой точки). Следовательно, все сформулированные теоремы будут верны и в неинерциальной системе отсчета если к силам, приложенным к системе (внешним и внутренним) добавить переносные и кориолисовы силы инерции для ее точек. При этом следует формально силы инерции относить к внешним силам. Например, **теорема об изменении количества движения в неинерциальной системе отсчета** самом общем случае имеет вид:

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_r}{dt} = \tilde{\mathbf{F}}^e + \tilde{\mathbf{J}}^e + \tilde{\mathbf{J}}^c}$$

где  $\tilde{Q}_r = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \tilde{v}_{\nu r}$  - относительное количество движения системы,  $\tilde{\mathcal{F}}^e$  - главный вектор внешних сил,  $\tilde{\mathcal{J}}^e = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathcal{J}}_\nu^e$ ,  $\tilde{\mathcal{J}}^c = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathcal{J}}_\nu^c$  - главные вектора переносных и кориолисовых сил инерции.

**Теорема об изменении кинетического момента в неинерциальной системе отсчета** (для неподвижного относительно неинерциальной системы центра  $A$ ):

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Ar}}{dt} = \tilde{\mathcal{M}}_A^e + \tilde{\mathcal{M}}_A^{J_e} + \tilde{\mathcal{M}}_A^{J_c}}$$

где  $\tilde{\mathcal{L}}_{Ar} = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\rho}_{\nu A} \times m_\nu \tilde{v}_{\nu r}$  радиус-вектор точки  $P_\nu$  относительно центра  $A$  ( $\tilde{\rho}_{\nu A} = \overrightarrow{AP_\nu}$ ),  $\tilde{\mathcal{M}}_A^e$  - главный момент внешних сил, приложенных к системе относительно точки  $A$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}_A^{J_e} = \sum_{\nu=1}^N \tilde{m}_A(\tilde{\mathcal{J}}_\nu^e) = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\rho}_{\nu A} \times \tilde{\mathcal{J}}_\nu^e$  - главный момент переносных сил инерции,  $\tilde{\mathcal{M}}_A^{J_c} = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\rho}_{\nu A} \times \tilde{\mathcal{J}}_\nu^c$  - главный момент кориолисовых сил инерции.

**Теорема об изменении кинетической энергии  $T_r$  системы, соответствующей ее движению в неинерциальной системе координат:**

$$\boxed{dT_r = \delta_r A^e + \delta_r A^i + \delta_r A^{J_e}}$$

где  $T_r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_{\nu r}^2$  - кинетическая энергия относительного движения,

$\delta_r A^e$ ,  $\delta_r A^i$  - элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе, но на относительных перемещениях  $d\tilde{\rho}_\nu$  ее точек:  $\delta_r A = \sum_{\nu=1}^N \delta_r A_\nu = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_\nu d\tilde{\rho}_\nu$

$\delta_r A^{J_e}$  - элементарная работа переносных сил инерции.

Здесь отсутствует работа кориолисовых сил инерции поскольку она равна нулю: кориолисова сила инерции  $\tilde{\mathcal{J}}_\nu^c = -2m_\nu \tilde{\omega} \times \tilde{v}_{\nu r}$  перпендикулярна относительному перемещению  $d\tilde{\rho}_\nu = \tilde{v}_{\nu r} \cdot dt$ .

Заметим, что все теоремы динамики тела (векторные, кроме кинетической энергии) записанные выше в неинерциальной (подвижной) системе координат можно представить (покомпонентно разложить) в инерциальной (неподвижной) системе координат, заменив абсолютную производную по времени от относительной векторной величины в подвижных осях - на относительную производную той же величины, но представленную в неподвижных осях - согласно определению  $\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{dt} = A \frac{d\mathbf{c}}{dt}$ , где  $A$  - матрица поворота от  $O\xi_\alpha$  к  $Ox_\alpha$ :

$$\boxed{\frac{d\tilde{Q}_r}{dt} = \mathcal{F}^e + \mathcal{J}^e + \mathcal{J}^c}$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Ar}}{dt} = \mathcal{M}_A^e + \mathcal{M}_A^{J_e} + \mathcal{M}_A^{J_c}}$$

где  $Q_r = \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_{\nu r}$ ,  $\mathcal{L}_{Ar} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu A} \times m_\nu v_{\nu r}$ ,  $\mathcal{J}^e = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu^e$ ,  $\mathcal{M}_A^e = - \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu A} \times m_\nu \mathbf{a}_\nu^e$

Если неинерциальная система координат перемещается поступательно (т.е. не вращается) тогда угловая скорость и ускорение равны нулю:  $\omega = \varepsilon = 0$ , а переносное ускорение

точек:  $\mathbf{a}_\nu^e = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_\nu + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu)$  равно ускорению  $\mathbf{a}_O$  любой точки  $O$  движущейся среды с которой связана подвижная система координат:  $\boxed{\mathbf{a}_\nu^e = \mathbf{a}_O}$ . Отсюда главный вектор

переносных сил инерции:  $\mathbf{J}^e = -\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu^e = -\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_O = -M \mathbf{a}_O$ , а главный момент

переносных сил инерции:  $\mathcal{M}_A^e = -\sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_{\nu A} \times m_\nu \mathbf{a}_\nu^e = -\sum_{\nu=1}^N m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu A} \times \mathbf{a}_O = -M \overrightarrow{AC} \times \mathbf{a}_O$ , где

$\overrightarrow{AC}$  - радиус-вектор центра масс  $C$ ,  $M$  - масса системы.

Кроме того, видно, что кориолисовы силы инерции для всех точек системы также равны нулю:  $\mathbf{J}_\nu^c = -2m_\nu \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu r} = 0$ , а значит и главные вектор и момент системы кориолисовых сил инерции зауляются:  $\mathbf{J}^c = \mathcal{M}_A^{J^c} = 0$ .

Более того, при поступательном переносном движении совпадают относительная и абсолютные производные вектора:  $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c} = \frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt}$  и ещё  $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$  потому что в отсутствии вращения матрица поворота  $A = \text{const}$  и можно положить  $A \equiv I$  - единичная. Тогда теоремы для неинерциальных систем координат приобретают вид:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Q}_r}{dt} = \mathcal{F}^e - M \mathbf{a}_O}$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}_{Ar}}{dt} = \mathcal{M}_A^e - M \overrightarrow{AC} \times \mathbf{a}_O}$$

Если  $\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_C$ , т.е. система координат двигается поступательно со скоростью и ускорением центра масс механической системы - является кёниговой, тогда количество движения си-

стемы точек в этой системе координат равно нулю:  $\mathbf{Q}_r = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_{\nu r} = M \mathbf{v}_{Cr} = 0$ . Тогда

теорема об изменении количества движения системы принимает известный вид теоремы о движении центра масс:  $\boxed{M \mathbf{a}_C = \mathcal{F}^e}$

Кроме того, для кениговой системы, относительно которой центр масс  $C$  неподвижен, как и точка  $A$ , относительно которой определяется кинетический момент системы  $\mathcal{L}_{Ar}$ , с учетом полученной выше формулы для абсолютного кинетического момента относительно центра  $A$  имеем:

$$\frac{d\mathcal{L}_{Ar}}{dt} + M \overrightarrow{AC} \times \mathbf{a}_C = \frac{d\mathcal{L}_{Ar}}{dt} + \overrightarrow{AC} \times M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_{Ar} + \overrightarrow{AC} \times M \mathbf{v}_C) = \frac{d\mathcal{L}_A}{dt}$$

Тогда теорема об изменении относительного кинетического момента относительно неподвижной точки  $A$  в неинерциальной системе координат, являющейся кениговой принимает

вид:  $\boxed{\frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A^e}$  аналогичный как и для абсолютной, инерциальной системы координат.

В этой же кениговой системе координат теорема об изменении кинетической энергии движения относительно центра масс системы, также упрощается и принимает вид такой же как и в инерциальной системе координат.  $\delta A^{J^e}$  - слагаемое, обусловленное неинерциальностью систему отсчета:

$$\delta A^{J^e} = \sum_{\nu} \mathbf{J}_\nu^e d\boldsymbol{\rho}_\nu = -\sum_{\nu} m_\nu \mathbf{a}_\nu^e d\boldsymbol{\rho}_\nu = -\sum_{\nu} m_\nu \mathbf{a}_C d\boldsymbol{\rho}_\nu = -\left( \sum_{\nu} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu \right) \mathbf{a}_C$$

Сумма в скобках равна нулю, т.к. в кениговой системе отсчета  $\sum_{\nu} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu = M \boldsymbol{\rho}_C = 0$  из-за выбора начала системы координат в центре масс, следовательно сумма  $\sum_{\nu} m_\nu d\boldsymbol{\rho}_\nu$  также

ноль. Отсюда окончательно имеем выражение для дифференциала кинетической энергии движения системы относительно центра масс

$$dT_r = \delta_r A^e + \delta_r A^i$$

т.е. в целом у нее вид такой же как и для инерциальной системы отсчета. Отличие заключается только в том, что элементарная работа внешних и внутренних сил системы вычисляется на перемещениях точек их приложения (приложения сил к точкам) - по отношению к центру масс (т.е. как если бы центр масс был неподвижен).

Во всех векторных теоремах динамики системы точек фигурируют только внешние силы  $\left(\frac{dQ}{dt} = \mathcal{F}^e, \frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A^e\right)$  и лишь в теореме об изменении кинетической энергии стоят оба слагаемых и для внешних и внутренних сил. Один из случаев, когда работа внутренних сил равна нулю является случай так называемой **неизменяемой системы** - это механическая система у которой расстояние между точками постоянно. Частным примером такой системы является абсолютное твердое тело, т.е. можно сказать что твердое тело - это неизменяемая механическая система у которой точки сплошным образом занимают некоторый объем пространства.

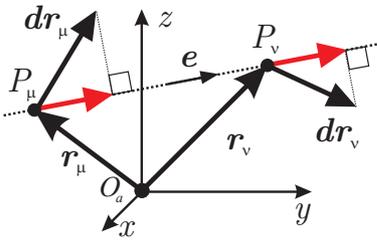


Рис. 56.

В самом деле для двух точек такой системы требование сохранения расстояния значит равенство проекций их элементарных перемещений на линию соединяющую точки (рис. 56):  $\text{пр } d\mathbf{r}_\nu = \text{пр } d\mathbf{r}_\mu$  - на линию (прямую) проходящую через точки  $P_\nu, P_\mu$ , т.е.  $d\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{e} = d\mathbf{r}_\mu \cdot \mathbf{e}$ , где  $\mathbf{e}$  - единичный вектор прямой,

проходящий через  $P_\nu, P_\mu$ :  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu}{|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu|}$ .

По III Закону Ньютона силы механического взаимодействия между точками системы:

$$|\mathbf{F}_{\nu\mu}| = |\mathbf{F}_{\mu\nu}| = F, \quad \mathbf{F}_{\nu\mu} = -\mathbf{F}_{\mu\nu} = F\mathbf{e}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\delta A(\mathbf{F}_{\nu\mu}) + \delta A(\mathbf{F}_{\mu\nu}) = \mathbf{F}_{\nu\mu} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot d\mathbf{r}_\mu = F(\mathbf{e} \cdot d\mathbf{r}_\nu - \mathbf{e} \cdot d\mathbf{r}_\mu) = 0$$

Таким образом для неизменяемой системы (т.е. например для твердого тела) работа всех внутренних сил равна нулю. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы имеет вид:  $dT = \delta_r A^e$  т.е. учитывается только работа приложенных к телу внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил.

## ЛЕКЦИЯ 13

### ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Абсолютно твердым телом** называется такое материальное тело, расстояния между любыми точками которого остаются неизменными во все время движения. Такое тело является частным видом неизменяемой механической системы и отвечает тому случаю, когда точки системы непрерывным образом заполняют некоторую область пространства. Абсолютно твердое тело является моделью реальных тел. Оно тем точнее отражает свойства реального тела, чем меньше оно способно деформироваться под действием приложенных сил.

Абсолютно твердое тело обладает рядом специфических свойств, которые мы рассмотрим. Теория движения твердого тела будет построена как частный случай основной механической теории - системы материальных точек.

#### Масса и центр масс твердого тела

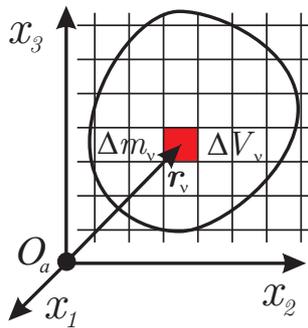


Рис. 57.

Введенное нами ранее понятие центра масс системы материальных точек распространим на случай тела. Для этого разобьем тело каким либо образом на большее число частей и через  $\Delta m_\nu$  и  $\Delta V_\nu$  - обозначим массу и объем  $\nu$ -ой части тела (рис. 57). Если рассмотреть предел отношения массы этой части к ее объему при устремлении объема  $\Delta V_\nu$  - к нулю, то получим так называемую **плотность**

**тела в данной точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\nu$ :** 
$$\mu = \lim_{\Delta V_\nu \rightarrow 0} \frac{\Delta m_\nu}{\Delta V_\nu} = \frac{dm}{dV}$$
 Т.е.  $\mu = \mu(\mathbf{r})$  - скалярная, неотрицательная функция. Обычно плотность считается известной и является функцией координат точки тела. Вообще говоря, ее можно задавать и в сопутствующих осях, т.е.  $\mu = \mu(\boldsymbol{\rho})$  или  $\mu = \mu(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$  ( $\boldsymbol{\rho} = A\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ ).

Если  $\mu = \text{const}$  - постоянная, то говорят, что тело **однородное**. Если нет, то тело называют **неоднородным**.

**Массой тела** называют предел, к которому стремится сумма масс его частей, когда число частей беспредельно увеличивается, а их размеры соответственно уменьшаются:

$$M = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_\nu \rightarrow 0}} \sum_{\nu=1}^N \Delta m_\nu \longrightarrow M = \int_{(M)} dm$$

Выражая элемент массы  $dm$  через плотность  $\mu$  материала тела и элемент объема  $dV$  по формуле:  $dm = \mu dV$  можно выразить массу тела в виде интеграла по объему:

$$M = \int_{(V)} \mu dV = \iiint_{(V)} \mu(\mathbf{r}) dx_1 dx_2 dx_3$$

В частности для однородного тела:  $M = \mu V$ .

**Центром масс твердого тела** - называется предел, к которому стремится центр масс системы его частей, когда число делений тела растет до бесконечности, а размеры его частей соответственно уменьшаются до нуля

$$\mathbf{r}_C = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_\nu \rightarrow 0}} \frac{\sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \Delta m_\nu}{\sum_{\nu=1}^N \Delta m_\nu} \longrightarrow \mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_{(V)} \mu \mathbf{r} dm$$

## Момент инерции системы точек и тела относительно оси. Радиус инерции.

Мерой инерции системы точек и тела во вращательном движении вокруг некоторой оси является осевой момент инерции.

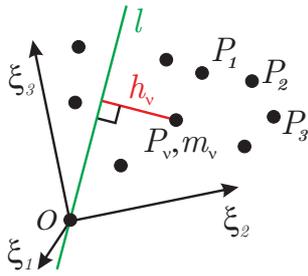


Рис. 58.

Пусть расстояние точки  $P_\nu$  механической системы ( $\nu = 1, \dots, N$ ) до некоторой оси  $l$  равно  $h_\nu$  (рис. 58) (если ось  $l$  движется, тогда  $h_\nu$  - в некоторый фиксированный момент времени). Т.е.  $h_\nu$  - длина перпендикуляра опущенного из точки  $P_\nu$  на ось  $l$ . Величина

$$J_l = \sum_{\nu=1}^N m_\nu h_\nu^2$$

называется **моментом инерции системы относительно оси  $l$**  или **осевым моментом инерции**.

Для тела, как обычно, необходимо совершить известный предельный переход, в результате которого получим формулу **момента инерции тела относительно оси  $l$** :

$$J_l = \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(V)} h^2 \mu dm$$

где  $h = h(\mathbf{r})$  - является функцией точек тела.

Т.к. координаты точек тела можно задавать в разных системах координат, мы для удобства будем использовать декартову прямоугольную сопутствующую систему координат  $O\xi_\alpha$ , начало  $O$  которой находится на оси  $l$ , тогда  $h = h(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . И будем отмечать (обозначать) **момент инерции тела (системы тел или точек) относительно оси  $l$ , проходящей через точку  $O$** :

$$J_l^O = \int_{(V)} h^2 \mu dm$$

Очевидно, что расстояние до любой оси  $\xi_\alpha$  определяется выражением:  $h^2 = \xi_{\alpha+1}^2 + \xi_{\alpha+2}^2$ . Тогда

$$J_{\xi_\alpha}^O = \iiint_{(V)} (\xi_{\alpha+1}^2 + \xi_{\alpha+2}^2) \mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

- **моменты инерции тела относительно координатных осей  $O\xi_\alpha$  - декартовых прямоугольных** (нижний индекс ограничен по модулю 3).

Величина  $\rho$  - называется **радиусом инерции тела относительно оси  $l$**  для которой

$$J_l = M\rho^2 \quad \text{где } M - \text{масса тела.}$$

## Моменты инерции тела (системы тел, точек) относительно параллельных осей

Очевидно, что момент инерции относительно оси зависит как от выбора направления оси, так точки через которые она проходит, т.е. от конкретной оси. Оказывается, можно установить зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.

**Теорема Гюйгенса-Штейнера.** Момент инерции тела (системы точек) относительно произвольной оси  $l$  равен сумме момента инерции относительно оси  $l'$  - параллельной исходной и проходящей через центр масс, и произведению массы тела на квадрат расстояния  $d$  между данными осями:

$$J_l^A = J_{l'}^C + Md^2$$

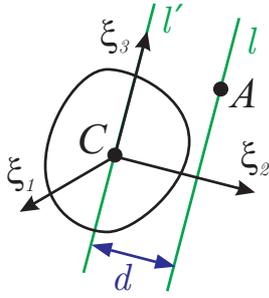


Рис. 59.

**Доказательство:** Рассмотрим вспомогательную декартову систему координат  $C\xi_\alpha$ , т.е. по сути выберем сопутствующую систему координат с началом в центре масс  $C$ , а оси  $\xi_\alpha$  подберем так, чтобы ось  $C\xi_3 = l'$ , а ось  $C\xi_2$  - пересекала  $l$ , проходящую через точку  $A$  (рис. 59). Так очевидно можно сделать поскольку выбор сопутствующей системы координат в определенном смысле произволен и для каждого момента времени можно так подобрать систему. Сделано это для упрощения дальнейших выкладок.

Осевые моменты инерции тела (системы точек) относительно оси  $l'$ , проходящей через центр масс  $C$ , и относительно оси  $l$ , проходящей через точку  $A$ , имеют вид:

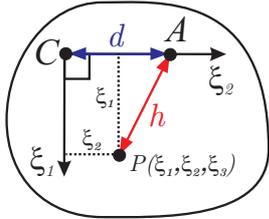


Рис. 60.

$$J_{l'}^C = \int_{(M)} (\xi_1^2 + \xi_2^2) dm, \quad J_l^A = \int_{(M)} h^2 dm$$

где  $h^2 = \xi_1^2 + (d - \xi_2)^2$  - расстояние от оси  $l$  до точек тела (рис. 60).

$$\begin{aligned} J_l^A &= \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(M)} (\xi_1^2 + d^2 - 2d\xi_2 + \xi_2^2) dm = \\ &= \int_{(M)} (\xi_1^2 + \xi_2^2) dm + d^2 \int_{(M)} dm - 2d \int_{(M)} \xi_2 dm = J_{l'}^C + Md^2 \end{aligned}$$

т.к.  $\int_{(M)} \xi_2 dm = M\xi_2^C = 0$  поскольку центр масс  $C$  в выбранной системе координат является началом системы координат. ■

Отсюда легко установить зависимость между осевыми моментами инерции относительно любых параллельных осей  $l_1 \parallel l_2$ :  $J_{l_1} = J_{l_2} + M(d_1^2 - d_2^2)$  где  $d_1$  и  $d_2$  - расстояния осей  $l_1$  и  $l_2$  до параллельной им обеим оси, проходящей через центр масс, соответственно.

### Центробежные моменты инерции. Тензор инерции.

Момент инерции тела относительно оси произвольного направления оказывается можно выразить через направляющие косинусы этой оси и некоторую совокупность 6 величин.

Рассмотрим некоторую ось  $l$ , проходящую через полюс  $O$ , т.е. какую-то точку тела (хотя на самом деле и не обязательно тела). Связывая с телом сопутствующую декартову систему координат  $O\xi_\alpha$  определим орт оси  $l$  (рис. 61):

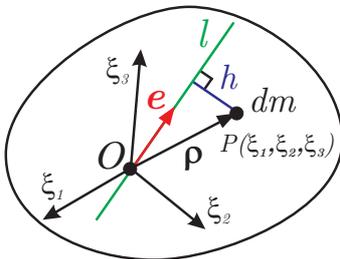


Рис. 61.

$$\tilde{e} = (e_1, e_2, e_3), \quad |\tilde{e}|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

Его компоненты, равны косинусам углов с осями  $\xi_\alpha$ :

$$e_\alpha = \cos \angle(\tilde{e}, \xi_\alpha)$$

Из рис. 61 видно, что расстояние  $h$  от любой точки  $P$  тела, определяемой радиус-вектором  $\tilde{\rho} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  равно  $h^2 = \rho^2 - \rho_e^2$ , где  $\rho_e$  - проекция вектора  $\tilde{\rho}$  на направление оси  $l$ :  $\rho_e = \tilde{\rho} \cdot \tilde{e} = \sum_{\alpha} \xi_\alpha e_\alpha$ . Следовательно осевой момент инерции тела относительно оси  $l$ :

$$J_l^O = \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(M)} \left[ \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^2 - \left( \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} e_{\alpha} \right)^2 \right] dm = \int_{(M)} \left[ \sum_{\alpha} (1 - e_{\alpha}^2) \xi_{\alpha}^2 - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} e_{\alpha} e_{\beta} \right] dm$$

учитывая, что  $1 - e_{\alpha}^2 = e_{\alpha+1}^2 + e_{\alpha+2}^2$  ( $\alpha = 1, 2, 3$  индекс ограничен по модулю 3), получим:

$$J_l^O = \int_{(M)} \left[ \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^2 (e_{\alpha+1}^2 + e_{\alpha+2}^2) - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} e_{\alpha} e_{\beta} \right] dm = \quad (\text{после перегруппировки})$$

$$= \int_{(M)} \left[ \sum_{\alpha} (\xi_{\alpha+1}^2 + \xi_{\alpha+2}^2) e_{\alpha}^2 - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} e_{\alpha} e_{\beta} \right] dm$$

Окончательно получим выражение:

$$J_l^O = \sum_{\alpha=1}^3 e_{\alpha}^2 \int_{(M)} (\xi_{\alpha+1}^2 + \xi_{\alpha+2}^2) dm - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 e_{\alpha} e_{\beta} \int_{(M)} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} dm$$

Видно, что  $\int_{(M)} (\xi_{\alpha+1}^2 + \xi_{\alpha+2}^2) dm = J_{\xi_{\alpha}}^O$  - осевые моменты инерции тела относительно осей

$O\xi_{\alpha}$ . Для сокращения дальнейших записей будем их обозначать:  $J_{\alpha}^O = J_{\xi_{\alpha}}^O$

Введем обозначения  $J_{\alpha\beta}^O = \int_{(M)} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} dm$  - для **центробежных моментов инерции тела**.

Очевидна симметричность центробежных моментов инерции по индексам:  $J_{\alpha\beta}^O = J_{\beta\alpha}^O$

Таким образом выражение для момента инерции тела относительно некоторой оси  $l$  определяется через осевые моменты инерции относительно осей системы координат (3 шт.) и центробежные моменты инерции (3 шт.), т.е. всего 6 величин:

$$J_l^O = \sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha}^O e_{\alpha}^2 - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 J_{\alpha\beta}^O e_{\alpha} e_{\beta} \quad (1)$$

При этом видно, что  $J_{\alpha}^O$  и  $J_{\alpha\beta}^O$  не зависят от выбора оси  $l$  - они определяются только выбором точки  $O$  и осями  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , поэтому они постоянны.

Если осевые моменты инерции представляют собой меру инертности тела (системы) при ее вращении вокруг соответствующей оси ( $J_{\alpha}^O$  - вокруг  $O\xi_{\alpha}$ ), то центробежные моменты инерции можно трактовать как меру неуравновешенности масс системы: они характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей.

Понятно, что различных точек  $O$  осевые и центробежные моменты инерции разные. Очевидно, что они изменяются также при повороте системы координат  $O\xi_{\alpha}$  вокруг точки  $O$  (т.е. при выборе другой сопутствующей системы координат, ведь ее выбор - условен). Анализируя полученное выражение для осевого момента инерции тела относительно оси  $l$  через осевые и центробежные моменты инерции можно установить следующую простую формулу для определения  $J_l^O$ :

$$J_l^O = (\mathbb{J}_O \tilde{e}) \tilde{e}$$

где  $\mathbb{J}_O = \begin{bmatrix} J_1^O & -J_{12}^O & -J_{13}^O \\ -J_{12}^O & J_2^O & -J_{23}^O \\ -J_{13}^O & -J_{23}^O & J_3^O \end{bmatrix}$  - **тензор (оператор) инерции**

Видно, что  $\mathbb{J}_O$  является симметрической матрицей, постоянной в сопутствующих осях.

**Тензором ранга 2** - называется билинейное отображение векторного пространства  $\mathbb{E}_3$  в пространство скаляров (чисел)  $\mathbb{R}$ :

$$T : \mathbb{E}_3 \times \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{т.е.} \quad \boxed{T\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}_3$$

*Билинейное* - значит линейное по каждой координате (вектору).

Оказывается, тензора 2-го ранга могут быть представлены в виде

$$\boxed{T\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = L\langle \mathbf{a} \rangle \cdot \mathbf{b}}$$

где  $L$  - линейное векторное отображение, т.е.  $L : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ , которое определяется единственным образом по  $T$ . Поэтому пространство таких линейных отображений тоже называют тензорами 2-го ранга (хотя изначально, как видно, это другой термин).

Понятно, что аналогом линейных векторных отображений, действующих как  $\boxed{L\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{c}}$ , в линейной алгебре являются матрицы (квадратные) размерами равными размерности пространства  $\mathbb{E}_3$  т.е. - 3, если вектора представлять как тройки чисел:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3), \quad L = \{L_{ij}\}_{i,j=1}^3$$

Действие же линейного оператора на «объект»-вектор – эквивалентно умножению матрицы на тройку чисел-вектор.

При этом в нашем случае, оказалось, что этот тензор (по классификации - 2-го ранга) еще и симметричный, т.е.

$$(\mathbb{J}_O)^* = \mathbb{J}_O$$

где «звездочкой» обозначена операция сопряжения матрицы, которая в в нашем случае (в поле действительных чисел  $\mathbb{R}$ ) эквивалента только транспонированию матрицы.

Значит вместо 9 (как обычно) независимых компонент у него их будет только 6.

Итак, для вычисления момента инерции  $J_l^O$  относительно какой-либо оси  $l$ , проходящей через точку  $O$  пространства необходимо знать тензор инерции тела  $\mathbb{J}_O$  в точке  $O$  и дважды умножить его на направляющий орт оси  $\tilde{\mathbf{e}}$ .

### Эллипсоид инерции. Главные оси инерции.

Формула для осевого момента инерции (1) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. На оси  $l$  отложим по обе стороны от точки  $O$  отрезки длины  $ON = \frac{1}{\sqrt{J_l^O}}$ .

Радиус-вектора всех таких точек:  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \pm \tilde{\mathbf{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_l^O}} = \pm \left( \frac{e_1}{\sqrt{J_l^O}}, \frac{e_2}{\sqrt{J_l^O}}, \frac{e_3}{\sqrt{J_l^O}} \right)$ .

Обозначая  $\xi_\alpha = \frac{e_\alpha}{\sqrt{J_l^O}}$  найдем геометрическое место всех таких точек  $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Из формулы (1) поделив на  $J_l^O$  получим:

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^3 J_\alpha^O \xi_\alpha^2 - 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 J_{\alpha\beta}^O \xi_\alpha \xi_\beta = 1} \quad (7)$$

Полученное выражение описывает, как видно, *поверхность второго порядка*, в системе координат  $O\xi_\alpha$ . Точки её, определенные радиус-вектором  $\tilde{\rho} = \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{J_l^O}}$ , находятся на конечном расстоянии от точки  $O$ , т.к.  $J_l^O \geq \delta > 0$  (по смыслу момента инерции). Из аналитической геометрии известно, что из всех поверхностей 2-го порядка условию конечности расстояния от начала координат удовлетворяет только эллипсоид. Исключение составляет предельный случай, когда все точки тела лежат на одной прямой (например, случай бесконечно тонкого стержня). Тогда момент инерции относительно этой оси  $J_l = 0$  и эллипсоид превращается в бесконечный цилиндр, вытянутый вдоль этой оси.

Поверхность (т.е. эллипсоид), описываемая формулой (7) называется – **эллипсоидом инерции тела для точки  $O$**  (рис. 62). Если точка  $O$  совпадает с центром масс  $C$ , то он называется **центральным эллипсоидом инерции тела**.

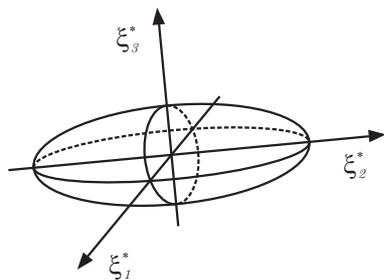


Рис. 62.

Оси симметрии эллипсоида инерции (главные оси эллипсоида)  $O\xi_\alpha^*$  (рис. 62) называются – **главными осями инерции тела для точки  $O$** .

В системе координат, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции (осям симметрии) уравнение эллипсоида имеет простой вид (*канонический*):

$$\sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha^*}^O (\xi_\alpha^*)^2 = 1$$

Т.е. в этой системе координат все центробежные моменты инерции равны нулю:

$$J_{\alpha^*\beta^*}^O = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \alpha \neq \beta$$

Величины  $J_{\alpha^*}$  - моменты инерции относительно главных осей инерции  $O\xi_\alpha^*$  называют **главными осевыми моментами инерции тела** для точки  $O$ . Если  $O$  совпадает с центром масс  $C$ , то везде необходимо добавить слово - **центральные**.

С точки зрения тензора инерции, очевидно, что в системе отсчета совмещенной с главными осями инерции  $O\xi_\alpha^*$ , он принимает диагональный вид (т.к. все центробежные моменты инерции равны нулю). Т.е. путем поворота координатных осей  $O\xi_\alpha$  до их совмещения с  $O\xi_\alpha^*$ , или путем их специального подбора, квадратная симметрическая матрица  $\mathbb{J}_O$  приводится к диагональному виду.

Из высшей алгебры известно, что любая симметрическая матрица  $A$  (представляющая линейное векторное преобразование) имеет взаимно-ортогональные собственные вектора, определяемые из уравнения  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . А вид этой матрицы в осях, совмещенных с направлениями собственных векторов  $\mathbf{v}$ , также имеет диагональный вид, причем на диагонали у нее стоят собственные значения  $\lambda$  (т.е. решения уравнения  $\det(A - \lambda I) = 0$ ) (это справедливо и для более общего случая так называемых *нормальных матриц*:  $AA^* = A^*A$ ).

Наш тензор инерции  $\mathbb{J}_O$  как раз и является симметрическим, а диагональный вид имеет, как уже было сказано, в главных осях инерции (т.е. осях симметрии эллипсоида инерции). Следовательно, эти главные оси инерции направлены вдоль собственных векторов тензора инерции  $\mathbb{J}_O$ , определяемых из выражения:

$$\mathbb{J}_O \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

а главные моменты инерции  $J_{\alpha^*}$  являются собственными числами тензора инерции.

**Замечание 1:** Если все собственные значения тензора инерции - различны, то главные оси определяются однозначно. Если эллипсоид инерции для точки  $O$  является эллипсоидом вращения вокруг оси  $O\xi_1^*$  (т.е.  $J_{2^*}^O = J_{3^*}^O$ ), то за его главные оси можно принять

ось  $O\xi_1^*$  и любые две взаимно-ортогональные оси, лежащие в *экваториальной плоскости* эллипсоида (т.е. плоскости перпендикулярной оси вращения  $O\xi_1^*$ ). Если все собственные значения тензора инерции - одинаковы (т.е. эллипсоид инерции является сферой) то все оси, проходящие через точку  $O$  являются для нее главными.

**Замечание 2:** Если эллипсоид инерции тела для точки  $O$  построен, то момент инерции тела относительно какой-либо оси  $J_l^O$ , проходящей через т. равен:  $J_l^O = \frac{1}{ON^2}$

где  $ON$  – расстояние от центра  $O$  до точки пересечения эллипсоида с прямой  $l$  (оси  $l$ ).

**Замечание 3:** Не любой эллипсоид, вообще говоря, может быть эллипсоидом инерции. В самом деле если рассмотреть уравнение эллипсоида в главных осях инерции:  $\sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha^*}^O (\xi_{\alpha^*}^*)^2 = 1$ , то его главные моменты инерции имеют вид:  $J_{\alpha^*}^O = \int_{(M)} [(\xi_{\alpha+1}^*)^2 + (\xi_{\alpha+2}^*)^2] dm$

и для них должны выполняться неравенства:  $J_{\alpha^*}^O + J_{\beta^*}^O \geq J_{\gamma^*}^O$  ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ). Действительно:

$$J_{1^*}^O + J_{2^*}^O = \int_{(M)} [(\xi_2^*)^2 + (\xi_3^*)^2 + (\xi_1^*)^2 + (\xi_3^*)^2] dm = \int_{(M)} [(\xi_1^*)^2 + (\xi_2^*)^2] dm + 2 \int_{(M)} (\xi_3^*)^2 dm \geq J_{3^*}^O$$

**Замечание 4:** Условием того, что какая-то ось, скажем  $O\xi_1$  будет осью симметрии эллипсоида инерции, является отсутствие в уравнении эллипсоида членов, содержащих произведения  $\xi_1\xi_2$  и  $\xi_1\xi_3$ , т.е. когда по сути  $J_{1^*2^*}^O = J_{1^*3^*}^O = 0$ . Т.о. чтобы координатная ось, проходящая через точку  $O$  была главной осью инерции тела для этого центра, необходимо и достаточно обращение в нуль центробежных моментов инерции содержащих индекс этой оси.

Если проводить анализ главных осей инерции с точки зрения геометрии тела (или системы точек), т.е. производить определение осей, обладающих свойством главных осей (у которой соответствующие центробежные моменты инерции - нуль), то можно указать некоторые важные, частные, случаи:

- Если в системе есть ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции. Например, если это ось  $O\xi_1$ , то  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mu(\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)$

$$J_{12}^O = \int_{(V)} \xi_1 \xi_2 \mu dV = \int_{(V_*)} \xi_1 \xi_2 \mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV + \int_{(V_*)} \xi_1 (-\xi_2) \mu(\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) dV = 0$$

где  $V_*$  - объем одной из двух равных частей объема  $V$  тела, на которые оно делится плоскостью  $O\xi_1\xi_2$ . Аналогично для  $J_{13}^O$  разделяя  $V$  плоскостью  $O\xi_1\xi_3$  (или любой другой плоскостью, содержащей ось симметрии  $O\xi_1$ ).

- Если у системы есть плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции системы для точки, в которой эта прямая пересекает плоскость симметрии. Например плоскость  $O\xi_1\xi_2$ : для плотности материала имеем:  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mu(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$

$$J_{13}^O = \int_{(V)} \xi_1 \xi_3 \mu dV = \int_{(V')} \xi_1 \xi_3 \mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV + \int_{(V')} \xi_1 (-\xi_3) \mu(\xi_1, \xi_2, -\xi_3) dV = 0$$

где  $(V')$  - объем одной половинки тела, на которые оно делится плоскостью  $O\xi_1\xi_2$ . Аналогично для  $J_{23}^O$ .

- Для однородного тела вращения - ось вращения и любые две взаимно-перпендикулярные и перпендикулярные ей оси образуют систему главных осей инерции.

## ЛЕКЦИЯ 14

### ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. РАБОТА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТЕЛУ

В основе выражений, характеризующих или описывающих движение твердого тела, т.е. основных динамических величин для твердого тела, лежит формула распределения скоростей точек твердого тела, которая как раз и содержит необходимую информацию о специфике или особенности рассматриваемого объекта - твердое тела:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

где  $\mathbf{v}_O$  - скорость фиксированной точки тела - полюса  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость тела,  $\boldsymbol{\rho}$  - радиус-вектор точки тела:  $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OM}$  - записанный в неподвижной системе координат. Фактически эта формула представлена компонентами, т.е. разложением в неподвижной (абсолютной) системе координат или в осях, поступательно перемещающихся с телом.

В дальнейшем, для удобства и простоты, в качестве полюса мы будем брать точку тела, совпадающую с центром масс  $C$  (в теле это действительно некоторая фиксированная точка). Тогда теорема о распределении скоростей в твердом теле приобретет вид:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{CM}$  - радиус-вектор точки тела  $M$  относительно центра масс  $C$ . Т.е. эта формула - представлена в кёнинговой системе координат. Отметим, что данная формула может быть также представлена компонентами и в сопутствующей, т.е. подвижной системе координат, жестко связанной с телом. Для этого достаточно вспомнить формулу перехода (представления произвольного вектора) из подвижной системы координат  $C\xi_\alpha$  ( $\tilde{\mathbf{c}}$ ) к неподвижной - кёнинговой  $Cx_\alpha$  ( $\mathbf{c}$ ) (рис. 63):

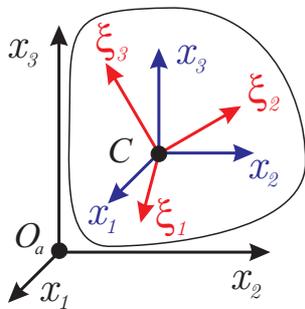


Рис. 63.

$$\mathbf{c} = A\tilde{\mathbf{c}}$$

и учесть свойство для векторного произведения (при ортогональном преобразовании  $A$ ):

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boxed{A\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times A\tilde{\boldsymbol{\rho}} = A(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}})}$$

Т.е. либо вектора сначала повернуть ( $A\tilde{\boldsymbol{\omega}}, A\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ ), а затем умножить, либо сначала умножить ( $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}$ ), а потом повернуть. Поэтому в сопутствующей системе координат вид формулы распределения скоростей в твердом теле - не изменится:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_C + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}$$

Обратим внимание, что вектор скорости центр масс  $\tilde{\mathbf{v}}_C \neq 0$ , хоть и представлен компонентами в сопутствующей, «вмороженной» в тело, системе координат, потому что изначально  $\mathbf{v}_C$  - это скорость центра масс относительно точки  $O_a$ , т.е. относительно абсолютной системы координат  $O_a x_\alpha$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}_C = A^{-1}\mathbf{v}_C$  - просто выражение этого вектора в сопутствующих осях. В дальнейшем этот вид формулы распределения скоростей точек твердого тела будет активно использоваться. При этом здесь  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{const}$ .

Отметим, что поскольку преобразование  $A$  является ортогональным, то  $A^{-1} = A^* = A^T$ .

Слагаемые формулы распределения скоростей в твердом теле наглядно демонстрируют принятую схему разложения движения тела на 2 составляющих:

1. поступательное движение тела со скоростью центра масс (полюса);
2. вращательное (сферическое) движение вокруг центра масс (как вокруг неподвижной точки) с мгновенной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ .

Представляя твердое тело разделенным на большое число  $N$  частей, каждая  $\nu$ -ая часть которого имеет  $\Delta m_\nu$  - массу,  $\Delta V_\nu$  - объем,  $\boldsymbol{\rho}_\nu$  - радиус-вектор,  $\mathbf{v}_\nu$  - абсолютную скорость, а затем совершая традиционный предельный переход при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta V_\nu \rightarrow 0$  получим:

$$\boxed{Q = \int_{(M)} \mathbf{v} dm = \int_{(M)} \mathbf{v} \mu dV} \quad - \quad \text{количество движения тела}$$

где  $\mathbf{v}$  - скорости точек тела. С учетом формулы распределения скоростей в твердом теле  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ , получим другое выражение количества движения тела:

$$\boxed{Q = M \mathbf{v}_C} \quad \text{т.к.} \quad \int_{(M)} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} dm = \boldsymbol{\omega} \times \int_{(M)} \boldsymbol{\rho} dm = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C = 0$$

Выражение конечно удобное, хорошее, но оно не содержит в себе вращения тела, и описывает лишь поступательное движение тела как материальной точки массой тела  $M$  со скоростью центра масс  $\mathbf{v}_C$ . Для определения кинематической величины, описывающей или характеризующей вращательное движение тела, рассмотрим для начала простейший случай - сферического движения, т.е. найдем для твердого тела

### Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки

Примем неподвижную точку  $O$  тела за полюс и начало системы координат  $O\xi_\alpha$  - оси которой неподвижны относительно тела (рис. 64). В этой системе координат радиус-вектор точки  $P$  тела:  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \overrightarrow{OP} = \text{const}$ . Проекция  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  на оси  $O\xi_\alpha$  (т.е. его координаты):

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

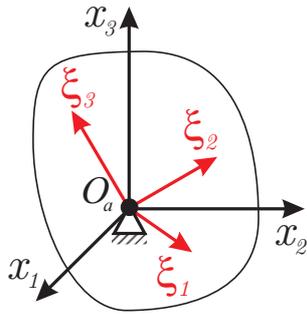


Рис. 64.

Обозначим проекции на эти же оси мгновенной угловой скорости

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Вычислим абсолютный кинетический момент тела относительно точки  $O$ . Причем представим его в виде разложения по осям сопутствующей системе координат:

$$\tilde{\mathcal{L}}_O = (\mathcal{L}_{O1}, \mathcal{L}_{O2}, \mathcal{L}_{O3}).$$

(т.е.  $\tilde{\mathcal{L}}_O = A^{-1} \mathcal{L}_O = A^* \mathcal{L}_O$ , где  $\mathcal{L}_O$  - абсолютный кинетический момент тела относительно точки  $O$ , покомпонентно представленный в неподвижных осях  $Ox_\alpha$ ).

С учетом выражения для скоростей точек тела  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}$  в этих же сопутствующих осях имеем ( $\mathcal{L}_O = \sum_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu \rightarrow \int_{(M)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dm$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_O &= \int_{(M)} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \times \tilde{\mathbf{v}} dm = \int_{(M)} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}) dm = \int_{(M)} [\tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}}) - \tilde{\boldsymbol{\rho}} (\tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\omega}})] dm = \\ &= \int_{(M)} \left[ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha^2 - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha \omega_\alpha \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{O1} \\ \mathcal{L}_{O2} \\ \mathcal{L}_{O3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Отсюда получим выражение для компонент абсолютного кинетического момента:

$$\mathcal{L}_{O\beta} = \int_{(M)} \left[ \omega_\beta \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha^2 - \xi_\beta \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha \omega_\alpha \right] dm \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

сокращая одинаковые слагаемые при  $\alpha = \beta$  получим:

$$\mathcal{L}_{O\beta} = \int_{(M)} \omega_\beta (\xi_{\beta+1}^2 + \xi_{\beta+2}^2) dm - \int_{(M)} \xi_\beta \xi_{\beta+1} \omega_{\beta+1} dm - \int_{(M)} \xi_\beta \xi_{\beta+2} \omega_{\beta+2} dm$$

учитывая независимость  $\omega_\alpha$  от точек тела (угловая скорость - характеристика для тела):

$$\mathcal{L}_{O\beta} = \omega_\beta \int_{(M)} (\xi_{\beta+1}^2 + \xi_{\beta+2}^2) dm - \omega_{\beta+1} \int_{(M)} \xi_\beta \xi_{\beta+1} dm - \omega_{\beta+2} \int_{(M)} \xi_\beta \xi_{\beta+2} dm$$

вспоминая выражения осевых и центробежных моментов инерции тела для точки  $O$  имеем:

$$\boxed{\mathcal{L}_{O\beta} = \omega_\beta J_\beta^O - \omega_{\beta+1} J_{\beta,\beta+1}^O - \omega_{\beta+2} J_{\beta,\beta+2}^O} \quad (\beta = 1, 2, 3 - \text{ограничен по модулю } 3)$$

Эти формулы можно записать более компактно, используя матрицу  $\mathbb{J}_O$ , определяющую тензор инерции тела для точки  $O$  (постоянный в сопутствующей системе координат):

$$\boxed{\tilde{\mathcal{L}}_O = \mathbb{J}_O \tilde{\omega}}$$

Отсюда сразу очевидно получается выражение **абсолютного кинетического момента в неподвижных осях**

$$\boxed{\mathcal{L}_O = A \mathbb{J}_O A^* \omega}$$

Можно сказать что это выражение  $A \mathbb{J}_O A^*$  - тензор инерции тела в неподвижных осях. В частном случае когда оси  $O\xi_\alpha$  представляют собой главные оси инерции тела для точки  $O$ , матрица  $\mathbb{J}_O$  - диагональна, т.е. все центробежные моменты инерции нулевые, а её диагональными элементами служат главные осевые моменты инерции тела для точки  $O$ :

$$\boxed{\mathcal{L}_{O\beta^*} = J_{\beta^*}^O \omega_{\beta^*}^*}$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, например, вокруг оси  $O\xi_3$  (т.е. выбрали так, что  $O\xi_3 = Ox_3$ ), тогда

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \quad \implies \quad \mathcal{L}_{O1} = -J_{13}^O \omega_3, \quad \mathcal{L}_{O2} = -J_{23}^O \omega_3, \quad \mathcal{L}_{O3} = J_3^O \omega_3$$

Видно, что при вращении тела вокруг неподвижной оси - направления оси вращения и кинетического момента тела, вообще говоря различны. Они совпадают тогда и только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела (т.е.  $J_{13}^O = J_{23}^O = 0$ ).

Теперь легко определить кинетический момент тела относительно центра масс, т.е. в относительном движении тела по отношению к центру масс в кенинговских осях. Переходя от системы точек к твердому телу (после устремления разбиения тела на бесконечное количество частей бесконечно малых размеров) абсолютный кинетический момент по отношению к центру масс  $C$  принимает вид:

$$\mathcal{L}_C = \sum_{\nu=1}^N \rho_\nu \times m_\nu v_\nu \rightarrow \int_{(M)} \rho \times v dm$$

Причем, мы выяснили, что он совпадает с относительным кинетическим моментом относительно центра масс  $C$ :

$$\mathcal{L}_{Cr} = \int_{(M)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}_r dm$$

где  $\mathbf{v}_r$  - скорости точек тела в кенинговой системе координат с началом в центре масс и поступательно с ним перемещающейся. Для тела  $\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ . В сопутствующей системе координат с началом в центре масс, как уже говорилось,  $\tilde{\mathbf{v}}_r = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}$ , тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}_C = \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \int_{(M)} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}) dm$$

и аналогично получим выражение:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathcal{L}}_C}$$

### Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки

Используя введенные обозначения получим выражение для кинетической энергии тела

Для системы точек:  $T = \sum_{\nu=1}^N \frac{\Delta m_\nu v_\nu^2}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \boxed{T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm}$  С учетом выражения

$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}$  и формулы  $v^2 = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}) \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\rho}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}))$  имеем:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int_{(M)} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\rho}}) dm = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathcal{L}}_O$$

Таким образом с помощью кинетического момента тела  $\tilde{\mathcal{L}}_O$  относительно точки  $O$  получили выражение для кинетической энергии тела:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{L}}_O \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_O \boldsymbol{\omega}}$$

равное скалярному произведению мгновенной угловой скорости тела и её кинетического момента (скалярные произведения векторов представленных компонентами в абсолютной и сопутствующей осях - совпадают). Кроме того для  $\tilde{\mathcal{L}}_O$  - есть выражение через тензор инерции:  $\tilde{\mathcal{L}}_O = \mathbb{J}_O \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ , откуда

$$\boxed{T = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_O \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

т.е. матрица, определяющая тензор инерции дважды умножается на вектор мгновенной угловой скорости.

Представим вектор угловой скорости в виде:  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{e}}_\omega \cdot \omega$  где  $\tilde{\mathbf{e}}_\omega$  - орт мгновенной оси вращения, т.е.  $\tilde{\mathbf{e}}_\omega = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $|\tilde{\mathbf{e}}_\omega| = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ ,  $e_\alpha = \cos(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \xi_\alpha)$ ,

$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , где  $\omega_\alpha = e_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Тогда:

$$T = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_O \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_O \tilde{\mathbf{e}}_\omega) \tilde{\mathbf{e}}_\omega \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J_\omega^O \omega^2 \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} J_\omega^O \omega^2}$$

где  $J_\omega^O$  - осевой момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.  
В частном случае, когда сопутствующие оси являются главными осями инерции:

$$\mathbb{J}_O^* = \begin{bmatrix} J_{1^*}^O & 0 & 0 \\ 0 & J_{2^*}^O & 0 \\ 0 & 0 & J_{3^*}^O \end{bmatrix} \rightarrow J_\omega^O = \sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha^*}^O \omega_{\alpha^*}^2 \rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 J_{\alpha^*}^O \omega_{\alpha^*}^2$$

Если происходит вращение тела только вокруг одной неподвижной оси  $O\xi_3 = Ox_3$ :

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \rightarrow T = \frac{1}{2} J_3^O \omega_3^2$$

**Замечание:** т.к.  $T \geq 0$ , то угол между  $\mathcal{L}_O$  и  $\omega$  всегда острый ( $2T = \mathcal{L}_O \omega \cos(\mathcal{L}_O, \omega)$ )!

Если рассмотреть общий случай произвольного движения тела, тогда необходимо вспомнить теорему Кёнинга:  $T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r$ , где  $T_r = \frac{1}{2} \int_{(M)} v_r^2 dm$  - кинетическая энергия тела относительно центра масс. Т.к. в этом случае  $\mathbf{v}_r = \omega \times \boldsymbol{\rho}$ , где  $\boldsymbol{\rho}$  - радиус-вектор точек тела относительно центра масс, тогда

$$T_r = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_C \tilde{\omega}) \tilde{\omega} = \frac{1}{2} J_\omega^C \omega^2$$

Для твердого тела оказывается также упрощается выражение работы приложенных сил.

### Элементарная работа сил приложенных к твердому телу

Элементарная работа сил приложенных к твердому телу определяется лишь работой внешних сил (что мы уже в принципе получали для неизменяемой системы, которой, в частности, является и твердое тело), а также выражается через главный момент и главный вектор внешних сил и характеристики мгновенного кинематического состояния тела. Будем представлять себе твердое тело как неизменяемую систему (т.е. расстояния взаимные между точками которой не изменяются) из  $N$  отдельных точек. Пусть  $\mathbf{F}_\nu$  - равнодействующая всех сил, приложенных к точке  $P_\nu$  тела, причем  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^i + \mathbf{F}_\nu^e$ , т.е. сумма равнодействующих всех внутренних и внешних сил ( $\nu = 1, \dots, N$ ).

Согласно формуле распределения скоростей точек тела  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \omega \times \boldsymbol{\rho}$ , поэтому вектор элементарного перемещения  $\nu$ -ой точки тела  $d\mathbf{r}_\nu$  вдоль ее траектории:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt = (\mathbf{v}_O + \omega \times \boldsymbol{\rho}) dt$$

где  $dt$  - дифференциал времени (элементарный промежуток). Тогда для элементарная работа системы сил, приложенных к телу (т.е. к системе  $N$  точек):

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu (\mathbf{v}_O + \omega \times \boldsymbol{\rho}_\nu) dt = \left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \right) \mathbf{v}_O dt + \sum_{\nu=1}^N (\omega \times \boldsymbol{\rho}_\nu) \mathbf{F}_\nu dt$$

Согласно первому свойству внутренних сил:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu = \mathcal{F} = \mathcal{F}^e \quad - \quad \text{главный вектор внешних сил,}$$

второе слагаемое преобразуется:  $\sum_{\nu=1}^N (\omega \times \boldsymbol{\rho}_\nu) \mathbf{F}_\nu dt = \sum_{\nu=1}^N (\boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu) \omega dt = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_\nu) \omega dt$   
где, согласно второму свойству внутренних сил:

$$\sum_{\nu=1}^N m_O(\mathbf{F}_\nu) = \mathcal{M}_O = \mathcal{M}_O^e \quad - \quad \text{главный момент внешних сил относительно } O \text{ - полюса}$$

Тогда элементарная работа системы сил, приложенных к телу, получит вид

$$\boxed{\delta A = \mathcal{F}^e \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathcal{M}_O^e \cdot \boldsymbol{\omega} dt}$$

Отметим, что  $\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt}$  - скорость полюса  $O$ , тогда  $\mathbf{v}_O dt = d\mathbf{r}_O$  - вектор элементарного перемещения полюса.

Для случая плоского движения тела, которое характеризуется неизменностью оси вращения тела (перпендикулярно плоскости движения), справедливы выражения:

$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_z$ ,  $\mathcal{M}_O^e = M_O^e \mathbf{e}_z$ , где  $\varphi$  - угол поворота тела,  $\mathbf{e}_z$  - орт оси вращения. Тогда получим, что  $\mathcal{M}_O^e \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_O^e \cdot d\varphi$ . Значит выражение для элементарной работы сил, приложенных к телу в плоском случае приобретает вид:

$$\boxed{\delta A = \mathcal{F}^e \cdot d\mathbf{r}_O + M_O^e \cdot d\varphi}$$

## ЛЕКЦИЯ 15

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ЗАКОНЫ КУЛОНА.

Пусть требуется найти движение свободного твердого тела относительно неподвижной (абсолютной) системы координат  $O_a x_\alpha$ . Как установлено в кинематике, любое движение тела можно рассматривать как совокупность двух простейших составляющих (рис. 65):

1. поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса);
2. вращательного движения тела вокруг полюса как вокруг неподвижной точки.

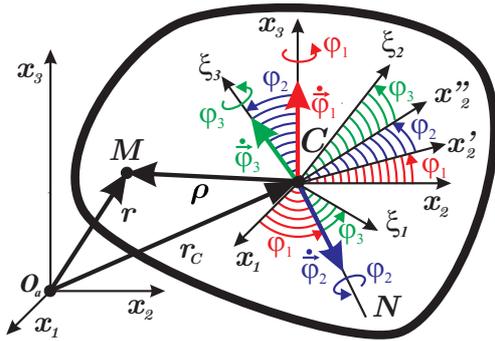


Рис. 65.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C(t) + A(t)\tilde{\rho} = \mathbf{r}_C(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$$

При описании движения полюс желательно выбирать так, чтобы его движение определялось наиболее просто. Из основных теорем динамики для системы материальных точек (а твердое тело является частным случаем неизменяемой системы), следует, что за полюс удобно взять центр масс. Следовательно, поступательное движение описывается тремя скалярными функциями - координатами центра масс:

$$\mathbf{r}_C(t) = (x_1^C(t), x_2^C(t), x_3^C(t))$$

Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса тела и приложены все внешние силы:

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathcal{F}^e$$

Причем теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для относительного движения вокруг центра масс формулируются так же точно, как и для движения вокруг неподвижной точки:

в движении тела относительно центра масс      относительно неподвижной точки  $A$

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = \mathcal{M}_C^e \quad dT = \delta_r A^e \quad \frac{d\mathcal{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A^e \quad dT = \delta A^e$$

У тела отсутствуют силовые величины  $\mathcal{M}_C^i$ ,  $\delta A^i$  для внутренних сил, индекс  $[e]$  уберем.

Вращательное движение тела, описываемое ортогональной матрицей поворота  $A(t)$ , определяется тремя углами Эйлера  $[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]$  (прецессии, нутации и собственного вращения) фиксирующих ориентацию тела относительно неподвижной системы координат (по сути - относительно кенинговой системы координат) и не зависят от выбора полюса. Таким образом, 6 независимых параметров (скалярных функций) - координаты центра масс  $x_\alpha^C(t)$  и углы Эйлера  $\varphi_\alpha(t)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) - полностью определяют движение тела.

Составим теперь систему дифференциальных уравнений, позволяющих определить эти величины как функции времени. Твердое тело является частным случаем механической системы, поэтому дифференциальные уравнения его движения могут быть получены из уравнений движения системы. Своеобразие твердого тела проявляется в том, что эти уравнения могут быть получены из общих теорем динамики.

Первое - очевидно вытекает из теоремы о движении центра масс, если положить

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathcal{F}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{M \ddot{x}_\alpha^C = \mathcal{F}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (8)$$

Второе - вытекает из теоремы об изменении кинетического момента тела относительно центра масс. Если  $\mathcal{L}_{Cr}$  - кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, т.е. относительно системы координат двигающейся поступательно с началом в центре масс  $Cx_\alpha$  (кёнинговой), причем  $\mathcal{L}_{Cr} = \mathcal{L}_C$ , имеем:  $\frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = \mathcal{M}_C$

Для получения скалярных уравнений, эту теорему удобно представить в сопутствующей системе координат  $C\xi_\alpha$ . Для начала вспомним связь между абсолютной и относительной производной вектора по времени и зависимость между выражениями вектора в кёниговой  $Cx_\alpha$  и сопутствующей  $C\xi_\alpha$  системах координат:

$$\frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} + \tilde{\omega} \times \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = A \left( \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} + \tilde{\omega} \times \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} \right) = \mathcal{M}_C = A \tilde{\mathcal{M}}_C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} + \tilde{\omega} \times \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \tilde{\mathcal{M}}_C$$

На прошлой лекции мы получали выражение для кинетического момента  $\mathcal{L}_{Cr} = \mathcal{L}_C$ , представленного в сопутствующих осях через тензор инерции  $\mathbb{J}_C$ :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \mathbb{J}_C \tilde{\omega}$$

где  $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  - вектор угловой скорости в системе  $C\xi_\alpha$ . Вспомним, что

$$\mathbb{J}_C = \begin{bmatrix} J_1^C & -J_{12}^C & -J_{13}^C \\ -J_{12}^C & J_2^C & -J_{23}^C \\ -J_{13}^C & -J_{23}^C & J_3^C \end{bmatrix} - \text{является постоянной матрицей в системе } C\xi_\alpha.$$

Тогда теорема об изменении кинетического момента принимает вид:

$$\mathbb{J}_C \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \tilde{\omega} \times \mathbb{J}_C \tilde{\omega} = \tilde{\mathcal{M}}_C$$

Здесь вектор  $\mathbb{J}_C \tilde{\omega} = \left( \sum_{j=1}^3 I_{1j}^C \omega_j, \sum_{j=1}^3 I_{2j}^C \omega_j, \sum_{j=1}^3 I_{3j}^C \omega_j \right)$  где  $I_{ij}^C$  - элемент тензора инерции

$\mathbb{J}_C$  расположенный в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце:  $\mathbb{J}_C = \{I_{ij}^C\}_{i,j=1}^3$ .

Тогда  $i$ -ая компонента этого векторного уравнения имеет вид:

$$i : \quad \sum_{j=1}^3 I_{ij}^C \dot{\omega}_j + \omega_{i+1} \cdot \sum_{j=1}^3 I_{i+2,j}^C \omega_j - \omega_{i+2} \cdot \sum_{j=1}^3 I_{i+1,j}^C \omega_j = \mathcal{M}_i^C$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^3 (I_{ij}^C \dot{\omega}_j + I_{i+2,j}^C \omega_j \omega_{i+1} - I_{i+1,j}^C \omega_j \omega_{i+2}) = \mathcal{M}_i^C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^3 (I_{ij}^C \dot{\omega}_j + [I_{i+2,j}^C \omega_{i+1} - I_{i+1,j}^C \omega_{i+2}] \omega_j) = \mathcal{M}_i^C} \quad (9)$$

Если оси  $C\xi_\alpha$  являются главными осями инерции тела для центра масс (т.е. главными центральными осями инерции) - для которых центробежные моменты инерции ноль, т.е. все недиагональные элементы тензора инерции, у которых разноименные индексы - тогда из (9) легко получить новое выражение теоремы об изменении кинетического момента:

$$\boxed{J_i^C \dot{\omega}_i + (J_{i+2}^C - J_{i+1}^C) \omega_{i+1} \omega_{i+2} = \mathcal{M}_i^C}$$

называются **динамические уравнения Эйлера** (для центра масс). Здесь  $J_i^C = I_{ii}$  - осевые моменты инерции тела относительно главных осей инерции сопутствующей системы координат  $C\xi_\alpha$ .

Отметим, что в общем случае главный вектор сил  $\mathcal{F}$  и главный момент сил относительно центра масс  $\mathcal{M}_C$  являются функциями времени  $t$ , координат  $\mathbf{r}$  и скоростей  $\mathbf{v}$  точек приложения:  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ ,  $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_C(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Однако,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C(t) + \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}_C(t) + A(t)\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_C(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t) = \dot{\mathbf{r}}_C(t) + \dot{A}(t)\tilde{\boldsymbol{\rho}}$$

где  $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \text{const}$  - радиус-векторы точек приложения сил в сопутствующих осях считаются заданными, а ортогональная матрица поворота  $A$  является функцией эйлеровых углов:  $A = A(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ , поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_\alpha^C, \varphi_\alpha), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\dot{x}_\alpha^C, \dot{\varphi}_\alpha)$$

Следовательно  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{M}_C$  будут функциями от  $\{t, x_\alpha^C, \varphi_\alpha, \dot{x}_\alpha^C, \dot{\varphi}_\alpha\}$ .

В динамических уравнениях Эйлера стоят выражения  $\omega_i$  и чтобы получилась замкнутая система к (8)-(9) необходимо добавить или просто выразить  $\omega_i$  через углы Эйлера  $\varphi_\alpha$  и их производные  $\dot{\varphi}_\alpha$  с помощью кинематических уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \omega_{\xi_1} = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \\ \omega_{\xi_2} = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3 \\ \omega_{\xi_3} = \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \end{cases} \quad (10)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (8)-(9)-(10) содержит 9 уравнений для определения 9 функций:  $x_\alpha^C, \varphi_\alpha, \omega_\alpha$ . Она определяет математическую модель механической системы (т.е. описывает движение) «**свободного абсолютного твердого тела**». Уравнения (8)-(9) называются **динамические уравнения движения твердого тела**.

### Плоское движение тела

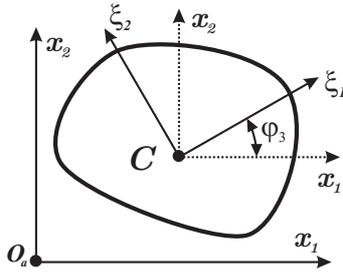


Рис. 66.

Пусть все точки тела движется параллельно плоскости  $O_a x_1 x_2$  (рис. 66). Получим дифференциальные уравнения, описывающие это плоское движение тела.

Без ограничения общности можно считать, что центр масс движется в плоскости  $O_a x_1 x_2$  поэтому  $x_3^C = 0$ . Также можно считать, что оси  $C\xi_1$  и  $C\xi_2$  связанной с телом системы координат  $C\xi_\alpha$  движутся в плоскости  $O_a x_1 x_2$ , т.е. ось  $C\xi_3$  перпендикулярна плоскости движения. Тогда полагая  $\varphi_1 \equiv 0, \varphi_2 \equiv 0$  из кинематических уравнений Эйлера имеем:

$$\omega_1 \equiv 0, \quad \omega_2 \equiv 0, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}_3,$$

Подставляя данные выражения в уравнения (8)-(9) получим:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1^C &= \mathcal{F}_1, & M\ddot{x}_2^C &= \mathcal{F}_2, & 0 &= \mathcal{F}_3 \\ i=1: & I_{13}^C \dot{\omega}_3 - I_{23}^C \omega_3^2 &= \mathcal{M}_1^C \\ i=2: & I_{23}^C \dot{\omega}_3 + I_{13}^C \omega_3^2 &= \mathcal{M}_2^C \\ i=3: & J_3^C \dot{\omega}_3 &= \mathcal{M}_3^C \end{aligned}$$

Условия  $\mathcal{F}_3 = 0$  и  $i=1, i=2$  для  $\mathcal{M}_1^C, \mathcal{M}_2^C$  накладывают ограничения на геометрию масс тела, внешние силы и частично на начальные условия, при которых плоское движение возможно. Например, в главных центральных осях выражения для  $i=1, i=2$  имеют вид  $\mathcal{M}_1^C = 0, \mathcal{M}_2^C = 0$ . Остальные 3 уравнения:

$$M\ddot{x}_1^C = \mathcal{F}_1, \quad M\ddot{x}_2^C = \mathcal{F}_2, \quad J_3^C \ddot{\varphi}_3 = \mathcal{M}_3^C$$

называются - **дифференциальные уравнения плоского движения тела** для определения функций  $x_1^C(t), x_2^C(t), \varphi_3(t)$ .

Следует отметить, что плоское движение тела является случаем так называемого движения **несвободного твердого тела**, т.е. когда есть ограничения на перемещение и скорости тела. Вообще, наличие геометрических связей упрощает движение тела, т.е. оно не может быть произвольного вида, определяемого лишь внешними активными силами, а имеет некоторый специальный характер. Это приводит к уменьшению числа независимых параметров, определяющих движение тела - часть из них задаются как известные функции времени или выражаются через остальные величины. Однако, поскольку динамические уравнения движения пишутся для свободного тела, в них, наряду с заданными силами, войдут и наперед неизвестные реакции связей. Получается так называемая смешанная задача: по части заданных (известных) уравнений движения (включающих дифференциальные уравнения и уравнения связей) и внешних сил, с помощью дифференциальных уравнений и начальных условий требуется определить остальные уравнения движения и силы (реакции). При решении такой смешанной задачи иногда удобнее использовать альтернативную систему уравнений, где уравнение изменения кинетического момента относительно центра масс заменяется аналогичным, но относительно какого-то неподвижного центра  $O$ :

$$M\mathbf{a}_c = \mathcal{F}, \quad \frac{d\mathcal{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O$$

Из дифференциальных уравнений движения твердого тела следует, что движение тела зависит не от вида и расположения отдельных сил, а от суммарных характеристик: главного вектора  $\mathcal{F}$  и главного момента  $\mathcal{M}_C$  сил, приложенных к телу. Отсюда ясно, что две системы сил будут оказывать на тело одинаковое воздействие, т.е. могут быть заменены одна на другую без изменения движения, если у них равны главные векторы и главные моменты сил относительно одного и того же центра. Верно и обратное, т.е. если тело движется одинаково при воздействии двух разных систем, то их главные векторы и главные моменты сил равны. Такие системы сил называют **эквивалентными**. Таким образом для них справедлив

**Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к телу.** Для того, чтобы две системы сил были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого центра.

Получим связь между главными моментами одной и той же системы сил, вычисленных относительно разных полюсов (рис. 67):

$$\mathcal{M}_A = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu}^A \times \mathbf{F}_{\nu} = \sum_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu}^B + \overrightarrow{AB}) \times \mathbf{F}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu}^B \times \mathbf{F}_{\nu} + \overrightarrow{AB} \times \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} = \mathcal{M}_B + \overrightarrow{AB} \times \mathcal{F}$$

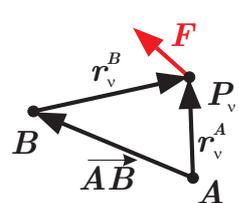


Рис. 67.

Таким образом при изменении полюса (*центра приведения*) главный момент сил меняется на величину равную моменту главного вектора сил (приложенного в старом центре) относительно нового центра:

Следствие 1. Если у двух систем одинаковы главные векторы  $\mathcal{F}$  и главные моменты относительно какого-либо центра  $\mathcal{M}_A$ , то эти моменты для другого центра тоже одинаковы.

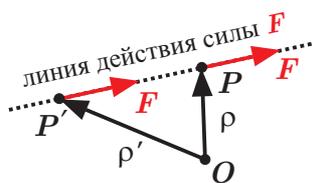


Рис. 68.

Еще одно следствие, полезное для понятия эквивалентности систем сил, приложенных к телу, и достаточно простое, вытекает из определения момента силы относительно точки. При перемещении силы вдоль её линии действия, т.е. при выборе точки приложения силы на линии её действия мы не изменяем ни саму силу ни ее момент относительно точки (рис. 68):

$$m_0(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F} = (\boldsymbol{\rho}' + \overrightarrow{P'P}) \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\rho}' \times \mathbf{F} + \overrightarrow{P'P} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\rho}' \times \mathbf{F}$$

т.к.  $\overrightarrow{P'P} \parallel \mathbf{F}$  - коллинеарны и  $\overrightarrow{P'P} \times \mathbf{F} = 0$ . Таким образом:

*Следствие 2.* Воздействие силы на твердое тело не зависит от положения силы на ее линии действия.

Отсюда также понятно, что если у какой-то системы сил главный вектор и главный момент относительно некоторого центра - нули:  $\mathcal{F} = 0$ ,  $\mathcal{M}_A = 0$ , то добавление или отбрасывание такой системы сил не изменит движение твердого тела (или механической системы). Также системы сил называют **уравновешенными** или **эквивалентными нулю**. А приведенное требование является необходимым и достаточным условием уравновешенности системы сил.

Если же на твердое тело изначально и все время действует только уравновешенная система сил, причем в начальный момент времени тело покоилось, то тело будет все время находиться в равновесии, т.е. покоиться: верно и обратно, для покоящегося тела главный вектор и момент сил - ноль.

**ТЕОРЕМА.** Для равновесия первоначально покоившегося ( $\mathbf{v}_C = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  при  $t = 0$ ) тела необходимо и достаточно равенство нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к телу, относительно любого центра  $O$ :

$$\boxed{\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{M}_O = 0}$$

*Доказательство.* Докажем теорему для центра масс  $C$  ( $\mathcal{M}_C = 0$ ), а учитывая полученную выше связь между моментами сил  $\mathcal{M}_O = \mathcal{M}_C + \overrightarrow{OC} \times \mathcal{F}$  получим общую теорему для любого центра  $O$ .

*Необходимость* очевидна: если тело покоится, т.е.  $\mathbf{v}_C \equiv 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0$ , тогда из динамических уравнений движения тела следует:

$$\mathcal{F} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \equiv 0 \quad \tilde{\mathcal{M}}_C = \mathbb{J}_C \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0$$

*Достаточность:* если выполнены условия на главный вектор и момент сил имеем:

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathcal{F} = 0 & \Rightarrow \mathbf{v}_C \equiv \text{const} = \mathbf{v}_C \Big|_{t=0} = 0 \\ \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \tilde{\mathcal{M}}_C = 0 & \Rightarrow \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} \Big| \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{Cr} \cdot \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}}{dt} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\mathcal{L}}_{Cr}^2}{dt} = 0 & \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{Cr}^2 = \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \text{const} = \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{J}_C$  - тензор инерции определяется только геометрией масс тела и всегда постоянен (в сопутствующих осях), т.е. никак не зависит ни от движения тела ни от приложенных к телу сил, поэтому в общем случае  $\det \mathbb{J}_C \neq 0$  (в главных центральных осях  $\mathbb{J}_C$  - диагональный и его элементы не равны нулю), тогда  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0$ .

Т.к. главные моменты сил относительно разных центров, например, центра масс и неподвижного центра связаны приведенным выше соотношением  $\mathcal{M}_O = \mathcal{M}_C + \overrightarrow{OC} \times \mathcal{F}$ , то при равновесии последнее уравнение можно заменить на  $\mathcal{M}_O = 0$ .  $\square$

*Замечание:* если тело изначально не покоилось, то при выполненном условии  $\mathcal{F} = 0$ ,  $\mathcal{M}_O = 0$  оно будет совершать инерциальное движение: поступательно и равномерно двигаться вместе с центром масс и равномерно вращаться вокруг этого центра.

Каждое из 2-х векторных уравнений равновесия эквивалентно трем скалярным **уравнениям равновесия твердого тела**:

$$\mathcal{F}_\alpha = 0, \quad \mathcal{M}_\alpha^C = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

в виде проекций сил и моментов сил относительно осей. Т.е. всего 6 уравнений из которых необходимо определять неизвестные силы, приложенные к телу (в частности реакции) обеспечивающие равновесие. Причем некоторые из уравнений могут удовлетворяться тождественно (т.е. не работают). Механическая система у которой реакции всех наложенных связей могут быть определены из условий равновесия называют **статически определенной**, в противном случае - **статически неопределимой**. Случай статически определенной системы имеет место лишь тогда, когда число неизвестных, т.е. проекций сил не превосходит числа неудовлетворяющихся тождественно уравнений.

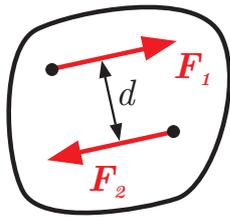


Рис. 69.

Введем еще один новый объект: **пара сил**. Для этого рассмотрим специальный случай системы сил, которая состоит из двух сил равных по величине, противоположно направленных, и не лежащих на одной прямой.

Такую систему сил где  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  называют парой сил. Плоскость в которой они лежат называют **плоскостью пары**, а расстояние  $d$  между линиями действия сил - **плечом пары** ( $d \neq 0$ ).

Легко видеть, что главный вектор пары сил - равен нулю:

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

А главный момент пары не зависит от точки относительно которой он вычисляется. В самом деле возьмем произвольную точку  $O$  пространства и найдем главный момент сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  относительно  $O$ . Учтем 2 предыдущих следствия и перенесем точки приложения сил вдоль линии их действия так, чтобы радиус-вектор  $\mathbf{d}$  от точки приложения  $\mathbf{F}_2$  к точке приложения  $\mathbf{F}_1$  был перпендикулярен линиям их действия (рис. 70).

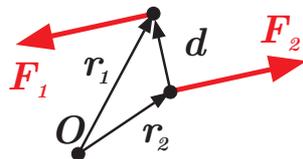


Рис. 70.

Главный момент сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  относительно  $O$ :

$$\mathcal{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{d} \times \mathbf{F}_1$$

т.е. не зависит от  $O$ . Векторное произведение  $\mathcal{M}_O = \mathbf{d} \times \mathbf{F}_1$  называют **моментом пары**. Направлен  $\mathcal{M}_O$  перпендикулярно плоскости пары так, что наблюдатель с конца вектора  $\mathcal{M}_O$  «видит» векторы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , указывающими на «вращение» плоскости пары против хода часовой стрелки, т.е. положительное направление (как на рисунке).

Если  $F$  - модули сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , то  $\mathcal{M}_O = d \cdot F$  т.е. он полностью определяется только парой сил (их плоскостью и величиной) и расстоянием между ними. Момент пары свободный вектор (его можно переносить и "прикладывать" к любой точке тела и он полностью определяет действие пары на твердое тело.

Выясним эффект воздействия на тело силы и пары сил - простейших систем сил.

- Пусть на покоившееся тело ( $\mathbf{v}_C = 0, \boldsymbol{\omega} = 0$  при  $t = 0$ ) действует сила  $\mathbf{F}$ , приложенная в центре масс. Тогда  $\mathcal{M}_C(\mathbf{F}) = 0$ . Динамические уравнения движения тела:

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = 0$$

Второе уравнение равносильно:  $\tilde{\mathcal{L}}_{Cr} = \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \text{const} = \mathbb{J}_C \tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{t=0} = 0$ , т.е.  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv 0$  (что мы уже доказывали). Следовательно, под действием силы  $\mathbf{F}$ , приложенной в центре масс, первоначально покоившееся тело начнет двигаться поступательно вместе с центром масс.

- Пусть на покоившееся тело ( $\mathbf{v}_C = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  при  $t = 0$ ) действует пара сил с моментом  $\mathbf{M}_C$ , т.е. главный вектор такой системы сил равен нулю  $\mathcal{F} = 0$  и уравнения движения тела:

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0x, \quad \frac{d\mathcal{L}_{Cr}}{dt} = \mathbf{M}_C$$

Из первого получаем  $\mathbf{v}_C \equiv \text{const} = \mathbf{v}_C|_{t=0} = 0$ . Т.е. под действием пары сил, первоначально покоившееся тело может только вращаться вокруг неподвижного центра масс.

В общем случае при  $\mathcal{F} \neq 0$ ,  $\mathcal{M}_C(\mathcal{F}) \neq 0$  тело начнет поступательное движение вместе с центром масс и вращаться вокруг центра масс.

С учетом введенного понятия пары сил и критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, задача приведения сил, т.е. замены одной системы эквивалентной ей более простой, дается:

**ТЕОРЕМА Пуансо.** Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна системе, состоящей из

- одной силы, приложенной в какой-либо точке  $O$  тела (**центре приведения**) и равной главному вектору  $\mathcal{F}$  данной системы сил, и
- одной пары сил, момент которой равен главному моменту  $\mathcal{M}_O$  всех сил относительно точки  $O$  (**центра приведения**).

### О разных видах трения тела

Рассмотрим относительное движение тела по поверхности другого. Примем, что тела ограничены поверхностями с непрерывно изменяющейся касательной плоскостью (рис. 71).



Рис. 71.

Реальные тела вообще шероховаты. И обладают способностью деформироваться. Поэтому при соприкосновении двух тел они деформируются и касаются друг друга не в одной точке, а вдоль некоторой поверхности, обычно малой. При относительном движении эти деформации изменяются и вызывают колебания молекул, т.е. служат источником теплоты и возможно других эффектов. На все это тратится энергия движения тела, поэтому все эти явления воспринимаются как сопротивление движению.

Эти сложные явления становятся доступными для количественного описания в рамках модели абсолютного твердого тела (т.е. недеформируемого) благодаря законам Кулона.

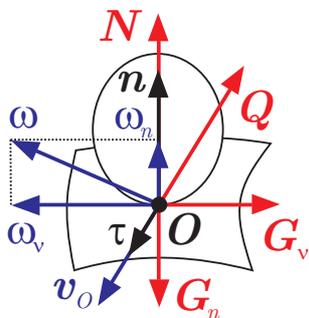


Рис. 72.

Реакция на одно из движущихся тел со стороны другого представляет собой систему сил, распределенных по области касания тел. Согласно теореме Пуансо данная совокупность сил приводится к силе  $\mathbf{R}$  равной главному вектору реакций и паре сил  $\mathbf{G}_O$  относительно одной из точек контакта  $O$ . В дальнейшем деформацией тел пренебрегают, но считают, что реакция на тело со стороны другого сводится к силе  $\mathbf{R}$  и к паре сил с моментом  $\mathbf{G}_O$  в точке  $O$  (рис. 72).

Примем точку  $O$  за полюс, тогда движение тела в каждый момент времени можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью  $\mathbf{v}_O$  (относительно другого тела) и мгновенного вращения с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг точки  $O$ . Разложим вектор  $\boldsymbol{\omega}$  на две составляющие:  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_v$ , где вектор  $\boldsymbol{\omega}_n$  - перпендикулярен

касательной плоскости (т.е. вдоль нормали  $\mathbf{n}$ ), а  $\boldsymbol{\omega}_\nu$  - принадлежит касательной плоскости (вектор  $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\omega}_\nu}{\omega_\nu}$ ). Вектор  $\boldsymbol{\omega}_n$  называют **угловой скоростью верчения** (вокруг  $\mathbf{n}$ ), а вектор  $\boldsymbol{\omega}_\nu$  - **угловой скоростью качения** ( $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{n}$ ).

Также реакцию  $\mathbf{R}$  разложим на  $\mathbf{N}$  - **нормальную реакцию** (по  $\mathbf{n}$ ) и  $\mathbf{Q}$  - **силу трения скольжения** (тангенциальную реакцию), вдоль  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}_O}{v_O}$ .

Пару сил  $\mathbf{G}_O$  также удобно представить в виде двух пар. Одна из них имеет момент коллинеарный  $\boldsymbol{\omega}_\nu$ :  $\mathbf{G}_\nu$  - **пара трения качения**, другая - коллинеарный  $\boldsymbol{\omega}_n$ :  $\mathbf{G}_n$  - **пара трения верчения**.

### Законы Кулона при движении

$$\boxed{\mathbf{Q} = -kN\boldsymbol{\tau}} \quad \boxed{\mathbf{G}_\nu = -\delta^\nu N\boldsymbol{\nu}} \quad \boxed{\mathbf{G}_n = -\delta^n N\mathbf{n}}$$

При равновесии (или отсутствии соответствующей компоненты  $\boldsymbol{\omega}$ ) законы Кулона имеют вид неравенств для модулей. Все силы и моменты пар трения - противоположны соответствующим направлениям движения. Коэффициенты пропорциональности  $k$ ,  $\delta^\nu$ ,  $\delta^n$  - определяются экспериментально и характеризуют материалы из которых изготовлены тела, степень обработки поверхностей и т.д.  $k$  - безразмерный параметр,  $\delta^\nu$ ,  $\delta^n$  - имеют размерность длины (плечи). Коэффициенты трения верчения и качения обычно малы по сравнению с трением скольжения и в ряде прикладных задач не учитываются. Именно этим объясняется применение в технике подшипников качения.

**ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ. ВИДЫ СВЯЗЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОГРАНИЧЕНИЯ НАКЛАДЫВАЕМЫЕ СВЯЗЯМИ НА ВОЗМОЖНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, СКОРОСТИ, УСКОРЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК СИСТЕМ.**

В литературе по механике нет единого общепринятого толкования термина «аналитическая механика». На наш взгляд, характерным для системы изложения аналитической механики является то, что в ее основе лежат некоторые общие принципы, из которых уже аналитическим путем получаются основные дифференциальные уравнения движения. Оказывается, что построение классической механики на базе законов Ньютона не является единственно возможным способом. В основу механики можно положить один из вариационных принципов.

**Принципами** называют: во-первых, некоторые основные начала, на которых может быть построена какая-либо теория, научная система и т.п., а во-вторых, законы, основные положения о чем-либо. Под принципами часто понимают также точку зрения, убеждения и т.д. Принципы теоретической механики можно разделить на *вариационные* и *невариационные*.

К **невариационным принципам** относятся, например, аксиомы динамики (т.е. законы Ньютона), а также законы механики (например, закон сохранения энергии, закон всемирного тяготения).

**Вариационные принципы** механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение механической системы от других кинематически возможных, т.е. допускаемых связями (ограничениями).

Вариационные принципы делятся на:

- **дифференциальные** - дают критерий истинного движения для данного, фиксированного момента времени;
- **интегральные** - дают критерий истинного движения на конечном интервале времени.

Мы будем рассматривать преимущественно дифференциальные принципы, а интегральных коснемся исключительно в образовательных целях.

Итак, *изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование самих уравнений и методов интегрирования - все это составляет основное содержание аналитической механики.*

**Свободные и несвободные системы. Связи и их классификация**

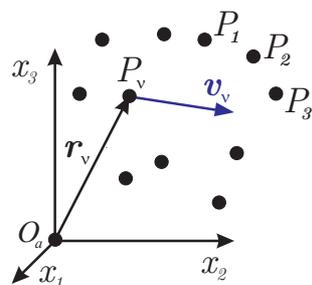


Рис. 73.

Рассмотрим движение механической системы материальных точек  $P_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) (рис.73) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной (инерциальной). Состояние системы задается радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu(t)$  и скоростями  $\mathbf{v}_\nu(t)$  ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, накладываемые на  $\mathbf{r}_\nu(t)$  и  $\mathbf{v}_\nu(t)$ , которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называют

**связями.** Если на систему не наложены связи, то она называется **свободной**. При наличии одной или нескольких связей система называется **несвободной**.

**Примеры:** 1. движение точки по плоскости, сфере, связанной нитью, в первом октанте; 2. конек движется по льду - одна из точек, которая имеет скорость вдоль конька. 3. задача преследования.

В общем случае, связь задается уравнением:

$$\boxed{f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0} \quad (11)$$

где в левую часть входят:  $t$  - время, радиус-векторы  $\mathbf{r}_\nu$  и скорости  $\dot{\mathbf{r}}_\nu$  всех точек  $P_\nu$  системы ( $\nu = 1, \dots, N$ ). Обозначением  $f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu)$  пользуются для краткой записи выражения

$$f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = 0$$

Функция  $f$  имеет в общем случае  $(6N+1)$  аргументов:  $3N$  декартовых координат  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$  точек  $P_\nu$ ,  $3N$  проекций скоростей  $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$  и время  $t$ . Функцию  $f$  предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой.

Связь представленная в виде уравнения (не неравенства) называется **удерживающей** (*двусторонней, неосвобождающей*).

Если же связь имеет вид неравенства:  $f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) \geq 0$ , причем, реализуется как знак равенства, так и знак строго неравенства, то связь называется **неудерживающей** (*односторонней, освобождающей*). Если достигается равенство в неудерживающей связи, то говорят, что связь **напряжена**.

**Примеры:** 1. движение точки по плоскости ( $x = \text{const}, y = \text{const}$ ), сфере  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  - удерживающие связи; связь нитью:  $l^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geq 0$ , в первом октанте ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) - неудерживающие связи;

Однако, движение системы с неудерживающей связью можно разбить на участки, где: 1. связь напряжена, т.е. как бы удерживающая, и 2. связь не напряжена и движение происходит как будто этой связи не было. Т.е. связь либо заменяется на удерживающую, либо вовсе отбрасывается. Поэтому дальше будут только удерживающие связи.

Если уравнения связи можно записать в виде не содержащем проекции скоростей  $\mathbf{v}_\nu$  точек системы:

$$\boxed{f(t, \mathbf{r}_\nu) = 0} \quad (12)$$

то связь называют **геометрической** (*конечной*). Если же в уравнение связи входят проекции скоростей, т.е. в общем случае:  $f(t, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu) = 0$ , то связь называют **кинематической** (*дифференциальной*). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением дифференциальных связей частного вида в силу их важности и наглядности - линейных по скоростям (т.е. скорости точек входят линейно в уравнения):

$$\boxed{f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + D = 0} \quad (13)$$

Здесь вектора  $\mathbf{l}_\nu$  и скаляр  $D$  являются заданными функциями от  $t$  и  $\mathbf{r}_\nu$ . При этом предполагается, что векторы не могут все одновременно обращаться в нуль.

При наличии геометрической связи система не может в каждый момент времени занимать произвольное положение в пространстве. Конечная связь накладывает ограничения на **возможные положения** системы в момент времени  $t$ . При наличии же только дифференциальной связи система в любой момент времени  $t$  может иметь произвольное положение в пространстве. Однако в этом положении, в некоторый момент времени  $t$ ,

скорости точек системы уже не могут быть произвольными. Дифференциальная связь накладывает ограничения на эти **возможные скорости** точек системы.

Конечно скорости точек системы при наличии только геометрических связей (т.е. на положения точек) или координаты точек при наличии только кинематических связей (т.е. на скорости точек) – не могут быть совершенно произвольными. Их конкретные значения, т.е. действительные для каждого момента времени, определяются другими соотношениями (дифференциальными уравнениями движения, вариационными принципами). Но с точки зрения только связей – они могут быть любыми. Дополнительные уравнения, таким образом, служат для замыкания общей задачи движения системы.

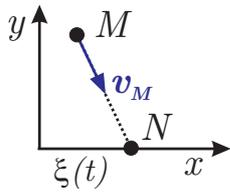
Каждая геометрическая связь вида (12) влечет как следствие дифференциальную связь (т.е. где участвуют и скорости), которое получается почленным дифференцированием уравнений связи:

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{r}_\nu(t)) = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\nu} \dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\nu} = \text{grad}_\nu f$  – градиент  $f$ . Но такая дифференциальная связь неэквивалентна исходной геометрической связи  $f(t, \mathbf{r}_\nu) = 0$ , а эквивалентна  $f(t, \mathbf{r}_\nu) = c$ , где  $c$  – произвольная постоянная. Тем не менее, поскольку она может быть проинтегрирована, дифференциальная связь (14) называется **интегрируемой**. При этом конечно, предполагается, что уравнение кинематической (тоже дифференциальной) связи, например вида (13), нельзя проинтегрировать, поэтому их еще называют **неинтегрируемыми**.

**Примеры:** 1. Кинематическая связь = неинтегрируемая дифференциальная.

*Задача преследования:*



Точка  $M$  – преследующая (лиса), точка  $N$  – преследуемая (заяц) (рис. 74). Скорость точки  $M$  всегда направлена на точку  $N$ .

Пусть точка  $N$ , для простоты, движется вдоль оси  $x$ , по закону  $x = \xi(t)$ . Если радиус-вектора точек  $M$  и  $N$ :  $\mathbf{r}_M = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{r}_N = (\xi(t), 0)$ , тогда условие того что скорость точки  $M$ :  $\mathbf{v}_M = (\dot{x}, \dot{y})$  направлена по вектору  $\overrightarrow{MN} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M = (\xi(t) - x, -y)$  означает, что  $\mathbf{v}_M = (\dot{x}, \dot{y}) = k(\xi(t) - x, -y)$  где  $k$  – множитель. Отсюда получим:

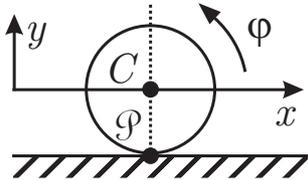
Рис. 74.

$$\begin{cases} \dot{x} = k(\xi - x) \\ \dot{y} = -ky \end{cases} \xrightarrow{\text{исключая } k} \dot{x}y = -\dot{y}(\xi - x) \quad \text{т.е.} \quad \underline{\dot{x}y + \dot{y}(\xi - x) = 0}$$

или, что то же самое,  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = 0$ , где  $\mathbf{l} = (y, \xi - x)$  – вектор ортогональный  $\mathbf{v}$ . За исключением тривиального случая  $\xi(t) = \text{const}$ , полученное уравнение связи – не интегрируемо.

2. Геометрическая связь = интегрируемая дифференциальная

*Качение колеса без скольжения:*



$\mathcal{P}$  – мгновенный центр скоростей,  $\mathbf{v}_P = 0$ . (рис.75)

Кинематическое условие безпроскальзывания:  $v_C = -\omega \cdot \mathcal{PC}$ , или в координатном виде:  $\dot{x}_C = -\dot{\varphi} \cdot R$  ( $R$  – радиус колеса).

После интегрирования получим:  $x_C = -\varphi \cdot R + \text{const}$  – геометрическая связь.

Рис. 75.

Геометрическая связь называется **стационарной**, если время  $t$  не входит явно в уравнение связи, т.е.  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  (связь неподвижна). В этом случае левая часть уравнения (14) дифференциальной связи – линейна и однородна относительно скоростей. По аналогии с этим кинематическую связь называют **стационарной**, если  $D = 0$  и векторы  $\mathbf{l}_\nu$  в (13) не зависят явно от времени  $t$ .

Заметим, что в декартовых координатах уравнения связей записываются в виде:

$$(11) \iff f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0$$

$$(12) \iff f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0$$

$$(13) \iff \sum_{\nu} (A_{\nu} \dot{x}_{\nu} + B_{\nu} \dot{y}_{\nu} + C_{\nu} \dot{z}_{\nu}) + D = 0$$

$$(14) \iff \sum_{\nu} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}} \dot{x}_{\nu} + \frac{\partial f}{\partial y_{\nu}} \dot{y}_{\nu} + \frac{\partial f}{\partial z_{\nu}} \dot{z}_{\nu} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

### Виды систем

Система материальных точек называется **голономной**, если на точки этой системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, т.е. кинематические (на скорости). Таким образом, голономной является всякая свободная система материальных точек, а также несвободная система с конечными или дифференциальными, но интегрируемыми связями. У голономной системы все связи могут быть записаны в обычном конечном виде (т.е. геометрические). Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется **неголономной**. Система называется **склерономной**, если она свободна, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется **реономной**, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

### Ограничения, накладываемые связями на положения, скорости и перемещения точек системы

Пусть на систему наложены  $g$  геометрических связей

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}_{\nu}) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (12')$$

и  $k$  кинематических

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{v}_{\nu} + D_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (13')$$

Как уже говорилось, точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их совместимые со связями (*допускаемые связями*) координаты, скорости, а также ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связи (30) и (31).

Пусть задан какой-то момент времени  $t = t^*$ . Положения системы, для которых радиус-векторы  $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu}^*$  точек, образующих систему, удовлетворяют уравнениям геометрических связей (30) назовем **возможными положениями системы для данного момента времени**. Т.е. *возможные положения - это положения допускаемые связями*. В то же время геометрические связи накладывают ограничения и на скорости точек системы:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \mathbf{v}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (14')$$

Вместе с уравнениями кинематических связей (31) они налагают ограничения и на скорости точек системы. Совокупность векторов  $\mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu}^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (14') и (31) в возможном положении  $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu}^*$  системы для данного момента времени  $t = t^*$ , назовем **возможными скоростями точек системы для данного момента времени**. Таким образом, *возможные скорости - это скорости допускаемые дифференциальными связями*. Относительно связей будем предполагать, что уравнения системы (14') - (31) независимы между собой.

Это равносильно тому, что ранг функциональной матрицы  $J$ , составленной из коэффициентов при скоростях в уравнениях, равен  $g + k$ :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial x_1} & \frac{\partial f_g}{\partial y_1} & \frac{\partial f_g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial x_N} & \frac{\partial f_g}{\partial y_N} & \frac{\partial f_g}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{11}^x & l_{11}^y & l_{11}^z & \cdots & l_{1N}^x & l_{1N}^y & l_{1N}^z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{k1}^x & l_{k1}^y & l_{k1}^z & \cdots & l_{kN}^x & l_{kN}^y & l_{kN}^z \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{rang } J = g + k}$$

В этом случае существует отличный от нуля определитель порядка  $g + k$ , образованный из элементов матрицы  $J$ . Следовательно, общую систему (14') - (31) можно разрешить относительно  $g + k$  «зависимых» скоростей, коэффициенты при которых составляют этот невырожденный определитель, выразив их через остальные  $3N - (g + k)$  «независимые» скорости. Таким образом ясно, что должно быть  $\boxed{3N - (g + k) > 0}$ , чтобы связи не определяли все скорости единственным способом (независимо от действующих сил), а допускали бы для них известный произвол. В противном случае ограничения, накладываемые связями были бы настолько жесткими, что согласованное со связями движение точек системы было бы либо вообще невозможным, либо должно было бы происходить по заранее заданному закону во времени.

Для получения аналитического выражения ограничений, накладываемых связями на ускорения точек системы продифференцируем (14') и (31) по  $t$

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \right) \mathbf{v}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d}{dt} l_{\beta\nu} \right) \mathbf{v}_\nu + \frac{d}{dt} D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (16)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{a}_\nu = \mathbf{a}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (15) и (16) при возможных положениях  $\mathbf{r}_\nu^*$  системы и возможных скоростях  $\mathbf{v}_\nu^*$  - для данного момента времени  $t^*$ , назовем **возможными ускорениями точек системы для этого момента времени**. Видно, что число уравнений и матрица коэффициентов при ускорениях совпадают соответственно с аналогами для скоростей. Следовательно возможных скоростей, возможных ускорений, возможных положений для данного момента времени – бесконечно!

Итак, в данный момент времени  $t = t^*$  система находится в каком-либо возможном положении, определяемом радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu^*$  и имеет какие-то возможные скорости  $\mathbf{v}_\nu^*$  и возможные ускорения  $\mathbf{a}_\nu^*$ . Возможному в момент  $(t^* + \Delta t)$  положению системы (где  $\Delta t$  - элементарный промежуток времени) отвечают радиус-векторы  $\mathbf{r}_\nu^* + \Delta \mathbf{r}_\nu$  точек системы. Понятно, что в силу наличия связей элементарные перемещения точек системы  $\Delta \mathbf{r}_\nu$  (в момент  $t^*$ ) уже не могут быть произвольными величинами, а должны удовлетворять (быть совместимыми с) некоторым условиям. Совокупность элементарных перемещений  $\Delta \mathbf{r}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) точек системы называют **возможным перемещением механической системы за время  $\Delta t$**  из ее возможного положения, задаваемого радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu^*$  в момент  $t^*$ , если эти перемещения допускаются связями, т.е. выполняются соотношения (30)-(31) в момент  $(t^* + \Delta t)$  в положении  $(\mathbf{r}_\nu^* + \Delta \mathbf{r}_\nu)$  (и возможной скорости  $\mathbf{v}_\nu^*$ ):

$$f_\alpha(t^* + \Delta t, \mathbf{r}_\nu^* + \Delta \mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{v}_\nu^* + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (17)$$

где функции  $l_{\beta\nu}$  и  $D_\beta$  вычисляются при  $t = t^* + \Delta t$ ,  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^* + \Delta \mathbf{r}_\nu$ .

Для достаточно малых  $\Delta t$  возможные перемещения точек системы можно представить в виде суммы:

$$\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

Здесь не выписаны слагаемые, порядок которых относительно  $\Delta t$  выше второго. Конечно мы предполагаем, что функции  $\mathbf{r}_\nu(t)$  имеют непрерывные производные до 3-го порядка включительно. Так как множество возможных скоростей и ускорений – бесконечно, то бесконечно и множество таких возможных перемещений (т.к. количество уравнений меньше числа неизвестных:  $3N > g + k$ ).

В дальнейшем мы будем пренебрегать величинами выше 1-го порядка относительно  $\Delta t$  и называть **возможными перемещениями точек системы** величины:

$$\boxed{\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t}$$

Т.о. вектор возможного перемещения точки - направлен в сторону возможной скорости в данный момент времени  $t^*$  из данного (в этот момент времени) возможного положения  $\mathbf{r}^*$ .

Умножая уравнения (14') и (31), которым удовлетворяют возможные скорости  $\mathbf{v}_\nu^*$ , на  $\Delta t$ , получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по  $\Delta t$  возможные перемещения:

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \Delta \mathbf{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0 & (\alpha = 1, \dots, g) \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \Delta \mathbf{r}_\nu + D_\beta \Delta t = 0 & (\beta = 1, \dots, k) \end{cases}$$

Где функции  $l_{\beta\nu}$  и  $D_\beta$ , а также все частные производные вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^*$ . Аналогичные уравнения можно получить из (17), раскладывая в ряд Тейлора функции  $f_\alpha$ ,  $l_{\beta\nu}$ ,  $D_\beta$  в окрестности  $(t^*, \mathbf{r}_\nu^*)$  и удерживая только линейные члены, содержащие  $\Delta t$  и  $\Delta \mathbf{r}_\nu$ .

**Пример:** Точка  $P$  движется по неподвижной поверхности (рис. 77).

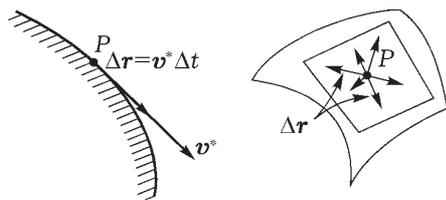


Рис. 76.

В этом случае возможной скоростью  $\mathbf{v}_\nu^*$  будет любой вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности в точке  $P$  и проходящей через эту точку. Вектор возможного перемещения  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}^* \Delta t$ , следовательно любой вектор, построенный из точки  $P$  и лежащий в касательной плоскости, будет возможным перемещением. Если поверхность задается уравнением  $f(\mathbf{r}) = 0$ , то все возможные перемещения ортогональны нормали к поверхности в точке  $P$ :  $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad} f = 0$ .

## ЛЕКЦИЯ 17

### ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. СИНХРОННОЕ ВАРИИРОВАНИЕ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

#### Действительные перемещения

Пусть в момент  $t = t^*$  система находится в каком-то конкретном возможном положении, задаваемом радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}^*$ , а скорости точек системы имеют некоторые конкретные возможные значения  $\mathbf{v}_{\nu 0}^*$ . Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиус-векторов  $\mathbf{r}_\nu(t)$  точек системы для моментов времени  $t$  следующих за  $t^*$ . Если обозначить за  $dt$  приращение времени:  $dt = t - t^*$ , то приращения радиус-векторов точек системы можно представить в виде:

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}_{\nu 0}^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{\nu 0}^* (dt)^2 + \dots$$

где  $\mathbf{a}_{\nu 0}^*$  - ускорения точек системы при  $t = t^*$ , многоточие обозначает величины выше второго порядка относительно  $dt$ . Величины, определяемые этим соотношением суть **действительные (истинные) перемещения точек системы за время  $dt$** , потому что получены в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения при заданных конкретных силах из данного возможного положения и данных возможных скоростях. Силы, приложенные к системе в момент  $t = t^*$ , определяют конкретные возможные ускорения её точек  $\mathbf{a}_{\nu 0}^*$ . *Действительное перемещение, естественно, является одним из возможных* ( $\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots$ ). Если пренебречь членами порядка  $(dt)^2$  и выше, то действительное перемещение точки будет дифференциалом функции  $\mathbf{r}_\nu(t)$ , т.е.

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \underline{d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_{\nu 0}^* dt}$$

В этом случае действительные перемещения  $d\mathbf{r}_\nu$  удовлетворяют уравнениям, аналогичным для возможных перемещений  $\Delta \mathbf{r}_\nu$  - линейных относительно  $\Delta t$  (получаются путем умножения на  $dt$ ):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} d\mathbf{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (18)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} d\mathbf{r}_\nu + D_\beta dt = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (19)$$

здесь величины  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}$ ,  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$ ,  $\mathbf{l}_{\beta\nu}$  и  $D_\beta$  вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}^*$ .

В дальнейшем под **действительным перемещением системы за время  $dt$**  будем понимать бесконечно малые перемещения точек этой системы, линейные по  $dt$ , происходящие под действием заданной системы сил. Они удовлетворяют системе (18)-(19).

#### Виртуальные перемещения

Пусть при  $t = t^*$  система занимает некоторое свое возможное положение, определяемое радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu$ . **Виртуальным перемещением системы** называется совокупность величин  $\delta \mathbf{r}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ), удовлетворяющая линейным однородным уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (20)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (21)$$

где величины  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}}$ ,  $\mathbf{l}_{\beta\nu}$  вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu 0}^*$ .

Остановимся подробнее на новом введенном понятии виртуального перемещения.

1. Величина  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$  задается проекциями  $(\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu})$ . Так как число неизвестных  $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$  ( $\nu = 1, \dots, N$ )  $= 3N$  превосходит число  $(g + k)$  уравнений (24)-(25) которым они удовлетворяют ( $3N > g+k$ ), то количество виртуальных перемещений – бесконечно.
2. Вспоминая систему уравнений для линейных по  $\Delta t$  возможных перемещений ( $\Delta \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu}^* \Delta t$ ):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \Delta \mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Delta t = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \Delta \mathbf{r}_{\nu} + D_{\beta} \Delta t = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k)$$

можно убедиться что система (24)-(25) отличается от неё только отсутствием членов  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Delta t$  и  $D_{\beta} \Delta t$ . Если все связи изначально – стационарные, т.е. для геометрических связей время  $t$  не входит явно в уравнение связи:  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0$  (связь неподвижна) для кинематических связей  $D_{\beta} = 0$  и векторы  $\mathbf{l}_{\nu}$  не зависят явно от времени  $t$ , т.е. система склерономна, то системы уравнений совпадают. Таким образом, множество линейных относительно  $\Delta t$  возможных перемещений склерономной системы совпадает с множеством её виртуальных перемещений. А поскольку действительные перемещения являются одними из возможных, то при стационарных связях действительные перемещения являются одними из виртуальных.

3. Исходя из этой аналогии можно сказать, что виртуальные перемещения совпадают с возможными при «замороженных» связях ( $t = t^* = \text{const}$ ). Т.е. при «замораживании» время  $t$ , входящее в уравнение конечных связей – фиксируется, т.е. связь как бы застывает в той конфигурации, которую она имела в момент  $t^*$ . Тогда при дифференцировании  $f_{\alpha}$ , члены  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}$  – не появляются. Для дифференциальной связи «замораживание» означает придание ей стационарного характера, т.е. отбрасывание  $D_{\beta}$  и фиксирование  $t$ , явно входящего в коэффициенты  $\mathbf{l}_{\beta}$ .

**Примеры.** 1. Точка  $P$  движется по неподвижной поверхности (стационарная геометрическая связь) (рис. 77).

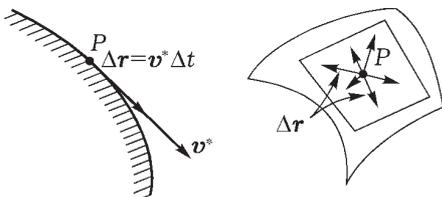


Рис. 77.

На прошлой лекции мы видели, что возможные скорости – лежат в касательной плоскости к поверхности в точке  $P$ . Поэтому и возможные перемещения  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}^* \Delta t$  (линейные относительно  $\Delta t$ ) так же лежат в касательной плоскости, т.е. выполняются уравнения на возможные перемещения:  $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad} f = 0$ .

Виртуальные перемещения, согласно (24)-(25) всегда удовлетворяют условию:  $\delta \mathbf{r} \cdot \text{grad} f = 0$  для геометрической связи (т.е. всегда лежит в касательной плоскости) независимо от того зависит уравнение связи  $f = 0$  явно от времени  $t$  или нет, т.е. неподвижная или нет. Т.о. в данном случае стационарной связи виртуальные и возможные перемещения совпадают.

2. Точка  $P$  движется по подвижной поверхности или деформирующейся поверхности, все точки которой имеют скорость  $\mathbf{u}$  (т.е. как твердое тело) (рис. 78).

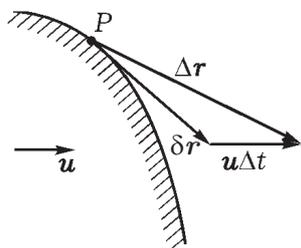


Рис. 78.

В этом случае возможная скорость  $\mathbf{v}^*$  уже не лежит в касательной плоскости. Она получается из произвольного вектора  $\mathbf{v}$ , касательного к поверхности, и прибавлением к нему скорости  $\mathbf{u}$ :  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ , тогда возможное перемещение точки  $P$ :  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}^* \Delta t = \mathbf{v} \Delta t + \mathbf{u} \Delta t$  (здесь мы опять же рассматриваем линейные относительно  $\Delta t$  возможные перемещения). Т.е. здесь соотношение  $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad} f = 0$  не выполняется при любых  $\Delta \mathbf{r}$ . А виртуальное перемещение  $\delta \mathbf{r}$ , в отличие от  $\Delta \mathbf{r}$ , по прежнему представляет вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности в точке  $P$ .

### Вариации координат. Число степеней свободы

Бесконечно малые приращения  $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) называют **вариациями** величин (координат)  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ . Переход при фиксированном  $t = t^*$  из возможного положения  $\mathbf{r}_\nu^*$  в бесконечно близкое возможное положение, определяемое радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu^* + \delta \mathbf{r}_\nu$ , называется **синхронным варьированием**. При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения, а сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации, возможные положения) системы для данного фиксированного момента времени  $t^*$ . Можно еще сказать, что **виртуальные перемещения** представляют собой перемещения точек системы из одного возможного положения системы в момент  $t^*$  в другое бесконечно близкое, возможное для того же самого момента времени  $t^*$  положение системы. Т.е. это любое элементарное перемещение которое может быть сообщено точке из занимаемого ею в данный момент времени положения при сохранении наложенных на нее в этом момент времени связей.

Уравнения, определяемые виртуальные перемещения (24)-(25) могут быть переписаны для  $3N$  вариаций координат  $(\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu) = \delta \mathbf{r}_\nu$ :

$$\sum_{\nu=1}^N \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (24')$$

$$\sum_{\nu=1}^N (l_{\beta\nu}^x \delta x_\nu + l_{\beta\nu}^y \delta y_\nu + l_{\beta\nu}^z \delta z_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (25')$$

Как говорилось на первой лекции все эти  $g + k$  уравнений линейно независимы. Т.е. из них можно выразить  $g + k$  вариаций через остальные  $3N - (g + k)$ . Число  $n = 3N - (g + k)$  независимых вариаций называется **числом степеней свободы** данной системы материальных точек.

**Примеры:** 1) Одна свободная точка в пространстве имеет 3 степени свободы; 2) Система из 2-х точек, связанная недеформируемым стержнем, движущимся в плоскости, имеет 3 степени свободы; 3) Материальная точка, движущаяся по поверхности (подвижной или неподвижной) имеет 2 степени свободы.

## Идеальные связи

Пусть в точках  $P_\nu$  системы приложены, соответственно, силы  $\mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) (под  $\mathbf{F}_\nu$  имеется в виду равнодействующая всех сил, приложенных к точке  $P_\nu$ ). Если бы связи отсутствовали, т.е. система была бы свободной, то по II закону Ньютона между массами  $m_\nu$ , ускорениями  $\mathbf{a}_\nu$  и силами  $\mathbf{F}_\nu$  имели бы место соотношения:

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu$$

При наличии связей (т.е. несвободная система) ускорения, выражаемые отсюда:

$$\mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu / m_\nu$$

могут оказаться (в данный момент времени  $t^*$ , в данном положении точек системы  $\mathbf{r}_\nu^*$  и при заданных скоростях  $\mathbf{v}_\nu^*$ ) несовместимыми со связями. Ведь связи накладывают ограничения на ускорения, полученные на прошлой лекции:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \right) \mathbf{v}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d}{dt} \mathbf{l}_{\beta\nu} \right) \mathbf{v}_\nu + \frac{d}{dt} D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k)$$

Ускорения  $\mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu / m_\nu$  могут не удовлетворять этим соотношениям. Тогда материально осуществленные связи действуют на точки системы с некоторыми (какими-то) дополнительными неизвестными силами  $\mathbf{R}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) (принцип освобожденности от связей); эти силы воздействия связей  $\mathbf{R}_\nu$  носят название **реакции связей** (при наличии нескольких связей т.е.  $g + k > 1$ ,  $\mathbf{R}_\nu$  - есть равнодействующая всех реакций для точек  $P_\nu$ ). Эти «возникающие» реакции таковы, что ускорения, определяемые из уравнений:

$$\boxed{m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu}$$

уже допускаются связями. В отличие от реакций  $\mathbf{R}_\nu$ , заранее заданные силы  $\mathbf{F}_\nu$  называются **активными силами**, а  $\mathbf{R}_\nu$  - **пассивными силами**. Активные силы обычно задаются как известные функции времени, положения и скоростей точек системы:  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$  (т.е. зависят, в общем случае, от всех  $\mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, N$ )).

**Основная задача динамики несвободной системы** состоит в следующем: заданы активные силы  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$  и даны совместимые со связями начальные положения  $\mathbf{r}_\nu^0$  и начальные скорости  $\mathbf{v}_\nu^0$  точек системы ( $\nu = 1, \dots, N$ ). Требуется определить движение системы, т.е. зависимость  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$  и все реакции связей  $\mathbf{R}_\nu$ .

Если относительно связей, их характера, ничего не известно, кроме определяющих уравнений:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \mathbf{v}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k)$$

и, следовательно, ничего не известно относительно вызываемых этими связями реакций  $\mathbf{R}_\nu$ , то сформулированная задача является неопределенной. Действительно: число подлежащих определению скалярных величин:

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{x\nu}, R_{y\nu}, R_{z\nu} = 6N$$

число скалярных соотношений - уравнений:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{x\nu} + R_{x\nu}, \quad m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{y\nu} + R_{y\nu}, \quad m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{z\nu} + R_{z\nu} = 3N$$

и уравнений связей:  $g + k$ , тогда:

$$6N - 3N - (g + k) = 3N - (g + k) = n > 0$$

т.е. неизвестных больше.

Для того, чтобы основная задача динамики стала определенной, необходимо иметь какие-то дополнительные  $n = 3N - (g + k)$  независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения можно получить ограничившись важным классом идеальных связей (дополнительные ограничения). **Связи** называются **идеальными** если сумма элементарных работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_{\nu} \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0$$

В развернутом виде:

$$\sum_{\nu=1}^N (R_{x\nu} \delta x_{\nu} + R_{y\nu} \delta y_{\nu} + R_{z\nu} \delta z_{\nu}) = 0$$

Среди  $3N$  величин  $\delta x_{\nu}$ ,  $\delta y_{\nu}$ ,  $\delta z_{\nu}$  имеется  $n = 3N - (g + k)$  независимых, определяемых из (24')-(25') в количестве равном числу степеней свободы системы. Поэтому в последнем равенстве можно выразить  $3N - n = g + k$  зависимых приращений (вариаций координат)  $\delta x_{\nu}$ ,  $\delta y_{\nu}$ ,  $\delta z_{\nu}$  через  $n$  независимых. Далее, чтобы уравнение идеальной связи выполнялось необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при этих независимых вариациях обращались в нуль. Так мы получим недостающие  $n$  соотношений, благодаря которым основная задача динамики несвободной системы замкнется и станет определенной. Естественность и практическая важность выделенного класса связей станут ясными после рассмотрения:

### Примеры идеальных связей

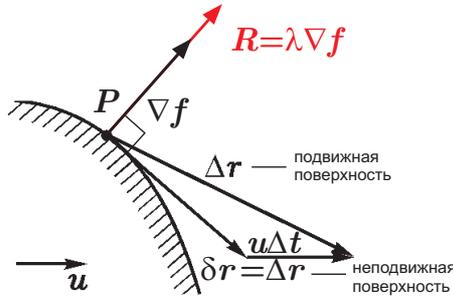


Рис. 79.

1. Движение точки  $P$  подчинено геометрической связи:  $f(t, \mathbf{r}) = 0$  (рис. 79), представляющей собой некоторую, вообще говоря, неподвижную поверхность. Ранее было выяснено, что в этом случае виртуальное перемещение есть любое элементарное перемещение касающееся поверхности в данной точке. Из определения идеальности связи  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ , вытекает, что ее реакция будет ортогональна виртуальному перемещению, т.е. она должна быть нормальна к поверхности:  $\mathbf{R} = \lambda \nabla f$ . В общем случае реакция поверхности имеет нормальную и тангенциальную составляющие. И чтобы реакция поверхности

была нормальна к ней, необходимо требование гладкой поверхности. Таким образом идеальность, в частности, обобщает понятие гладкости. Обратим внимание, что возможные перемещения совпадают с виртуальными только для неподвижной поверхности:  $\delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}$ . Т.е. виртуальное перемещение в случае подвижной связи представляет собой бесконечно малое возможное перемещение для «остановленной» или «замороженной» поверхности и лежит в касательной плоскости. Здесь видна важность виртуальных перемещений при определении идеальных связей. Таким образом гладкая поверхность как подвижная (деформирующаяся) так и неподвижная представляет собой идеальную связь.

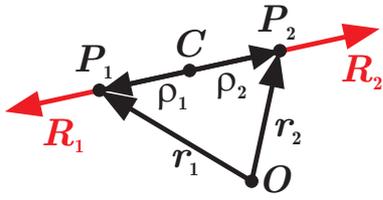


Рис. 80.

2. Две материальные точки  $P_1, P_2$  соединены невесомым стержнем неизменной длины (рис. 80). Данная геометрическая связь математически выражается зависимостью

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = l^2 = \text{const}$$

т.е. она стационарная. А для стационарных связей виртуальные перемещения совпадают с возможными, линейными относительно  $\Delta t$ :  $\delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$ .

Обозначим  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  реакции связи, приложенные к точкам  $P_1$  и  $P_2$ . Тогда стержень находится (по III закону Ньютона) под действием сил:  $-\mathbf{R}_1$  и  $-\mathbf{R}_2$ . Пусть  $m, \mathbf{a}_C, \boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbb{J}_C$  - масса, ускорение центра масс, угловая скорость и центральный тензор инерции стержня. Тогда из уравнений движения стержня:

$$m \mathbf{a}_C = -\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \quad \frac{d}{dt} (\mathbb{J}_C \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\rho}_1 \times (-\mathbf{R}_1) + \boldsymbol{\rho}_2 \times (-\mathbf{R}_2)$$

где  $\boldsymbol{\rho}_1$  и  $\boldsymbol{\rho}_2$  - радиус-вектора  $P_1$  и  $P_2$  относительно  $C$ . В силу условий  $m = 0, \mathbb{J}_C = 0$  приходим к равенствам:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \mathbf{R}_2 = 0$$

Отсюда видно, что

$$\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2, \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \times \mathbf{R}_2 = 0$$

следовательно  $\mathbf{R}_2$  коллинеарна вектору  $(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)$ , значит

$$\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2 = \lambda (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)$$

где  $\lambda$  - скалярный множитель, т.е. реакции равны по модулю и направлены противоположно друг другу, коллинеарно отрезку, соединяющему точки.

Поскольку такие две точки по сути представляют собой неизменяемую систему (у которой расстояния между любыми точками не меняются) т.е. своеобразную модель твердого тела, то возможные (и виртуальные) перемещения:

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu \Delta t = (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) \Delta t = \mathbf{v}_C \Delta t + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) \Delta t = \Delta \mathbf{r}_C + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) \Delta t$$

как в формуле распределения скоростей. Тогда определяя работу реакций  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  на виртуальных перемещениях  $\delta \mathbf{r}_1$  и  $\delta \mathbf{r}_2$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 (\Delta \mathbf{r}_1 - \Delta \mathbf{r}_2) = \mathbf{R}_1 (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)) \Delta t = \\ &= \boldsymbol{\omega} ((\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \times \mathbf{R}_1) \Delta t = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{R}_1 \times (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)) \Delta t = \boldsymbol{\omega} (\lambda (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \times (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)) \Delta t = 0 \end{aligned}$$

Т.о. всякая неизменяемая механическая система обладает идеальными геометрическими связями. Важный частный случай такой системы - абсолютно твердое тело. Т.е. твердое тело это система с идеальными связями. При отсутствии других связей, кроме осуществляющих жесткое соединение точек тела между собой, твердое тело называется **свободным**.

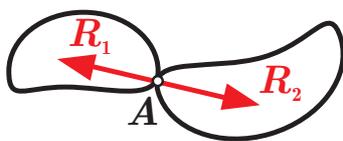


Рис. 81.

3. Два тела шарнирно соединены в точке  $A$ . Пренебрегая массой и размерами шарнира, аналогично предыдущему примеру получим:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$$

Виртуальные перемещения точек тел, в месте расположения шарнира - одинаковы:  $\delta \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{r}_2 = \delta \mathbf{r}$  следовательно работа

реакций шарнира:  $\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \delta \mathbf{r} = 0$

Аналогично доказывается идеальность следующих связей:

4. Два твердых тела, соприкасающиеся идеально гладкими поверхностями всё время движения (трение отсутствует).

5. Два твердых тела соприкасаются идеально (абсолютно) шероховатыми поверхностями (качение, зубчатое зацепление)

6. Рассмотрим идеальную кинематическую связь, выражающую условие погони из задачи преследования прошлой лекции:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{где } \mathbf{l} = (x_2, \xi - x_1), \quad \mathbf{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

Связь стационарная, поэтому  $\delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$ . Тогда из уравнения связи  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = 0$  имеем  $\mathbf{l} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ . Сравнивая его с условием идеальности связи  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$  заключаем, что реакция идеальной кинематической связи должна иметь вид  $\mathbf{R} = \mu \mathbf{l}$ , где  $\mu$  - скаляр, т.е. должна быть коллинеарна  $\mathbf{l}$ .

Вообще любой сложный механизм можно рассматривать как систему твердых тел, которые попарно либо соединены между собой жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры – идеальными, все соприкасающиеся поверхности – идеально гладкими, или идеально шероховатыми, то любой сложный механизм можно трактовать как систему материальных точек, подчиненную идеальным связям. Однако, во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Это будет, например, когда геометрические связи обладают трением или упругостью, а кинематические связи – «негладкостью» (кинематическая связь называется «гладкой» если ортогональна к  $\mathbf{l}$  реакция отсутствует). Пренебрежение этими «свойствами» связей можно иногда существенно исказить физическую картину явления. Однако и в этих случаях связи можно трактовать идеальными, т.е. учитывать только нормальные составляющие реакций «негладких» поверхностей, если относить все отклонения от «идеальности» (силы трения, упругости и прочее) к разряду неизвестных активных сил. При этом разумеется, к системе уравнений движения для ее замыкания, следует добавить соответствующее число новых соотношений, выражающих экспериментальные законы: трения (закон Кулона), упругости (закон Гука) и прочее. При такой трактовке понятия идеальных связей, применимость этого понятия становится практически универсальной.

В дальнейшем  
всегда предполагается, что  
все связи, наложенные на систему, являются идеальными.

## ЛЕКЦИЯ 18

### УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ). ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим движение несвободной системы материальных точек, подчиненной идеальным геометрическим и кинематическим связям.

Движение точек системы описывается уравнениями

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (22)$$

где  $m_\nu$  - масса,  $\mathbf{a}_\nu$  - ускорение,  $\mathbf{F}_\nu$  - равнодействующая активных сил и  $\mathbf{R}_\nu$  - равнодействующая реакций, действующих на  $\nu$ -ую точку системы  $N$  точек. Поскольку связи идеальны, то в любом возможном положении системы, при любых виртуальных перемещениях  $\delta \mathbf{r}_\nu$  системы:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (23)$$

Найдем конкретные выражения для реакций  $\mathbf{R}_\nu$ , с помощью, так называемых, **неопределенных множителей Лагранжа**. Выпишем соотношения, определяющие виртуальные перемещения точек системы:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (24)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (25)$$

Умножая равенства (24) и (25) на произвольные скалярные множители  $(-\lambda_\alpha)$  и  $(-\mu_\beta)$ , соответственно, и складывая почленно полученные равенства с равенством для связей (23):

$$\sum_{\alpha=1}^g \left[ \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \delta \mathbf{r}_\nu \cdot (-\lambda_\alpha) \right] + \sum_{\beta=1}^k \left[ \sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \delta \mathbf{r}_\nu \cdot (-\mu_\beta) \right] + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

Получим:

$$\sum_{\nu=1}^N \left( \mathbf{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta\nu} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (26)$$

Ему можно придать развернутую форму через компоненты векторов:

$$\sum_{\nu,\sigma} \left( R_\nu^\sigma - \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^\sigma} - \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta l_{\beta\nu}^\sigma \right) \cdot \delta x_\nu^\sigma = 0 \quad (27)$$

где  $\sigma = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{R}_\nu = (R_\nu^1, R_\nu^2, R_\nu^3)$ ,  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^1}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^2}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^3} \right)$ ,  $\mathbf{l}_{\beta\nu} = (l_{\beta\nu}^1, l_{\beta\nu}^2, l_{\beta\nu}^3)$ .

В этом выражении присутствуют  $3N$  вариаций координат  $\delta x_\nu^\sigma$ , из которых только  $n = 3N - (g + k)$  штук независимы, а остальные  $(g + k)$  зависимы (в этом мы убеждались на прошлой лекции, выражая их из определения виртуальных перемещений).

Подберем множители  $\lambda_\alpha$  и  $\mu_\beta$ , общее число которых равно  $(g + k)$ , таким образом, чтобы в (27) обратились в нуль коэффициенты при зависимых вариациях. Это можно

сделать и притом единственным образом, ибо дело сводится к определению множителей из линейной системы алгебраических уравнений, определитель которой, как легко видеть, совпадает с определителем  $J = \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^\sigma}, l_{\beta\nu}^\sigma \right\}$  (из первой лекции), который не равен нулю. После этого в равенстве (27) останутся только члены с независимыми вариациями. Но тогда коэффициенты при этих независимых вариациях тоже должны равняться нулю, для выполнения равенства. Таким образом, путем надлежащего подбора множителей  $\lambda_\alpha$  и  $\mu_\beta$ , можно обратить в нуль все скалярные коэффициенты при вариациях в равенстве (27), и, следовательно, все векторные коэффициенты в равенстве (26). Из этих последних условий устанавливаем, что должно быть:

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta\nu} \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (28)$$

Эти формулы определяют общий вид реакций идеальных связей. Теперь подставляя выражения для  $\mathbf{R}_\nu$  в уравнения движения системы получим так называемые **уравнения Лагранжа первого рода**

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta\nu} \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (29)$$

К этим уравнениям следует еще добавить уравнения связей:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (30)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta\nu} \mathbf{v}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) \quad (31)$$

Заменяя каждое векторное уравнение тремя скалярными аналогами, мы получаем замкнутую систему: она содержит  $3N + (g + k)$  уравнений, для нахождения такого же числа искомого величин:  $3N$  координат точек  $x_\nu^\sigma$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$ ) и  $(g + k)$  множителей связи  $\lambda_\alpha$  и  $\mu_\beta$ . Эта система определяет математическую модель «несвободная система с идеальными связями». Для решения основной задачи динамики несвободной системы в рамках данной модели, к уравнениям (29)-(30) следует присоединить совместные со связями начальные условия для функций  $x_\nu^\sigma$ , которые входят в уравнения дифференциальным образом:

$$x_\nu^\sigma |_{t=0} = x_{\nu 0}^\sigma, \quad \dot{x}_\nu^\sigma |_{t=0} = v_{\nu 0}^\sigma$$

Интегрируя эту систему, получим конечные уравнения движения  $x_\nu^\sigma = x_\nu^\sigma(t)$ , и одновременно по множителям Лагранжа из (28) найдем реакции связей  $\mathbf{R}_\nu$ .

### *Особенности лагранжевых уравнений с неопределенными множителями.*

- ⊕ позволяет полностью решать основную задачу динамики системы, т.е. определять и движение системы и реакции связей;
- ⊕ служит исходным соотношением для получения других, более удобных уравнений, не содержащих реакций;
- ⊖ громоздкость системы (система зависит от числа точек  $N$  и быстро растет с ростом  $N$ );
- ⊖ с ростом числа связей движение системы упрощается, а находить его приходится, наоборот, из более сложной системы уравнений.

Поэтому уравнения Лагранжа первого рода практически мало применяются. Далее мы получим уравнения Лагранжа второго рода, в которых число уравнений равно столько степеней свободы системы, т.е. неизвестных независимых вариаций.

Уравнения Лагранжа были получены французским математиком и механиком Ж.Лагранжем в его знаменитом трактате «Аналитическая механика», опубликованном в 1788г. В этом трактате впервые были изложены основы аналитической механики (в котором совершенно отсутствуют рисунки).

### Принцип Даламбера-Лагранжа. Общее уравнение динамики.

Вернемся к исходным уравнениям движения несвободной системы (22):

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

и к требованию идеальности связи (23) на любых виртуальных перемещениях:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

Здесь  $\mathbf{a}_\nu$  - ускорения точек в инерциальной системе отсчета,  $\mathbf{F}_\nu$ ,  $\mathbf{R}_\nu$  - равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к  $\nu$ -ой точке.

Выразим из уравнений движения реакции:

$$-\mathbf{R}_\nu = \mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на  $\delta \mathbf{r}_\nu$  и суммируя по  $\nu = 1, \dots, N$ , с учетом уравнения идеальности связи получим:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0} \quad (32)$$

Данное соотношение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил  $\mathbf{F}_\nu$  (т.е. являлось истинным).

Необходимость: условия (38) мы только что показали.

Достаточность: предположим, что дано некоторое, совместимое со связями движение системы, для которого выполняется условие (38). Тогда если положить  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) то получим, что удовлетворяются равенство (23) для связей и уравнения движения (22), полученные непосредственно из законов Ньютона. Таким образом, в любой момент времени можно подобрать такие реакции  $\mathbf{R}_\nu$ , которые в силу равенства (23) были бы допустимыми для данных связей и при которых имеют место уравнения движения (22).

Мы считаем, что эти реакции  $\mathbf{R}_\nu$  в действительности реализуются («гипотеза о реализации допустимых связей») и что, следовательно, рассматриваемое движение соответствует данным активным силам  $\mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$ . Соотношение (38) характеризует движение всякой системы с идеальными удерживающими связями по отношению к активным силам  $\mathbf{F}_\nu$  и соответствующим (для данного момента времени) виртуальным перемещениям  $\delta \mathbf{r}_\nu$ . Оно получило название **общего уравнения динамики**. Входящие в (38) выражения

$\boxed{-m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{J}_\nu}$  называются **силами инерции**. А выражения

$$\mathbf{F}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = \delta A(\mathbf{F}_\nu), \quad \mathbf{J}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = \delta A(\mathbf{J}_\nu)$$

определяют **элементарную работу активных сил и сил инерции  $\nu$ -ой точки на её виртуальном перемещении**. Применяя эту терминологию, можно сказать:

общее уравнение динамики показывает, что: в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю.

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^N \delta A(\mathbf{F}_\nu) + \sum_{\nu=1}^N \delta A(\mathbf{J}_\nu) = 0}$$

Общее уравнение динамики получено нами в предположении об идеальности связей (23). Если же связи таковы, что все или часть реакций  $\mathbf{G}_\nu$  не удовлетворяют условию (23), то, как и говорилось на прошлой лекции, общее уравнение динамики можно использовать все равно, но формально добавив к системе активных сил  $\mathbf{F}_\nu$  эти неизвестные «неидеальные» реакции  $\mathbf{G}_\nu$ , тогда уравнение (38) примет вид:

$$\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{G}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

Возникающая при этом неопределенность системы уравнений должна компенсироваться дополнительными данными (соотношениями) о физических свойствах и характере связей, порождающих  $\mathbf{G}_\nu$  (закон Кулона - трение, закон Гука - упругость ...).

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей. Реакции определяются из уравнения  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ).

Соотношение (38) на самом деле является не одним уравнением, а содержащим в себе число уравнений, равное  $n$  - числу степеней свободы системы, которое определяется числом независимых виртуальных перемещений из  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ . Проще всего эти уравнения получить делая одну вариацию ненулевой и фиксируя (заноуляя) остальные перемещения. В каждом из полученных  $n$  уравнений отсутствуют реакции идеальных связей.

Общее уравнение динамики (38) содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. Далее оно будет положено в основу получения всех основных дифференциальных уравнений движения механических систем.

Общее уравнение динамики (38) называется также **дифференциальным вариационным принципом Даламбера-Лагранжа**. Вариационным он называется, потому что туда входят вариации - виртуальные перемещения. А дифференциальным называется потому что в нем сравнивается данное положение системы с ее варьированным в фиксированный, хотя и произвольный, момент времени (синхронное варьирование). С этой точки зрения принцип может быть сформулирован так:

**Принцип Даламбера-Лагранжа.** *Истинное (действительное) движение системы выделяется из всех кинематически возможных (допускаемых связями) тем, что для него и только для него в данный момент времени, сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

### Принцип виртуальных перемещений

**Положением равновесия** называется такое положение системы в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю:

$$\mathbf{v}_\nu |_{t=0} = 0, \quad \mathbf{r}_\nu |_{t=0} = \mathbf{r}_\nu^0 \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

Положение системы  $\mathbf{r}_\nu^0$  будет оставаться положением равновесия в том и только в том случае, когда «движение»  $\mathbf{r}_\nu(t) \equiv \mathbf{r}_\nu^0$  удовлетворяет общему уравнению динамики, которое с учетом  $\mathbf{v}_\nu \equiv \dot{\mathbf{r}}_\nu \equiv 0$  имеет вид:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\sum_{\nu=1}^N \delta A(\mathbf{F}_\nu) = 0}$$

Это равенство выражает собой

**Принцип виртуальных перемещений (принцип Лагранжа).** Для того, чтобы некоторое (совместимое со связями) положение системы действительно было ее состоянием равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил приложенных к системе на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.

Данный принцип представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы.

Обычно принцип виртуальных перемещений применяют к стационарным связям. В таком случае термин «совместимое со связями» означает, что положение системы удовлетворяет конечным связям (геометрическим):  $f_\alpha(\mathbf{r}_\nu) = 0$  ( $\alpha = 1, \dots, g$ ). Дифференциальные же связи, будучи линейными и однородными уравнениями относительно скоростей, удовлетворяются тождественно, ибо полагаем  $\mathbf{v}_\nu \equiv 0$ . Более того, для таких склерономных систем виртуальные перемещения совпадают с возможными, потому в таких ситуациях этот принцип называется «**принципом возможных перемещений**».

Если связи нестационарны, то термин «совместимые со связями» означает, что уравнения связи удовлетворяются при любом  $t$ , если в них положить  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^0$ ,  $\mathbf{v}_\nu = 0$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ). Заметим, что в этом случае, при различных  $t$ , могут быть различными и виртуальные перемещения  $\delta \mathbf{r}_\nu$ . Ну а т.к. в общем случае  $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$ , то предполагается, что принцип виртуальных перемещений имеет место при любом  $t$ , если положить все  $\mathbf{r}_\mu = \mathbf{r}_\mu^0$ ,  $\mathbf{v}_\mu = 0$ .

**Пример:** «Правило рычага» — «Золотое правило механики» — выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот.



Рис. 82.

Стержень — невесомый, опирается на неподвижный упор.  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  — силы, перпендикулярные стержню, приложены в разных концах. Направления векторов указаны на рис. 82.

$\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2$  — возможные перемещения соответствующих концов, направленные перпендикулярно стержню (по касательной к связям, представляющих собой окружности радиусов  $l_1$  и  $l_2$ ). Модули возможных перемещений:  $\delta r_1 = l_1 \delta \varphi$ ,  $\delta r_2 = l_2 \delta \varphi$ , где  $\delta \varphi$  — возможный поворот вокруг упора.

Связь — стационарная, значит виртуальные и возможные перемещения совпадают. Согласно принципу возможных перемещений:

$$\mathbf{F}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{r}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 \delta r_1 - F_2 \delta r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta r_1}{\delta r_2} = \frac{l_1 \delta \varphi}{l_2 \delta \varphi} = \frac{l_1}{l_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_1}{l_2}}$$

## ЛЕКЦИЯ 19

### ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И СИЛЫ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. ВИРТУАЛЬНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ.

Как мы убедились раньше основную задачу динамики системы (несвободной) очень удобно решать, разделив на 2 более простые:

1. задачу определения только движения при заданных силах и связях (из принципа Даламбера-Лагранжа при идеальных связях):  $\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$ ;
2. задачу нахождения неизвестных реакций связей (идеальных) по уже найденному движению:  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{F}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ).

Вместе с тем общее уравнение динамики несвободной системы обладает рядом существенных недостатков (зависит от числа точек системы ...). Оказывается можно построить уравнения движения, не содержащие реакций, и свободные от указанных недостатков на основе введения обобщенных координат. Далее будем рассматривать самый простейший тип систем – голономных, т.е. с геометрическими связями на положения системы.

Итак, рассмотрим движение голономной системы  $N$  материальных точек  $P_\nu$  с радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$  относительно некоторой инерциальной системы отсчета, при наличии  $g$  ( $g < 3N$ ) геометрических связей:

$$f_\alpha(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g) \quad (33)$$

Функции  $f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  предполагаются достаточно гладкими и независимыми так что функциональная матрица  $J'$ , составленная из частных производных от этих функций по координатам, имеет ранг  $g$ :

$$J' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial x_1} & \frac{\partial f_g}{\partial y_1} & \frac{\partial f_g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial x_N} & \frac{\partial f_g}{\partial y_N} & \frac{\partial f_g}{\partial z_N} \end{pmatrix} \Leftrightarrow J' = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu^i} \right), \quad \boxed{\text{rang } J' = g} \quad (34)$$

В силу наличия геометрических связей координаты точек системы связаны  $g$  соотношениями (33), поэтому среди  $3N$  координат независимыми будет только  $3N - g$  штук. Это число независимых координат голономной системы совпадает с ее числом степеней свободы  $n$ . Уравнения связей в силу (34) позволяют выразить зависимые координаты через  $n = 3N - g$  независимых координат и время  $t$  так, что эти независимые координаты определяют положение механической системы в каждый момент времени. Очевидно, что подстановка этих выражений в уравнения связей обращает последние в тождества по времени и независимым координатам. Однако положение системы не обязательно определять независимыми декартовыми координатами. Для этой цели можно, а иногда и удобнее, использовать  $n$  других независимых параметров  $\{q_1, \dots, q_n\}$ , в каждый момент связанных взаимно однозначно с независимыми декартовыми координатами. Тогда функциями этих параметров и времени  $t$  будут и зависимые декартовы координаты, т.е. все  $3N$  координат:

$$x_\nu = x_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \quad y_\nu = y_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \quad z_\nu = z_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

Эти равенства эквивалентны соответствующим векторным равенствам:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_1, \dots, q_n) \quad (35)$$

Скалярные функции  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ , а следовательно и векторные функции, предполагаются достаточно гладкими по  $q_\sigma$  (дважды непрерывно-дифференцируемы).

Итак, в каждый момент времени  $t$ ,  $n$  независимых величин  $\{q_1, \dots, q_n\}$  определяют декартовы координаты всех точек и тем самым определяют положение системы. Поэтому эти величины называют **обобщенными координатами системы**. Они могут быть величинами различной природы: расстояниями (длинами), углами, площадями и т.д. Важно только соблюдать основное требование: они должны быть независимыми друг относительно друга и находиться во взаимно-однозначном соответствии с независимыми декартовыми координатами. Последнее условие, в частности, означает что ранг матрицы составленной из частных производных от декартовых координат по обобщенным координатам равен числу степеней свободы системы  $n$  (т.е. количеству обобщенных координат):

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial q_1 & \dots & \partial x_1/\partial q_n \\ \partial y_1/\partial q_1 & \dots & \partial y_1/\partial q_n \\ \partial z_1/\partial q_1 & \dots & \partial z_1/\partial q_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial z_N/\partial q_1 & \dots & \partial z_N/\partial q_n \end{pmatrix} = n$$

Будем предполагать, что обобщенные координаты  $\{q_1, \dots, q_n\}$  выбраны так, чтобы любое возможное положение системы (т.е. совместимое со связями в данный момент времени) могло быть получено из (35) при некоторых конкретных значениях величин  $\{q_1, \dots, q_n\}$ . Если это сделать нельзя сразу для всех возможных положений, то обобщенные координаты вводятся локально, т.е. для разных совокупностей возможных положений – вводятся разные системы обобщенных координат. Поскольку уравнения связей обращались в тождества по независимым декартовым координатам и времени, а последние связаны взаимно-однозначно с обобщенными координатами, то уравнения связи также будут тождествами и по обобщенным координатам и времени. Другими словами, подстановка (35) в уравнения (33) приводит к следующему тождеству:

$$f_\alpha(t, q_1, \dots, q_n) \equiv 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g)$$

Следствием этих тождеств будут важные для дальнейшего равенства:

$$\boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\sigma} = 0} \quad (\alpha = 1, \dots, g, \sigma = 1, \dots, n) \quad (36)$$

Если все связи стационарны (т.е. склерономная система), то время  $t$  не входит явно в уравнения связей (33). В этом случае можно так ввести обобщенные координаты, чтобы и в уравнения (35) время  $t$  также не входило:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \dots, q_n)$$

В дальнейшем предполагается, чтобы для склерономной системы обобщенные координаты всегда выбраны именно таким образом.

При движении механической системы изменяются со временем координаты ее точек – как независимые, так и зависимые. В силу связи между независимыми декартовыми и обобщенными координатами последние также будут функциями времени:

$$q_\sigma = q_\sigma(t) \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (37)$$

Их называют **уравнения движения механической системы в обобщенных координатах**. Функции  $q_\sigma(t)$  считаем дважды непрерывно-дифференцируемыми. Это условие обеспечивается соответствующей гладкостью функций, связывающих обобщенные и декартовы координаты.

## Координатное пространство

Для каждого момента времени  $t$  между возможными положениями системы и точками  $n$ -мерного пространства  $\{q_1, \dots, q_n\}$  устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Такое пространство называют **координатным пространством** (или **пространством конфигураций**). Каждому возможному положению системы отвечает некоторая точка координатного пространства, которая называется **изображающей точкой**. Движению системы соответствует движение изображающей точки в координатном пространстве. Близость точек координатного пространства определяется естественным образом через близость соответствующих положений системы.

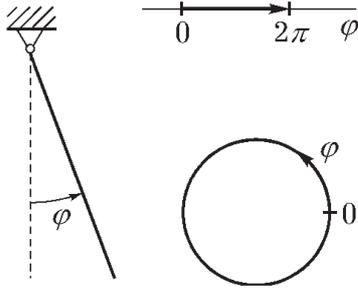


Рис. 83.

**Пример** (Маятник). Положение маятника, являющимся твердым стержнем, подвешенным за один конец к неподвижному шарниру, задается углом  $\varphi$ , который примем за обобщенную координату (рис. 83). Поставим в соответствие каждому положению маятника точку на числовой оси, имеющую координату  $\varphi$ . Но такое соответствие между положениями маятника и точками числовой оси не будет взаимно-однозначным, т.к. разным точкам оси  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) соответствует одно и то же положение маятника. Однозначности можно добиться, выделив на числовой оси полуоткрытый интервал  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Но при этом нарушается непрерывность соответствия, т.к. два близких положения маятника, для которых  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi - \varepsilon$  не будут соответствовать близким точкам на полуинтервале. Для восстановления непрерывности необходимо считать  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  — тождественными. Наглядно это можно сделать «склеив» эти точки, получив таким образом окружность — координатное пространство.

Для восстановления непрерывности необходимо считать  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  — тождественными. Наглядно это можно сделать «склеив» эти точки, получив таким образом окружность — координатное пространство.

## Виртуальный дифференциал

Получим зависимость между виртуальными перемещениями  $\delta \mathbf{r}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ) точек системы через вариации обобщенных координат  $\delta q_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Напомним, что виртуальным перемещением системы  $\delta \mathbf{r}_\nu$  называется любое элементарное перемещение которое может быть сообщено точкам системы из занимаемого ею в данный момент времени  $t^*$  возможного положения  $\mathbf{r}_\nu^*$  (т.е. совместимого со связями:  $f_\alpha(t^*, \mathbf{r}_\nu^*) = 0$  ( $\alpha = 1, \dots, g$ )) в другое бесконечно близкое возможное:  $\mathbf{r}_\nu^* + \delta \mathbf{r}_\nu$  при сохранении всех наложенных связей в тот же «зафиксированный» момент времени  $t^*$ , т.е.  $\delta \mathbf{r}_\nu$  удовлетворяет условию:

$$f_\alpha(t^*, \mathbf{r}_\nu^* + \delta \mathbf{r}_\nu) = 0$$

Отсюда по формуле Тейлора имеем (с точностью до членов 2-го порядка малости относительно  $\delta \mathbf{r}_\nu$ ):

$$f_\alpha(t^*, \mathbf{r}_\nu^*) + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}(t^*, \mathbf{r}_\nu^*) \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

Первое слагаемое равно нулю (т.к.  $\mathbf{r}_\nu^*$  — возможное положение в момент  $t^*$ ), тогда имеем систему линейных алгебраических уравнений на виртуальные перемещения системы, совпадающее с определением виртуального перемещения из лекции 2:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu}(t^*, \mathbf{r}_\nu^*) \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

Если теперь рассуждать с точки зрения функции обобщенных координат  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_\sigma)$ , тогда возможное положение  $\mathbf{r}_\nu^*$  системы в момент времени  $t^*$  соответствует определенным «возможным» значениям обобщенных координат  $\{q_1^*, \dots, q_n^*\}$ , т.е.

$$\mathbf{r}_\nu^* = \mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^*) \quad \text{и} \quad f_\alpha(t^*, \mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^*)) = 0$$

Рассмотрим вариации обобщенных координат  $\{\delta q_\sigma\}$  – т.е. элементарные приращения независимых обобщенных координат  $\{q_\sigma\}$ , получая которые система будет находиться в другом возможном для этого момента времени  $t^*$  положении, т.е. в которое перейдет получив виртуальное перемещение  $\delta \mathbf{r}_\nu$ :

$$\mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^* + \delta q_\sigma) = \mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^*) + \delta \mathbf{r}_\nu$$

Т.к. зависимость  $\mathbf{r}_\nu$  от  $q_\sigma$  - гладкая достаточно, то можно записать

$$\mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^* + \delta q_\sigma) = \mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^*) + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma}(t^*, q_\sigma^*) \delta q_\sigma$$

с точностью до величин 2-го порядка малости по  $\delta q_\sigma$ . Тогда сравнивая левые части последних двух соотношений получим выражение виртуального перемещения системы в момент  $t^*$  из возможного положения  $\mathbf{r}_\nu^* = \mathbf{r}_\nu(t^*, q_\sigma^*)$  – через вариации обобщенных координат:

$$\delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma}(t^*, q_\sigma^*) \delta q_\sigma$$

Вообще, выражение

$$\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}(t^*, q_\sigma^*) \delta q_\sigma = \delta f$$

называется **виртуальным дифференциалом** некоторой функции  $f(t, q_\sigma)$  в точке  $(t^*, q_\sigma^*)$  (здесь  $f$  - векторная или скалярная функция), т.е. дифференциалом при фиксированном («замороженном») времени. Напомним, что дифференциалом (обычным) функции  $f(t, q_\sigma)$  в точке  $(t^*, q_\sigma^*)$  называется главная линейная часть приращения этой функции обусловленная приращением её аргументов на  $(dt, dq_\sigma)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}(t^*, q_\sigma^*) dt + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}(t^*, q_\sigma^*) dq_\sigma$$

При фиксировании времени, т.е. при «замораживании», или придания стационарного характера, связи, что соответствует понятию виртуального перемещения, первое слагаемое в определении дифференциала исчезает. Иначе говоря, виртуальные дифференциалы радиус-векторов  $\mathbf{r}_\nu(t, q_\sigma)$  являются виртуальными перемещениями точек голономной системы. Более того, для любой функции  $\varphi(t, q_\sigma)$  – её вариация (т.е. её виртуальный дифференциал) выражается через вариации обобщенных координат в виде:

$$\delta \varphi = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma}(t^*, q_\sigma^*) \delta q_\sigma$$

## Обобщенные силы

Каждой координате  $q_\sigma$  соответствует своя **обобщенная сила**  $Q_\sigma$ , определяемая выражением:

$$Q_\sigma = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma}$$

Обстоятельства, позволяющие называть данные выражения обобщенными силами происходит из понятия элементарной работы активных сил, действующих на систему, на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n \left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n Q_\sigma \delta q_\sigma$$

т.е. в выражении работы величины  $Q_\sigma$  являются коэффициентами при вариациях  $\delta q_\sigma$  (т.е. при элементарных приращениях) обобщенных координат, допускаемых связями, подобно тому, как обычные силы служат коэффициентами при вариациях декартовых координат. Из этого выражения также ясно, что размерность обобщенной силы  $Q_\sigma$  определяется размерностью соответствующей обобщенной координаты  $q_\sigma$ . Она должна быть такой, что произведение  $Q_\sigma \delta q_\sigma$  имело размерность работы. Если  $q_\sigma$  – длина (расстояние), то  $Q_\sigma$  – обычная сила, если угол – момент силы.

Заметим, что для практического вычисления силы  $Q_\sigma$  вместо общей формулы в ряде случаев удобнее применять следующий прием: системе придают такое виртуальное перемещение, при котором получает приращение только координата  $q_\sigma$ , а остальные координаты сохраняются неизменными. Тогда виртуальная работа активных сил, т.е. работа на виртуальном перемещении, выбранном таким специальным образом, будет:  $\delta A = Q_\sigma \delta q_\sigma$ , откуда сила находится в виде:  $Q_\sigma = \delta A / \delta q_\sigma$ .

Отметим еще, что при исследовании конкретных задач механики очень часто нет необходимости составлять уравнения связей (33). Из физической сущности задачи обычно ясно, как надо выбрать обобщенные координаты в таком количестве, которое необходимо и достаточно для задания возможных положений системы (т.е. удовлетворяющих уравнениям связей).

### Равновесие системы в обобщенных координатах

Пусть некоторое положение системы является положением равновесия. Согласно принципу виртуальных перемещений это возможно тогда и только тогда, когда в этом положении виртуальная работа активных сил равна нулю:

$$\delta A = \sum_{\sigma=1}^n Q_\sigma \delta q_\sigma = 0$$

Но приращения  $\delta q_\sigma$  независимых координат могут быть совершенно произвольные. Поэтому равенство эквивалентно системе равенств – **уравнения равновесия системы в обобщенных координатах**

$$Q_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Т.е. положение равновесия голономной системы достигается тогда и только тогда, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю.

## Потенциальные силы

Рассмотрим важный частный случай сил. Если обобщенные силы не зависят от обобщенных скоростей:  $Q_\sigma = Q_\sigma(t, q_1, \dots, q_n)$  и существует функция  $\Pi(t, q_1, \dots, q_n)$  такая, что

$$\boxed{Q_\sigma = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

то силы  $Q_\sigma$  называются **потенциальными**, а функция  $\Pi$  - **потенциалом (сил)** или **потенциальной энергией**. Для потенциальных сил виртуальная работа имеет выражение:

$$\delta A = \sum_{\sigma=1}^n Q_\sigma \delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n \left( -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = -\delta \Pi$$

т.е. равна взятому со знаком минус виртуальному дифференциалу от потенциала (время предварительно фиксируется). Заметим, что если потенциальны обычные активные силы:

$\mathbf{F}_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_\nu}$ , то потенциальными будут и обобщенные силы. Действительно:

$$Q_\sigma = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = - \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$$

и потенциал обобщенных сил получается из исходного потенциала простой заменой переменных:  $\Pi(t, q_\sigma) = \Pi(t, \mathbf{r}_\nu(t, q_\sigma))$ . Обратное утверждение - вообще говоря, неверно.

Тогда **уравнения равновесия системы с потенциальными силами** имеют вид:

$$\boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} = 0}$$

Следовательно, положение равновесия доставляет экстремум потенциала сил по обобщенным координатам (здесь уже появилось свойство экстремальности).

## ЛЕКЦИЯ 20

### УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек  $P_\nu$ , положение которых в инерциальной системе отсчета определяется радиус-векторами  $\mathbf{r}_\nu(t)$  ( $\nu = 1, \dots, N$ ). Если система несвободна, то наложенные на нее связи предполагаются удерживающими и идеальными. Пусть  $\delta\mathbf{r}_\nu$  - виртуальное перемещение точки  $P_\nu$ ,  $m_\nu$  - масса,  $\mathbf{a}_\nu$  - ускорение,  $\mathbf{F}_\nu$  - равнодействующая всех активных сил, приложенных к  $P_\nu$ . Тогда имеет место общее уравнение динамики системы

$$\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu) \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad (38)$$

В том случае, когда все или некоторые из связей не идеальны, к величинам  $\mathbf{F}_\nu$  следует добавить часть  $\mathbf{G}_\nu$  равнодействующей реакций связей, действующей на  $P_\nu$ , которая не удовлетворяет условию идеальности. После этого изучаемую систему можно формально рассматривать как систему с идеальными связями.

Общее уравнение динамики мы принимаем за исходное при получении основных дифференциальных уравнений аналитической динамики. Фактически все изучаемые дальше уравнения движения материальных систем являются только разными формами записи уравнения (38), к которым оно приводится при тех или иных предположениях о характере активных сил, действующих на систему, и о наложенных на нее связях.

Пусть система голономная, т.е. имеются только геометрические связи в количестве  $g$  штук:

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, g)$$

Пусть  $q_1, \dots, q_n$  - обобщенные координаты, где  $n = 3N - g$  - число степеней свободы системы. Тогда радиус-векторы  $\mathbf{r}_\nu$  точек  $P_\nu$  системы относительно начала инерциальной системы координат записываются в виде функций аргументов  $\{q_1, \dots, q_n, t\}$ , которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Если система склерономна (стационарные связи), то обобщенные координаты  $q_\sigma(t)$  можно выбрать так, чтобы  $\mathbf{r}_\nu$  не зависели от  $t$ . Тогда:

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \quad \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma$$

Запишем общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\sigma=1}^n Q_\sigma \delta q_\sigma$$

где  $Q_\sigma = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma}$  - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_\sigma$ .

Преобразуем выражение для элементарной работы сил инерции на виртуальном перемещении. Пользуясь указанными выше формулами, имеем

$$-\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = -\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^n \left( \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma$$

Но выражение в скобках преобразуется к виду:

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\mathbf{v}_{\nu}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \right) - \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \quad (39)$$

Вспоминая указанное выше выражение для скорости  $\mathbf{v}_{\nu}$  легко установить:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}}}$$

Кроме того

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left( \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\rho}} \dot{q}_{\rho} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right) = \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma} \partial q_{\rho}} \dot{q}_{\rho} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma} \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}}}$$

После подстановки двух последних равенств в (39) получим:

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\mathbf{v}_{\nu}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \right) - \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\sigma}}$$

где обозначено  $\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}^2}$  – **кинетическая энергия системы**.

Таким образом получили выражение для элементарной работы сил инерции в виде:

$$- \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} = - \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\sigma}} \right) \delta q_{\sigma}$$

Тогда подставляя выражения работ активных сил и сил инерции в обобщенных координатах в общее уравнение динамики получим (умножая на  $-1$ ):

$$\boxed{\sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\sigma}} - Q_{\sigma} \right) \delta q_{\sigma} = 0} \quad \text{общее уравнение динамики в обобщенных координатах}$$

Т.к.  $q_{\sigma}$  – независимые координаты, поэтому  $\delta q_{\sigma}$  – совершенно произвольные приращения координат, независимые друг от друга. Таким образом в силу независимости  $\delta q_{\sigma}$  уравнение будет удовлетворяться тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при всех  $\delta q_{\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Поэтому общее уравнение динамики в обобщенных координатах эквивалентно системе уравнений:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\sigma}} = Q_{\sigma}} \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad \text{Уравнения Лагранжа второго рода}$$

Величины  $\dot{q}_{\sigma}$  – называются **обобщенными скоростями**. Аналогично  $\ddot{q}_{\sigma}$  – **обобщенные ускорения**.

Скорости точек  $\mathbf{v}_{\nu}$ , в выражении кинетической энергии системы, являются линейными функциями по обобщенным скоростям  $\dot{q}_{\sigma}$  и конечно еще зависят от времени  $t$  и обобщенных координат  $q_{\sigma}$ , т.е.  $\mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu}(t, q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma})$ , следовательно  $T = T(t, q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma})$ . В левые части уравнений Лагранжа после выполнения операции дифференцирования по времени

$\frac{d}{dt}$  входят  $t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma, \ddot{q}_\sigma$ . Обобщенные силы, стоящие в правых частях уравнений Лагранжа обычно задаются как функции  $t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma$ :

$$Q_\sigma = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma}, \quad \mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu), \quad \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_\rho), \quad \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu(t, q_\rho, \dot{q}_\rho) \rightarrow \underline{Q_\sigma = Q_\sigma(t, q_\rho, \dot{q}_\rho)}$$

### Преимущества уравнений Лагранжа второго рода

- Уравнения Лагранжа II рода образуют систему из  $n$  обычных дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $n$  неизвестных функций  $q_\sigma(t)$ . Порядок этой системы равен  $2n$ . И это наименьший возможный порядок дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы с  $n$  степенями свободы, так как в силу произвольности начальных значений величин  $q_\sigma, \dot{q}_\sigma$  решение системы должно содержать, по крайней мере,  $2n$  произвольных постоянных.
- Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию системы через обобщенные координаты и скорости  $T$ , найти обобщенные силы  $Q_\sigma$  и произвести последовательно все указанные дифференцирования. Общее же количество получаемых уравнений движения системы не зависит от числа материальных точек системы, а определяются только числом степеней свободы.
- Форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ . При другом их выборе изменяются только функции  $T$  и  $Q_\sigma$ , а сам вид уравнений остается тот же. В этой связи говорят, что уравнения Лагранжа II рода обладают свойством универсальности.
- Однако, главным преимуществом является то, что они не содержат реакций идеальных связей и служат для определения одного лишь движения:  $q_\sigma = q_\sigma(t)$ . Если же нужно найти реакции, то после интегрирования уравнений Лагранжа надо подставить найденные функции  $q_\sigma(t)$  в выражения  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q_1(t), \dots, q_n(t)) = \mathbf{r}_\nu(t)$  и определить ускорения:  $\mathbf{a}_\nu = \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2}$ . Тогда равнодействующая реакций  $\mathbf{R}_\nu$ , приложенных к точке  $P_\nu$  найдется из соотношений:  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{F}_\nu$ . В случае же свободной системы материальных точек уравнения Лагранжа представляют собой компактную запись уравнений движения в произвольной системе координат.

### Анализ выражения кинетической энергии (в обобщенных координатах)

Рассмотрим структуру выражения для кинетической энергии системы, записанной через обобщенные координаты и скорости:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left[ \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \right)^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

или в сокращенной записи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho + \sum_{\sigma=1}^n a_\sigma \dot{q}_\sigma + a_0$$

где введены обозначения для коэффициентов  $a_{\sigma\rho}$ ,  $a_\sigma$ ,  $a_0$  функций от  $\{t, q_1, \dots, q_n\}$

$$a_{\sigma\rho} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\rho}, \quad a_\sigma = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right)^2$$

Причем, как нетрудно видеть:  $a_{\sigma\rho} = a_{\rho\sigma}$ , т.е. симметричные по нижним индексам.

Данная формула  $T$  показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой функцию (многочлен) второй степени относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma$  и представима в виде:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho, \quad T_1 = \sum_{\sigma=1}^n a_\sigma \dot{q}_\sigma, \quad T_0 = a_0$$

однородные функции

относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma$

$T_2$  – квадратичная форма,  $T_1$  – линейная форма,  $T_0$  – нулевой степени форма

В случае склерономной системы (стационарные связи) время не входит в уравнение связи и в выражение  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \dots, q_n)$  тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} = 0 \Rightarrow a_\sigma = a_0 = 0 \Rightarrow T_1 = T_0 = 0 \Rightarrow T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho$$

т.е. кинетическая энергия склерономной системы является однородной функцией второй степени (квадратичной формой) от обобщенных скоростей.

Заметим, что у произвольной (склерономной или реаномной) голономной системы форма  $T_2$  является всегда невырожденной, т.е. определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля:

$$\det \| a_{\sigma\rho} \|_{\sigma, \rho=1}^n \neq 0$$

В самом деле, из того, что квадратичная форма  $T_2$  может быть записана в виде:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \right)^2$$

сразу следует, что  $T_2 \geq 0$ , т.е. неотрицательна. Докажем теперь, что она может обратиться в нуль только тогда и, когда все  $\dot{q}_\sigma = 0$  т.е. в покое. Допустим, что это не так, т.е. что  $T_2$  может равняться нулю при некоторых значениях обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma^*$  среди которых есть отличные от нуля. Тогда очевидно каждое выражение в скобках в этой форме в этой формуле должно обратиться в нуль, т.е.

$$\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma^* = 0 \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

Или в скалярной форме  $N$  векторных равенств запишутся в виде  $3N$  равенств:

$$\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma^* = 0, \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma^* = 0, \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial z_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma^* = 0$$

Эти равенства показывают, что в якобиевой функциональной матрице размерами  $3N \times n$  (где  $n = 3N - g \leq 3N$ )

$$A = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial q_1 & \dots & \partial x_1 / \partial q_n \\ \partial y_1 / \partial q_1 & \dots & \partial y_1 / \partial q_n \\ \partial z_1 / \partial q_1 & \dots & \partial z_1 / \partial q_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial z_N / \partial q_1 & \dots & \partial z_N / \partial q_n \end{pmatrix}$$

столбцы линейно зависимы, т.е. ранг этой матрицы меньше  $n$ :  $\text{rang } A = m < n$ . В противном случае однородная система линейных алгебраических уравнений имела бы единственное решение  $q_\sigma^* \equiv 0$ . Но тогда среди  $3N$  функций  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  от  $n$  аргументов  $q_1, \dots, q_n$  ( $t$  рассматриваем как параметр) имеется  $m$  независимых, через которое могут быть выражены все остальные декартовы координаты точек системы. Мы пришли к противоречию, т.к. минимальное число независимых координат системы равно  $n$ , (а  $m < n$ ).

Таким образом квадратичная форма  $T_2$  является положительно-определенной:  $T_2 \geq 0$ , что будет нами неоднократно использоваться в дальнейшем, причем равенство нулю ( $T_2 = 0$ ) может быть только когда все  $\dot{q}_\sigma = 0$ . Можно еще сказать, что  $T_2$  – это кинетическая энергия при «замороженных» связях. Из критерия Сильвестра тогда следуют детерминантные неравенства для главных диагональных миноров  $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho$ :

$$\det \| a_{\sigma\rho} \|_{\sigma\rho=1}^l > 0 \quad \forall l \in 1, \dots, n$$

$$\text{т.е. } a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

### Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных скоростей

Используя структуру выражения кинетической энергии:  $T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho + \sum_{\sigma=1}^n a_\sigma \dot{q}_\sigma + a_0$  после подстановки в уравнения Лагранжа получим:

$$\sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma\rho} \ddot{q}_\sigma + (***) = Q_\rho(t, q_i, \dot{q}_i) \quad (\rho = 1, \dots, N)$$

где через (\*\*\*) обозначена сумма членов не содержащих обобщенных ускорений  $\ddot{q}_\sigma$ . Правые части, т.е. обобщенные силы также не содержат обобщенных ускорений - являются функциями  $t, q_i, \dot{q}_i$ . Переноса (\*\*\*) вправо получим

$$\sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma\rho} \ddot{q}_\sigma = g_\rho(t, q_i, \dot{q}_i) \quad (\rho = 1, \dots, N)$$

т.к.  $\det \| a_{\sigma\rho} \|_{\sigma\rho=1}^n > 0$ , то эти уравнения можно разрешить относительно  $\ddot{q}_\sigma$  и представить в виде

$$\frac{d\dot{q}_\sigma(t)}{dt} = G_\sigma(t, q_i, \dot{q}_i) \quad (\sigma = 1, \dots, N)$$

Добавляя к ним условия

$$\frac{dq_\sigma(t)}{dt} = \dot{q}_\sigma(t) \quad (\sigma = 1, \dots, N)$$

для получения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. первой степени) при ограничениях относительно  $G_\sigma(t, q_i, \dot{q}_i)$  (существование непрерывных частных производных первого порядка у функций  $G_\sigma$ ) система уравнений имеет единственное решение при произвольных заданных начальных данных:

$$q_i = q_i^0, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^0 \quad \text{при} \quad t = t_0$$

Таким образом движение голономной системы однозначно определяется заданием начального положения ( $q_i^0$ ) и начальных скоростей ( $\dot{q}_i^0$ ).

### Теорема об изменении полной механической энергии (голономной системы)

В прошлый раз мы рассмотрели частный случай сил, действующих на систему – потенциальных. Т.е. если обобщенные силы не зависят от обобщенных скоростей:  $Q_\sigma = Q_\sigma(t, q_1, \dots, q_n)$  и существует (скалярная) функция  $\Pi(t, q_1, \dots, q_n)$  такая, что  $Q_\sigma = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$ , то силы  $Q_\sigma$  – потенциальны, и  $\Pi$  – потенциал или потенциальная энергия. Работа же на виртуальном перемещении определялась как:

$$\delta A = \sum_{\sigma} Q_\sigma \delta q_\sigma = \sum_{\sigma} -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = -\delta \Pi$$

где  $\delta \Pi$  – виртуальный дифференциал. Рассмотрим теперь более общий случай, когда помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом  $\Pi$ , на систему действуют еще и непотенциальные силы  $\tilde{Q}_\sigma = \tilde{Q}_\sigma(t, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ), тогда

$$Q_\sigma = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} + \tilde{Q}_\sigma$$

и уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} + \tilde{Q}_\sigma$$

Введем в рассмотрение **полную механическую энергию системы**:

$$E = T + \Pi$$

и найдем ее изменение с течением времени, т.е. определим  $\frac{dE}{dt}$ . Для начала найдем

$$\frac{d}{dt} T(t, q_i, \dot{q}_i) = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \ddot{q}_\sigma \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) - \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \right) \dot{q}_\sigma + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Далее воспользуемся теоремой Эйлера об однородных функциях, согласно которой для однородной функции  $n$  переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$   $k$ -ой степени ( $k \leq n$ ) вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_k=1}^n a_{\sigma_1, \dots, \sigma_k} x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_k}$$

справедливо равенство:

$$\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} \cdot x_\sigma = k f$$

Применяя эту формулу к линейной  $T_1$  и квадратичной  $T_2$  формам кинетической энергии находим:

$$\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma = T_1, \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma = 2T_2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial(T_2 + T_1 + T_0)}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma = 2T_2 + T_1$$

Используя еще уравнения Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) - \sum_{\sigma=1}^n \left( -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} + \tilde{Q}_\sigma \right) \dot{q}_\sigma + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt}(2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma - \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= 2 \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Отсюда окончательно имеем **теорему** (формулу) **об изменении полной механической энергии при движении произвольной голономной системы**:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \tilde{N} + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}}$$

Здесь  $\tilde{N} = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma$  называется **мощностью непотенциальных сил**.

*Важные частные случаи теоремы об изменении полной механической энергии голономной системы*

1. Система – склерономна  $\Rightarrow T_1 = T_0 = 0$  и  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \tilde{N} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}}$

2. Система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \tilde{N}}$$

3. Система (голономная) – **консервативная**:

- склерономна

- все силы потенциальны  $\Rightarrow \tilde{N} = \tilde{Q}_\sigma = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$

- потенциал не зависит явно от  $t$

т.е. полная механическая энергия консервативной системы не изменяется при движении системы. Отсюда вытекает **интеграл энергии** или **закон сохранения энергии** (полной механической энергии  $E = T + \Pi$  для консервативной системы)

$$\boxed{E = T + \Pi = \text{const} = h}$$

Данное равенство не содержит ускорений  $\ddot{q}_\sigma$  и включает произвольную постоянную  $h$ , следовательно, определяет первый интеграл уравнений движения.

## ЛЕКЦИЯ 21

### ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ. ДИССИПАТИВНЫЕ СИЛЫ (ФУНКЦИЯ РЕЛЕЯ). НАТУРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Непотенциальные силы  $\tilde{Q}_\sigma$  называют **гироскопическими**, если их мощность равна нулю:

$$\tilde{N} = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma = 0$$

Из теоремы об изменении полной механической энергии  $E = T + \Pi$  следует, что для склерономной системы (связи стационарны  $\Rightarrow T_1 = T_0 = 0$  т.е.  $T = T_2$  и  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ), у которой потенциал не зависит явно от времени ( $\partial \Pi / \partial t = 0$ ) имеем

$$\frac{dE}{dt} = \tilde{N}$$

Следовательно интеграл энергии:  $E = \text{const}$  — существует и при гироскопических силах.

Рассмотрим важный частный случай непотенциальных сил  $\tilde{Q}_\sigma$ , которые, вообще говоря, зависят от скоростей  $\dot{q}_\sigma$ , вид линейных и однородных функций:

$$\tilde{Q}_\sigma = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\sigma\rho} \dot{q}_\rho$$

Матрицу, составленную из коэффициентов  $\gamma_{\sigma\rho}$  будем считать *кососимметрической*:

$$\gamma_{\sigma\rho} = -\gamma_{\rho\sigma}$$

Тогда силы – гироскопические. Действительно, в этом случае имеем (замечая, что диагональные элементы:  $\gamma_{\sigma\sigma} = 0$ )

$$\tilde{N} = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma = \sum_{\sigma,\rho=1}^n \gamma_{\sigma\rho} \dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n \gamma_{\sigma\sigma} \dot{q}_\sigma^2 + \sum_{\sigma < \rho}^{1, \dots, n} (\gamma_{\sigma\rho} + \gamma_{\rho\sigma}) \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho = 0$$

Более того, последнее равенство показывает, что это условие кососимметричности матрицы коэффициентов  $\gamma_{\sigma\rho}$  является еще и необходимым (в силу независимости обобщенных координат и соответственно скоростей друг от друга), чтобы силы, приложенные к склерономной системе были гироскопическими.

Прежде чем рассмотреть пример обратим внимание на следующее. Справедливо равенство:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \right) = \sum_{\sigma=1}^n \left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \right) \dot{q}_\sigma + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}$$

Замечая, что  $\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma$  и для склерономной системы  $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} = 0$ , имеем:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu = \sum_{\sigma=1}^n Q_\sigma \dot{q}_\sigma = \dot{E}$$

Таким образом, в случае склерономной системы условие  $\sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = 0$  выражает условие гироскопичности непотенциальных сил  $\tilde{\mathbf{F}}_{\nu}$  приложенных к точкам системы (в общем случае  $\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \cdot \left( \mathbf{v}_{\nu} - \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right) = \sum_{\sigma=1}^n Q_{\sigma} \dot{q}_{\sigma}$ , несмотря на то что  $\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \delta \mathbf{r}_{\nu} = \sum_{\sigma=1}^n Q_{\sigma} \delta q_{\sigma} = \delta A$ ).

**Пример 1:** Кориолисовы силы инерции для склерономной системы являются гироскопическими силами. Действительно:  $\mathbf{J}_{\nu}^c = -2m_{\nu}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu})$ , где  $m_{\nu}$  – масса  $\nu$ -ой точки,  $\mathbf{v}_{\nu}$  – ее скорость в неинерциальной системе координат,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения этой неинерциальной системы относительно некоторой инерциальной. Система движется в неинерциальной системе отсчета. Отсюда и возникают силы инерции Кориолиса. Для получения их мощности в неинерциальной системе отсчета надо силу  $\mathbf{J}_{\nu}^c$  умножить на относительную скорость  $\mathbf{v}_{\nu}$ .

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{J}_{\nu}^c \cdot \mathbf{v}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N -2m_{\nu}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu}) \cdot \mathbf{v}_{\nu} = 0$$

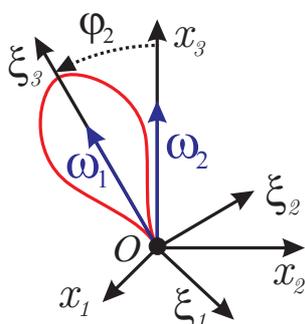


Рис. 84.

**Пример 2:** Покажем, что силы, приложенные к вращающемуся гироскопу, совершающему регулярную прецессию, являются гироскопическими (откуда и происходит термин «гироскопические силы»).

**Гироскопом** называется твердое тело, движущееся вокруг неподвижной точки  $O$  (рис.84), фиксированной в нем, для которой эллипсоид инерции тела является эллипсоидом вращения (волчок). Волчок вращается вокруг оси  $O\xi_3$  с **угловой скоростью собственного (чистого) вращения  $\omega_1$**  (ось  $O\xi_3$  неизменно связана с телом – **ось динамической симметрии**). При этом сама ось  $O\xi_3$  вращается вокруг пересекающей ее неподвижной оси  $Ox_3$  с **угловой скоростью прецессии  $\omega_2$**  (а само движение  $O\xi_3$  около  $Ox_3$  называется **прецессией**). Если движение волчка такое, что  $\omega_1 = \text{const}$  и  $\omega_2 = \text{const}$  то говорят, что волчок совершает **регулярную прецессию**. При этом угол нутации  $\varphi_2$  между осями  $O\xi_3$  и  $Ox_3$  тоже постоянен:  $\varphi_2 = \text{const}$ . Оказывается, что для обеспечения такого движения, главный момент сил относительно неподвижной точки вращения должен иметь вид:

$$\mathcal{M}_O = I_{\xi_3}(\omega_2 \times \omega_1) \quad - \quad \text{приближенная формула гироскопии}$$

где  $I_{\xi_3}$  – осевой момент инерции тела относительно оси  $O\xi_3$ . Если к телу приложена одна сила  $\mathbf{F}$ , то её момент относительно  $O$  равен:

$$\mathcal{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор приложения  $\mathbf{F}$ . Таким образом из этих двух формул можно находить  $\omega_2$  ( $\omega_1$ ) при знании всех остальных величин: силы  $\mathbf{F}$  и  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ).

Гироскоп, вращающийся вокруг неподвижной точки - склерономная система. Тогда работа сил приложенных к твердому телу:

$$\delta A = \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathcal{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt$$

(формула из первого семестра,  $\mathcal{F}$  – главный вектор сил) через формулу

$$\frac{\delta A}{dt} = N$$

определяет мощность сил, приложенных к телу (эта мощность для обычных сил совпадает с мощностью, определенной через обобщенные силы, т.к. для склерономной системы она совпадают). Учитывая, что  $\mathbf{v}_O = 0$  имеем:

$$\delta A = \mathcal{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = I_{\xi_3}(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) dt = 0$$

т.к.  $\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 \perp \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$  Таким образом, силы, обеспечивающие регулярную прецессию, т.е. создающие **гироскопический момент**  $\mathcal{M}_O = I_{\xi_3}(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)$  являются гироскопическими.

### Диссипативные силы (функция Релея)

Непотенциальные силы  $\tilde{\mathbf{Q}}_\sigma$  называются **диссипативными**, если их мощность отрицательна или равна нулю:

$$\tilde{N} \leq 0$$

(причем  $\tilde{N} \neq 0$ ). Из этой же теоремы об изменении полной механической энергии для склерономной системы, у которой потенциал  $\Pi$  не зависит явно от времени, следует, что при наличии диссипативных сил:

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

т.е. полная механическая энергия системы убывает во время движения. Иногда говорят, что происходит **рассеивание** или **диссипация энергии**. Отсюда и возник термин «диссипативные силы».

Пусть задана положительная квадратичная форма:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n b_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho \geq 0$$

причем матрица коэффициентов  $\|b_{\sigma\rho}\|$  является симметрической:  $b_{\sigma\rho} = b_{\rho\sigma}$  такая, что непотенциальные силы  $\tilde{\mathbf{Q}}_\sigma$  задаются соотношениями:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\sigma = -\frac{dR}{d\dot{q}_\sigma} = -\sum_{\rho=1}^n b_{\sigma\rho} \dot{q}_\rho \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Тогда для склерономной системы мощность таких сил равна:

$$\tilde{N} = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{\mathbf{Q}}_\sigma \cdot \dot{q}_\sigma = -\sum_{\sigma, \rho=1}^n b_{\sigma\rho} \dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma = -2R \leq 0$$

т.е. они являются диссипативными. Функция  $R$  называется **диссипативной функцией Релея**. Тогда из теоремы об изменении полной механической энергии для склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени:

$$\frac{dE}{dt} = -2R$$

Эта формула указывает на физический смысл функции Релея: удвоенная функция Релея равна скорости убывания полной механической энергии. Если функция Релея является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей ( $R > 0$ ), то говорят о полной диссипации энергии. У такой **определенно-диссипативной** системы энергия строго убывает.

**Пример:** Рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложены силы сопротивления среды, пропорциональные скорости этой точки:

$$\tilde{\mathbf{F}}_\nu = -k\mathbf{v}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

где  $k > 0$  Тогда мощность сил сопротивления:

$$\tilde{N} = \sum_{\nu=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu = -k \sum_{\nu=1}^N v_\nu^2 = -2R, \quad \text{где} \quad R = \frac{1}{2}k \sum_{\nu=1}^N v_\nu^2$$

### Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Обобщенный потенциал. Натуральные системы (и ненатуральные)

Пусть обобщенные силы  $Q_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) являются потенциальными. Т.е. пусть существует потенциал сил (потенциальная энергия)  $\Pi = \Pi(t, q_\sigma)$  и  $Q_\sigma = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$ . Тогда уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

и могут быть записаны в виде:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

где

$$\boxed{L = T - \Pi}$$

называют **функцией Лагранжа** или **кинетическим потенциалом** (т.к. потенциальная энергия  $\Pi$  не зависит от обобщенных скоростей, то  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$ , а  $\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$ ). Функция Лагранжа так же как и кинетическая энергия представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi = L_2 + L_1 + L_0$$

где

$$L_2 = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho, \quad L_1 = T_1 = \sum_{\sigma=1}^n a_\sigma \dot{q}_\sigma, \quad L_0 = T_0 - \Pi = a_0 - \Pi$$

где коэффициенты  $a_{\sigma\rho}$ ,  $a_\sigma$ ,  $a_0$  являются функциями от координат  $q_1, \dots, q_n$  и времени  $t$ .

Рассмотрим более общий случай сил – **обобщенно-потенциальных**, которые представляются в виде:

$$\boxed{Q_\sigma(t, q_\rho, \dot{q}_\rho) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma}} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

где  $V = V(t, q_\rho, \dot{q}_\rho)$  – называется **обобщенным потенциалом**. Тогда уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

также могут быть переписаны в однородном виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Но функция Лагранжа теперь:

$$L(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma) = T(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma) - V(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma)$$

При этом очевидно, что  $[L] = [T] - [V]$  - имеют размерность энергии. Установим структуру  $V$ . Из определения обобщенно-потенциальных сил

$$Q_\sigma(t, q_\rho, \dot{q}_\rho) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = \sum_{\rho=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \ddot{q}_\rho + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_\sigma \partial q_\rho} \dot{q}_\rho \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_\sigma \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Поскольку в механике мы рассматриваем только тот случай, когда обобщенные силы  $Q_\sigma$  не зависят явно от обобщенных ускорений, а лишь от времени, обобщенных координат и скоростей, значит все частные производные второго порядка по обобщенным скоростям должны быть тождественно равны нулю:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} = 0 \quad (\sigma, \rho = 1, \dots, n)$$

Т.е. обобщенный потенциал линейно зависит от обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma$ :

$$V = \sum_{\sigma=1}^n A_\sigma(t, q_\rho) \cdot \dot{q}_\sigma + V_0 = V_1(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma) + V_0(t, q_\sigma)$$

где  $A_\sigma, V_0$  - функции обобщенных координат и времени. При этом видно, что  $V_0(t, q_\sigma)$  - обычный потенциал (его можно обозначать ещё как  $V_0 = \Pi$ ). Тогда согласно определению  $L = T - V$  снова будет квадратичной функцией относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma$ , но вместо предыдущих равенств получим

$$L = L_2 + L_1 + L_0 = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V_1 - V_0 \quad \Rightarrow \quad L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = V_0$$

Подставляя полученное выражение для обобщенного потенциала в выражение силы получим:

$$\begin{aligned} Q_\sigma &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = \frac{dA_\sigma}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left( \sum_{\rho=1}^n A_\rho \cdot \dot{q}_\rho + V_0 \right) = \\ &= \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial A_\sigma}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \frac{\partial A_\sigma}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial A_\rho}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\rho - \frac{\partial V_0}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial V_0}{\partial q_\sigma} + \sum_{\rho=1}^n \left( \frac{\partial A_\sigma}{\partial q_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial q_\sigma} \right) \dot{q}_\rho + \frac{\partial A_\sigma}{\partial t} \end{aligned}$$

Если  $\frac{\partial A_\sigma}{\partial t} = 0$ , т.е. линейная часть  $V_1$  обобщенного потенциала не зависит явно от времени, то обобщенные силы складываются из потенциальных сил  $-\frac{\partial V_0}{\partial q_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) и гироскопических сил  $\tilde{Q}_\sigma = \sum_{\rho=1}^n \gamma_{\sigma\rho} \dot{q}_\rho$ , где  $\gamma_{\sigma\rho} = -\gamma_{\rho\sigma} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial q_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial q_\sigma}$  ( $\sigma, \rho = 1, \dots, n$ ). Если к тому же система склерономна и часть  $V_0$  обобщенного потенциала  $V$  (обычная потенциальная энергия) не зависит явно от времени, то согласно вышеизложенной теореме об изменении механической энергии величина  $T + V_0$  остается постоянной (однако  $T + V \neq \text{const}$ ).

Как уже отмечалось, функция Лагранжа, в случае существования обобщенного или обычного потенциала является многочленом 2-ой степени относительно обобщенных скоростей. И ее квадратичная часть совпадает с квадратичной частью кинетической энергии,

поэтому получающаяся из уравнений Лагранжа система уравнений имеет вид рассмотренный ранее:

$$\sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma\rho} \ddot{q}_\sigma = g_\rho(t, q_i \dot{q}_i)$$

которая, как мы показали в прошлой лекции, имеет единственное решение (при гладких правых частях), т.е. разрешимо относительно обобщенных ускорений:

$$\ddot{q}_\sigma = G_\sigma(t, q_i \dot{q}_i) \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

поскольку  $\det \| a_{\sigma\rho} \|_{\sigma\rho=1}^n > 0$ .

Системы, в которых силы имеют обычный потенциал  $\Pi(t, q_\sigma)$  или обобщенный потенциал  $V(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma)$  называются **натуральными**. В таких системах функция Лагранжа  $L$  вводится как разность  $T - \Pi$  или  $T - V$  и является многочленом второй степени от обобщенных скоростей, т.е.  $L_2$  - положительно определенная квадратичная форма от обобщенных скоростей.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать более общие системы, в которых функция Лагранжа является произвольной функцией  $L(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma)$ . Будем лишь требовать, чтобы **гессиан** функции  $L$  относительно обобщенных скоростей не был равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\|_{\sigma, \rho=1}^n \neq 0$$

Так для натуральной системы это требование очевидно выполняется:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\| = \det \| a_{\sigma\rho} \| \neq 0$$

Требование на гессиан функции Лагранжа от обобщенных скоростей для произвольных – ненатуральных систем, с функцией  $L$ , аналогично неравенству для натуральных, поскольку уравнения Лагранжа могут быть переписаны в виде:

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \ddot{q}_\rho + (***) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

где через (\*\*\*) обозначена сумма членов не содержащая обобщенных ускорений  $\ddot{q}_\rho$ . Тогда если гессиан  $L$  не равен нулю, система может быть разрешена относительно ускорений:

$$\ddot{q}_\rho = G_\rho(t, q_i \dot{q}_i) \quad (\rho = 1, \dots, n)$$

Т.е. это условие необходимо для обеспечения разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

### *Степень определенности функции Лагранжа*

Уравнения Лагранжа полностью определяются функцией Лагранжа:

$$\mathcal{L}_\sigma(L) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Однако одни и те же уравнения могут соответствовать различным лагранжевым функциям. В самом деле:

- $L' = cL$  – отличие на постоянный множитель  $c = \text{const}$ . Тогда в силу однородности Лагранжевых уравнений  $\mathcal{L}_\sigma(L') = c\mathcal{L}_\sigma(L) = 0$  они будут одинаковы для  $L$  и для  $L'$ .
- $L' = L + f(t)$  – отличие на произвольную функцию времени. Тогда поскольку

$$\mathcal{L}_\sigma(f(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial f(t)}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial f(t)}{\partial q_\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_\sigma(L') = \mathcal{L}_\sigma(L)$$

- $L' = L + \frac{d}{dt} f(t, q)$  – отличие на полную производную по времени некоторой функции

$f(t, q)$  - времени и координат, тогда, обозначая  $\Phi = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma$ , имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_\sigma \partial t} + \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_\sigma \partial q_\rho} \dot{q}_\rho, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_\sigma \partial t} + \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_\sigma \partial q_\rho} \dot{q}_\rho$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_\sigma(\Phi) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_\sigma(L') = \mathcal{L}_\sigma(L) + \mathcal{L}_\sigma(\Phi) = \mathcal{L}_\sigma(L)$$

Т.е. лагранжевы уравнения для совпадают и в этом случае.

Отличенные особенности кинетического потенциала могут быть использованы для упрощения составления лагранжевых уравнений. Именно, постоянный множитель или аддитивный член, являющийся полной производной по времени от функции времени и координат, либо просто функцией времени в выражении функции Лагранжа могут отбрасываться без ущерба для уравнений Лагранжа.

**ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ  
ЛЕЖАНДРА. ТЕОРЕМА ДОНКИНА. ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЯ  
ГАМИЛЬТОНА. ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА**

Многие методы исследования уравнений развиты применительно к системам уравнений первого порядка (теорема Коши о разрешимости нормально системы дифференциальных уравнений – именно первого порядка). Уравнения Лагранжа II рода являются уравнениями второго порядка. Далее мы будем рассматривать только системы, движение которых описывается уравнением Лагранжа II рода с произвольной функцией Лагранжа (в частности это натуральные системы). Привести их к системе уравнений первого порядка можно многими способами. Наиболее удобный из них связан с применением преобразования Лежандра (преобразование переменных).

Пусть имеется некоторая функция  $X$ , зависящая от переменных  $\{x_1, \dots, x_n\}$  и параметров  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ :  $X(x, \alpha)$ . Будем считать, что она обладает непрерывными производными по параметрам  $\alpha_i$  и вторыми непрерывными производными по независимым переменным  $x_\sigma$ . Тогда можно рассмотреть преобразование к другим независимым переменным  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , даваемое формулами:

$$y_\sigma = \frac{\partial X}{\partial x_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Это преобразование, с помощью которого осуществляется переход к другим переменным, называется **преобразованием Лежандра**, а фигурирующую в нем функцию  $X$  – **порождающей**. Одно из свойств преобразования Лежандра выражается теоремой:

**Теорема Донкина.** Пусть дана некоторая функция  $X(x, \alpha)$ , гессиан которой по переменным  $\{x_1, \dots, x_n\}$  отличен от нуля:  $\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_\sigma \partial x_\rho} \right\|_{\sigma, \rho=1}^n \neq 0$ , и пусть имеется преобразование Лежандра, порождаемое этой функцией:  $y_\sigma = \frac{\partial X}{\partial x_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ), осуществляющее преобразование переменных от  $\{x_1, \dots, x_n\}$  к  $\{y_1, \dots, y_n\}$ . Тогда существует обратное (по отношению к прямому) преобразование переменных (т.е. от  $\{y_1, \dots, y_n\}$  к  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ) также в виде преобразования Лежандра, которое порождается некоторой функцией  $Y(y, \alpha)$ :  $x_\sigma = \frac{\partial Y}{\partial y_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ), причем функция  $Y$  связана с  $X$  формулой:

$$Y = \sum_{\sigma=1}^n x_\sigma y_\sigma - X$$

причем производные от этих функций по любому параметру отличаются только знаком:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial X}{\partial \alpha_i}$$

*Доказательство.* Видно, что гессиан функции  $X$  совпадает с якобианом правых частей уравнений:  $y_\sigma = \frac{\partial X}{\partial x_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Поэтому условие на гессиан означает что эти уравнения можно разрешить относительно переменных  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , выразив их через  $\{y_1, \dots, y_n\}$  в виде:  $x_\sigma = x_\sigma(y_1, \dots, y_n, \alpha)$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Возьмем функцию  $Y$ , определенную равенством в формулировке теоремы:  $Y = \sum_{\sigma=1}^n x_\sigma y_\sigma - X$ , и подставим в нее значения  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,

по полученным выше формулам. Тогда будем иметь:

$$Y(y, \alpha) = \sum_{\sigma=1}^n x_{\sigma}(y, \alpha) \cdot y_{\sigma} - X(x(y, \alpha), \alpha)$$

Продифференцируем полученное уравнение по  $y_{\rho}$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial y_{\rho}} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial y_{\rho}} y_{\sigma} + x_{\rho} - \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial y_{\rho}}$$

Но согласно преобразованию Лежандра  $y_{\sigma} = \frac{\partial X}{\partial x_{\sigma}}$ , поэтому обе суммы взаимно уничтожаются, и следовательно имеют места равенства:  $x_{\rho} = \frac{\partial Y}{\partial y_{\rho}}$ .

Если теперь продифференцировать по произвольному параметру  $\alpha_i$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial \alpha_i} y_{\sigma} - \left( \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \right) = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial \alpha_i} y_{\sigma} - y_{\sigma} \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial \alpha_i} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \quad \square$$

**Замечание:** при преобразовании переменных от  $\{y_1, \dots, y_n\}$  к  $\{x_1, \dots, x_n\}$  с помощью преобразования Лежандра с порождающей функцией  $Y(y, \alpha)$  обратное преобразование переменных от  $\{x_1, \dots, x_n\}$  к  $\{y_1, \dots, y_n\}$  также будет лежандровским с порождающей функцией  $X = \sum_{\sigma=1}^n x_{\sigma} y_{\sigma} - Y$  и только  $X$ .

Приведем лагранжевы уравнения 2-го рода (являющиеся дифференциальными уравнениями 2-го порядка) к системе первого порядка, имеющих удобный вид. Согласно методу Лагранжа, уравнения движения натуральной системы вполне определяются заданием кинетического потенциала  $L(t, q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma})$ . Совокупность переменных  $\{t, q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma}\}$ , фигурирующих в выражении  $L$ , называют **переменными Лагранжа**. Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т.е. положения и скорости ее точек.

Но состояние можно задавать и при помощи других параметров. Гамильтон предложил характеризовать состояние системы другими величинами, введя вместо обобщенных скоростей, так называемые **обобщенные импульсы** согласно формулам:

$$p_{\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Совокупность переменных  $\{t, q_{\sigma}, p_{\sigma}\}$  называют **переменными Гамильтона**. Поскольку якобиан правых частей выражения для импульсов совпадает с отличным от нуля гессианом функции  $L$ , то эти уравнения могут быть разрешены относительно скоростей:  $\dot{q}_{\sigma} = \dot{q}_{\sigma}(t, q_{\rho}, p_{\rho})$ . Следовательно, переменные Лагранжа и Гамильтона выражаются друг через друга. Переменные  $q_{\sigma}$  и  $p_{\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) с одинаковыми индексами называются **канонически сопряженными**.

Метод Гамильтона описания движения натуральной системы состоит в получении уравнений для координат  $q_{\sigma}$  и импульсов  $p_{\sigma}$ , рассматриваемых как функции времени. Для получения уравнений Гамильтона будем исходить из лагранжевых уравнений 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

В переменных Гамильтона эти уравнения запишутся в виде:

$$\dot{p}_{\sigma} = -\frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

На формулы, определяющие обобщенные импульсы:  $p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) можно смотреть как на преобразование Лежандра лагранжевых переменных  $\{t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma\}$ , порождаемое функцией Лагранжа  $L$ , при котором переменные  $t$  и  $q_\sigma$  играют роль параметров. Поскольку гессиан функции Лагранжа по обобщенным скоростям отличен от нуля ( $\det \|a_{\sigma\rho}\| \neq 0$  для натуральных систем, или  $\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\| \neq 0$  для систем общего типа), то для этого преобразования будет справедлива теорема Донкина. В соответствии с этой теоремой, обратное преобразование переменных имеет вид:

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

с порождающей функцией

$$H(t, q, p) = \sum_{\sigma=1}^n p_\sigma \dot{q}_\sigma - L(t, q, \dot{q}) \quad \text{Функция Гамильтона}$$

При этом производные по параметрам  $t$  и  $q_\sigma$  от функций  $L$  и  $H$  связаны зависимостями:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Возвращаясь к лагранжевым уравнениям в переменных Гамильтона видно:

$$\dot{p}_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Эти уравнения вместе с  $\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$  образуют замкнутую систему, уже не  $n$  уравнений 2-го порядка, а  $2n$  уравнений, но 1-го порядка:

### Канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Они служат для определения зависимостей  $q_\sigma(t)$ ,  $p_\sigma(t)$ , определяющих движение системы. Обратим внимание, что уравнения Гамильтона имеют замечательный симметричный вид: правые части уравнений являются производными по искомым величинам от одной и той же функции  $H$ . Эти особенности структуры уравнений позволяют развить для них эффективные методы интегрирования. Отметим, что попутно мы получили равенства  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) которые будут использованы в дальнейшем. В частности легко видеть, что если функция Лагранжа не зависит явно от какой-либо переменной (координаты) или от времени, то и функция Гамильтона не будет явно зависеть от этой же переменной или времени  $\left( \frac{\partial L}{\partial q} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$ .

### Механический смысл функции Гамильтона

Для выяснения смысла физического функции Гамильтона рассмотрим натуральные системы (т.е. с обычным  $\Pi(t, q)$ ) или обобщенным  $V(t, q, \dot{q})$  потенциалом). Тогда функция

Лагранжа  $L(t, q, \dot{q})$  является квадратичной функцией скоростей:  $L = L_2 + L_1 + L_0$  и согласно определению функция Гамильтона  $H$  будет равна:

$$H = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma - L(t, q, \dot{q}) = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma - (L_2 + L_1 + L_0)$$

Но по теореме Эйлера об однородных функциях:  $\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma = 2L_2$ ,  $\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma = L_1$ , поэтому окончательно для натуральной системы имеем:

$$H = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0$$

Ранее было выяснено, что  $L_2 = T_2$ ,  $L_0 = T_0 - \Pi$  (или  $L_0 = T_0 - V_0$ ), где  $T_2$  - квадратичная функция кинетической энергии,  $\Pi$  - потенциал обычных сил,  $V_0$  - не зависящее от скоростей слагаемое обобщенного потенциала. Тогда для натуральных систем имеем:

$$\boxed{H = T_2 - T_0 + \Pi} \quad \text{для обычных потенциальных сил с потенциалом } \Pi$$

$$\boxed{H = T_2 - T_0 + V_0} \quad \text{для сил с обобщенным потенциалом } V = V_1 + V_0$$

Данные выражения показывают, что хотя  $H$  имеет размерность энергии, оно вообще не совпадает с полной механической энергией  $E = T + \Pi$  ( $E = T + V_0$ ) т.к.  $(T_2 - T_0)$  не является кинетической энергией. По этой причине функцию Гамильтона называют **обобщенной механической энергией**.

Если же система склерономна, то, как указывалось  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $T = T_2$ , тогда

$$\boxed{H = T + \Pi = E} \quad \text{или} \quad \boxed{H = T + V_0 = E}$$

т.е. для склерономной системы функция Гамильтона представляет собой реальную полную механическую энергию – выраженную в переменных Гамильтона.

### Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби)

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона, используя канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{dH(t, q, p)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \dot{p}_\sigma \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Т.е. полная производная функции Гамильтона по времени тождественно равна ее частной производной:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

Механическая система называется **обобщенно-консервативной**, если ее функция Гамильтона не зависит явно от времени:  $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ . Вспоминая свойство из теоремы Донкина:

$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$  легко видеть, что для обобщенно-консервативной системы время явно не входит и в функцию Лагранжа. Следовательно, имеем для обобщенно-консервативной системы:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$$

Т.е. при движении такой системы:

$$\boxed{H(q, p) = h = \text{const}}$$

Т.к.  $H$  не содержит  $\dot{q}$  или  $\dot{p}$ , но включает постоянную  $h$  с учетом физического смысла  $H$  (обобщенная механическая энергия), последнее выражение называется **обобщенный интеграл энергии** (или **интеграл Якоби**).

Для натуральной системы с обычным  $\Pi(t, q)$  или обобщенным  $V(t, q, \dot{q}) = V_1(t, q, \dot{q}) + V_0(t, q)$  потенциалом сил имеем:

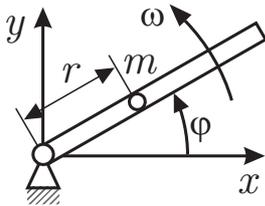
$$\boxed{T_2 - T_0 + \Pi = h} \quad \text{или} \quad \boxed{T_2 - T_0 + V_0 = h}$$

(при этом функция слева не должна явно зависеть от времени).

Если система склерономна ( $T_1 = T_0 = 0$ ,  $T = T_2$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  – т.е. кинетическая энергия не зависит явно от времени), а силы только потенциальные, причем  $\Pi = \Pi(q)$  тоже не зависит от времени, т.е. в случае обычной консервативной системы обобщенный интеграл энергии переходит в известный интеграл или закон сохранения полной механической энергии:

$$\boxed{E = T + \Pi = h}$$

Таким образом, консервативная система является частным случаем обобщенно-консервативной с обычным интегралом энергии.



**Пример 1:** Гладкая трубка вращается в горизонтальной (вертикальной) плоскости с заданной постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 85). Внутри трубки движется шарик массой  $m$ . Считаем шарик материальной точкой. Угол  $\varphi$  между горизонтальной прямой  $x$  и осью трубки изменяется по закону:  $\varphi = \omega t$ . Положение шарика задаем координатой  $r(t)$  – обобщенная координата.

Рис. 85.

Потенциальная энергия шарика:  $\Pi = 0$ , – горизонтальная плоскость;  
 $\Pi = mgy = mgr \sin \omega t$ , – вертикальная плоскость.

Кинетическая энергия шарика:  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\omega)^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

Из сопоставления с формой  $T = T_2 + T_1 + T_0$  имеем:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Обобщенная механическая энергия (функция Гамильтона):  $H = T_2 - T_0 + \Pi$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2, \quad \text{– горизонтальная плоскость;}$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + mgr \sin \omega t, \quad \text{– вертикальная плоскость.}$$

Для случая горизонтальной плоскости  $H$  явно от времени не зависит, поэтому для него справедлив обобщенный интеграл энергии:  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = h = \text{const}$ .

Для случая вертикальной плоскости  $H$  от времени зависит явно, поэтому интеграл энергии для него не выполняется.

Было бы ошибкой принимать за интеграл энергии (в горизонтальном случае) полную механическую энергию  $E = T + \Pi$ , т.к. рассматриваемая система (шарик во вращающейся трубке) не является консервативной системой: система не склерономна – геометрическая связь в виде трубки нестационарна.

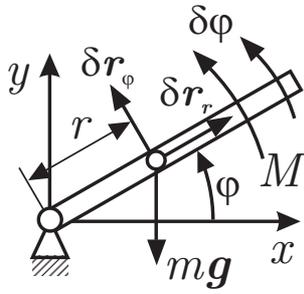


Рис. 86.

**Пример 2:** Та же невесомая трубка, из предыдущей задачи к которой приложен постоянный вращающий момент сил  $M$ , внутри трубки - шарик массой  $m$  (рис. 86).

Потенциал момента сил:  $\Pi_M = -M\varphi$ . Его надо добавить к потенциалу из предыдущей задачи. Здесь  $\varphi$  - еще одна обобщенная координата, т.е. в данном случае у шарика 2 степени свободы и обобщенных координаты  $r$  и  $\varphi$ :

Потенциальная энергия шарика:  
 $\Pi = -M\varphi$ , — горизонтальная плоскость;  
 $\Pi = mgr \sin \varphi - M\varphi$ , — вертикальная плоскость.

Кинетическая энергия шарика:  $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = T_2$ ,  $T_1 = T_0 = 0$

Данная механическая система (шарик + стержень) — является консервативной, для которой выполнены все условия: связи (только шарнир) геометрические и стационарные, т.е. система — голономная и склерономная, а значит кинетическая энергия заведомо не зависит от времени (это и так видно из выражения  $T$ ), все силы потенциальные: вес и момент сил — постоянные (т.е. от времени не зависят).

Поэтому обобщенная энергия равна полной механической энергии:  $H = E = T + \Pi$  и для каждого случая справедлив закон сохранения полной механической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - M\varphi &= h, & \text{— горизонтальная плоскость;} \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr \sin \varphi - M\varphi &= h, & \text{— вертикальная плоскость.} \end{aligned}$$

**Приложение:** Получение потенциала в предыдущих задачах, выраженного в обобщенных координатах  $r$  и  $\varphi$  через работу приложенных сил на возможных перемещениях.

$$\begin{aligned} \delta r = 0 \\ \delta \varphi \neq 0 \end{aligned} \quad \delta A = \delta A(M) + \delta A(\mathbf{P}) = M\delta\varphi + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_\varphi = M\delta\varphi - Pr \cos \varphi \delta\varphi = (M - mgr \cos \varphi)\delta\varphi$$

$$\Rightarrow \quad Q_\varphi = M - mgr \cos \varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Pi = -M\varphi + mgr \sin \varphi + f(r)}$$

$f(r)$  — произвольная функция после интегрирования

$$\begin{aligned} \delta r \neq 0 \\ \delta \varphi = 0 \end{aligned} \quad \delta A = \delta A(M) + \delta A(\mathbf{P}) = M\delta\varphi + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_r = 0 + P\delta r \sin \varphi = -mg \sin \varphi \delta r$$

$$\Rightarrow \quad Q_r = -mg \sin \varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -mg \sin \varphi - \frac{df(r)}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{f(r) \equiv \text{const}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Pi = -M\varphi + mgr \sin \varphi + \text{const}} \quad \text{const — можно положить равной нулю.}$$

## ЛЕКЦИЯ 23

### УРАВНЕНИЯ УИТТЕКЕРА И ЯКОБИ (ДЛЯ ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ). СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ. ИГНОРИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Рассмотрим движение обобщенно-консервативной системы. Т.е. движение произвольной (не обязательно натуральной) системы, для которой функция Гамильтона не зависит явно от времени. Тогда, во-первых, движение системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dq_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (40)$$

и, во-вторых, существует обобщенный интеграл энергии, т.е. функция Гамильтона (обобщенно-механическая энергия)

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h \quad (41)$$

где  $h$  - произвольная постоянная, определяемая начальными условиями

$$h = H(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0)$$

Отметим, что  $H$  явно от времени не зависит.

В  $2n$ -мерном пространстве  $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$  - называемом **фазовым пространством**, уравнение (41) задает гиперповерхность. Будем рассматривать только такие движения изображающей точки в фазовом пространстве, которые соответствуют этой гиперповерхности. Иначе говоря, рассмотрим движение системы на фиксированном изоэнергетическом уровне, определяемом уравнением (41) (т.е. только такие состояния системы, для которых величина обобщенно-механической энергии – постоянна). Покажем, что движение системы на изоэнергетическом уровне описывается системой дифференциальных уравнений, порядок которой равен  $(2n - 2)$ , причем эта система опять-таки может быть записана в каноническом виде.

Предположим, что в некоторой области фазового пространства (данного изоэнергетического уровня) выполняется неравенство:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$$

( $p_1$  взято для удобства и не уменьшая общности). Тогда в этой области равенство (41) разрешимо относительно  $p_1$ :

$$\boxed{p_1 = -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)} \quad (\llcorner \text{ взят для удобства}) \quad (42)$$

Перепишем систему уравнений (40) отделив 2 уравнения соответствующих значению  $\sigma = 1$  от остальных  $(2n - 2)$  уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, & \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Деля почленно уравнения для  $j = 2, \dots, n$  на первое уравнение получим:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial q_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (43)$$

Подставляя величину  $p_1$ , задаваемую равенством (42) в левую часть обобщенного интеграла энергии (41) – получим тождество:

$$H(q_1, \dots, q_n, -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h), p_2, \dots, p_n) \equiv h \quad (44)$$

Дифференцируя его по  $q_j$  и  $p_j$  имеем:

$$\frac{dH}{dq_j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \quad \frac{dH}{dp_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \quad (j = 2, \dots, n)$$

отсюда:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q_j} \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_j} \quad (j = 2, \dots, n)$$

подставляя в (43) окончательно получим:

### Уравнения Уиттекера

$$\boxed{\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (45)$$

Уравнения (45) описывают движение системы при  $H = h = \text{const}$ . Они имеют форму канонических уравнений, где роль функции Гамильтона ( $H$ ) играет функция  $K$  из (42), а роль времени – координата  $q_1$ . Система (45), состоящая из  $(2n - 2)$  уравнений – замкнута и ее можно интегрировать независимо от других уравнений.

Проинтегрировав уравнения Уиттекера, найдем функции:

$$q_j = q_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}), \quad p_j = p_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}) \quad (j = 2, \dots, n) \quad (46)$$

где  $c_1, \dots, c_{2n-2}$  – произвольные постоянные. Подставляя (46) в выражение для  $p_1 = -K$  из (42) получим:

$$p_1 = p_1(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}) \quad (47)$$

Равенства (46) и (47) задают геометрический характер движения: они определяют уравнения траекторий в фазовом пространстве (точнее на гиперповерхности фазового пространства  $H = h$ ). Для нахождения закона движения вдоль траекторий, т.е. зависимости движения от времени рассмотрим первое уравнение из гамильтоновой системы

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

Используя тождество (44) дифференцируя его по  $h$  получим:

$$\frac{dH}{dh} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \left( -\frac{\partial K}{\partial h} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\left( -\frac{\partial K}{\partial h} \right)^{-1}}{1} = \frac{dq_1}{dt}$$

Отсюда зависимость между координатой  $q_1$  и временем  $t$  устанавливается с помощью квадратуры:

$$t = - \int \frac{\partial K}{\partial h} dq_1 + c_{2n-1} \quad (48)$$

(при этом в частной производной  $\partial K/\partial h$  все переменные считаются выраженными через  $q_1$  с помощью (46) и (47)).

Разрешив (48) относительно  $q_1$  получим:  $q_1 = q_1(t, h, c_1, \dots, c_{2n-1})$

Зависимости (46)-(48) определяют уравнения движения системы.

Таким образом, интегрирование гамильтоновой системы уравнений для обобщенно-консервативной системы велось к интегрированию системы уравнений Уиттекера, имеющей такой же вид, но порядок на 2 единицы ниже, чем у исходной. И это благодаря существованию обобщенного интеграла энергии.

Уравнения Уиттекера имеют структуру уравнений Гамильтона. Их можно записать также и в форме уравнений Лагранжа II рода. В самом деле, уравнения Гамильтона мы получали при помощи теоремы Донкина из уравнений Лагранжа:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0$

( $\sigma = 1, \dots, n$ ), вводя обобщенные импульсы  $p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$  и при условии на гессиан  $L$  по  $\dot{q}_\sigma$ :

$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\| \neq 0$ , тогда существовало обратное преобразование Лежандра:  $\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$ , где

$H(t, q, p) = \sum_{\sigma=1}^n p_\sigma \dot{q}_\sigma - L(t, q, \dot{q})$ . Отсюда видно, что  $L(t, q, \dot{q}) = \sum_{\sigma=1}^n p_\sigma \dot{q}_\sigma - H(t, q, p)$  и по-

этому можно рассматривать теорему Донкина наоборот, т.е. при наличии преобразования Лежандра  $\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$  и условия на гессиан  $H$  по  $p_\sigma$ :  $\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma \partial p_\rho} \right\| \neq 0$ , существует обрат-

ное преобразование:  $p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$  с упомянутой порождающей функцией  $L$ , для которых и справедливы уравнения Лагранжа II рода.

Необходимо соответственно сделать подобные обратные рассуждения для уравнений Уиттекера с учетом, что роль времени играет координата  $q_1$  и количество уравнений ( $2n - 2$ ): для лежандровского преобразования переменных  $q'_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}$  ( $j = 2, \dots, n$ ) у которого

гессиан порождающей функции  $K$  по  $p_j$  отличен от нуля:  $\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_{i,j=2}^n \neq 0$ , существует

порождающая функция  $P$ , обратного преобразования переменных лежандровского типа  $p_j = \frac{\partial P}{\partial q'_j}$ , имеющая вид:

$$P = P(q_2, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n, q_1, h) = \sum_{j=2}^n q'_j p_j - K \quad \text{Функция Якоби}$$

где обозначено  $q'_j = \frac{dq_j}{dq_1}$ . При помощи данной функции  $P$  уравнения Уиттекера (45) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

### Уравнения Якоби

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 2, \dots, n)$$

Это уравнения типа Лагранжа, а их количество ( $n - 1$ ). Роль функции Лагранжа в уравнениях Якоби играет функция  $P$ , а роль времени, как и в уравнениях Уиттекера (45) – координата  $q_1$ .

Преобразуем выражение для функции  $P$ , учитывая что

$$H - L = \sum_{\sigma=1}^n p_\sigma \dot{q}_\sigma \quad \text{и} \quad p_1 = -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h), \quad q'_1 = \frac{dq_1}{dq_1} \equiv 1$$

$$P = \sum_{j=2}^n q'_j p_j - K = \sum_{j=2}^n q'_j p_j + p_1 = \sum_{j=1}^n q'_j p_j = \sum_{j=1}^n p_j \frac{dq_j}{dt} \frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = \frac{H - L}{\dot{q}_1} \Rightarrow$$

$$\boxed{P = \frac{H - L}{\dot{q}_1}}$$

Если система консервативна можно получить особенно простую форму для  $P$ . В таком случае  $L = T - \Pi$ ,  $H = T + \Pi$  и справедлив закон сохранения полной механической энергии  $T + \Pi = h$ , тогда

$$H + L = 2T = 2(h - \Pi) \Rightarrow P = \frac{2T}{\dot{q}_1} = \frac{2(h - \Pi)}{\dot{q}_1}$$

Но в консервативной системе:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=2}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho = \dot{q}_1^2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=2}^n a_{\sigma\rho} q'_\sigma q'_\rho = \dot{q}_1^2 G(q_1, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n) \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{T}{G}} = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}}}$$

где  $G = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=2}^n a_{\sigma\rho} q'_\sigma q'_\rho$ . Окончательно имеем выражение  $P$  для консервативной системы:

$$\boxed{P = 2\sqrt{G(h - \Pi)}}$$

Интегрируя уравнения Якоби, находим функции  $q_\sigma = q_\sigma(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2})$  ( $\sigma = 2, \dots, n$ ), которые определяют  $(2n - 1)$  - параметрическое семейство траекторий в  $n$ -мерном координатном пространстве. Закон движения изображающей точки вдоль траектории устанавливается с помощью квадратуры из:

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}} \Rightarrow \boxed{t = \int \sqrt{\frac{G}{h - \Pi}} dq_1 + c_{2n-1}}$$

### Системы с циклическими и позиционными координатами

Наряду с обобщенно-консервативными системами понизить порядок системы уравнений движения можно для другого класса систем – с циклическими координатами. Обобщенная координата называется **циклической** - если она не входит явно в функцию Лагранжа  $L$ , и **позиционной** - если она участвует в выражении этой функции. Таким образом, для циклической координаты  $q_\alpha$  и для позиционной  $q_\sigma$  имеем:

$$\partial L / \partial q_\alpha = 0, \quad \partial L / \partial q_\sigma \neq 0$$

При выводе уравнений Гамильтона было установлено равенство:  $-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}$ . Отсюда ясно, что если координата  $q_\alpha$  – циклическая, то она не входит явно не только в функцию Лагранжа  $L$ , но и в функцию Гамильтона  $H$  (последнее может быть взято в качестве определения циклической координаты, т.к. согласно свойству теоремы Донкиной эти определения - эквивалентны). Однако в этом случае соответствующее уравнение Гамильтона для сопряженного  $q_\alpha$  импульса, также называемым **циклическим импульсом**:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0$$

дает интеграл  $p_\alpha = \text{const}$  который называется **циклическим интегралом**. Он выражает постоянство циклического импульса.

Пусть у системы:  $q_1, \dots, q_m$  – позиционные координаты,  $m$  – штук,  
 $q_{m+1}, \dots, q_n$  – циклические координаты,  $(n - m)$  – штук.

Тогда гамильтоновы уравнения определяют  $(n - m)$  циклических импульсов:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = c_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n)$$

Циклические координаты не входят явно в функцию Гамильтона, а соответствующие (сопряженные) им импульсы (циклические) – постоянны, поэтому функция Гамильтона имеет в этом случае вид:

$$H = H(t, q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m, c_{m+1}, \dots, c_n)$$

Из структуры функции  $H$  следует, что первая группа уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, m)$$

представляет собой замкнутую систему  $2m$  дифференциальных уравнений первого порядка с  $2m$  неизвестными функциями  $q_\sigma(t)$ ,  $p_\sigma(t)$  ( $\sigma = 1, \dots, m$ ). Проинтегрировав данную систему, найдем:

$$q_\sigma = q_\sigma(t, c_i, c'_i, c_\alpha), \quad p_\sigma = p_\sigma(t, c_i, c'_i, c_\alpha)$$

где  $c_i, c'_i$  – произвольные постоянные ( $i = 1, \dots, m$ ). После подстановки этих зависимостей для позиционных координат и импульсов в выражение функции  $H$ , она будет зависеть только от времени  $t$ :

$$H = H(t, c_i, c'_i, c_\alpha)$$

поэтому оставшиеся гамильтоновы уравнения

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n)$$

определяют циклические координаты в зависимости от  $t$  при помощи квадратур:

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha \quad (\alpha = m + 1, \dots, n)$$

Тем самым уравнения движения полностью проинтегрированы.

Таким образом, интегрирование уравнений движения по существу свелось к интегрированию системы, порядок которой  $2m$  – меньше порядка исходной системы на  $2(n - m)$  единиц, где  $(n - m)$  – количество циклических координат. Т.е. наличие  $(n - m)$  циклических координат позволило понизить порядок системы. Более того, при интегрировании новой системы с позиционными координатами мы как бы забываем о существовании циклических координат, они не принимаются во внимание и в решении не участвуют, т.е. «игнорируются», отсюда проистекает название этого **метода - игнорирование циклических координат**, разработанного Раусом (сами циклические координаты называют иногда *игнорируемыми* или *скрытыми*). Само название «циклическая координата» связано с тем, что во многих задачах механики такая координата характеризует движение по замкнутым траекториям (циклам) – например, угловая координата  $\varphi$ , при этом явно не входит в выражение для  $L$ .

Раус много сделал в механике и на следующей лекции мы рассмотрим уравнения Рауса и функцию Рауса - аналоги уравнений Лагранжа и функции Лагранжа - для циклических

координат как в случае обобщенно-консервативной системы мы пришли от уравнения Уиттекера (в гамильтоновой форме) к уравнениям Якоби (в лагранжевой форме).

В заключении заметим, что между обобщенно-консервативной системой ( $\partial H/\partial t = 0$ ) и системой с циклической координатой ( $\partial H/\partial q_\alpha = 0$ ) имеется сходство, состоящее в том, что в обоих случаях порядок системы уравнений (в гамильтоновой форме) удается понизить на 2 единицы. Отсюда можно заключить, что время обладает свойствами, аналогичным свойствам координат (в первом случае мы получили обобщенный интеграл энергии  $H = h$ , во втором постоянство циклического импульса  $p_\alpha = c_\alpha$ ). Эту аналогию между временем и координатой можно проследить и далее, а ее корни будут установлены при рассмотрении основного интегрального инварианта.

## ЛЕКЦИЯ 24

### УРАВНЕНИЯ РАУСА (ПЕРЕМЕННЫЕ И ФУНКЦИЯ РАУСА). ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА (ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ, ЦИКЛИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ)

Используя идеологию с циклическими координатами, Раус предложил взять в качестве основных переменных для описания состояния голономных систем в данный момент времени  $t$  комбинацию из переменных Лагранжа и Гамильтона: часть таких и часть других. **Переменными Рауса** являются величины:

$$\{t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha\} \quad (i = 1, \dots, m; \alpha = m + 1, \dots, n,)$$

где  $m$  - произвольное фиксированное число меньше  $n$ . Для того чтобы от переменных Лагранжа перейти к переменным Рауса необходимо все  $\dot{q}_\alpha$  выразить через величины  $p_\alpha$ , используя для этой цели соотношения:  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ .

Предположим, что гессиан функции  $L$  относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_\alpha$  («малый» гессиан) отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = m+1}^n \neq 0 \quad (49)$$

В общем случае это неравенство не следует из неравенства на полный гессиан  $L$ : ( $\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_\rho} \right\|_{\sigma, \rho = 1}^n \neq 0$ ), а является дополнительным требованием. Но для натуральной системы, так как  $L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - \Pi(t, q) = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$ , это неравенство имеет вид:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = m+1}^n = \det \left\| \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = m+1}^n = \det \|a_{\alpha\beta}\| > 0$$

Последний определитель отличен от нуля (положителен), так как  $T_2$  - положительно определенная квадратичная форма от обобщенных скоростей и к ней применим критерий Сильвестра. Следовательно, для натуральной системы это неравенство (49) выполняется автоматически. В случае же ненатуральной системы это условие является дополнительным ограничением на функцию  $L$  (к полному гессиану). Тогда применяя доказанную ранее теорему Донкина к данному преобразованию переменных, вида преобразования Лежандра, с порождающей функцией  $L$ , получим обратное преобразование:  $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}$ , где порождающая функция выражается в виде:

$$\boxed{R = \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L} \quad - \text{ функция Рауса} \quad (50)$$

где все  $\dot{q}_\alpha$  - выражены через переменные Рауса  $\{t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha\}$ . При этом переменные  $\{t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i\}$  рассматриваются как параметры и, поэтому, по т. Донкина, производные по ним от порождающих функций  $L$  и  $R$  отличаются только знаком:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}, & \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & (i = 1, \dots, m) \\ \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} & (\alpha = m + 1, \dots, n,) & & \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа для координат  $q_i$  с учетом этих равенств и однородности самих уравнений запишутся как:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (51)$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{\alpha=m+1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - R \right) = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}; & \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -\frac{\partial R}{\partial q_i} & \Rightarrow \\ & & \Rightarrow & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \end{aligned}$$

А уравнения Лагранжа для переменных  $q_\alpha$  принимают форму:  $\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$ , и совместно с теоремой Донкина:  $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}$ , дают уравнения

$$\boxed{\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n) \quad (52)$$

Уравнения (51)-(52) образуют систему **уравнений Рауса**. Она состоит из  $m$  дифференциальных уравнений второго порядка типа Лагранжа и  $2(n - m)$  уравнений первого порядка типа Гамильтона, причем функция Рауса из (50) в первых уравнениях играет роль функции Лагранжа, (точнее  $-R$ , так как  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial(-R)}{\partial q_i}$  и  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i}$  если хотим сохранить связь между импульсами и  $L$ ), а во-вторых - функции Гамильтона. Т.е. во всех уравнениях стоит одинаковая функция  $R$ !

Уравнения Рауса находят широкое применение при исследовании движения систем с циклическими координатами (хотя получены они без использования этого свойства координат).

Предположим, что у системы имеется  $m$  - позиционных координат  $q_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $(n - m)$  - циклических  $q_\alpha$  ( $\alpha = m + 1, \dots, n$ ). Используя свойства из теоремы Донкина, легко видеть, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0$$

т.е. циклическая координата  $q_\alpha$  не входит явно не только в  $H$ , но и в  $R$ , то есть  $L = L(t, q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_\alpha)$  и  $R = R(t, q_i, \dot{q}_i, p_\alpha)$ . Однако из уравнений Рауса следует:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \equiv \text{const} \quad (\alpha = m + 1, \dots, n)$$

т.е. обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам - постоянны, тогда функция Рауса может быть записана в виде :

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, c_\alpha)$$

Тогда уравнения Рауса для позиционных координат (51) образуют так называемую *автономную систему* уравнений (т.е. систему дифференциальных уравнений, не содержащую «лишних» неизвестных функций, которые должны быть определены предварительно, до интегрирования системы уравнений). Таким образом, данная система уравнений может интегрироваться совершенно самостоятельно, независимо от других уравнений Рауса, то есть она замкнута, имеет порядок  $2m$ .

После интегрирования (51) получим:

$$q_i = q_i(t, c_i, c'_i, c_\alpha) \quad (i = 1, \dots, m)$$

где  $c_i, c'_i$  - являются постоянными произвольными. После их подстановки в функцию Рауса получим  $R = R(t, c_i, c'_i, c_\alpha)$ , откуда находим зависимости циклических координат от времени из квадратур:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \quad \Rightarrow \quad q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha$$

Описанная процедура понижения порядка системы дифференциальных уравнений движения с использованием циклических координат является одним из наиболее эффективных и практически важных способов, применяемых при интегрировании уравнений движения. Поэтому исключительно важным является такой выбор обобщенных координат, при котором обеспечивается наибольшее число циклических координат. Всякая симметрия задачи, допускающая такой выбор обобщенных координат, приводит к существованию первых интегралов  $p_\alpha = \text{const}$  (циклических) и, соответственно, позволяет свести исследование движения к рассмотрению системы уравнений с меньшим числом обобщенных координат. Например, для обобщенно-консервативных систем с 2-мя степенями свободы, наличие одной циклической координаты позволяет свести задачу интегрирования уравнений движения к квадратурам (т.е. интегралам обычным) (т.е. обобщенный интеграл энергии + циклический интеграл = новые уравнения движения).

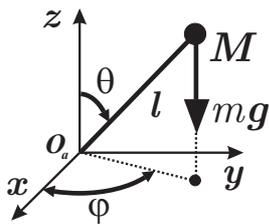


Рис. 87.

**Пример.** Движение сферического маятника.

Сферический маятник представляет собой материальную точку, которая движется в однородном поле тяжести, оставаясь на сфере постоянного радиуса (рис. 87).

Считаем, что точка имеет массу  $m$  и закреплена на одном из концов невесомого стержня длины  $l$ , другой конец стержня шарнирно закреплена в точке  $O_a$  (неподвижной). Трением пренебрегаем.

Сферический маятник, очевидно, имеет 2 степени свободы, поэтому естественно за обобщенные координаты взять углы  $\varphi$  и  $\theta$ .

$$\text{Кинетическая энергия точки равна: } T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_\varphi^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}m[(l \sin \theta \dot{\varphi})^2 + (l\dot{\theta})^2]$$

$$\text{Потенциальная энергия: } \Pi = mgl \cos \theta.$$

Система очевидно консервативна (система голономна со стационарной связью и  $\Pi = \Pi(\theta)$  от времени не зависит. Следовательно, справедлив интеграл энергии:

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] + mgl \cos \theta = h \quad | \cdot \frac{2}{ml}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{l[\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] + 2g \cos \theta = h}$$

Кроме того, из вида  $T$  легко обнаружить, что от  $\varphi$  она не зависит. Следовательно,  $\varphi$  является циклической координатой этой системы, значит, справедлив циклический интеграл:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$$

Так как  $\Pi = \Pi(\theta)$  – от скоростей не зависит, то поскольку  $L = T - \Pi$  получим:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2 \theta \dot{\varphi} = \alpha} = \text{const}$$

Отсюда имеем

$$p_\varphi = ml^2\alpha \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}$$

Можно рассмотреть функцию Рауса:

$$\begin{aligned} R &= p_\varphi \cdot \dot{\varphi} - L = ml^2\alpha \cdot \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} - T + \Pi = \frac{ml^2\alpha^2}{\sin^2 \theta} - \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{ml^2}{2}\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \theta = \\ &= \frac{ml^2\alpha^2}{\sin^2 \theta} - \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{ml^2}{2}\sin^2 \theta \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \theta}\right)^2 + mgl \cos \theta = -\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2\alpha^2}{2\sin^2 \theta}(2-1) + mgl \cos \theta \\ &\Rightarrow \boxed{R = -\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2\alpha^2}{2\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta} \end{aligned}$$

Уравнения Рауса определенные только для позиционной координаты  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

отвечают системе как будто с одной степенью свободы (с обобщенной координатой  $\theta$ ) потому что координата  $\varphi$  – игнорируется. Анализируя слагаемые в выражении для  $R$  нетрудно установить, что первое слагаемое, зависящее от скорости  $\dot{\theta}$  соответствует кинетической энергии  $T_*$ , а все остальные слагаемые – потенциальной энергии  $\Pi_*$  этой новой системы. Т.е. представляя функцию Рауса для уравнений Рауса по позиционной координате в виде:

$$R = -(T_* - \Pi_*)$$

(по аналогии с функцией Лагранжа  $L = T - \Pi$  для уравнений Лагранжа  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ , где «-» присутствует для обеспечения соответствия  $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial(-R)}{\partial \dot{\theta}}$  и  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial(-R)}{\partial \theta}$ ) уравнения Рауса от этого не изменятся в силу их однородности:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T_* - \Pi_*)}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial(T_* - \Pi_*)}{\partial \theta} = 0$$

но здесь уже стоит другая функция Лагранжа  $L_* = T_* - \Pi_*$  новой **приведенной системы консервативной системы с кинетической энергией  $T_*$  и приведенным потенциалом, называемым также потенциалом Рауса  $\Pi_*$** :

$$T_* = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2, \quad \Pi_* = \frac{ml^2\alpha^2}{2\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

В действительности же нам нет необходимости рассматривать уравнение Рауса, которое является дифференциальным уравнением движения системы – 2-го порядка. У нас же есть интегралы:

$$l\dot{\theta}^2 + l\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + 2g \cos \theta = h, \quad \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \alpha$$

Исключим из интеграла энергии пользуясь циклическим интегралом  $\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}$ :

$$l\dot{\theta}^2 + \frac{l\alpha^2}{\sin^2 \theta} + 2g \cos \theta = h$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение для  $\theta$ . Введем обозначение:  $u = \cos \theta$

$$\Rightarrow \dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}, \quad \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - u^2$$

Подставляя эту замену в интеграл энергии получим:

$$l\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + l\alpha^2 + 2g \cos \theta \sin^2 \theta = h \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow l\dot{u}^2 + l\alpha^2 + (2gu - h) \sin^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{u}^2 = \frac{h - 2gu}{l}(1 - u^2) - \alpha^2$$

Выражение сложное, является нелинейным дифференциальным уравнением на  $u(t)$ , но его уже можно анализировать. Обозначим

$$\dot{u}^2 = \frac{g}{l}G(u) = \left(\frac{h}{l} - 2\frac{g}{l}u\right)(1 - u^2) - \alpha^2 = \left(2\frac{g}{l}u - \frac{h}{l}\right)(u^2 - 1) - \alpha^2 = \frac{g}{l}\left(2u - \frac{h}{g}\right)(u^2 - 1) - \alpha^2$$

$$\Rightarrow G(u) = \left(2u - \frac{h}{g}\right)(u^2 - 1) - \gamma^2$$

где  $\gamma^2 = \alpha^2 \frac{l}{g}$ . Тогда обозначая  $u_1, u_2, u_3$  корни уравнения  $G(u) = 0$  (т.к.  $G(u)$  многочлен 3-ей степени, значит имеет 3 корня) можем представить её в виде:

$$G(u) = 2(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

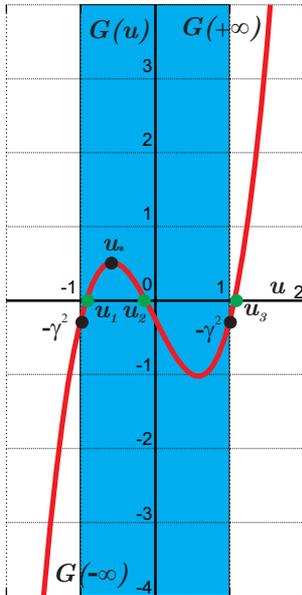


Рис. 88.

Заметим:  $G(+\infty) = +\infty$ ,  $G(-\infty) = -\infty$ ,  $G(\pm 1) = -\gamma^2 \leq 0$ .

Т.к.  $G(u)$  — непрерывная функция, то хотя бы один из корней, например  $u_3$ , должен быть не меньше 1. Но на отрезке  $-1 \leq u \leq 1$ , который нас и интересует (так как  $|u| = |\cos \theta| \leq 1$ ) должны быть значения  $u$ , при которых  $G(u)$  положительна или хотя бы обращается в нуль, т.к. в противном случае равенство  $\dot{u}^2 = \frac{g}{l}G(u)$  невозможно для действительных значений  $u$ . Величина же  $u$  обязательно должна быть действительной, так как движение маятника, безусловно, физически существует. Таким образом, вытекает, что  $G(u)$  имеет ровно 2 вещественных корня  $u_1, u_2$  на отрезке  $-1 \leq u \leq 1$  и один корень  $u_3 \geq 1$ . График  $G(u)$  — представлен на рис. 88.

Так как для реального движения  $G(u) \geq 0$ , то интересующий нас интервал изменения  $u$  определяется неравенством  $u_1 \leq u \leq u_2$ , ему соответствует область изменения угла:  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , отвечающая реальному движению маятника.

Обозначим:  $\beta = \frac{h}{g}$ , т.е.  $G(u) = (2u - \beta)(u^2 - 1) - \gamma^2$ . Рассмотрим

движение, отвечающее различным значениям постоянных  $\gamma$  и  $\beta$ .

Сразу отметим, что из условий  $G(u) \geq 0$ ,  $-1 \leq u \leq 1$  следует, что величина  $\beta$  не может быть совсем произвольной, а должна удовлетворять неравенству  $\beta \geq -2$ . В самом деле

$$(2u - \beta)(u^2 - 1) \geq \gamma^2 \geq 0 \Rightarrow 2u - \beta \leq 0 \Rightarrow \beta \geq 2u$$

Если  $\beta = -2 \Rightarrow G(u) = 2(u + 1)(u^2 - 1) - \gamma^2 \geq 0, \Rightarrow 0 \geq 2(u + 1)(u^2 - 1) \geq \gamma^2 \geq 0$ , т.е.  $\gamma = 0$ ,  $u = -1 \Rightarrow \alpha = 0$ ,  $\theta = \pi$  что соответствует положению равновесия в вертикальном нижнем положении.

Найдем максимум  $u_*$  функции  $G(u)$ :

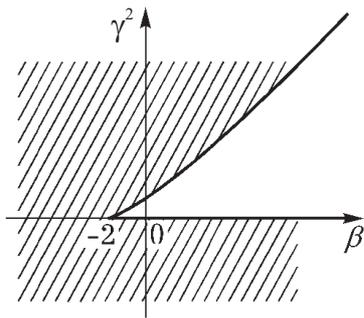
$$G'(u) = 2(u^2 - 1) + (2u - \beta)2u = 0 \Rightarrow u^2 - 1 + 2u^2 - \beta u = 0 \Rightarrow 3u^2 - \beta u - 1 = 0$$

$$D = \beta^2 + 4 \cdot 3 = \beta^2 + 12 \Rightarrow u = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 12}}{6}$$

$$\text{если } \beta = -2 \Rightarrow u = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1/3, & \text{не подходит;} \\ -1, & \text{подходит.} \end{cases}$$

Итак:  $u_* = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 12}}{6}$

Обозначим  $G(u_*) = f(\beta) - \gamma^2$ , где  $f(\beta) = (2u_* - \beta)(u_*^2 - 1)$ .



Для реального движения необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $G(u_*) \geq 0$ , т.е. чтобы  $f(\beta) \geq \gamma^2 \geq 0$ . Учитывая, что  $u_*^2 - 1 \leq 0$  функция  $f(\beta)$  монотонно возрастает с ростом  $\beta$ .

На плоскости параметров  $(\beta, \gamma^2)$  (рис. 89) значения параметров  $\gamma, \beta$ , удовлетворяющие последнему неравенству соответствуют незаштрихованной области (включая границы). Верхняя граница области задается уравнением  $\gamma^2 = f(\beta)$ ; она касается оси  $\beta$  в точке  $(-2, 0)$ , а при  $\beta \rightarrow \infty \Rightarrow f(\beta) \sim \beta$  имеет асимптоту  $\gamma^2 = \beta$ .

Рис. 89.

Для классификации движения маятника рассмотрим 3 возможных случая.

1.  $\gamma = \alpha = 0$ , тогда из циклического интеграла  $\dot{\varphi} \sin \theta = 0$ , значит  $\varphi \equiv \varphi_0 = \text{const}$  и мы приходим к задаче о движении математического маятника в плоскости  $\varphi = \varphi_0$  ( $\gamma^2 = 0$  – нижняя граница области);
2.  $\gamma^2 = f(\beta)$  – верхняя граница области, т.е.  $G(u_*) = 2(u_* - u_1)(u_* - u_2)(u_* - u_3)$  откуда неизбежно вытекает  $u_1 = u_2 = u_*$ , то есть корни  $u_1, u_2$  совпадают и мы приходим к задаче о коническом маятнике. Угол  $\theta \equiv \theta_* = \arccos u_* > \pi/2$  – постоянен. Материальная точка движется по окружности радиусом  $l \sin \theta_*$  в горизонтальной плоскости  $z = z_* = l \cos \theta < 0$ ;
3.  $0 < \gamma^2 < f(\beta)$ , тогда угол  $\theta$  меняется в промежутке  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ . На сфере радиусом  $l$  с центром в точке подвеса маятника значения  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  выделяют 2 круга, лежащих в параллельных плоскостях  $z = z_1 = l \cos \theta_1, z = z_2 = l \cos \theta_2$ . Материальная точка, закрепленная на конце стержня, движется по сфере между плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , попеременно касаясь этих 2-х плоскостей (рис. 90).

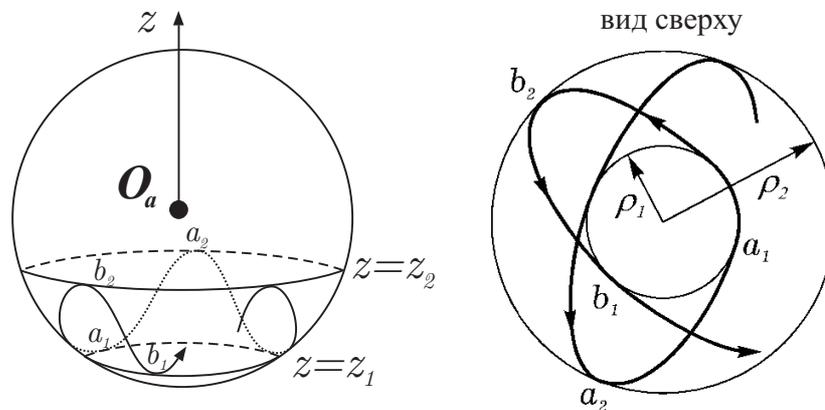


Рис. 90.

Причем среднее положение точки всегда находится ниже горизонтальной плоскости, проходящей через  $O_a$  (точку подвеса маятника), то есть  $z_1 + z_2 < 0$  или  $u_1 + u_2 < 0$ . Чтобы убедиться приравняем коэффициенты при 1-ой степени  $u$  в выражениях  $G(u)$ :

$$\begin{aligned}
 G(u) &= (2u - \beta)(u^2 - 1) - \gamma^2 &= & G(u) = 2(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \\
 &\Downarrow && \Downarrow \\
 &-2 &= & 2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) \\
 \Rightarrow \quad u_3 &= -\frac{1 + u_1u_2}{u_1 + u_2} &\text{т.к.} \quad u_3 > 1 > 0, \quad |u_1u_2| < 1 &\Rightarrow \quad \underline{u_1 + u_2 < 0}
 \end{aligned}$$

Из соотношения  $\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}$  видно, что угол  $\varphi$  в рассмотренном случае либо монотонно возрастает ( $\alpha > 0$ ), либо монотонно убывает ( $\alpha < 0$ ). На рис. 90 показана проекция траектории материальной точки на горизонтальную плоскость для движения соответствующего объемной картинке, когда  $z_1$  и  $z_2$  лежат ниже точки подвеса (принято  $\alpha > 0$ ). Эта проекция поочередно касается окружностей  $\rho_1 = l \sin \theta_1$ ,  $\rho_2 = l \sin \theta_2$  и напоминает собой движение по эллипсу, большая полуось которого вращается в горизонтальной плоскости в направлении движения. Для полного интегрирования уравнений движения используется техника с участием эллиптических функций.

## ЛЕКЦИЯ 25

### ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА (ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ). СКОБКИ ПУАССОНА. КРИТЕРИЙ «ИНТЕГРАЛЬНОСТИ» ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЯКОБИ-ПУАССОНА. ИНВОЛЮЦИЯ.

Законы сохранения энергии, импульсов — являются в математическом смысле интегралами движения (обобщенные энергии, циклические импульсы). Ранее мы видели, что наличие у системы интегралов движения (законов сохранения) позволяет существенно упростить задачу интегрирования системы дифференциальных уравнений движения, например, свести задачу только для позиционных координат сформировав замкнутую (автономную) систему. Пуассон указал способ определения интегралов канонических уравнений, основанный на исследовании системы двух и более известных интегралов этих уравнений.

Для начала немного общих сведений. Функцию  $f(t, q, p)$  называют **интегралом канонических уравнений**:

$$\frac{dq_\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{dp_\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (53)$$

если она сохраняет своё постоянное значение на любом решении этих уравнений  $q_\sigma = q_\sigma(t)$ ,  $p_\sigma = p_\sigma(t)$ :

$$\boxed{f(t, q_\sigma(t), p_\sigma(t)) = \text{const}}$$

Нередко именно это соотношение и называют интегралом. Иначе говоря, для того чтобы функция  $f(t, q, p)$  была интегралом, необходимо и достаточно чтобы ее полная производная по времени, с учетом уравнений Гамильтона (53) (то есть на решении (53)) тождественно равнялась нулю:

$$\frac{df}{dt} \equiv 0$$

Примерами интегралов могут служить функция Гамильтона  $H(q, p)$  для обобщенно-консервативных систем (обобщенный интеграл энергии) и циклический импульс  $p_\alpha$  (для системы с циклической координатой  $q_\alpha$ ).

Легко видеть, что для всякой совокупности интегралов  $\{f_1, \dots, f_m\}$  интегралом будет также и любая функция этих величин. Поэтому представляют интерес только независимые интегралы (т.е. не выражающиеся друг через друга). **Систему интегралов**

$$f_i(t, q, p) = c_i \quad (i = 1, \dots, m < 2n) \quad (54)$$

называют **независимой**, если прямоугольная функциональная матрица:

$$F = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial q_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial p_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_m / \partial q_1 & \cdots & \partial f_m / \partial p_n \end{pmatrix}$$

имеет ранг равный  $m$  (аналогично свойству при введении обобщенных координат). В этом случае из системы интегралов (54) можно выразить  $m$ -штук величин  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  через остальные координаты, импульсы, время и постоянные.

**Систему независимых интегралов** (54) называют **полной**, если число интегралов совпадает с числом координат и импульсов, то есть  $m = 2n$ . С точки зрения приведенной выше функциональной матрицы, условие полноты системы интегралов (54) очевидно можно представить в виде неравенства:

$$\det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \neq 0$$

(где  $x_j = q_j, p_j$ ). Тогда, естественно, для полной системы интегралов можно выразить все координаты и все импульсы через время и постоянные  $c_i$  (из интегралов):

$$q_\sigma = q_\sigma(t, c_1, \dots, c_{2n}), \quad p_\sigma = p_\sigma(t, c_1, \dots, c_{2n}) \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

то есть получить общее решение уравнений движения. Таким образом, по известной системе  $2n$  независимых интегралов определяются все движения системы. Если известно меньшее число независимых интегралов, то они дают только частичное представление о движениях системы. Это представление будет тем полнее, чем больше интегралов. Отсюда ясно, что отыскание возможно большего числа независимых интегралов представляет важную механическую задачу.

В ряде случаев бывает важно знать, является или не является заданная функция интегралом уравнений движения. Критерий «интегральности» функции удобно выразить в терминах, так называемых скобок Пуассона.

Пусть  $\varphi(t, q, p)$  и  $\psi(t, q, p)$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции гамильтоновых переменных  $\{t, q_\sigma, p_\sigma\}$ . Комбинация частных производных этих функций вида:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} \right) \quad (55)$$

называется **скобкой Пуассона**. Отметим основные свойства скобок Пуассона. Пусть  $\varphi(t, q, p)$ ,  $\psi(t, q, p)$  и  $\chi(t, q, p)$  – дважды непрерывно-дифференцируемые функции

1.  $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$
2.  $(c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi) \quad (c = \text{const})$
3.  $(\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi)$
4.  $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$
5.  $((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = 0$  – **тождество Пуассона**

Первые 4 свойства непосредственно вытекают из определения (55) скобки Пуассона. Пятое свойство тоже можно доказать громоздким, хотя и несложным, непосредственным вычислением (слагаемые имеют вид произведений вторых производных на две производные 1-го порядка, достаточно показать, что левая часть не содержит производных 2-го порядка).

**Критерий «интегральности» функции.** Для того чтобы функция гамильтоновых переменных  $f(t, q, p)$  была интегралом канонических уравнений необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0$$

*Доказательство.* Необходимость непосредственно вытекает из понятия (определения) интеграла гамильтоновых уравнений (53). В самом деле, пусть  $f(t, q, p)$  – интеграл, то есть на любом решении гамильтоновых уравнений (53) она обращается в постоянную:

$$f(t, q(t), p(t)) = \text{const}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{df}{dt} = 0.$$

Вычисляя полную производную по времени, с учетом уравнений движения имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \frac{\partial q_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_\sigma}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \right) = 0$$

Используя обозначение (55) для скобки Пуассона получим:  $\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0$ .

Достаточность. Если наоборот для функции  $f(t, q, p)$  задано это свойство, то с учетом уравнений движения Гамильтона (53) его можно представить в виде  $\frac{df}{dt} = 0$ , следовательно,  $f(t, q, p) \equiv \text{const}$  на любом решении (53). То есть эта функция – интеграл.  $\square$

Имеет место следующая замечательная теорема:

**Теорема Якоби-Пуассона.** Если функции  $f_1(t, q, p)$  и  $f_2(t, q, p)$  являются интегралами канонических уравнений движения, то их скобка Пуассона  $(f_1, f_2)$  также будет интегралом этих уравнений. Т. е. если

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1, H) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2, H) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} + ((f_1, f_2), H) = 0$$

*Доказательство.* Преобразуем левую часть этого равенства. По 4-му свойству скобок Пуассона имеем:

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right) + \left( f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right)$$

Далее заменим производные  $\frac{\partial f_1}{\partial t}$  и  $\frac{\partial f_2}{\partial t}$  их выражениями через скобки Пуассона и воспользуемся свойствами 1 и 2, тогда получим:

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} = -(f_1, H), f_2 + (f_1, -(f_2, H)) = ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1)$$

Подставляя полученное выражение в левую часть требуемого равенства получим:

$$((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) + ((f_1, f_2), H)$$

которое согласно тождеству Пуассона, тождественно равно нулю.  $\square$

В задачах механики нередко случается, что несколько интегралов канонических уравнений легко устанавливаются (интеграл энергии, циклический интеграл). Тогда теорема Пуассона дает простое правило по двум независимым интегралам  $f(t, q, p)$  и  $g(t, q, p)$  получать новый интеграл в виде скобки Пуассона от этих функций:  $(f, g)$ . Таким путем в некоторых благоприятных случаях удастся найти полную систему интегралов и тем самым определить все движения системы.

Может показаться, что теорема Якоби-Пуассона всегда позволяет по двум известным интегралам найти еще один первый интеграл, затем еще один и так далее, до тех пор, пока не будет получена полная система интегралов, необходимая для построения общего интеграла (решения) канонических уравнений. Это далеко не так. На практике скобка Пуассона может быть либо константой (например, тождественный нуль), либо функцией известных исходных интегралов, т.е. нового независимого интеграла не дает.

Если для некоторой системы интегралов  $\{f_1, \dots, f_m\}$  скобка Пуассона для любой пары функций обращается в нуль:  $(f_i, f_j) = 0$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ), то такую систему называют **инволюционной системой интегралов** (или говорят *находится в инволюции*). Для того чтобы можно было надеяться получить из 2-х интегралов много или даже все интегралы, недостающие для построения общего решения, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал или содержал – физическую сущность, специфику именно данной задачи. Если за исходные интегралы брать интегралы, вытекающие из основных,

общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби-Пуассона.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Для начала выясним, при каких условиях сама функция Гамильтона будет интегралом гамильтоновых уравнений движения. Из критерия «интегральности»:  $\frac{\partial H}{\partial t} + (H, H) = 0$  и очевидного равенства  $(H, H) = 0$  следует, что это будет при  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , т.е. необходимо чтобы функция Гамильтона не зависела явно от времени. Значит система должна быть обобщенно-консервативной. Таким образом, пришли к уже известному результату: гамильтонова функция является интегралом для обобщенно-консервативных систем и этот интеграл выражает обобщенный интеграл энергии:  $H(q, p) = h$ .

Теперь пусть у обобщенно-консервативной системы, наряду с  $H(q, p) = h$ , есть еще интеграл  $f(t, q, p)$ . Тогда в соответствии с теоремой Пуассона интегралом будет и скобка Пуассона  $(f, H)$ . Если же воспользоваться критерием «интегральности» для  $f(t, q, p)$ , то этот новый интеграл этот можно представить в виде

$$(f, H) = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Таким образом, если  $f(t, q, p)$  – интеграл канонических уравнений обобщенно-консервативной системы, то интегралом будет и  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , а, следовательно, и  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  и т.д. Если же  $f(t, q, p)$  от времени явно не зависит, то  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  и скобка  $(f, H) = 0$ , т.е. нового интеграла не дает.

**Пример.** Движение материальной точки под действием силы упругости (рис. 91).

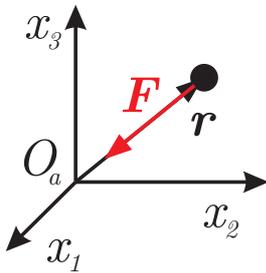


Рис. 91.

$\mathbf{F} = -k^2 m \mathbf{r}$  – упругая сила – пропорциональна расстоянию до центра, и направлена противоположно радиус-вектору, т.е. зависит только от положения точки, значит – потенциальная сила. В покомпонентном виде:  $F_\alpha = -k^2 m x_\alpha$ ,  $(\alpha = 1, 2, 3)$  тогда:

$$d\Pi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} dx_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^3 F_\alpha dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 k^2 m x_\alpha dx_\alpha = \frac{k^2 m}{2} \sum_{\alpha=1}^3 dx_\alpha^2$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{k^2 m}{2} \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2 \quad \text{– потенциал}$$

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^3 \dot{x}_\alpha^2 \Rightarrow p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} = m \dot{x}_\alpha \Rightarrow \dot{x}_\alpha = \frac{p_\alpha}{m} \Rightarrow T = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha^2$$

Материальная точка – консервативная система, значит

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha^2 + \frac{k^2 m}{2} \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{p_\alpha^2}{m} + k^2 m x_\alpha^2 \right)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_\alpha}{m}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = -k^2 m x_\alpha$$

Кроме того:  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{p_\alpha^2}{m} + k^2 m x_\alpha^2 \right)$  – интеграл энергии.

Нетрудно убедиться, что выражения

$$f_\alpha(t, x, p) = x_\alpha \sin kt + \frac{p_\alpha}{mk} \cos kt$$

являются интегралами гамильтоновых уравнений:

$$\frac{d}{dt} f_\alpha = \dot{x}_\alpha \sin kt + x_\alpha k \cos kt + \frac{\dot{p}_\alpha}{mk} \cos kt - \frac{p_\alpha}{mk} k \sin kt = \left( \dot{x}_\alpha - \frac{p_\alpha}{m} \right) \sin kt + \left( x_\alpha k + \frac{\dot{p}_\alpha}{mk} \right) \cos kt = 0$$

Значит  $f_\alpha(t, x, p) = c_\alpha$  на решении уравнений Гамильтона. Используя теорему Пуассона:  $(f_\alpha, H)$  – интеграл и из критерия «интегральности»  $\frac{\partial f}{\partial t} = -(f, H)$  установим 3 других независимых интегралов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = x_\alpha \cos kt - \frac{p_\alpha}{mk} \sin kt = g_\alpha(t, x, p)$$

Значит  $g_\alpha(t, x, p) = b_\alpha$  на решении уравнений Гамильтона.

Система интегралов  $\{f_\alpha, g_\alpha\}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) – независима и определяет  $x_\alpha, p_\alpha$  через  $t$  и  $c_\alpha, b_\alpha$ .

## ЛЕКЦИЯ 26

### УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА(-ДИРИХЛЕ). ВЛИЯНИЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ.

Рассмотрим голономную консервативную систему, положение которой задается обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$  ( $n$  - число свободы). Будем предполагать, что система находится в равновесии. Напомним, что *положением равновесия* называется такое положение (движение), в котором система в начальный момент находится с нулевыми скоростями и все время остается в этом же положении. Ранее мы показывали, что некоторое положение системы  $q_1^*, \dots, q_n^*$  тогда и только тогда является ее положением равновесия, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_\sigma = -\frac{\partial \Pi(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad q_\sigma = q_\sigma^* \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

где  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n)$  - потенциальная энергия системы, которая в случае консервативной системы не зависит явно от времени. Т.е. в положении равновесия  $q_1^*, \dots, q_n^*$  потенциальная энергия достигает экстремума.

Без нарушения общности будем считать, что рассматриваемое положение равновесия находится в начале координат, т.е.  $q_\sigma^* = 0$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ), является заданным положением равновесия, определяемым из системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi(0, \dots, 0)}{\partial q_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

(может быть несколько решений этой системы, т.е. положений равновесия). Тогда координаты любого другого положения системы  $q_1, \dots, q_n$  характеризуют отклонения этого положения от положения равновесия и потому сами называются **отклонениями системы**. Если же рассматриваемое положение равновесия не в начале координат – сдвинем начало в положение равновесия.

Если систему вывести из положения равновесия, сообщив ее точкам какие-то малые начальные отклонения от положений равновесия и малые начальные скорости, то в последующем движении точки системы, либо все время остаются вблизи положений равновесия, либо удаляются от этих положений. В первом случае положение равновесия будет устойчивым, а во втором - неустойчивым.

Дадим строгое определение устойчивости положения равновесия. **Положение равновесия**  $q_1 = \dots = q_n = 0$  (или *состояние равновесия*) называется **устойчивым**, если при достаточно малых начальных отклонениях  $q_\sigma^0 = q_\sigma(t_0)$  и достаточно малых начальных скоростях  $\dot{q}_\sigma^0 = \dot{q}_\sigma(t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$ , система во все время движения, не выходит из пределов сколь угодно малой (заданной наперед!) окрестности положения равновесия, имея при этом сколь угодно малые скорости  $\dot{q}_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Иными словами для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta > 0$  (т.е.  $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), что для всех моментов времени  $t > t_0$  выполняются неравенства:

$$|q_\sigma(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_\sigma(t)| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (*)$$

при условии, что в начальный момент  $t = t_0$ :

$$|q_\sigma^0| < \delta, \quad |\dot{q}_\sigma^0| < \delta \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (**)$$

Это определение удобно геометрически интерпретировать в  $2n$ -мерном **пространстве состояний**  $\{q_\sigma, \dot{q}_\sigma\}$

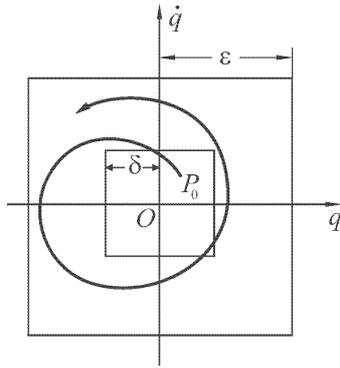


Рис. 92.

На рис. 92 для случая  $n = 1$  изображены 2 окрестности начала координат, задаваемые неравенствами  $(*)$ - $(**)$ . В случае устойчивого состояния равновесия любое движение, начинающееся в момент  $t_0$  внутри квадрата со стороной  $2\delta$ , будет происходить все время внутри квадрата со стороной  $2\epsilon$ .

### Примеры

1. Тяжелый шарик может двигаться по ободу, имеющему форму окружности и расположенному вертикальной плоскости (рис. 93). Имеются 2 положения равновесия: наинизшая и наивысшая точки окружности. Из них первое представляет собой устойчивое, второе – неустойчивое положение равновесия – это очевидно.

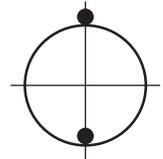


Рис. 93.

2. *Линейный осциллятор* – груз массы  $m$  на пружине жесткости  $c$ , двигается по горизонтальной прямой  $q$  (рис. 94). Положение равновесия устойчиво.

$$T = \frac{m}{2}, \quad \Pi = \frac{c}{2}q^2, \quad \text{дифференциальное уравнение движения: } m\ddot{q} + cq = 0$$

имеет решение  $q = q_0 \cos \omega t - \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t$  (начальный момент времени  $t_0 = 0$ )

Поэтому  $|q(t)| \leq |q_0| + \frac{1}{\omega}|\dot{q}_0| < \epsilon$ ,  $|\dot{q}(t)| \leq \omega|q_0| + |\dot{q}_0| < \epsilon$  если только  $|q_0| < \delta$ ,  $|\dot{q}_0| < \delta$ , где, например  $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2\omega}, \frac{\omega\epsilon}{2}\right)$ .

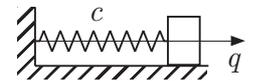


Рис. 94.

В последнем примере устойчивость положения равновесия устанавливалась с помощью конечных уравнений, полученных путем интегрирования дифференциальных уравнений движения. Эти уравнения движения дали нам зависимость отклонений  $q$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}$  от времени  $t$  и начальных данных  $q_0, \dot{q}_0$ . В более сложных (в частности нелинейных) задачах определение этих конечных уравнений движения и их исследование весьма затруднительно. Поэтому представляют интерес критерии устойчивости положения равновесия, не требующие предварительного интегрирования дифференциальных уравнений движения системы. Еще Торричелли (1644 год) было известно, что положение системы тел, находящихся под действием сил тяжести, будет устойчивым, если центр тяжести этой системы занимает наинизшее из возможных положений. Лагранж обобщил этот принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил и установил следующий критерий устойчивости положения равновесия консервативной системы. На самом деле это достаточное (но не необходимое) условие устойчивости.

**Теорема Лагранжа.** *Если в положении равновесия консервативной системы её потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положения равновесия устойчиво.*

**Замечание:** иногда фразу «локальный» заменяют на «изолированный», т.к. подразумевается, что в окрестности положения равновесия нет других положений равновесия.

*Доказательство.*

1. Как уже отмечалось, без ограничения общности, можем считать, что рассматриваемое положение равновесия находится в начале координат, т.е. все обобщенные координаты равны нулю:  $q_1 = \dots = q_n = 0$  (перенесем начало).

2. В силу того, что потенциальная энергия  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной (до постоянного слагаемого) примем  $\Pi(0, \dots, 0) = 0$ , т.е. в положении равновесия потенциальная энергия тоже нуль (т.е. подберем эту константу должным образом).

Так как в положении равновесия, по условию теоремы, функция  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$  имеет строгий локальный минимум, то в некоторой окрестности этого положения равновесия, определяемой числом  $\Delta$ :

$$|q_\sigma| < \Delta \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad (56)$$

выполняется строгое неравенство:

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) > \Pi(0, \dots, 0) = 0 \quad (57)$$

если хотя бы одна из величин  $q_\sigma$  - не равна нулю.

Составим выражение для полной механической энергии консервативной системы:

$$E(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T + \Pi = T_2 + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho + \Pi(q_1, \dots, q_n)$$

Как известно, квадратичная форма кинетической энергии  $T_2$  является положительно-определенной функцией обобщенных скоростей, т.е.  $T = T_2 > 0$ , если хотя бы одна из обобщенных скоростей  $\dot{q}_\sigma$  - не равна нулю. Тогда из (57) следует, что полная механическая энергия  $E = T + \Pi$ , при выполнении неравенства (56) строго положительна:

$$E > 0$$

если только не все величины  $q_\sigma, \dot{q}_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) равны одновременно нулю. А т.к. при  $q_\sigma = \dot{q}_\sigma = 0$  имеем  $E(0, 0) = 0$ , то функция  $E$  в начале координат  $2n$ -мерного пространства состояний  $\{q_\sigma, \dot{q}_\sigma\}$  имеет строгий локальный минимум, равный нулю.

Выберем теперь произвольно число  $\varepsilon$ , подчинив его лишь ограничению  $0 < \varepsilon < \Delta$ , и рассмотрим значения полной энергии  $E$  на границе  $\varepsilon$ -окрестности, определяемой неравенствами:

$$|q_\sigma| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_\sigma| < \varepsilon \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

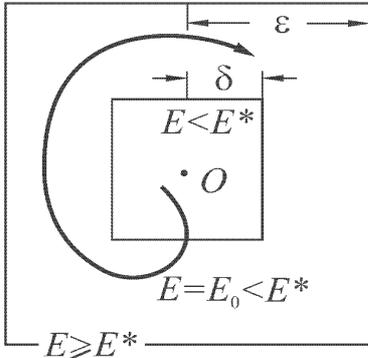


Рис. 95.

Поскольку эта граница представляет собой замкнутое ограниченное множество точек, то непрерывная функция  $E$  достигает на этой границе своего минимума (точной нижней грани)  $E^*$ . Т.к. на границе  $\varepsilon$ -окрестности все значения  $E$  положительны, то положителен и минимум  $E^*$ . Таким образом, на границе  $\varepsilon$ -окрестности имеем (рис. 95):

$$E \geq E^* > 0$$

В силу того, что в начале координат  $q_\sigma = \dot{q}_\sigma = 0$  непрерывная функция  $E$  имеет строгий локальный минимум, равный нулю ( $E(0, 0) = 0$ ), следует что можно найти такое число  $\delta$  ( $0 < \delta \leq \varepsilon$ ), что в этой  $\delta$ -окрестности, где  $|q_\sigma| < \delta, |\dot{q}_\sigma| < \delta$  будет выполняться неравенство:

$$E < E^*$$

Пусть теперь функции  $q_\sigma = q_\sigma(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения системы. Тогда если начальные данные удовлетворяют (\*\*), то во все время движения выполняются неравенства (\*). Действительно, при условии (\*\*) начальная полная энергия равна  $E_0 < E^*$ , а т.к. при движении консервативной системы ее полная энергия постоянна, то при всех  $t \geq t_0$  имеем  $E = E_0 < E^*$ . Поэтому при движении системы, изображающая это движение точка в пространстве состояний  $q_\sigma(t), \dot{q}_\sigma(t)$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) не может достигнуть границы  $\varepsilon$ -окрестности (\*) поскольку на ней  $E \geq E^*$ , а, следовательно, всегда находится внутри этой границы, т.е.  $|q_\sigma(t)| < \varepsilon, |\dot{q}_\sigma(t)| < \varepsilon$ . ■

Данную теорему, изложенную Лагранжем в его «Аналитической механике», нередко связывают с именем (Лежена) Дирихле, который впервые дал ее полное и строгое доказательство.

**Замечание.** Предположим, что изучаемая механическая система – неконсервативна, но получается из консервативной добавлением гироскопических или диссипативных сил или и тех и других вместе. Пусть им отвечают силы  $\tilde{Q}_\sigma(q_\rho, \dot{q}_\rho)$ . Тогда мощность этих сил:

$$\tilde{N} = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \dot{q}_\sigma \leq 0 \quad (|q_\sigma| < \Delta, |\dot{q}_\sigma| < \Delta)$$

Покажем, что обобщенные силы  $\tilde{Q}_\sigma$ , удовлетворяющие этому неравенству, обращаются в нуль, когда все обобщенные скорости  $\dot{q}_\sigma$  равны нулю.

Выберем, как и ранее, за начало координат пространства состояний положение равновесия и предположим, что при каких-либо значениях  $q_\sigma^0$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) обобщенных координат хотя бы одна из обобщенных сил  $\tilde{Q}_\sigma$  не равна нулю при нулевых обобщенных скоростях, т.е.  $\tilde{Q}_k(q_\sigma^0, 0) \neq 0$  ( $k \leq n$ ). Тогда, в силу непрерывности существует окрестность точки  $(q_\sigma, \dot{q}_\sigma = 0)$ , в которой  $\tilde{Q}_k(q_\sigma, \dot{q}_\sigma) \neq 0$  и, следовательно, ее значения имеют один и тот же знак. Но поскольку величины  $q_\sigma$  и  $\dot{q}_\sigma$  – независимы ( $\sigma = 1, \dots, n$ ), то их значения в указанной окрестности пространства состояний можно выбрать так, что  $\sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma(q_\rho, \dot{q}_\rho) \dot{q}_\sigma \geq 0$  (т.е. имеют одинаковый с  $\tilde{Q}_\sigma$  знак), а это противоречит условию на мощность непотенциальных сил.

Таким образом, все  $\tilde{Q}_\sigma(q_\sigma^0, 0) = 0$  при нулевых обобщенных скоростях, а, следовательно, и в начале координат, т.е. в положении равновесия, значит добавление (наличие) гироскопических и диссипативных сил не нарушает равновесия.

Т.к. интеграл энергии (закон сохранения)  $E = T + \Pi = \text{const}$  сохраняется и при гироскопических силах (в отсутствие диссипативных), то приведенное выше доказательство теоремы Лагранжа остается без изменений и при наличии гироскопических сил. Если же существуют диссипативные силы (или диссипативные и гироскопические одновременно), полная энергия  $E = T + \Pi$  убывает при движении системы  $\left(\frac{dE}{dt} = \tilde{N} \leq 0\right)$  и следовательно во время движения вместо равенства  $E = E_0$  имеет место неравенство  $E \leq E_0$ . Но тогда отсюда следует, что во все время движения  $E \leq E^*$  если  $E_0 < E^*$ . Следовательно опять при всех  $t \geq t_0$  справедливы неравенства (\*). Таким образом:

*теорема Лагранжа остается справедливой для неконсервативной системы, полученной из консервативной при добавлении гироскопических и диссипативных сил.*

Если  $\left(\frac{dE}{dt} = \tilde{N} < 0\right)$  – строгое неравенство (определенно-диссипативная система), тогда можно доказать  $E \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} E_0 = 0 \equiv \{q_\sigma = \dot{q}_\sigma = 0\}$  – равновесие – **асимптотическая устойчивость**.

### Признаки неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Теорема Лагранжа дает только достаточные условия устойчивости положения равновесия: если положению равновесия отвечает строгий минимум потенциальной энергии  $\Pi(q_\sigma)$  то оно устойчиво. Это не исключает других устойчивых положений равновесия, в которых функция  $\Pi(q_\sigma)$  не имеет строгого минимума. Необходимые и достаточные условия устойчивости равновесия являются весьма сложным вопросом и до сих пор на него не получено исчерпывающего ответа. В этой связи представляют интерес достаточные

условия неустойчивости равновесия. Первые строгие результаты в решении этого вопроса получены Ляпуновым. Приведем без доказательства две его теоремы. Функцию  $\Pi(q_\sigma)$  предполагаем аналитической в окрестности положения равновесия. Тогда  $\Pi(q_\sigma)$  может быть разложена в ряд Тейлора в этой окрестности (ряд Маклорена):

$$\Pi(q_\sigma) = \Pi_m(q_\sigma) + \Pi_{m+1}(q_\sigma) + \dots$$

где  $m \geq 2$ , а  $\Pi_k(q_\sigma)$  – однородные функции  $k$ -ой степени относительно отклонений  $q_\sigma$ . Такое разложение начинается с членов порядка не ниже второго, т.к.  $\Pi(0)=0$  – по предположению (за счет выбора произвольной постоянной), а  $\Pi_1 = \sum_{\sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}(0)q_\sigma = 0$  – в силу уравнений равновесия.

**Теорема Ляпунова 1.** Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении  $\Pi$  (т.е.  $\Pi_2$ ) в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков то это положение равновесия – неустойчиво.

**Теорема Ляпунова 2.** Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет максимум и это узнается по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия. То это положение равновесия – неустойчиво.

Четаев доказал следующее достаточное условие неустойчивости равновесия.

**Теорема Четаева.** Если потенциальная энергия  $\Pi$  консервативной системы является однородной функцией отклонений  $q_1, \dots, q_n$  и в положении равновесия  $q_1 = \dots = q_n = 0$  не имеет минимума, то это положение равновесия – неустойчиво.

**Пример.** Устойчивость равновесия тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости.

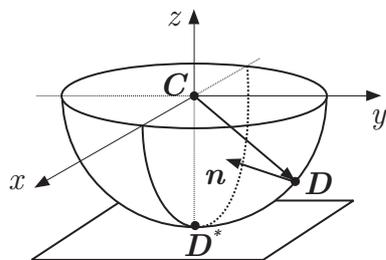


Рис. 96.

Пусть тело ограничено какой-то выпуклой поверхностью  $\sigma$  и общая нормаль (вертикаль) к горизонтальной поверхности и к поверхности  $\sigma$  в точке  $D^*$  содержит центр тяжести  $C$ . Тогда тело на плоскости может находиться в состоянии равновесия, причем в точке  $D^*$  поверхность тела  $\sigma$  соприкасается с плоскостью (рис. 96). Обозначим  $Cxyz$  – жестко связанную с телом систему координат, у которой ось  $Cz$  содержит отрезок  $D^*C$ , а оси  $Cx$  и  $Cy$  направлены параллельно линиям кривизны поверхности  $\sigma$  в точке  $D^*$ . Тогда уравнение поверхности  $\sigma$  в окрестности точки  $D^*$  имеет вид:

$$f \equiv -h - z + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} \right) + \dots = 0$$

Здесь  $x, y, z$  – координаты точки  $D$  поверхности  $\sigma$ , которой тело касается плоскости при малом его отклонении от положения равновесия (качнули),  $h = CD^*$ ,  $r_1$  и  $r_2$  – главные радиусы кривизны поверхности  $\sigma$  в точке  $D^*$  (т.к. поверхность выпукла и целиком находится выше опорной плоскости, то  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ). Многоточие в выражении поверхности означает члены, порядок которых, относительно  $x, y$ , выше членов выписанных явно.

Потенциальная энергия тела вычисляется по формуле:

$$\Pi = mgl$$

где  $l = -\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD}$  – является расстоянием от  $C$  до касательной поверхности тела в точке  $D$ ,  $\mathbf{n}$  – единичная внутренняя нормаль (которая будет нормалью к горизонтальной плоскости, т.е. вертикалью, когда тело повернется к точке  $D$ ),  $\overrightarrow{CD} = (x, y, z)$ .

Определим  $\mathbf{n}$  через градиент поверхности в точке  $D$ :  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  – который является внешним нормальным вектором. Чтобы  $\mathbf{n}$  была внутренней единичной нормалью необходимо  $\mathbf{n} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ .

$$\nabla f = \left( \frac{x}{r_1}, \frac{y}{r_2}, -1 \right) \text{ – с точностью до членов второго порядка малости.}$$

$$\frac{1}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right)}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right)$$

$$\mathbf{n} = -\nabla f \cdot \frac{1}{|\nabla f|} = \left( -\frac{x}{r_1}, -\frac{y}{r_2}, 1 \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) \right] \simeq \left( -\frac{x}{r_1}, -\frac{y}{r_2}, 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) \right)$$

с точности до членов второго порядка малости

$$\Rightarrow l = -\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = \left( \frac{x}{r_1}, \frac{y}{r_2}, -1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) \right) \cdot (x, y, z) = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} - z \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) \right)$$

Из выражения  $f(x, y, z) = 0$  имеем:  $z \simeq -h + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} \right)$

$$\Rightarrow l \simeq \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} - \left( -h + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} \right) \right) - \frac{h}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) = h + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} \right) - \frac{h}{2} \left( \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right)$$

$$\Rightarrow \Pi = mgl \simeq mgh + \frac{mg}{2} \left[ \frac{r_1 - h}{r_1^2} x^2 + \frac{r_2 - h}{r_2^2} y^2 \right]$$

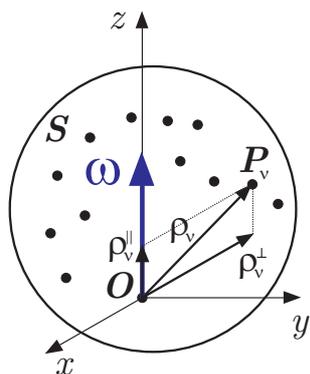
Отсюда и из теоремы Лагранжа следует, что если центр тяжести тела находится ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, то положение равновесия устойчиво (коэффициенты  $> 0$ ). Если же центр тяжести лежит выше хотя бы одного из главных центров кривизны, то, согласно теоремам 1 и 2 Ляпунова имеет место неустойчивость.

## ЛЕКЦИЯ 27

### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РАВНОМЕРНО ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. ПОТЕНЦИАЛ ПЕРЕНОСНОЙ (ЦЕНТРОБЕЖНОЙ) СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим движение системы  $N$  точек, представляемое в виде двух составляющих:

1. переносное движение – равномерное вращение около неподвижной в пространстве оси (движение среды, тела) с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$  – задано;
2. относительно движение – движение во вращающейся среде, теле  $S$  (рис. 97).



Тогда, по теореме сложения скоростей:  $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu^e + \mathbf{v}_\nu^r$   
 где  $\mathbf{v}_\nu^e = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu$  – переносная скорость точки;  
 $\mathbf{v}_\nu^r$  – относительная скорость для точки  $P_\nu$  системы ( $\nu = 1, \dots, N$ )  
 $\boldsymbol{\rho}_\nu$  – радиус-вектор точки  $P_\nu$  с началом в точке  $O$  на оси вращения.

$$\Rightarrow v_\nu^2 = (v_\nu^e)^2 + (v_\nu^r)^2 + 2\mathbf{v}_\nu^e \mathbf{v}_\nu^r$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^e)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^r)^2 + \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \mathbf{v}_\nu^r$$

Рис. 97.

Введем обозначения:

$$T_e = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^e)^2 \text{ – переносная кинетическая энергия движения,}$$

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^r)^2 \text{ – относительная кинетическая энергия движения,}$$

$$T_c = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \mathbf{v}_\nu^r \text{ – добавочная кинетическая энергия движения.}$$

Т.е. в данных обозначениях:

$$T = T_e + T_r + T_c$$

Отметим, что рассматриваемая система не является консервативной потому, т.к. связь, в виде вращающейся заданным (известным) образом, среды – не является стационарной, т.е. система не склерономна. Даже если, как мы и предполагаем, все силы потенциальны, т.е. существует потенциальная энергия  $\Pi(q_\sigma)$ .

Уравнения Лагранжа движения данной системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$$

(используем такой вид уравнений, он более удобен для дальнейшего). Отметим, что координатами  $q_\sigma$  здесь являются обобщенные координаты – определяющие относительное движение:  $\boldsymbol{\rho}_\nu(t) = \boldsymbol{\rho}_\nu(q_1(t), \dots, q_n(t))$

Вычислим подробнее  $T_e$ :

$$T_e = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^e)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_\nu)$$

представим  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{\parallel} + \boldsymbol{\rho}^{\perp}$ , где  $\boldsymbol{\rho}^{\parallel}$  – проекция  $\boldsymbol{\rho}$  на ось вращения,  $\boldsymbol{\rho}^{\perp}$  – проекция  $\boldsymbol{\rho}$  на плоскость перпендикулярно оси вращения (рис. 97), тогда имеем

$$T_e = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}^{\perp}) (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}^{\perp}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}^{\perp})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu}^{\perp})^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\rho_{\nu}^{\perp})^2$$

Окончательно:

$$T_e = \frac{\omega^2}{2} I_z$$

где  $I_z = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\rho_{\nu}^{\perp})^2$  – осевой момент инерции системы относительно оси вращения  $z$ .

Причем  $I_z \neq 0$  в общем случае. Более того, он является функцией  $\rho_{\nu}^{\perp}$  – расстояний точек до оси, т.е. в осях  $Oxyz$ , где декартовы оси  $Ox$ ,  $Oy$  – перпендикулярны оси  $Oz$  вращения и вращаются с телом:

$$(\rho_{\nu}^{\perp})^2 = x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2$$

Таким образом  $I_z = I_z(q_{\sigma})$ , и  $T_e = T_e(q_{\sigma})$  – является функцией только координат точек.

Подставляя выражение  $T$  в уравнения движения получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_r}{\partial q_{\sigma}} - \frac{\partial T_e}{\partial q_{\sigma}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_c}{\partial q_{\sigma}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_{\sigma}}$$

Здесь учли, что  $T_e = T_e(q_{\sigma})$ ,  $T_r = T_r(q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma})$ ,  $T_c = T_c(q_{\sigma}, \dot{q}_{\sigma})$ . Перепишем уравнения в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_r}{\partial q_{\sigma}} = - \frac{\partial (\Pi - T_e)}{\partial q_{\sigma}} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_c}{\partial q_{\sigma}} \right)$$

Рассмотрим подробнее последнее слагаемое с учетом:  $\mathbf{v}_{\nu}^r = \frac{d\boldsymbol{\rho}_{\nu}}{dt} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \dot{q}_{\sigma}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_c}{\partial q_{\sigma}} &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\sigma}} [\mathbf{v}_{\nu}^e \cdot \mathbf{v}_{\nu}^r] - \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} [\mathbf{v}_{\nu}^e \cdot \mathbf{v}_{\nu}^r] \right\} = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \left[ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \cdot \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \dot{q}_{\sigma} \right] - \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \cdot \mathbf{v}_{\nu}^r] \right\} = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \right] - \left[ \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \right) \mathbf{v}_{\nu}^r + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}^r}{\partial q_{\sigma}} \right] \right\} = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}_{\nu}}{dt} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} - \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \right) \mathbf{v}_{\nu}^r - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}^r}{\partial q_{\sigma}} \right\} = \\ &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu}^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}^r}{\partial q_{\sigma}} - (\mathbf{v}_{\nu}^r \times \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}^r}{\partial q_{\sigma}} \right\} \end{aligned}$$

здесь использовали свойство перестановочности операций дифференцирования по времени и по обобщенной координате:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \frac{d\boldsymbol{\rho}_{\nu}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\nu}^r}{\partial q_{\sigma}}$ . Тогда второе и четвертое слагаемые сократятся и в итоге получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial T_c}{\partial q_{\sigma}} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left\{ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu}^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu}^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}} \right\} = 2 \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\nu}^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{\partial q_{\sigma}}$$

Тогда получим, вводя дополнительное обозначение:

$$\boxed{\Pi_r = \Pi - T_e} \quad - \text{приведенный (относительный) потенциал}$$

уравнения Лагранжа для системы равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T_r}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi_r}{\partial q_\sigma} + \tilde{Q}_\sigma} \quad (*)$$

где  $\boxed{\tilde{Q}_\sigma = -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\nu}{\partial q_\sigma}}$  – является **обобщенной силой инерции Кориолиса**.

В самом деле, если рассматривать обычную силу инерции Кориолиса, действующую на  $\nu$ -ую точку системы:  $\mathbf{J}_\nu^c = -m_\nu 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r)$ , то ее работа на относительных возможных перемещениях системы:

$$\begin{aligned} \delta A(\mathbf{J}_\nu^c) &= \sum_{\nu=1}^N \mathbf{J}_\nu^c \cdot \delta \boldsymbol{\rho}_\nu = -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \cdot \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \left( -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\nu}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \delta q_\sigma \end{aligned}$$

Заметим, что сила инерции Кориолиса, как мы уже отмечали ранее, является гироскопической.

В результате у нас получились уравнения движения (\*) для другой, новой, вспомогательной системы, называемой **приведенная система**, совершающей относительное движение, с кинетической энергией

$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (v_\nu^r)^2}$$

и потенциальной энергией:

$$\boxed{\Pi_r = \Pi + \Pi^J}$$

где

$$\boxed{\Pi^J = -T_e = -\frac{\omega^2}{2} I_z}$$

– потенциал переносной (центробежной) силы инерции.

Причем для приведенной системы справедлив закон сохранения **полной механической энергии в относительном движении** (хотя в общем случае она не консервативна):

$$\boxed{E_r = T_r + \Pi_r = \text{const}}$$

В самом деле, анализируя выражение для полной кинетической энергии, из двух альтернативных форм:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_e + T_r + T_c$$

нетрудно установить соответствие:

$T_2 = T_r$  – квадратичная форма кинетической энергии по обобщенным скоростям;

$T_1 = T_c$  – линейная форма кинетической энергии по обобщенным скоростям;

$T_0 = T_e$  – форма нулевой степени кинетической энергии по обобщенным скоростям.

Тогда составляя функцию Гамильтона для исходной системы

$$H = T_2 - T_0 + \Pi$$

убеждаемся, что она явно от времени не зависит:  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , а поскольку  $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$ . Т.е. исходная система не только натуральная (обладающая потенциалом  $\Pi$ ), но и обобщенно-консервативная. Для приведенной же системы функция Гамильтона принимает вид с учетом обозначений:

$$H = T_r - T_e + \Pi = T_r + (\Pi - T_e) = T_r + \Pi_r = E_r = \text{const}$$

Данное выражение можно проинтерпретировать как то, что часть ( $T_e$ ) кинетической энергии исходной системы перешла в потенциальную ( $\Pi - T_e$ ). Т.е. энергия движения (вращения) перешла в потенциальную энергию приведенной системы, которая обладает стационарными связями.

Для силы Кориолиса  $\tilde{Q}_\sigma$  можно указать случаи, когда она равна нулю:

1. если у каждой точки системы только одна степень свободы:  $\rho_\nu = \rho(q_\nu)$

$$\Rightarrow \tilde{Q}_\sigma = -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \frac{\partial \rho_\nu}{\partial q_\sigma} = -2m_\sigma (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\sigma^r) \frac{d\rho_\sigma}{dq_\sigma}$$

$$\text{т.к. } \mathbf{v}_\sigma^r = \frac{d\rho_\sigma}{dt} = \frac{d\rho_\sigma}{dq_\sigma} \dot{q}_\sigma \Rightarrow \tilde{Q}_\sigma = -2m_\sigma \dot{q}_\sigma \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \rho_\sigma}{\partial q_\sigma} \right) \frac{\partial \rho_\sigma}{dq_\sigma} = 0$$

2. если у всей системы одна степень свободы (частный случай 1);

3. если траектории точек в относительном движении, т.е. вектора скоростей точек  $\mathbf{v}_\nu^r$  и возможных перемещений  $\delta \rho_\nu$ , лежат в плоскостях содержащих ось вращения

$$\Rightarrow \delta A(\mathbf{J}_\nu^c) = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{J}_\nu^c \cdot \delta \rho_\nu = \sum_{\sigma=1}^n \tilde{Q}_\sigma \delta q_\sigma = -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \delta \rho_\nu = 0 \Rightarrow \tilde{Q}_\sigma = 0$$

т.к.  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\nu^r) \perp \delta \rho_\nu$  потому что  $\mathbf{v}_\nu^r$  и  $\delta \rho_\nu$  лежат в одной плоскости.

В каждом из данных случаев приведенная система получается консервативной и для нее справедливы уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T_r}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial \Pi_r}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

с кинетической энергией  $T_r$  и потенциальной энергией  $\Pi_r$  (связи геометрические, все силы потенциальные,  $T_r$  и  $\Pi_r$  от времени не зависят).

Если система находится в относительном равновесии т.е.  $\mathbf{v}_\nu^r = 0$  то  $T_r = 0$ . Тогда необходимым и достаточным условием относительного равновесия, как видно из уравнений, является

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial q_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

Для исследования устойчивости относительного равновесия, для рассмотренных случаев консервативной системы, можно использовать теорему Лагранжа для потенциала  $\Pi_r$ , т.е. достаточно чтобы он достигал минимального значения в положении относительного равновесия. Для общего случая, когда  $\tilde{Q}_\sigma \neq 0$  достаточное требование теоремы Лагранжа для устойчивости положения относительного равновесия очевидно сохраняется, т.к.  $\tilde{Q}_\sigma$  является гироскопической силой, добавление которой (т.е. уже неконсервативной приведенной системы, но получаемой из консервативной добавлением гироскопических сил) не портит равновесия и устойчивости.

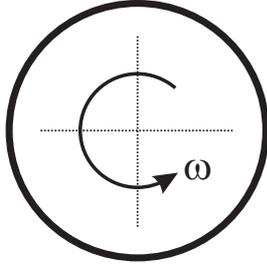


Рис. 98.

**Пример.** Упругое кольцо малой толщины, массой  $m$ , радиусом  $r_0$  (в недеформированном состоянии) раскручено до угловой скорости  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца. Определить радиус  $r$  вращающегося с  $\omega = \text{const}$  кольца, если коэффициент жесткости кольца  $c$ .

**Решение.** Потенциальная энергия упругого кольца:

$$\Pi = \frac{c}{2}(l - l_0)^2$$

где  $l$  и  $l_0$  – длины пружины упругого кольца в текущем (растянутом) состоянии и недеформированном, соответственно. С радиусом они связаны соотношениями:

$$l = 2\pi r, \quad l_0 = 2\pi r_0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = 2\pi^2 c(r - r_0)^2$$

Потенциал центробежной силы инерции:

$$\Pi^J = -\frac{\omega^2}{2} I_z$$

где  $I_z = mr^2$  – осевой момент инерции раскрученного кольца вокруг оси вращения. Тогда приведенный потенциал:

$$\Pi_r = \Pi + \Pi^J = 2\pi^2 c(r - r_0)^2 - \frac{\omega^2}{2} mr^2$$

Относительное равновесие кольца при заданном вращении с  $\omega = \text{const}$  достигается при

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} = 0$$

где  $r$  – взят как обобщенная координата. Отсюда:

$$4\pi^2 c(r - r_0) - \omega^2 mr = 0 \quad \Rightarrow \quad r(4\pi^2 c - \omega^2 m) = 4\pi^2 cr_0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4\pi^2 cr_0}{4\pi^2 c - \omega^2 m}$$

Таким образом, технология работы с рассмотренным случаем движения системы (вращения с постоянной угловой скоростью) и приведения системы к новой – похожи на предыдущее рассуждение в духе Рауса для описания движения склерономной системы с циклическими координатами, но только внешне. По сути же рассматриваются совершенно различные ситуации:

- равновесие и устойчивость консервативной системы в стационарном движении (т.е. устойчивость такого движения – не заданном, конкретном – а только при постоянных позиционных координатах);
- относительное равновесие системы при заданном равномерном вращении (т.е. устойчивость равновесия при движении, при точно заданной угловой скорости).

## ЛЕКЦИЯ 28

### УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ ОКОЛО УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. УРАВНЕНИЕ ЧАСТОТ. ГЛАВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если в начальный момент времени положение склерономной системы выбрано достаточно близким к положению устойчивого равновесия и начальные скорости по абсолютной величине достаточно малы, то на протяжении всего движения будут малыми по абсолютной величине как сами отклонения от положения равновесия, так и обобщенные скорости. Это собственно есть определение устойчивости, ключевым здесь является слово – «малые». Данное обстоятельство позволяет сохранить в дифференциальных уравнения движения только главные линейные члены относительно отклонений (координат) и скоростей, отбросив остальные малые члены более высокого порядка (т.е. пренебречь их влиянием на движение в силу их малости в сравнении с другими). Тогда дифференциальные уравнения движения становятся линейными, т.е. задача линеаризуется. Оказывается те же линеаризованные уравнения движения консервативной системы можно получить более простым путем, если предварительно линеаризовать выражения кинетической и потенциальной энергий, а затем составить лагранжевы уравнения.

Кинетическая и потенциальная энергии для консервативной системы с  $n$  степенями свободы определяются через независимые координаты  $q_\sigma$  и скорости  $\dot{q}_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ):

$$T = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho, \quad \Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n)$$

При этом полагаем, что  $T(q, \dot{q})$  и  $\Pi(q)$  являются аналитическими (сколь угодно дифференцируемыми). Как и раньше, будем полагать, что:

- положению устойчивого равновесия отвечает начало отсчета координат:  $q_\sigma = 0$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) (координаты = отклонения)
- потенциальная энергия в положении равновесия достигает строгого минимума (теорема Лагранжа об устойчивости равновесия);
- потенциальная энергия в положении равновесия обращается в нуль:  $\Pi(0) = 0$ .

Как уже говорилось будем рассматривать движение системы около данного устойчивого положения равновесия, считая обобщенные координаты и скорости малыми по величине всё время движения:

$$|q_\sigma(t)| \ll 1, \quad |\dot{q}_\sigma(t)| \ll 1$$

т.е. рассмотрим случай **малых движений (колебаний) системы**.

Линеаризуем выражения для функций  $T(q, \dot{q})$  и  $\Pi(q)$ . Разложим коэффициенты  $a_{\sigma\rho}(q_1, \dots, q_n)$  в выражении  $T$  по степеням координат в окрестности начала координат, т.е. в ряд Тейлора в окрестности нуля (ряд Маклорена):

$$a_{\sigma\rho}(q_1, \dots, q_n) = a_{\sigma\rho}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{\sigma\rho}}{\partial q_i}(0) \cdot q_i + \dots$$

Обозначая  $a_{\sigma\rho}(0, \dots, 0) = a_{\sigma\rho} = \text{const}$ , устанавливаем, что с точностью до квадратичных членов кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho$$

Аналогично разложим в ряд по степеням координат в окрестности начала координат и потенциальную энергию:

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) = \Pi(0) + \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}(0) \cdot q_\sigma + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\sigma \partial q_\rho}(0) \cdot q_\sigma q_\rho + \dots$$

Многоточие здесь как и ранее для  $T$  обозначает сумму членов 3-го и выше порядков относительно  $q_\sigma$ . Поскольку  $\Pi(0) = 0$  (по условию) и  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}(0) = 0$  (по определению положения равновесия), то разложение потенциальной энергии начинается с квадратичных относительно координат членов. Пренебрегая членами третьего и более высоких порядков, считая их гораздо меньше квадратичного слагаемого, получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} q_\sigma q_\rho$$

где обозначено:  $c_{\sigma\rho} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\sigma \partial q_\rho}(0) = \text{const.}$

Таким образом,  $T$  и  $\Pi$  приближенно представимы в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами. Причем из определения указанных коэффициентов ясно, что матрицы коэффициентов – будут симметричными:

$$a_{\sigma\rho} = a_{\rho\sigma}, \quad c_{\sigma\rho} = c_{\rho\sigma} \quad (\sigma, \rho = 1, \dots, n)$$

Из физического смысла кинетической энергии ясно, что  $T \geq 0$  всегда. Более того  $T > 0$ , если только не все обобщенные скорости равны одновременно нулю:

$$\sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\sigma=1}^n \dot{q}_\sigma^2 > 0$$

следовательно квадратичная форма  $2T = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\rho$  – положительно определена.

Что касается квадратичной формы потенциальной энергии по координатам  $2\Pi = \sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} q_\sigma q_\rho$ , то она тоже положительно определена в силу допущения достижения строгого минимума в начале координат, которое является положением равновесия, – достаточный признак из теоремы Лагранжа, и имеющая значение нуль в этом положении:

$$\sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} q_\sigma q_\rho > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\sigma=1}^n q_\sigma^2 > 0$$

Составим уравнения Лагранжа, пользуясь полученными выражениями  $T$  и  $\Pi$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\rho=1}^n (a_{\sigma\rho} \ddot{q}_\rho + c_{\sigma\rho} q_\rho) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

В этих уравнениях величины  $a_{\sigma\rho}$  называют **инерционными коэффициентами**, а  $c_{\sigma\rho}$  – **коэффициентами жесткости** (или **квазиупругими коэффициентами**). Первые определяют инерционные, а вторые – квазиупругие свойства системы. Это и есть линеаризованные уравнения движений – **уравнения малых колебаний**.

Таким образом задача определения движения в окрестности положения равновесия свелась к решению системы линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Эти линейные уравнения получены из полных уравнений Лагранжа после замены величин  $T$  и  $\Pi$  их приближенными выражениями. Теория малых колебаний консервативной системы вблизи устойчивого положения равновесия опирается на такую линеаризацию и рассматривает приближенные выражения для  $T$  и  $\Pi$  в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами – как точные. Когда говорят «малые колебания», то обычно имеют в виду движения описываемые системой дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации полных (нелинейных) уравнений движения. В случае движений в окрестности положения равновесия консервативной системы, линеаризация сводится, как мы видим, к получению  $T$  и  $\Pi$  в виде квадратичных форм (приближенных выражений).

Для упрощения записи полученные уравнения удобно представить в векторно-матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

причем  $A$  и  $C$  – симметричные матрицы. Тогда кинетическая и потенциальная энергии примут форму:

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} C \mathbf{q} \mathbf{q}$$

а уравнения малых колебаний:

$$\boxed{A \ddot{\mathbf{q}} + C \mathbf{q} = 0}$$

Будем искать частное решение этой линейной системы в виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin(\omega t + \alpha)$$

где  $\mathbf{u}$  – **амплитудный вектор** – вектор-столбец с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$\omega$  и  $\alpha$  – параметры, т.е. в виде *гармонических колебаний* с одной и той же **частотой** –  $\omega$  и **начальной фазой** –  $\alpha$  для всех координат  $q_\sigma$ , но с различными амплитудами  $u_\sigma$ .

Подстановка этого выражения в нашу систему приводит к следующей системе алгебраических уравнений, линейных относительно амплитуд:

$$(C - \lambda A) \mathbf{u} = 0 \quad (\lambda = \omega^2)$$

Поскольку все амплитуды  $u_\sigma$  из  $\mathbf{u}$  не должны одновременно обращаться в нуль, т.е. для существования ненулевого решения этой системы должен быть равен нулю определитель:

$$\boxed{\det(C - \lambda A) = 0}$$

После раскрытия этого определителя получим алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$ , т.е. квадрат частоты  $\omega^2 = \lambda$  должен удовлетворять этому уравнению, точнее определяться из него. Поэтому это уравнение называют **уравнением частот (вековое, характеристическое)**. Каждому корню  $\lambda$  этого уравнения соответствует частное решение указанного выше вида (при произвольном  $\alpha$ ) системы дифференциальных уравнений, при  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Свойство корней  $\lambda$  этого уравнения выражает теорема:

**Теорема.** *Корни уравнения частот  $\lambda$  – вещественны и положительны.*

*Доказательство.* Пусть  $\lambda$  – комплексный корень, т.е. решение (корень) уравнения частот  $\det(C - \lambda A) = 0$ . Тогда ему соответствует комплексный, вообще говоря, вектор  $\mathbf{u}$ , определяемый из уравнения  $(C - \lambda A)\mathbf{u} = 0$ .

В таком случае,  $\bar{\lambda}$  – комплексно сопряженный, также является корнем уравнения частот, что легко понять взяв сопряжение от уравнения частот и учесть, что  $A$  и  $C$  являются вещественными матрицами:  $\overline{\det(C - \lambda A)} = \det(C - \bar{\lambda}A) = 0$ . Соответствующий  $\bar{\lambda}$  амплитудный вектор является  $\bar{\mathbf{u}}$ , т.е. сопряженный к  $\mathbf{u}$  (также получающийся из сопряжения системы уравнений:  $(C - \lambda A)\mathbf{u} = (C - \bar{\lambda}A)\bar{\mathbf{u}} = 0$  и вещественности  $A$  и  $C$ ).

Умножая уравнение  $(C - \lambda A)\mathbf{u} = 0$  скалярно на  $\bar{\mathbf{u}}$ , а уравнение  $(C - \bar{\lambda}A)\bar{\mathbf{u}} = 0$  на  $\mathbf{u}$  получим скалярную систему уравнений:

$$\begin{aligned} (C - \lambda A)\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 &\Rightarrow \lambda = \frac{C\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{A\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \\ (C - \bar{\lambda}A)\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0 &\Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{C\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}}{A\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}} \end{aligned}$$

Далее, в силу симметрии матриц справедливы равенства (перестановочность)

$$C\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} u_{\sigma} v_{\rho} = \sum_{\rho, \sigma=1}^n c_{\rho\sigma} v_{\rho} u_{\sigma} = C\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \text{и} \quad A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Поэтому правые части последних выражений для  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  равны, следовательно  $\lambda = \bar{\lambda}$ , т.е.  $\lambda$  – вещественный.

Теперь для вещественного  $\lambda$  система определяет вещественный амплитудный вектор  $\mathbf{u}$  (может быть так выбран). Тогда из выражения выше:  $\lambda = \frac{C\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  (с учетом  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ )

из положительной определенности квадратичных форм  $\sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} u_{\sigma} u_{\rho} > 0$ ,  $\sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} u_{\sigma} u_{\rho} > 0$  следует  $\lambda > 0$  – положительность этого корня.  $\square$

Таким образом, уравнение частот имеет  $n$  корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Каждому корню  $\lambda_{\sigma}$  соответствует действительная положительная частота  $\omega_{\sigma} = \sqrt{\lambda_{\sigma}}$ , называемая еще **собственной частотой системы**, и действительный амплитудный вектор  $\mathbf{u}_{\sigma}$ , определяемый системой  $(C - \lambda_{\sigma}A)\mathbf{u}_{\sigma} = 0$ , т.е. тем самым определяется частное решение исходной системы уравнений малых колебаний ( $A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = 0$ ):  $\mathbf{q}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma} \sin(\omega_{\sigma}t + \alpha_{\sigma})$ .

Далее рассмотрим сначала случай, когда все корни  $\lambda_{\sigma}$  уравнения частот – различны (тогда различны и  $\mathbf{u}_{\sigma}$ ). Т.к. исходная система дифференциальных уравнений движения – линейна, то линейная комбинация с постоянными коэффициентами ее частных решений снова есть решение системы, т.е.

$$\boxed{\mathbf{q} = \sum_{\sigma=1}^n C_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \sin(\omega_{\sigma}t + \alpha_{\sigma})} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \sum_{\sigma=1}^n C_{\sigma} \mathbf{q}_{\sigma} \quad (*)$$

при произвольных постоянных  $C_{\sigma}$  и  $\alpha_{\sigma}$  является решением исходной системы. Покажем, что эта формула охватывает все движения системы, т.е. является общим решением. Т.е. удовлетворяет не только дифференциальным уравнениям движения, что мы показали, но и начальным условиям наперед заданным (т.е.  $C_{\sigma}$  и  $\alpha_{\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) можно так выбрать).

**Свойство 1.** Предварительно установим следующее свойство:

$$\underline{A\mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{u}_{\rho} = 0, \quad \sigma \neq \rho}$$

т.е. билинейная форма с матрицей  $A$  для различных амплитудных векторов обращается в нуль.

**Справка:** билинейные формы – для  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$  т.е. различных векторов:  $A\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} u_{\sigma} v_{\rho}$ ;  
 квадратичные формы – для одинаковых векторов:  $A\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{\sigma, \rho=1}^n c_{\sigma\rho} u_{\sigma} u_{\rho}$

Действительно, имеем для различных  $\sigma \neq \rho$  т.е. по предположению  $\lambda_{\sigma} \neq \lambda_{\rho}$ , равенства:

$$\begin{aligned} (C - \lambda_{\sigma} A)\mathbf{u}_{\sigma} = 0 \quad | \cdot \mathbf{u}_{\rho} & \Rightarrow C\mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{\rho} = \lambda_{\sigma} A\mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{\rho} \\ (C - \lambda_{\rho} A)\mathbf{u}_{\rho} = 0 \quad | \cdot \mathbf{u}_{\sigma} & \Rightarrow C\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{u}_{\sigma} = \lambda_{\rho} A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{u}_{\sigma} \end{aligned}$$

Учитывая доказанное ранее свойство симметричных матриц о независимости соответствующих им билинейных форм от порядка умножения векторов:

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad C\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = C\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

После вычитания имеем:

$$(\lambda_{\sigma} - \lambda_{\rho})A\mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{\rho} = 0$$

откуда в виду  $\lambda_{\sigma} \neq \lambda_{\rho}$  получим требуемое условие.

**Свойство 2.** Теперь покажем, что в рассматриваемом случае  $n$  амплитудных векторов  $\mathbf{u}_{\sigma}$  – линейно независимы. Действительно, пусть

$$\mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^n B_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} = 0$$

тогда при любом фиксированном  $\rho$  будем иметь:

$$A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \left( \sum_{\sigma=1}^n B_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \right) = \sum_{\sigma=1}^n B_{\sigma} A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{u}_{\sigma} = B_{\rho} A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{u}_{\rho} = 0$$

Но квадратичная форма  $A\mathbf{u}_{\rho} \cdot \mathbf{u}_{\rho} > 0$ , значит  $B_{\rho} = 0$  для всякого  $\rho$ . Что доказывает независимость  $\mathbf{u}_{\sigma}$  и соответствующих им решений  $\mathbf{q}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma} \sin(\omega_{\sigma} t + \alpha_{\sigma})$ .

Подберем теперь в формуле (\*) значения  $2n$  произвольных постоянных  $C_{\sigma}$  и  $\alpha_{\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ) так, чтобы удовлетворялись произвольные наперед заданные начальные условия

$$q_{\sigma}(0) = q_{\sigma}^0, \quad \dot{q}_{\sigma}(0) = \dot{q}_{\sigma}^0 \quad (\sigma = 1, \dots, n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

Из формулы (\*) находим:

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{\sigma=1}^n C_{\sigma} \sin \alpha_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{\sigma=1}^n C_{\sigma} \omega_{\sigma} \cos \alpha_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}$$

В силу линейной независимости  $\mathbf{u}_{\sigma}$  отсюда однозначно определяются произведения  $C_{\sigma} \sin \alpha_{\sigma}$  и  $C_{\sigma} \omega_{\sigma} \cos \alpha_{\sigma}$ , а следовательно, т.к.  $\omega_{\sigma} \neq 0$ , однозначно определяется  $C_{\sigma}$  и  $\alpha_{\sigma}$  ( $\alpha_{\sigma}$  определяется с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ ).

Таким образом, при отсутствии у уравнения частот кратных корней, формула (\*) охватывает все движения систем, которые представляют собой малые колебания. В случае, когда уравнение частот имеет кратные корни, оказывается возможным также найти  $n$

независимых решений в виде колебаний:  $\mathbf{u}_\sigma \sin(\omega_\sigma t + \alpha_\sigma)$  и представить общее решение системы в форме (\*). Этот факт будет строго обоснован на следующей лекции, с помощью так называемых «нормальных координат», при этом случай кратных корней выделяться особо не будет.

**Замечание:** Частоты  $\omega_\sigma$  не зависят от начальных данных и полностью определяются матрицами  $A$  и  $C$ , т.е. свойствами системы. Это свойство собственных частот малых колебаний называется **изохронностью**.

В заключение отметим, что колебания вида  $\mathbf{q} = C_\sigma \mathbf{u}_\sigma \sin(\omega_\sigma t + \alpha_\sigma)$ , из которых складывается произвольное колебание, называются **главными колебаниями** системы. Вектор  $\mathbf{u}_\sigma$  – **амплитудный вектор  $\sigma$ -го главного колебания**. Т.е. в  $\sigma$ -ом главном колебании все обобщенные координаты совершают гармоничные колебания с одной и той же частотой  $\omega_\sigma$ ! Отношение амплитуд колебаний отдельных обобщенных координат определяется отношением соответствующих компонент амплитудных векторов.

Решение (\*) иногда удобнее представить в другом, альтернативном виде (без начальных фаз  $\alpha_\sigma$ , но с косинусами):

$$\mathbf{q} = \sum_{\sigma=1}^n \mathbf{u}_\sigma (C_\sigma^{(s)} \sin(\omega_\sigma t) + C_\sigma^{(c)} \cos(\omega_\sigma t))$$

Отметим, что если в  $n$ -мерном координатном пространстве  $q_1, \dots, q_n$  ввести  $A$ -метрику (евклидову структуру при помощи удвоенной кинетической энергии  $2T$ ), т.е. под квадратом длины вектора  $\mathbf{u}$  понимать величину квадратичной формы

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} u_\sigma v_\rho$$

(т.е. принять за скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  величину  $(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} u_\sigma v_\rho$  – билинейную форму, где  $A$  – положительно определенная матрица, т.е. квадратичная форма  $(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{\sigma, \rho=1}^n a_{\sigma\rho} u_\sigma u_\rho > 0$ ), тогда равенство  $A\mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\rho = 0$  выражает собой свойство ортогональности амплитудных векторов, соответствующих различным корням уравнения частот, в  $A$ -метрике.

Учитывая однородность уравнений для определения амплитудных векторов  $(C - \lambda_\sigma A)\mathbf{u}_\sigma = 0$ , умножение на скаляр которого, ничего не меняет, замечаем, что амплитудные вектора  $\mathbf{u}_\sigma$  определяются с точностью до постоянного множителя. А этот множитель, в свою очередь, можно подобрать так, чтобы

$$(A\mathbf{u}_\sigma, \mathbf{u}_\sigma) = 1, \quad \text{т.е.} \quad (A\mathbf{u}_\sigma, \mathbf{u}_\rho) = \delta_{\sigma\rho} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq \rho \\ 1, & \sigma = \rho \end{cases}$$

где  $\delta_{\sigma\rho}$  – символ Кронекера. Таким образом, можно сделать амплитудные вектора  $\mathbf{u}_\sigma$  ортонормированными в  $A$ -метрике.

**Замечание:** В силу свойства  $C\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \lambda A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , одновременно с равенством  $A\mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\rho = 0$  имеет место и равенство  $C\mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\rho = 0$  ( $\sigma \neq \rho$ ), т.е. ортогональность амплитудных векторов в  $C$ -метрике.