МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Новосибирский национальный
исследовательский государственный университет
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики

**Е.А. Батяев**

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс

Новосибирск
2013

УДК

**Батяев Е.А.** Теоретическая механика: Учебно-методический комплекс / Новосиб. гос. университет. Новосибирск, 2013.

Учебно-методический комплекс включает обучающие и контролирующие материалы по дисциплине «Теоретическая механика»: программу дисциплины, темы занятий, описание образовательных технологий, формы промежуточного и итогового контроля, примеры вариантов контрольных работ и экзаменационных билетов, методические рекомендации по решению задач и организации самостоятельной работы студентов, набор типичных задач по основным разделам механики, список основной и дополнительной литературы.

Комплекс разработан в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010100 «Математика» профиля «Математика и прикладная математика».

Учебно-методический комплекс подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 гг.

# С О Д Е Р Ж А Н И Е

## 1. Цели и задачи изучения дисциплины «Теоретическая механика»

Дисциплина «Теоретическая механика» входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра профиля «Математика и прикладная математика» по направлению подготовки 010100 «Математика» ФГОС ВПО, утверждённого приказом № 8 Министерства образования и науки Российской Федерации от 13 января 2010 г.

Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Национального исследовательского университета Новосибирский государственный университет кафедрой теоретической механики ММФ НИУ НГУ. Курс предназначен для подготовки специалистов, которые в дальнейшей исследовательской работе смогут использовать основные методы математического моделирования и принципы решения механических задач на основе полученных знаний в области классической и аналитической механики.

### 1.1 Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Теоретическая механика» предоставляет обучающемуся комплекс базовых теоретических знаний основных идей, положений, методов и принципов как науки.

Основной целью курса является подготовка специалистов к исследовательской и практической работе: выработка у студентов навыков использования методов математического моделирования при решении механических задач как в рамках исследований фундаментальных математических проблем механики, так и для решения конкретных технических задач, на основе знаний классической механики Ньютона и принципов аналитической механики.

### 1.2 Задачи курса

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса:

1. Познакомить слушателей с основами математического моделирования движения материальных тел;
2. Получить представление о способах описания движения материальных тел и характеристик движения;
3. Освоить механические характеристики движения, способы их вычисления и понять общую трактовки движения;
4. Изучить закономерности движения точечных тел, их систем и твердых тел;
5. Научиться использовать различные законы и принципы механики и составлять вытекающие из них уравнения движения;
6. Познакомиться с математическими методами исследования начальных задач для систем дифференциальных уравнений, определяющих движение различных материальных тел;
7. Познакомиться с вариационными принципами аналитической механики;
8. Получить основы теории устойчивости движения и равновесия механических систем
9. Сформировать навыки решения конкретных модельных механических задач;
10. Добиться прочных знаний теоретических положений курса и их применения к решению естественнонаучных и технических задач.

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Теоретическая механика»

Изучение дисциплины направлено на формирование

- **общекультурных компетенций** ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11, ОК-14 (применение в научно-исследовательской и профессиональной деятельности

базовых знаний в области фундаментальной и прикладной математики, получение значительных навыков самостоятельной исследовательской работы, умение находить, анализировать и обрабатывать информацию, фундаментальная подготовка в области математики и компьютерных наук и готовность к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности, способность к анализу и синтезу информации, полученной из различных источников);
- **профессиональных компетенций** ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-12, ПК-13, ПК-16, ПК-19, ПК-21, ПК-22, ПК-25, ПК-27, ПК-29 (умение определить формы, закономерности и средства предметной области, понять поставленную задачу, сформулировать результат и строго его доказать, умение на основе анализа корректно сформулировать возможные результаты и самостоятельно оценить их последствия, умение грамотно пользоваться языком предметной области, способность ориентироваться в постановках задач, знание постановок классических задач, представление о корректности постановки задачи, навыки построения алгоритмов и их анализа, понимание сути точности фундаментального знания и его значения для компьютерных наук, умение выделять главные смысловые аспекты математических рассуждений, владение методами алгоритмического моделирования и проблемно-задачной формой представления математических знаний, умение видеть прикладные следствия решения научной проблемы, представлять и интерпретировать их, умение самостоятельно формулировать проблемы и организовывать их решение в рамках небольших коллективов, умение точно представить математические знания в устной форме, возможность преподавания математических дисциплин и информатики в общеобразовательных школах и учебных заведениях среднего и высшего профессионального образования).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**знать**

- базовые понятия кинематики и динамики точки, системы точек и тела;
- основные гипотезы и допущения, касающихся материальных тел и действующих на них сил.
- основные способы описания механического движения тел и точек: координатно-векторное представление и естественную форму;
- выражения физических и компонент векторов скорости и ускорения точки в криволинейной системе координат;
- определение угловых кинематических характеристик движения тел;
- представление сложного движения точки и тела из простейших составляющих;
- основные теоремы кинематики точки и тела: о распределении скоростей и ускорений (Ривальса) твердого тела, сложения скоростей и ускорений (Кориолиса);
- фундаментальные законы Ньютона движения материальных точек;
- принцип освобождаемости от связей, закон Кулона для тангенциальной реакции;
- закон динамики точки в неинерциальной системе отсчета и принцип Галилея;
- основы механики движения материальной точки в центральном силовом поле: законы Кеплера, закон всемирного тяготения;
- свойства внутренних сил системы материальных точек, работу и мощность сил;
- потенциалы распространенных силовых полей (пружины, постоянной силы и др.)
- количественные меры механического движения систем материальных точек: количество движения, кинетические моменты относительно неподвижного центра и центра масс системы, кинетическую энергию;

- формулировки и доказательства теорем движения систем материальных точек, законы сохранения и условия их возникновения;
- кинематические характеристики и теоремы динамики механических систем в движении относительно её центра масс; теорему Кёнига;
- геометрию масс абсолютно твердого тела, теорему Гюйгенса-Штейнера;
- теоремы динамики и законы сохранения для твердого тела;
- основы статики твердого тела;
- виды связей и механических систем; условия, накладываемые связями на скорости и ускорения точек систем;
- возможные, действительные и виртуальные перемещения систем, вариации координат, идеальные связи;
- уравнения Лагранжа 1-го и 2-го рода;
- важнейшие дифференциальные принципы аналитической механики: виртуальных перемещений и Даламбера-Лагранжа.
- определение обобщенных координат и сил, число степеней свободы системы;
- выражение кинетической энергии системы в обобщенных координатах и скоростях и её особенности;
- формулировку теоремы об изменении полной механической энергии системы, закон сохранения полной энергии для консервативных систем;
- выражение функции Лагранжа и обобщенного потенциала для натуральных систем
- вид функции Гамильтона и канонических уравнений Гамильтона;
- определение позиционных и циклических координат, функцию и уравнения Рауса;
- обобщенный интеграл энергии и циклические интегралы; скобки Пуассона;
- достаточные условия устойчивости равновесия консервативных систем, доказательство теоремы Лагранжа;
- основы теории малых колебаний консервативных систем;

**уметь**

- находить физические и естественные компоненты скорости и ускорения точки, определять коэффициенты Ламе, радиус кривизны траектории точки;
- использовать кинематические теоремы и следствия из них для описания движения точек и тел с геометрической точки зрения;
- составлять дифференциальные уравнения движения и равновесия точки в декартовых и криволинейных координатах, а также в естественной форме;
- определять переносную и кориолисову силу инерции, записывать уравнения относительного движения и равновесия точки на основе принципа Даламбера;
- находить первые интегралы движения точки в центральном силовом поле (интеграл площадей, энергии);
- вычислять работу и мощность сил, приложенных к точкам механической системы материальных точек;
- определять меры движения систем материальных точек: количество движения, кинетические моменты относительно неподвижного центра и центра масс системы, кинетическую энергию;
- применять основные теоремы динамики системы точек для определения их движения: о движении центра масс, об изменении кинетического момента, об изменении кинетической энергии;
- определять центр масс, осевые и центробежные моменты инерции тела и системы точек;
- составлять и решать уравнения равновесия и плоского движения тела.
- определять возможные перемещения механических систем и вычислять элементарную работу сил, приложенных к точкам, на этих перемещениях;

- составлять обобщенное уравнение динамики и уравнения равновесия системы в обобщенных координатах;
- определять кинетическую энергию системы, составлять и решать уравнения Лагранжа 2-го рода;
- составлять канонические уравнения Гамильтона;
- находить обобщенный интеграл энергии и циклические интегралы движения;
- применять теорему Лагранжа для исследования устойчивости равновесия консервативных систем и при их равномерном вращении вокруг неподвижной оси;
- составлять и решать уравнение частот малых колебаний консервативных систем, а также дифференциальные уравнения малых колебаний;
- формулировать и решать задачи на основе законов, теорем и принципов механики применительно к движению и равновесию материальных тел для естественнонаучных и технических проблем;

**владеть**

- способностью математически моделировать процессы движения или равновесия и механического взаимодействия тел для составления соответствующих уравнений;
- навыками решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение материальных точек и систем линейных алгебраических уравнений для определения состояния равновесия твердого тела;
- алгоритмами определения кинематических и динамических характеристик движения и равновесия для точки, системы точек и твердого тела;
- пониманием применимости законов сохранения динамики механических систем;
- методиками и алгоритмами использования основных законов и принципов механики для решения конкретных задач систем твердых тел;

## 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теоретическая механика» является частью математического и естественнонаучного цикла Б.2 (базовая часть) образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра профиля «Математика и прикладная математика» по направлению подготовки 010100 «Математика».

Дисциплина «Теоретическая механика» опирается на следующие математические дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (пределы, ряды, сходимость, векторный анализ, разложения, асимптотический анализ);
- Высшая алгебра (многочлены, определители, матрицы, алгебраические уравнения, системы уравнений, векторная алгебра, квадратичные формы);
- Аналитическая геометрия (линии, поверхности, объемы, плоские и пространственные кривые, конические сечения, поверхности второго порядка);
- Функции вещественной переменной (дифференцирование, интегрирование, экстремумы функций, функционалы, вариации)
- Дифференциальные уравнения (уравнения первого и второго порядков, системы уравнений, существование решений начальной задачи, устойчивость решений, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные уравнения).

Результаты освоения дисциплины «Теоретическая механика» используются в следующих дисциплинах данной образовательной программы:

- Математическое моделирование;
- Уравнения математической физики;
- Методы вычислений.

## 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Содержание курса охватывает основные разделы классической и аналитической механики, в том числе кинематику точки и твердого тела, общие теоремы динамики точки, систем точек и тел, статику систем точек и тел, принципы аналитической механики, исследование устойчивости состояния равновесия тел, малые колебания.

Курс читается единым модулем в течение полутора месяцев в 6 семестре. Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: аудиторные занятия, самостоятельная работа студента, контрольные работы.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 академических часов общей нагрузки, из которых 108 часов составляет аудиторная нагрузка и 108 часов самостоятельная работа студента. Самостоятельная работа складывается из выполнения домашних заданий к аудиторным занятиям, подготовки к контрольным работам, повторения и разбора теоретического материала предыдущих лекций.

## 5. Структура и содержание дисциплины «Теоретическая механика»

Содержание изучаемого материала состоит условно из 7 разделов со следующим распределением часов:

| № п/п | Разделы дисциплины | Семестр | Недели семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (часы) | | | | Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*. Форма итоговой аттестации |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Аудиторные занятия | Самостоятельная работа | Контрольные работы | Сумма | |
| 1 | Ведение. Кинематика точки и твердого тела. | 6 | 1 | 18 | 18 | | 36 | Текущий контроль выполнения домашних работ |
| 2 | Динамика материальной точки | 6 | 2 | 14 | 14 | | 28 | Текущий контроль выполнения домашних работ |
| 3 | Динамика систем материальных точек | 6 | 2-3 | 14 | 14 | | 28 | Текущий контроль выполнения домашних работ |
| 4 | Абсолютно твердое тело | 6 | 3 | 12 | 14 | 2 | 28 | Текущий контроль выполнения домашних работ, контрольная работа |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | Аналитическая динамика механических систем со связями | 6 | 4-5 | 22 | 22 | | 44 | Текущий контроль выполнения домашних работ |
| 6 | Динамика консервативных систем | 6 | 5 | 16 | 16 | | 32 | Текущий контроль выполнения домашних работ |
| 7 | Устойчивость равновесия и малые колебания консервативных систем | 6 | 6 | 8 | 10 | 2 | 20 | Текущий контроль выполнения домашних работ, контрольная работа |
| | Итоговая аттестация | 6 | 6 | | | | | Экзамен |
| **Всего часов** | | | | **104** | **108** | **4** | **216** | |

**Темы занятий**

1. **Ведение. Кинематика точки и твердого тела (18 часов)**
   1.1. Предмет теоретической механики, область применения, основные разделы. Основные понятия. Пространство, время, система отсчета. Относительность движения и покоя. Координатно-векторное представление движения точки. Траектория точки. Скорость и ускорение точки. (2 часа)
   1.2. Движение в декартовых и ортогональных криволинейных координатах. Векторы скорости и ускорения. Коэффициенты Ламе. Физические компоненты скорости и ускорения. Естественное описание движения точки. Кривизна траектории. Естественные компоненты скорости и ускорения. (4 часа)
   1.3. Представление движения твердого тела в виде композиции поступательного и вращательного движений. Эйлеровы углы. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Поле скоростей и ускорений (формула Ривальса) точек твердого тела. (4 часа)
   1.4. Сферическое движение тела. Мгновенная ось вращения. Плоское движение тела. Поле скоростей и ускорений плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей и ускорений. (4 часа)
   1.5. Сложное движение точки. Относительное, переносное и абсолютное движение. Абсолютная и относительная производные по времени. Теоремы сложения скоростей и ускорений (теорема Кориолиса). (4 часа)
2. **Динамика материальной точки (14 часов)**
   2.1. Взаимодействие тел. Силы и масса. Свободная материальная точка. Инерциальная система отсчета. Законы Ньютона. Равнодействующая. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых, криволинейных координатах и в естественном базисе. Основные задачи динамики. Определение движения по силе и начальному состоянию. (4 часа)
   2.2. Движение несвободной материальной точки. Связи. Принцип освобождаемости от связей. Нормальная и тангенциальная реакции. Закон Кулона. Движение точки по линии. Уравнения равновесия точки. Сила инерции. Принцип Даламбера. (4 часа)
   2.3. Относительное движение материальной точки. Основной закон динамки точки в неинерциальной системе отсчета. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности Галилея. Относительное равновесие точки вблизи Земли. Маятник Фуко. (4 часа)
   2.4. Движение точки в центральном силовом поле. Секторная скорость. Закон площадей. Формулы Бине. Закон всемирного тяготения. Движение точки в ньютоновском поле тяготения. Вектор Лапласа. Законы Кеплера. (2 часа)

3. **Динамика систем материальных точек (14 часов)**
   - 3.1. Механическая система. Внешние и внутренние силы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Главный вектор, главный момент относительно точки и оси системы сил. Свойства внутренних сил. Работа и мощность системы сил. Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия. (4 часа)
   - 3.2. Центр масс системы точек. Количество движения и кинетическая энергия системы. Момент количества движения (кинетический момент) системы относительно точки и оси. (4 часа)
   - 3.3. Теорема о движении центра масс системы точек. Теоремы об изменении количества движения, кинетического момента относительно неподвижной точки, кинетической энергии для механической системы. Законы сохранения количества движения и кинетического момента системы. Замкнутая система. Закон сохранения полной механической энергии. (4 часа)
   - 3.4. Движение механической системы относительно центра масс. Кенигова система координат. Теорема Кёнига. (2 часа)

4. **Абсолютно твердое тело (12 часов)**
   - 4.1. Геометрия масс твердого тела. Центр масс тела. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Осевые и центробежные моменты инерции. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции тела. (4 часа)
   - 4.2. Количество движения, кинетический момент тела относительно точки и оси. Кинетическая энергия тела. Работа сил, приложенных к телу. Теоремы динамики и законы сохранения для твердого тела. (4 часа)
   - 4.3. Дифференциальные уравнения движения тела. Плоское движение тела. Равновесие твердого тела. Статически определимая система. Эквивалентные системы сил. (4 часа)

5. **Аналитическая динамика механических систем со связями (22 часа)**
   - 5.1. Виды связей и механических систем. Условия, накладываемые связями, на возможные положения скорости и ускорения точек системы. (2 часа)
   - 5.2. Возможные, действительные и виртуальные перемещения. Вариации координат. Синхронное варьирование. Число степеней свободы системы. Основная задача динамики несвободной системы. Элементарная работа сил на перемещениях системы. Идеальные связи. (4 часа)
   - 5.3. Уравнения Лагранжа первого рода. Принцип Даламбера-Лагранжа. Принцип виртуальных перемещений. (4 часа)
   - 5.4. Обобщенные координаты, скорости и ускорения. Обобщенные силы. Уравнения равновесия системы в обобщенных координатах. Виртуальный дифференциал. Потенциальная энергия. Экстремальность потенциала при равновесии. (4 часа)
   - 5.5. Уравнения Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия системы в обобщенных координатах и скоростях. Положительная определенность квадратичной формы кинетической энергии относительно обобщенных скоростей. (4 часа)
   - 5.6. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Консервативные системы. Закон сохранения полной механической энергии. Гироскопические силы. Диссипативные силы. (4 часа)

6. **Динамика консервативных систем (16 часов)**
   - 6.1. Функция Лагранжа. Обобщенный потенциал. Натуральные системы. Определенность функции Лагранжа. Преобразование Лежандра. Обобщенные импульсы. Гессиан функции Лагранжа относительно обобщенных скоростей. Переменные Лагранжа и Гамильтона. Теорема Донкина. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. (4 часа)

6.2. Обобщенная механическая энергия. Обобщенно-консервативные системы. Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби). Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. (4 часа)
6.3. Позиционные и циклические координаты. Циклические интегралы. Метод игнорирования циклических координат. Переменные и функция Рауса. Уравнения Рауса. (4 часа)
6.4. Первые интегралы уравнений движения и законы сохранения. Скобки Пуассона и первые интегралы. Теорема Якоби–Пуассона. Инволютивность системы интегралов. (4 часа)

**7. Устойчивость равновесия и малые колебания консервативных систем (8 часов)**

7.1. Устойчивость положений (состояний) равновесия систем. Достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы, теорема Лагранжа. Положение относительного равновесия и его устойчивость при равномерном вращении системы вокруг неподвижной оси. Потенциал центробежной силы инерции. Приведенный потенциал (4 часа)
7.2. Дифференциальные уравнения движения линейного приближения консервативных систем около устойчивого положения равновесия. Малые колебания. Уравнение частот. Главные колебания и нормальные координаты. Свободные колебания и собственные частоты. (4 часа)

## 6. Образовательные технологии

При освоении дисциплины применяются активная и интерактивная формы обучения в сочетании с самостоятельной работой. На аудиторных занятиях происходит изложение нового теоретического материала, рассматриваются частные случаи и следствия, разбираются решения типичных задач на применение полученных сведений для более глубокого понимания, проводится контроль выполнения домашних работ.
Для лучшего понимания нового материала иностранными студентами и, в дальнейшем, для самостоятельной работы и подготовки к экзамену предполагается предварительная раздача им текста с теоретическим материалом, чтобы они во время его изложения могли оперативно уточнять места, непонятные со слуха. Для успешного освоения методов и алгоритмов решения задач планируется раздача кратких рекомендаций, содержащих важные сведения из теории и разбор типичных примеров задач. Организация занятий обязательно включает диалог со студентами по вопросам решения задач, построения математических моделей происходящих процессов, составления уравнений, описывающих движение тел и точек, решение и осмысление полученных результатов. Для закрепления пройденного материала студентам предлагаются задачи и упражнения для самостоятельной работы, контроль выполнения которого осуществляется на следующем занятии. Во время контроля выполнения заданий, предложенных для внеаудиторной самостоятельной работы, производится выступление студентов с их вариантами решений.

Примерная структура занятия:

- контроль выполнения домашней работы и разбор задач, вызвавших затруднения (15 минут) с обязательным участием студентов; проводится выборочный контроль выполнения домашней работы, в разборе важная роль отводится студентам, предлагающим свои решения или альтернативные варианты решений;
- изложение нового теоретического материала (25 минут); во время изложения материала осуществляется контроль понимания в форме краткого опроса по излагаемому материалу;
- самостоятельное решение практических задач студентами, обсуждение подходов к решению и предлагаемых аргументов (35 минут) с обязательным участием студентов; организуется в форме самостоятельной работы, обсуждения подходов, предложения

готовых решений, обсуждения этих решений, поиска и исправления неточностей, выявление границ применимости использованных методов;
- формулировка домашнего задания и указаний по его выполнению (5 минут).

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит из двух взаимосвязанных частей. Первая представляет собой освоение теоретического материала, вторая — приобретение практических навыков решения задач и применения методов теоретической механики. Освоение теоретического материала производится по лекциям и указанной основной и дополнительной литературе. Для контроля усвоения материала студентам предлагается значительное количество задач различной сложности, приведенных в данном учебно-методическом комплексе. Выполнение указанных задач позволяет студентам научиться решать типичные задачи по теоретической механике, овладеть навыками математического моделирования при решении технических задач, узнать методы и алгоритмы составления и решения уравнений движения и равновесия тел.

## 7. Формы контроля успеваемости

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля успеваемости:
- **текущий контроль** в форме проверки выполнения домашних заданий из списка, приведенного ниже, для каждого занятия;
- **промежуточный контроль** в виде проведения контрольных работ по итогам изучения основных разделов дисциплины путем решения характерных задач;
- **итоговый контроль** в виде устного экзамена, проверяющего уровень усвоения теоретического материала и степень владения навыками решения задач.

Текущий и промежуточный контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы, принятой в образовательной программе.

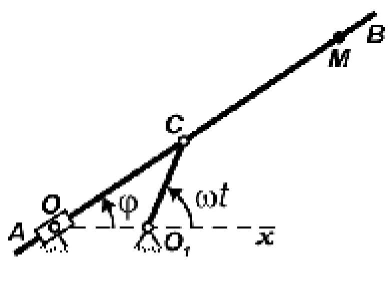
## 8. Оценочные средства для промежуточного контроля успеваемости и итогового контроля освоения дисциплины «Теоретическая механика»

Промежуточный и итоговый контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы, принятой в образовательной программе.

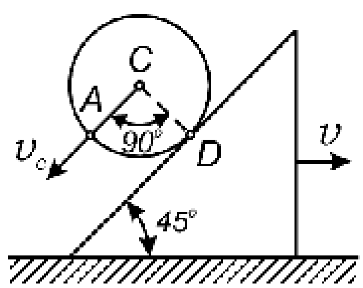
***Контрольная работа 1: «Кинематика и динамика точки и тела»***

*Вариант 1*

1. Кривошип $O_1C$ длиной $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью $w$ вокруг оси $O_1$. В точке $C$ с кривошипом шарнирно связана линейка $AB$, проходящая все время через качающуюся муфту $O$, находящуюся на расстоянии $a/2$ от оси вращения $O_1$. Приняв точку $O$ за полюс, найти в полярных координатах уравнения движения точки $M$ линейки, отстоящей от шарнира $C$ на расстоянии $a$, её траекторию, скорость, и ускорение (в начальный момент угол $j = \angle COO_1 = 0$).

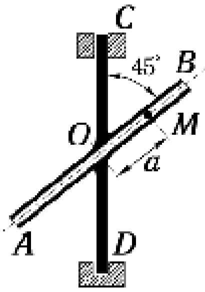



2. Треугольная призма, образующая угол $45^{\circ}$ с горизонтом, скользит направо по горизонтальной плоскости со скоростью $v$ ($v = 2t$ см/с). По наклонной грани призмы скатывается без скольжения круглый цилиндр, радиус которого равен $r = 4$ см. Модуль скорости его центра $C$ относительно призмы равен $v_C = 4t$ см/с. Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки $A$, лежащей на ободе цилиндра, если в момент $t = 1$ с $\angle ACD = 90^{\circ}$.

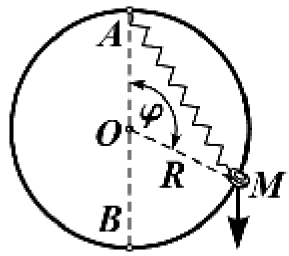


*Вариант 2*

1. Трубка $AB$ вращается с постоянной угловой скоростью $w$ вокруг вертикальной оси $CD$, составляя с ней неизменный угол $45^{\circ}$. В трубке находится тяжелый шарик $M$. Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки $O$ равно $a$. Трением пренебречь.



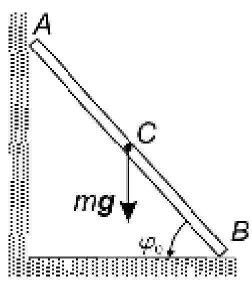

2. Колечко $M$, подвешенное на пружине к верхней точке $A$ круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения. Найти жесткость пружины при которой давление колечка на кольцо в нижней точке $B$ равно нулю. Радиус кольца $R$, масса колечка $m$, в начальном положении колечка расстояние $AM$ равно $R$ и пружина имеет натуральную длину; начальная скорость колечка равна нулю; массой пружины пренебречь.



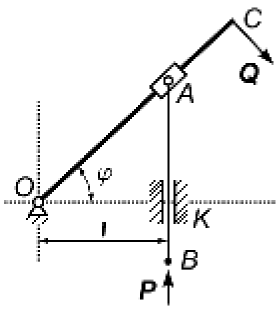

***Контрольная работа 2: «Аналитическая динамика механических систем со связями»***

*Вариант 1*

1. Однородный стержень $AB$ длины $a$ поставлен в вертикальной плоскости под углом $j_0$ к горизонту так, что концом $A$ он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом $B$- на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости.
   1) Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.
   2) Найти, какой угол будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены.

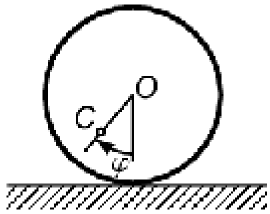



2. В кулисном механизме при качании рычага $OC$ вокруг горизонтальной оси $O$ ползун $A$, перемещаясь вдоль рычага $OC$, приводит в движение стержень $AB$, движущийся в вертикальных направляющих $K$. Даны размеры: $OC = R$, $OK = 1$. Какую силу $Q$ надо приложить перпендикулярно кривошипу $OC$ в точке $C$ для того, чтобы уравновесить силу $P$, направленную вдоль стержня $AB$ вверх?

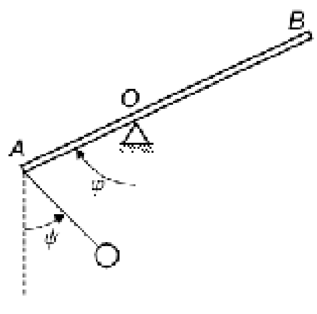



*Вариант 2*

1. Неоднородный диск радиуса $R$ и массы $M$, центр масс $C$ которого расположен на расстоянии $a$ от его геометрического центра $O$, может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей. Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс, равен $J$. Найти период малых колебаний диска около устойчивого положения равновесия, взяв за обобщенную координату угол $j$ между вертикалью и направлением $OC$.




2. Груз массы $m$ подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины $l$ к точке $A$ однородного стержня массы $M$, который может вращаться вокруг закрепленной точки $O$ ($AO = l_1$, $OB = l_2$). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

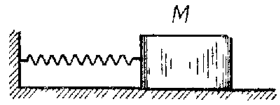


Экзаменационный билет промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины включает один теоретический вопроса и задачу по разным темам.

### *Типичные экзаменационные билеты*

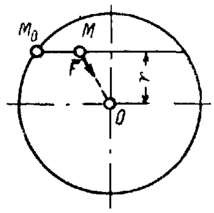
**Криволинейная система координат. Ковариантный и ортонормированный базисы. Физические компоненты вектора.**

**Задача.** Тело $M$ массой $m$ лежит на шероховатой горизонтальной плоскости (коэффициент трения скольжения равен $f$) и прикреплено к недеформированной пружине с жесткостью $c$. Затем тело отводят вправо, растягивая пружину на длину $l$, и отпускают без начальной скорости. Какова должна быть величина коэффициента жесткости пружины $c$, чтобы тело, двигаясь сначала влево, затем изменило направление своего движения?



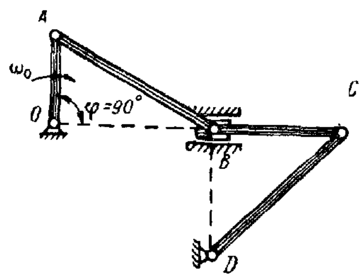

**Скорость точки. Физические компоненты скорости. Вычисление модуля и направления скорости точки в декартовой системе координат.**

**Задача.** Точка $M$ массой $m$ движется по горизонтальной хорде окружности радиусом $R$ под действием силы притяжения, обратно пропорциональной расстоянию от точки до центра окружности (коэффициент пропорциональности $k$). Кратчайшее расстояние от хорды до центра окружности равно $r$. Найти скорость точки в момент прохождения середины хорды, если в начальный момент она занимала крайнее положение и была отпущена без начальной скорости. Трением пренебречь.



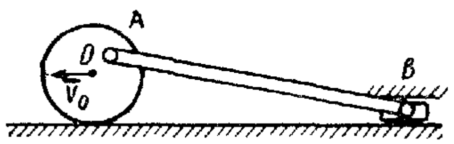

**Движение точки по линии. Нормальная и тангенциальная реакции. Закон Кулона. Круговой математический маятник.**

**Задача.** В механизме паровой машины кривошип $OA$, длиной $r$ вращается с постоянной угловой скоростью $w_0$. Определить скорость шарнира $C$ и ускорение ползуна $B$ в тот момент когда $j = 90^\circ$, если при этом точки $O, B, C$ лежат на одной прямой, и $BD \perp OB$. $CD = a$, $BD = b$, $AB = l$.



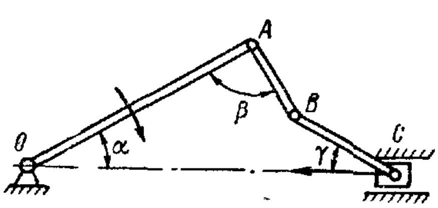

**Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии. Потенциальные силы и интеграл энергии.**

**Задача.** Колесо радиусом $R$ катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью центра $v_0$ и приводит в движение ползун $B$ при помощи шатуна $AB$ длиной $l$. Определить величину ускорения ползуна $B$ при крайнем верхнем положении точки $A$, если $OA = R/2$.

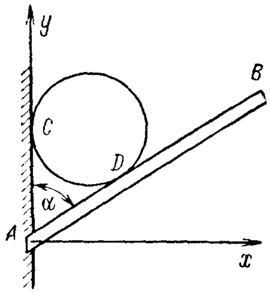



**Дифференциальные уравнения относительного движения точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Начальная задача.**

**Задача.** Стержневой механизм занимает в данный момент положение, при котором $a = 30^\circ, b = 90^\circ, g = 30^\circ$. Зная, что в этот момент величины скоростей шарнира $A$ и ползуна $C$ равны $v_A = v_C = v$, определить величину скорости шарнира $B$. Направления вращения кривошипа $OA$ и движения ползуна $C$ указаны на рисунке.

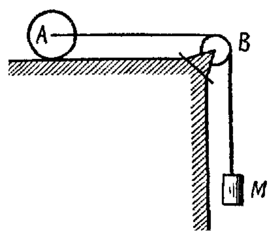


**Движение тела по поверхности: скольжение, качение, верчение. Законы Кулона для разных видов трения при движении и покое.**



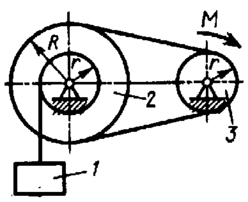

**Задача.** Однородная балка $AB$ длиной $l$ и весом $P$ жестко заделана в стену, образуя с ней угол $\alpha$ . На балке лежит однородный диск весом $Q$, касающийся стены в точке $C$ и балки в точке $D$. Определить давления $N_C$ и $N_D$ диска на стену и на балку, а также реакцию заделки, если $BD = \frac{2}{3}l$.

**Дифференциальные уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси. Начальная задача. Физический маятник. Теорема Гюйгенса.**



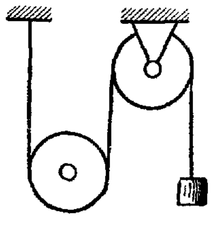

**Задача.** Груз $M$ массой $m$, падая по вертикали, посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через идеальный неподвижный блок $B$, заставляет катиться без скольжения однородный цилиндрический каток $A$, массой $m_1$. Пренебрегая массой блока, определить ускорение оси катка, если коэффициент трения качения $d = k\,r$ ($k = const$), $r$ – радиус катка, а участок нити $AB$ горизонтален.

**Динамика плоского движения тела. Начальная задача.**
**Условия однозначной разрешимости начальной задачи.**



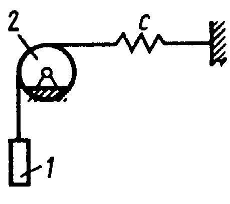

**Задача.** Определить модуль момента пары сил, который необходимо приложить к шкиву *3* для равномерного подъема груза *1* весом 900 Н. Радиусы шкивов $R = 2r = 40$ см.

**Уравнения Лагранжа второго рода в обобщенных координатах. Явный вид уравнений. Нормальная форма уравнений для консервативных систем.**



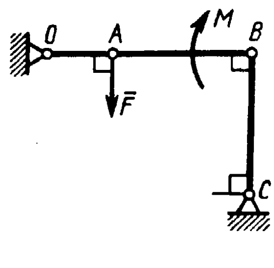
**Задача.** Нить, один конец которой закреплен неподвижно, огибает подвижный блок с массой $M$, радиусом $r$ и моментом инерции $J$ и неподвижный блок с тем же радиусом и моментом инерции $J_1$. На свободном конце нити подвешен груз с массой $m$. Найти ускорение груза, считая, что свободные участки нити вертикальны.

**Устойчивость положения равновесия консервативной системы. Теорема Лагранжа.**




**Задача.** Определить частоту свободных вертикальных колебаний тела *1*, если его масса $m_1 = 0.5$ кг, масса блока $m_2 = 1$ кг, коэффициент жесткости пружины $c = 100$ Н/м. Блок считать однородным цилиндром.

**Малые колебания консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия. Нормальные координаты.**




**Задача.** Определить модуль уравновешивающей силы $F$, приложенной к кривошипу $OA$ в точке $A$ шарнирного четырехзвенника $OABC$, если на шатун $AB = 0.4$ м действует пара сил с моментом $M = 40$ Нм.

## 9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

***а) основная литература:***


1. Бондарь В. Д. Лекции по теоретической механике.: Учебное пособие. - НГУ, 1970, ч. 1; 1972, ч. 2; 1974, ч.3.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики.: Учебник. Ч.1 10-е изд. 480с., Ч.2. 7-е изд. 336с. – СПб.: Издательство «Лань», 2009.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. Учебное пособие для вузов. 3-е изд. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 264 С.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.: Учебник. – 5-е изд. – М.:Наука, 2003. – 416 С.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие. 40-е изд.СПб.: Изд. «Лань», 2003. – 448 С.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3-х томах. Учебное пособие. Т.1 Статика и кинематика. 11-е изд., СПб.: «Лань», 2010. – 672 С. Т.2 Динамика. 9-е изд. стер., СПб.: «Лань», 2010. – 640 С. Т.3 Специальные главы механики. М.: Наука, 1973.-488 С.


***б) дополнительная литература***


1. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Учебник для университетов. – Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. - 572 С.
2. Вильке В.Г. Теоретическая механика: Учебник. 3-е изд., перераб. и дополн. – СПб.: Издательство «Лань», 2003.-304с.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд. перераб. и дополн. М.:Изд.МГУ, 2000. - 719 С.
4. Зоммерфельд А. Механика. – Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 – 368 С.
5. Колесников К.С. (под редакцией) Сборник задач по теоретической механике. 4-е изд., стер. - СПб.: "Лань", 2008. - 448 С.


## 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Теоретическая механика»

Для изучения дисциплины студентам необходимы ручки и тетради.

Для изложения теоретического материала дисциплины необходимо проекционное оборудование (проектор, экран). Для разбора решения задач на аудиторных занятиях необходимы доска и мел (или фломастеры).

Желателен доступ к интернету для возможности пользования интернет-ресурсами и электронными книгами посвященными различным разделам теоретической механики.

Литература из дополнительного списка позволяет заинтересованным студентам глубже познакомиться с дисциплиной и современным состоянием исследований в ней.

# 11. Важные сведения из теоретической механики, основные формулы и рекомендации к решению задач

## Статика

Наиболее часто встречающиеся типы задач по статике:

- плоская задача (часто с трением),
- пространственная задача (обычно без трения),
- устойчивость положения равновесия.

**Важно:** заранее (сразу) указывать равновесие какого тела (или системы тел) – вы рассматриваете, тут же сразу нарисовать все внешние силы и моменты

---

**Уравнения равновесия:** $\boxed{\sum\limits_k \vec{F}_k^e = 0}$ + $\boxed{\sum\limits_k \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) = 0}$ — в проекциях на оси (итого 6 уравнений)

$\vec{F}_k^e$— внешние силы (для системы тел)

**В плоском случае – 3 уравнения:** $\boxed{\sum\limits_k F_{kx}^e = 0, \quad \sum\limits_k F_{ky}^e = 0, \quad \sum\limits_k m_{Oz}(\vec{F}_k^e) = 0.}$

Вместо них можно использовать такие уравнения $\boxed{\sum\limits_k m_{Az}(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \sum\limits_k m_{Bz}(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \sum\limits_k m_{Cz}(\vec{F}_k^e) = 0.}$

где $A,\ B,\ C$ – точки, не лежащие на одной прямой.

**Рекомендация:** Для моментов сил (или проекций сил) выбирать точки (или оси) так, чтобы уравнения содержали как можно меньше слагаемых (использовать свойства точек пересечения сил, симметричность).

---

**Трение:** ***скольжения***

Приложена — всегда в точке касания тела и связи.
Направлена противоположно скорости соответствующей точки тела (в динамике) или возможной скорости точки тела (в статике) как бы при отсутствии трения.
Для определения направления силы трения — мысленно отбросить связь и увидеть в какую сторону направлена скорость в этой точке и взять обратное направление.

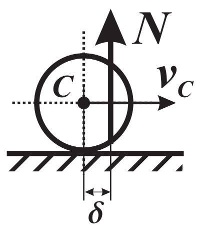
Максимальное значение: $\boxed{F_{\text{тр}} = fN}$ — только при скольжении или в предельном случае равновесия.

В остальных случаях $F_{\text{тр}} < fN$ и, вообще говоря, неизвестна.

Здесь $f$ – коэффициент трения (скольжения), $N$ – нормальная реакция (тоже неизвестная в общем случае)

***качения***

(используется для круглых тел - дисков, цилиндров)




Нормальная реакция смещается вперед по движению ($\vec{v}_C$) на величину (плечо) – $\delta$
$\delta$ – коэффициент трения качения (измеряется в метрах, сантиметрах)
Приводит к возникновению момента трения качения: $\boxed{m_{zC} = -\delta N}$ ($C$ - центр масс)

---

**Принцип возможных перемещений:** $\boxed{\sum\limits_k \delta A(\vec{F}_k) = 0}$ — для идеальных связей!

В противном случае (силы трения) - добавляем "неидеальные силы"к обычным активным и пользуемся принципом.

Здесь $\vec{F}_k$ - все силы (в т.ч. и внутренние) т.к. возможные перемещения (значит и работы сил) могут быть разными.

$\boxed{\delta A = \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu}$ – элементарная работа силы $\vec{F}_\nu$,
$\delta\vec{r}_\nu$ - возможное перемещение точки $\vec{r}_\nu$ к которой приложена сила $\vec{F}_\nu$.

$\boxed{\delta A = \pm m \cdot \delta\varphi}$ – элементарная работа момента $m$, $\delta\varphi$ - возможное угловое перемещение тела.

Для потенциальных сил $\left(\vec{F}_\nu = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_\nu}\right)$ принцип переходит в систему $\boxed{\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} = 0}$ $q_\sigma$ – обобщенные координаты.

Очень полезен координатный метод — позволяет вычислить возможные перемещения точек через дифференцирование по обобщенным координатам (варьирование): $\boxed{\delta r_\nu = \sum\limits_\sigma \dfrac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma}$

## Кинематика

### Теорема Ривальса (формула для ускорений точек тела)

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^{\,\text{вр}}_{MO} + \vec{a}^{\,\text{ц}}_{MO}} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} - \omega^2 \overrightarrow{OM}}$$

Здесь $\vec{a}_O$ — полюсное ускорение (ускорение полюса $O$) – должно быть известно,

$\vec{a}^{\,\text{вр}}_{MO} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}$ — вращательное ускорение $M$ относительно $O$ $\left(\text{всегда } \vec{a}^{\,\text{вр}}_{MO} \perp \overrightarrow{OM} \text{ и направлено в сторону } \vec{\varepsilon}\right)$,

$\vec{a}^{\,\text{ц}}_{MO} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM})$ — осестремительное ускорение $M$ относительно $O$ (всегда направлено по перпендикуляру к мгновенной оси вращения (которая проходит через $O$ вдоль $\vec{\omega}$) в сторону этой оси).

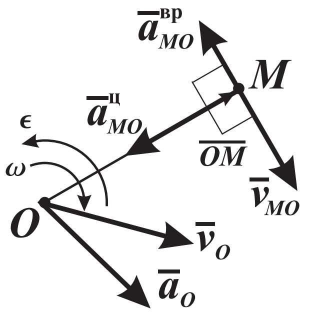
В плоском случае $\boxed{\vec{a}^{\,\text{ц}}_{MO} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}}$ — центростремительное ускорение (направлено к полюсу, т.е. от $M$ к $O$).

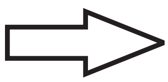
### Формула для скоростей точек тела

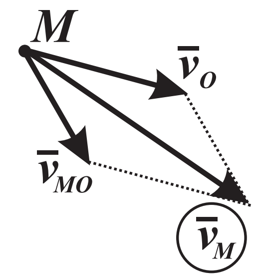
$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}} \text{ или по другому } \boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}}$$

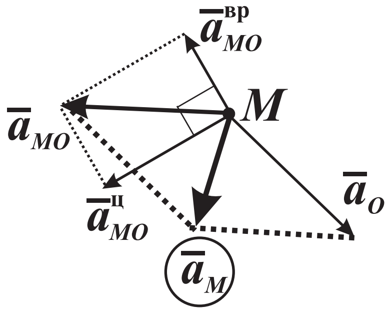
Здесь $\vec{v}_O$ — полюсная скорость (должна быть известна),
$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$ — относительная скорость (вращение вокруг полюса) $\left(\vec{v}_{MO} \perp \overrightarrow{OM} \text{ и направлено в сторону } \vec{\omega}\right)$

### Важный - плоский случай движения






$\vec{\omega}$ – угловая скорость, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение. При сложении векторов используем правило параллелограмма

*На рисунке:*

$\omega$ — по ходу часовой стрелки ↻ $\Longrightarrow$ вектор $\vec{\omega}$ — направлен «от нас» («за рисунок»)
$\varepsilon$ — против хода часовой стрелки ↺ $\Longrightarrow$ вектор $\vec{\varepsilon}$ — направлен «на нас»

Всегда в плоском движении $\boxed{\vec{a}^{\,\text{вр}}_{MO} \perp \vec{a}^{\,\text{ц}}_{MO}}$ — а их конкретные направления определяются заданием полюса $O$.

$\vec{a}_{MO} = \vec{a}^{\,\text{вр}}_{MO} + \vec{a}^{\,\text{ц}}_{MO}$ — ускорение $M$ относительно $O$, $\quad a_{MO} = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ – пропорционально $OM$!

---

### Теорема Кориолиса (формула сложения ускорений) для точки (не обязательно принадлежащей телу) в сложном движении

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c} \qquad \boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r}$$

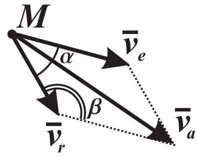
Ускорения: $\vec{a}_a$ – абсолютное, $\vec{a}_e$ – переносное, $\vec{a}_r$ – относительное, $\vec{a}_c$ – кориолисово (добавочное).
$\vec{\omega}_e$ – переносная угловая скорость, $\vec{v}_r$ - относительная скорость.
Направление $\vec{a}_c$ – определяется по правилу правого винта (буравчика, штопора).

Каждое движение (переносное/относительное) получаются фиксированием другого (относительного/переносного).
В сумме должны дать абсолютное движение.

Если $M$ - точка тела $\Longrightarrow$ каждое $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_r$ можно разложить в естественном базисе своём для каждого движения:

$\vec{a}_e = \vec{a}_{e\tau} + \vec{a}_{en}$, $\quad \vec{a}_r = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn}$ (особенно полезно в плоском движении потому что $\boxed{\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n}$ )

**Формула сложения скоростей (в сложном движении):** $\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r}$




Полезная формула: $\boxed{v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2v_e v_r \cos\boldsymbol{\beta}}$

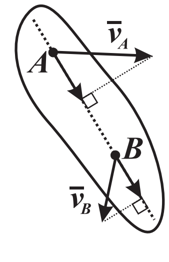
(теорема косинусов) или $\boxed{v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\boldsymbol{\alpha}}$ Внимательнее с углами ($\beta = \pi - \alpha$)

---

### Важный принцип – свойство твердого тела:

**проекции скоростей 2-х точек тела на прямую их соединяющую (скалярное произведение скоростей на вектор между точками) — равны! По модулю и направлению!**

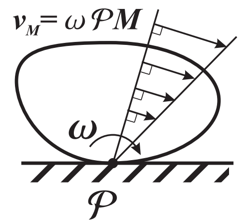
$\text{пр}_{AB}\vec{v}_A = \text{пр}_{AB}\vec{v}_B$
$\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB}$



**Мгновенный центр скоростей** – точка $\mathcal{P}$ (не обязательно тела) скорость которой (в данный момент времени) равна нулю: $\boxed{\vec{v}_{\mathcal{P}} = 0}$ т.е. точка, вокруг которой тело совершает *мгновенное вращательное движение*.

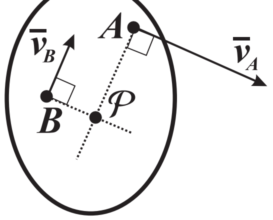
Поэтому скорость любой точки $M$: $\boxed{\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}M}}$ (или $v_M = \omega \cdot \mathcal{P}M$ в плоском случае) $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{v}_M \perp \overrightarrow{\mathcal{P}M}}$

## Определение м.ц.с. в плоском движении:

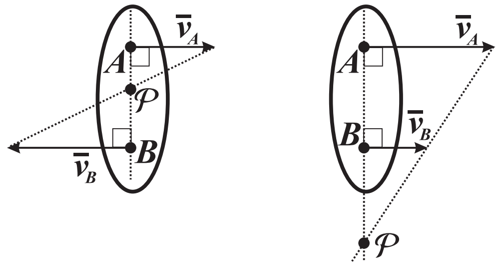



1. Движение (качение) без проскальзывания (скольжения).
   Следует из **общего принципа: при движении тел без проскальзывания, относительно друг друга, скорости точек тел в местах их соприкасания — равны.**

2. $\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_B$




3. $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ и $\vec{v}_A \perp AB$, $\vec{v}_B \perp AB$




**Важный случай**: если $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, но $\vec{v}_A, \vec{v}_B \not\perp AB \Longrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B$ (из теоремы о равенстве проекций скоростей точек на линию их соединяющую), поэтому тело совершает *мговенно-поступательное движение*, т.е. его угловая скорость в данный момент времени равна нулю: $\omega = 0$.

---

## Скорость и ускорение точки (физические компоненты)

Направления осей, как и компонент скоростей и ускорений, зависят от текущего положения точки

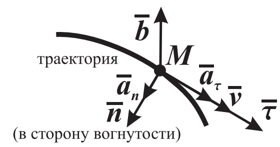
В естественных осях

$$\begin{cases} v_\tau = \dot{s} \\ v_n = 0 \\ v_b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} & \text{– касательная} \\ a_n = \dot{s}^2/\rho = v^2/\rho & \text{– нормальная} \\ a_b = 0 & \text{– бинормальная} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\tau} \perp \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n}$

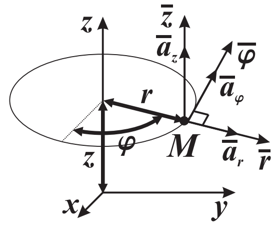
$s$ – дуговая координата

$\rho$ – радиус кривизны

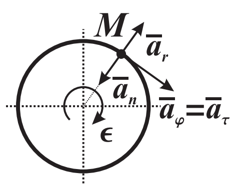



В цилиндрической системе координат ($z = \text{const}$ – полярная система координат)

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 & \text{– радиальная компонента} \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\dot{\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) & \text{– трансверсальная компонента} \\ a_z = \ddot{z} & \text{– осевая компонента} \end{cases}$$




В круговом (плоском) движении: $\dot{\varphi} = \omega$ – угловая скорость, $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon$ – угловое ускорение, $\rho = R$ – радиус окружности. $\boxed{v = R\omega}$




$$\begin{cases} a_\tau = a_\varphi = R\varepsilon & \text{— направлены в одну сторону} \\ a_n = a_r = R\omega^2 & \text{— направлены в разные стороны} \end{cases}$$

Важный частный случай – равномерное вращение: $\omega = \text{const} \;\Rightarrow\; \varepsilon = 0, \;\; a_\tau = a_\varphi = 0.$

---

## Распространенные методы решения задач на кинематику

**Координатный метод (аналитический)** — определение скоростей и ускорений в координатном виде:
$x = x(t),\; y = y(t),\; z = z(t)$ (или в других системах координат)
Очень часто используется в кинематике (иногда и в динамике).

Хорош, когда можно выразить одни координаты через другие: $x = x(z),\; y = y(z) \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{x} = \dfrac{dx}{dz}\dot{z}}\;\boxed{\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dz^2}\dot{z}^2 + \dfrac{dx}{dz}\ddot{z}}$

Порой трудоемкий, но очень эффективный.

**Метод проекций (графоаналитический)** — применяется когда сложно использовать координатный метод, но известны направления скоростей и ускорений.

Способ применения — проектируются теоремы Ривальса или Кариолиса, различные разложения скоростей и ускорений (в естественном представлении или в полярной системе) — на направления взаимно-перпендикулярные!
В итоге получаются разрешимые системы скалярных уравнений.

### Кинематические теоремы для твердых тел в сложном движении

**Теорема сложения угловых скоростей (только для тел):** $\boxed{\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r}$

$\vec{\omega}_a$ – абсолютная, $\vec{\omega}_e$ – переносная, $\vec{\omega}_r$ – относительная — угловые скорости.

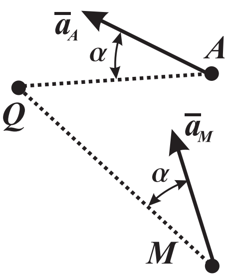
**Теорема сложения угловых ускорений (только для тел):** $\boxed{\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_c}$ $\boxed{\vec{\varepsilon}_c = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r}$

$\vec{\varepsilon}_a$ – абсолютная, $\vec{\varepsilon}_e$ – переносная, $\vec{\varepsilon}_r$ – относительная, $\vec{\varepsilon}_c$ – добавочное — угловые ускорения.

---

**Мгновенный центр ускорений** – точка $Q$ (не обязательно тела) ускорение которой (в данный момент времени) равно нулю: $\boxed{\vec{a}_Q = 0}$

**Свойства м.ц.у. в плоском движении:**




$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2} = \text{const}}$ где $\alpha$ – угол между ускорением $\vec{a}_M$ любой точки $M$ тела и вектором $\overrightarrow{MQ}$

$\boxed{a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ т.к. $\vec{a}_M = \vec{a}^{\,\text{вр}}_{MQ} + \vec{a}^{\,\text{ц}}_{MQ} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{QM} - \omega^2\overrightarrow{QM}$ и $\vec{a}^{\,\text{вр}}_{MQ} \perp \vec{a}^{\,\text{ц}}_{MQ}$

$a_M$ – пропорционально $MQ$!

---

**Следует помнить, что все теоремы кинематики сформулированы для любого, но фиксированного, момента времени. Особенно те, где используются мгновенные характеристики. Необходимо очень аккуратно подходить к использованию и обобщению теорем. Но без них не обойтись при решении!**

---

## Динамика

### Дифференциальные уравнения движения точки
**(проекции 2-го закона Ньютона на оси ортогональных систем координат)**

Естественная форма

$$\begin{cases} m\dot{v} = \sum\limits_k F_{k\tau} & \text{– касательное} \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = \sum\limits_k F_{kn} & \text{– нормальное} \\ 0 = \sum\limits_k F_{kb} & \text{– бинормальное} \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат

$$\left.\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \sum\limits_k F_{kr} & \text{– радиальное} \\ m\left(r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\dot{\varphi}\right) = \sum\limits_k F_{k\varphi} & \text{– трансверсальное} \\ m\ddot{z} = \sum\limits_k F_{kz} & \text{– осевое} \end{cases}\right\}\text{направления}$$

---

# Общие теоремы динамики (всего 3!)

**I. Теорема об изменении количества движения (импульса) системы.**

**II. Теорема об изменении момента количества движения** (момента импульса, кинетического момента) **системы точек (тел)**

**а) относительно неподвижного центра;**

**б) относительно центра масс.**

**III. Теорема об изменении кинетической энергии тела или системы тел (в частном случае – закон сохранения полной механической энергии).**

## I. Теорема об изменении количества движения (импульса) системы точек или тел.

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_k \vec{F}^e_k} \qquad \vec{F}^e_k \ \text{– только внешние силы}$$

где $\boxed{\vec{Q} = \sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu = M\vec{V}_C}$ $\quad \vec{V}_C$ – скорость центра масс, $M$ – масса тела (системы тел или точек)

$\Longrightarrow$ **Теорема об движении центра масс системы точек или тел:** $\boxed{M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_k \vec{F}^e_k}$

Задачи на использование теоремы об изменении количества движения решают проектируя теорему на оси декартовой системы координат. А вытекающую из неё теорему о движении центра масс проектируют также на цилиндрические оси (полярные в плоском случае) или на естественные оси (по отношению к траектории центра масс).

---

**Центр масс $D$ треугольника $ABC$:** $\boxed{\vec{r}_D = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}}$

**Центр масс $D$ кругового конуса высотой $H$:** $\boxed{z_D = \dfrac{H}{4}}$

---

## II. Теорема об изменении момента количества движения (момента импульса, кинетического момента) тела или системы тел (точек).

**относительно произвольной точки $A$ пространства**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = M\vec{v}_C \times \vec{v}_A + \sum_k \vec{m}_A(\vec{F}^e_k)}$$

$\vec{m}_A(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно центра $A$;
$\vec{v}_C,\ \vec{v}_A$ – скорости центра масс $C$ и точки $A$.

**а) относительно неподвижной точки $A$ ($\vec{v}_A = 0$)**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_k \vec{m}_A(\vec{F}^e_k)}$$

$\vec{m}_A(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно неподвижной точки $A$

$$\vec{L}_A = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu \quad \text{– для системы точек,}$$

$$\vec{L}_A = \int\limits_{(M)} \vec{r} \times \vec{v}\, dm \quad \text{– для тела,}$$

$$\vec{L}_A = \sum_n \vec{L}_{An} \quad \text{– для системы.}$$

Радиус-векторы $\vec{r}$ проводятся из неподвижной точки $A$.

**б) относительно центра масс $C$**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_k \vec{m}_C(\vec{F}^e_k)}$$

$\vec{m}_C(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно центра масс $C$

$$\vec{L}_C = \sum_\nu \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}'_\nu \quad \text{– для системы точек,}$$

$$\vec{L}_C = \int\limits_{(M)} \vec{\rho} \times \vec{v}'\, dm \quad \text{– для тела,}$$

$$\vec{L}_C = \sum_n \vec{L}_{Cn} \quad \text{– для системы.}$$

Радиус-векторы $\vec{\rho}$ и скорости $\vec{v}'$ — по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс ($\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ для тела) *(кенигова система кординат).*

**Зависимость между $\vec{L}_A$ и $\vec{L}_C$:** $\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_C + \vec{AC} \times \vec{Q}}$ где $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ – импульс системы.

**Для тел, движущихся вокруг**

**а) неподвижной точки $A$**

$\boxed{\vec{L}_A = \boldsymbol{J}_A \vec{\omega}}$

$\boldsymbol{J}_A$ – тензор (оператор) инерции тела относительно $A$

**б) центра масс $C$**

$\boxed{\vec{L}_C = \boldsymbol{J}_C \vec{\omega}}$

$\boldsymbol{J}_C$ – тензор (оператор) инерции тела относительно $C$ в кениговой системе координат.

Задачи на применение теоремы об изменении момента импульса (относительно неподвижной точки или центра масс) решаются в проекциях на оси неизменного направления, проходящие через рассматриваемую точку, т.е. путем получения дифференциальных уравнений на *моменты импульса относительно оси*: $L_z = \text{пр}_z \overrightarrow{L}$, являющихся компонентами вектора $\overrightarrow{L}$ в данной системе осей:

$$\frac{dL_{zA}}{dt} = \sum_k m_{zA}(\overrightarrow{F}{}^e_k) \qquad \text{или} \qquad \frac{dL_{zC}}{dt} = \sum_k m_{zC}(\overrightarrow{F}{}^e_k)$$

**Важно:** для определения $L_z$ можно (проще) взять также любую точку на оси $z$ — результат будет одинаковым!

Если вращательная часть движения тела (системы тел) происходит вокруг направления (оси) $z$ – *мгновенной оси вращения* (вдоль которой направлен вектор угловой скорости, т.е. $\overrightarrow{\omega} = (0, 0, \omega_z)$), тогда

$$\boxed{L_{zA} = I_{zA}\omega_z} \qquad \text{или} \qquad \boxed{L_{zC} = I_{zC}\omega_z}$$

Осевые моменты инерции тела $I_{zA}$ и $I_{zC}$ могут изменяться со временем, если

1) мгновенная ось вращения движется (изменяет свое направление);
2) изменяется положение тела (системы тел) относительно оси вращения;

Если движение тела чисто вращательное вокруг неподвижной оси $z$ ($I_{zA} = \text{const}$) или вокруг оси неизменного направления, проходящей через центр масс ($I_{zC} = \text{const}$), тогда дифференциальные уравнения на моменты импульса относительно этой оси переходят в

**дифференциальные уравнения вращательного движения тела**

**а) относительно неподвижной оси $z$**

$$\boxed{I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_k m_z(\overrightarrow{F}{}^e_k)}$$

**б) относительно оси $z$, проходящей через центр масс $C$**

$$\boxed{I_{zC} \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_k m_{zC}(\overrightarrow{F}{}^e_k)}$$

---

Из теорем о движении центра масс тела и теоремы об изменении момента импульса относительно оси, проходящей через центр тела получаются

## дифференциальные уравнения плоского движения тела

$$\boxed{\begin{gathered} M\ddot{x}_C = \sum_k F^e_{kx} \\ M\ddot{y}_C = \sum_k F^e_{ky} \\ I_{zC}\ddot{\varphi} = \sum_k m_{zC}(\overrightarrow{F}{}^e_k) \end{gathered}}$$

$x_C,\ y_C$ – декартовы координаты центра масс $C$ тела в плоскости;
$\varphi$ – угол поворота тела вокруг оси $z$, перпендикулярной плоскости движения.

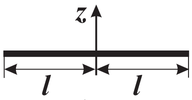
---

**Теорема Гюйгенса-Штейнера** (Связь между осевыми моментами инерции тела относительно параллельных осей $l \parallel l_C$, где ось $l_C$ проходит через центр масс тела $C$)

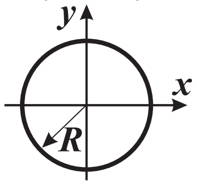
$$\boxed{I_l = I_{l_C} + Md^2}$$ — $M$ - масса тела, $d$ - расстояние между осями.

---

**Осевые моменты инерции важных тел относительно главных центральных осей инерции**




Тонкий прямолинейный стержень (длины $2l$) $\boxed{I_z = \dfrac{Ml^2}{3}}$

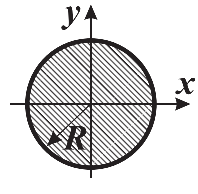


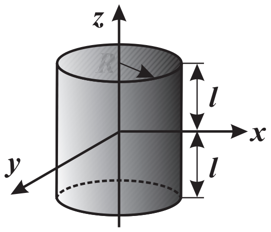

Кольцо (радиуса $R$)

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{MR^2}{2}, \quad I_z = MR^2}$$

Диск (тонкий)

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}, \quad I_z = \frac{MR^2}{2}}$$



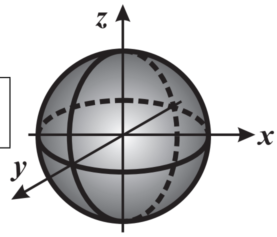




Круглый цилиндр (сплошной)

$$\boxed{I_x = I_y = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right), \quad I_z = \frac{MR^2}{2}}$$

Шар

$$\boxed{I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2}$$



## III. Теорема об изменении кинетической энергии

**интегральная форма**
(за конечный промежуток времени от $t_2$ до $t_1$)

$$\boxed{T_2 - T_1 = \sum_k A(\overrightarrow{F}^e_k) + \sum_k A(\overrightarrow{F}^i_k)}$$

$A(\overrightarrow{F}^e_k),\ A(\overrightarrow{F}^i_k)$ – работа внешних и внутренних сил

**дифференциальная форма**
(за элементарный промежуток времени $dt$)

$$\boxed{dT = \sum_k \delta A(\overrightarrow{F}^e_k) + \sum_k \delta A(\overrightarrow{F}^i_k)}$$

$\delta A(\overrightarrow{F}^e_k),\ \delta A(\overrightarrow{F}^i_k)$ – элементарная работа внешних и внутренних сил

**Важный случай применения теоремы об изменении кинетической энергии:**

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \sum_k \frac{\delta A(\overrightarrow{F}^e_k)}{dt} + \sum_k \frac{\delta A(\overrightarrow{F}^i_k)}{dt}}$$

Из интегральной формы — получается после замены конечного момента времени $t_2$ некоторым текущим (произвольным) $t$ и дальнейшим дифференцированием полученного выражения по $t$. В правой части этого выражения в числителях стоят элементарные работы сил а не дифференциалы, потому что работа сил на элементарном промежутке времени не является дифференциалом.

**Вариант теоремы об изменении кинетической энергии**

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \sum_k \overrightarrow{F}^e_k \overrightarrow{v}_k + \sum_k \overrightarrow{F}^i_k \overrightarrow{v}_k}$$

где $\overrightarrow{v}_k$ – скорость точки к которой приложена сила $\overrightarrow{F}_k$. Величина $\overrightarrow{F}_k \overrightarrow{v}_k$ – называется *мощностью силы* $\overrightarrow{F}_k$.
В основном применяется для систем точек.

---

## Кинетическая энергия

**Теорема Кёнига:** $\boxed{T = \frac{1}{2}MV_C^2 + T'}$ $T'$ – кинетическая энергия в кёниговой системе координат, т.е. в поступательно двигающейся системе с началом в центре масс $C$.

$\boxed{T' = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (v'_\nu)^2}$ – для системы точек, $\boxed{T' = \frac{1}{2}\int\limits_{(M)} (v')^2 dm}$ – для тела.

**При вращательном движении <u>тела</u> вокруг неподвижной точки $A$ с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}$:**

$$\boxed{T = \frac{1}{2}J_{\omega A}\omega^2 \qquad \text{или} \qquad T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J_A}\overrightarrow{\omega})\overrightarrow{\omega} \qquad \text{или} \qquad T = \frac{1}{2}\overrightarrow{L}_A\overrightarrow{\omega}}$$

$J_{\omega A}$ – осевой момент инерции относительно мгновенной оси вращения (вдоль $\overrightarrow{\omega}$), проходящей через точку $A$,
$\boldsymbol{J_A}$ – оператор инерции относительно точки $A$, $\overrightarrow{L}_A$ – момент импульса тела относительно точки $A$.

**Важно:** В качестве неподвижной точки $A$ можно рассматривать мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$.

Поэтому для кинетической энергии тела, вместо теоремы Кёнига, можно использовать формулу при вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей $\boxed{T = \frac{1}{2}I_{\omega\mathcal{P}}\omega^2}$

**Важно:** <u>Для тела</u> кинетическую энергию относительного движения (вращения) вокруг центра масс - $T'$ из теоремы Кёнига - можно (проще) определить из формулы $\boxed{T' = \frac{1}{2}I_{\omega C}\omega^2}$

**Простейшие типы движений тела**

**Поступательное движение тела:** $\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2}$ $v$ – скорость любой точки тела.

**Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси $z$:** $\boxed{T = \frac{1}{2}I_z\omega^2}$ $\omega$ – угловая скорость тела.

**Плоское движение тела: (из теоремы Кёнига)** $\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{zC}\omega^2}$ $I_{zC}$ – осевой момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

**Определение работы** сил и моментов необходимо осуществлять используя формулы для элементарной работы – аналогично методике, изложенной в принципе возможных перемещений.

Если силы (внешние и внутренние) потенциальны $\left(\overrightarrow{F}_\nu = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \overrightarrow{r}_\nu}\right)$ и потенциал не зависит от времени,

то работа является полным дифференциалом: $\sum\limits_k \delta A(\overrightarrow{F}^e_k) + \sum\limits_k \delta A(\overrightarrow{F}^i_k) = -d\Pi$, и справедлив

**Закон сохранения *полной механической энергии* системы**

$$\boxed{E = T + \Pi = \text{const} \qquad \text{или} \qquad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2}$$

Требование потенциальности всех сил, для справедливости закона сохранения механической энергии, необязательно Достаточно чтобы потенциальными были силы, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля. Например работа реакций ***идеальных*** стационарных связей равна нулю (гладкие поверхности, гибкие нерастяжимые нити, невесомые недеформируемые стержни). Поэтому всегда следует проводить анализ «идеальности» связей (особенно для внутренних сил). И если остальные силы потенциальны и получаемый потенциал системы не зависит явно от времени, то для такой системы выполняется закон сохранения механической энергии.

Если присутствует трение – никакого потенциала и закона сохранения энергии – не существует.

Тогда работу сил ищем через элементарные перемещения и используем теорему об изменении кинетической энергии.

---

## Уравнения Лагранжа второго рода

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma}$$

$Q_\sigma$ – обобщенная сила (соответствующая обобщ. координате $q_\sigma$), $T$ – должна быть в обобщенных координатах.

Определяется $Q_\sigma$ через элементарную работу обычных сил и моментов как коэффициент при соответствующих обобщ. возможных перемещениях: $\boxed{\sum\limits_k \delta A(\overrightarrow{F}^e_k) + \sum\limits_k \delta A(\overrightarrow{F}^i_k) = \sum\limits_\sigma Q_\sigma \delta q_\sigma}$ а для потенциальных сил $\boxed{Q_\sigma = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}}$

Следует обязательно пробовать использовать уравнения Лагранжа в каждой задаче на динамику.

Потому что количество получаемых дифференциальных уравнений минимально (равно числу степеней свободы, т.е. независимых координат), а выводы (например первые интегралы ) можно получить очень быстро.

Особенно хорошо применяются уравнения Лагранжа в задачах где достаточно легко выражается кинетическая энергия системы через обобщенные координаты (какие-нибудь расстояния, углы) и просто определяются обобщенные силы. Если обобщенные силы найти сложно, выражение кинетической энергии в любом случае пригодится – её можно использовать в теореме об изменении кинетической энергии.

---

## Относительное движение тела и точки

Фактически это – движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с каким-то телом.

**Следует**: к обычным силам (активным и реакциям) добавить «фиктивные» *силы инерции* (переносные и кориолисовы), учитывающие движение системы отсчета - противоположно соответствующим ускорениям

**Для точки:** $\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_c \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{J_e} = -m\overrightarrow{a}_e & \text{– переносная} \\ \overrightarrow{J_c} = -m\overrightarrow{a}_c & \text{– кориолисова} \end{array}\right\}$ силы инерции

**Дифференциальные уравнения относительного движения точки**

$$\boxed{m\overrightarrow{a}_r = \sum_k \overrightarrow{F}_k + \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_c}}$$

**Важный случай $\overrightarrow{J_c} = 0$:**

$$\overrightarrow{J_c} = -m(2\overrightarrow{\omega}_e \times \overrightarrow{v}_r) \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{J_c} = 0 \quad \text{при}} \quad \left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{\omega}_e = 0 & \text{– поступательное переносное движение,} \\ \overrightarrow{v}_r = 0 & \text{– относительный покой,} \\ \overrightarrow{\omega}_e \parallel \overrightarrow{v}_r & \text{– колинеарность векторов.} \end{array}\right.$$

**Разложение переносного ускорения $\overrightarrow{a}_e$:**

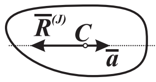
$$\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}_{e\tau} + \overrightarrow{a}_{en} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{J_e} = \overrightarrow{J}_{e\tau} + \overrightarrow{J}_{en} \quad \text{где} \quad \left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{J}_{e\tau} = -m\overrightarrow{a}_{e\tau} & \text{– касательная} \\ \overrightarrow{J}_{en} = -m\overrightarrow{a}_{en} & \text{– нормальная} \end{array}\right\} \text{переносные силы инерции}$$

$$\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}^O_e + \overrightarrow{a}^{\text{вр}}_e + \overrightarrow{a}^{\text{ц}}_e \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{J_e} = \overrightarrow{J}^O_e + \overrightarrow{J}^{\text{вр}}_e + \overrightarrow{J}^{\text{ц}}_e \quad \text{где} \quad \left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{J}^O_e = -m\overrightarrow{a}^O_e & \text{– полюсная} \\ \overrightarrow{J}^{\text{вр}}_e = -m\overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} & \text{– вращательная} \\ \overrightarrow{J}^{\text{ц}}_e = m\,\omega^2 \overrightarrow{OM} & \text{– центробежная} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{переносные} \\ \text{силы} \\ \text{инерции}\end{array}$$

## Приведение сил инерции, действующих на тело

**Поступательное движение тела:** Силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру масс:

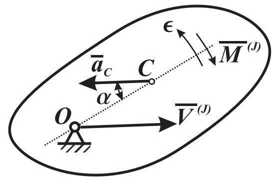
$\boxed{\overrightarrow{R}^{(J)} = -M\overrightarrow{a}}$ где $M$ – масса тела, $\overrightarrow{a}$ – ускорение любой точки тела



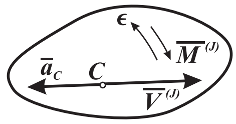

**Вращение плоской фигуры вокруг перпендикулярной к ней неподвижной оси $z$:**
Силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции $\boxed{\overrightarrow{V}^{(J)} = -M\overrightarrow{a}_C}$

и к главному моменту сил инерции $\boxed{\overrightarrow{M}^{(J)} = -I\varepsilon_z}$

Точка приложения $\overrightarrow{V}^{(J)}$ и осевой момент инерции $I$ — в точке приведения.
На рисунке – точкой приведения сил инерции является точка $O$ на оси вращения.




**Плоское движение** Силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции приложенному к центру масс $\boxed{\overrightarrow{V}^{(J)} = -M\overrightarrow{a}_C}$ и к главному моменту сил инерции $\boxed{\overrightarrow{M}^{(J)} = -I_C\varepsilon_z}$




---

## Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

$$\boxed{\sum_k \delta A(\overrightarrow{F}_k) + \sum_k \delta A(\overrightarrow{J}_k) = 0}$$

$\delta A(\overrightarrow{F}_k)$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении системы
$\delta A(\overrightarrow{J}_k)$ – элементарная работа сил инерции на возможном перемещении системы

**Преимущество – отсутствие реакций идеальных связей**

Идеальные связи — гладкие поверхности, гибкие нерастяжимые нити, невесомые недеформируемые стержни.

**Если связи неидеальны (силы трения) – тогда добавляем их к активным силам.**

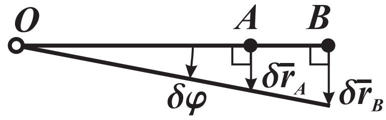
### Определение работ активных сил и сил инерции, действующих на тело

| $\sum \delta A(\overrightarrow{F}_k)$ | $\sum \delta A(\overrightarrow{J}_k)$ |
|---|---|
| **Поступательное движение тела** | |
| $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{F}} \cdot \delta\overrightarrow{r}}$ | $\boxed{\overrightarrow{R}^{(J)} \cdot \delta\overrightarrow{r}}$ |
| $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \sum \overrightarrow{F}_k$ | $\boldsymbol{\overrightarrow{R}^{(J)} = -M\overrightarrow{a}}$ |
| $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ – главный вектор системы сил | $\overrightarrow{R}^{(J)}$ – равнодействующая сил инерции |
| $\delta\overrightarrow{r}$ - возможное перемещение и $\overrightarrow{a}$ - ускорение — любой точки тела | |
| **Вращение вокруг неподвижной оси $z$** | |
| $\boxed{\mathcal{M}_z \cdot \delta\varphi}$ | $\boxed{M_z^{(J)} \cdot \delta\varphi}$ |
| $\mathcal{M}_z = \sum m_z(\overrightarrow{F}_k)$ | $\boldsymbol{M_z^{(J)} = -I_z\varepsilon_z}$ |
| $\mathcal{M}_z$ – главный момент системы сил относительно оси вращения $z$ | $M_z^{(J)}$ – главный момент сил инерции относительно оси вращения $z$ |
| $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение тела, $\varepsilon_z$ – угловое ускорение тела | |
| $I_z$ – осевой момент инерции тела относительно оси вращения $z$ | |
| **Плоское движение тела** | |
| $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{F}} \cdot \delta\overrightarrow{r_O} + \mathcal{M}_{zO} \cdot \delta\varphi}$ | $\boxed{\overrightarrow{V}_C^{(J)} \cdot \delta\overrightarrow{r_C} + M_{zC}^{(J)} \cdot \delta\varphi}$ |
| $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \sum \overrightarrow{F}_k, \quad \mathcal{M}_{zO} = \sum m_{zO}(\overrightarrow{F}_k)$ | $\boldsymbol{\overrightarrow{V}_C^{(J)} = -M\overrightarrow{a}_C, \qquad M_{zC}^{(J)} = -I_{zC}\varepsilon_z}$ |
| $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ – главный вектор системы сил | $\overrightarrow{V}_C^{(J)}$ – главный вектор сил инерции |
| $\mathcal{M}_{zO}$ - главный момент системы сил относительно оси $z$, проходящей через **полюс $O$** тела, перпендикулярно плоскости движения | $M_{zC}^{(J)}$ – главный момент сил инерции относительно оси $z$, проходящей через **центр масс $C$** тела, перпендикулярно плоскости движения |
| $\delta\overrightarrow{r_O}$ - возможное перемещение полюса $O$ | $\delta\overrightarrow{r_C}$ - возможное перемещение центра масс $C$ |
| $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение тела, $\overrightarrow{a}_C$ – ускорение центра масс тела | |

## Определение направлений и величин возможных перемещений
## (для принципа возможных перемещений и общего уравнения динамики — при определении работ)

Основной метод определения направлений возможных перемещений $\delta\overrightarrow{r}$ а также зависимости их величин от возможного углового перемещения $\delta\varphi$ (а через $\delta\varphi$ и между собой) — при повороте вокруг шарнира $O$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta\overrightarrow{r}_A \perp \overrightarrow{OA} & \delta r_A = OA\delta\varphi \\ \delta\overrightarrow{r}_B \perp \overrightarrow{OB} & \delta r_B = OB\delta\varphi \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \delta r_A = \frac{OA}{OB}\delta r_B}$$




Среди возможных перемещений системы есть и действительное перемещение (определяемое наличием конкретных сил в данный момент времени и в данном положении), поэтому возможные перемещения всегда направлены как возможные скорости точек системы. Так что

**При работе с возможными перемещениями применимы все методы работы для скоростей**

Среди них самые важные и эффективные:

- принцип твердого тела – проекции возможных перемещений 2-х точек тела на прямую их соединяющую – равны (по величине и направлению): $\boxed{\text{пр}_{AB}\delta\overrightarrow{r}_A = \text{пр}_{AB}\delta\overrightarrow{r}_B}$ ⇒ зависимость между величинами $\delta r_A$ и $\delta r_A$;
- представление возможного перемещения точки в виде сложного перемещения –
  $\boxed{\text{разложение на переносное и относительное возможные перемещения}}$
  Эти составляющие полного (абсолютного) движения, в свою очередь, также подчиняются всем правилам определения возможных перемещений (конечно только внутри своего типа движения);
- при движении тел без проскальзывания относительно друг друга (зубчатое зацепление) – возможные перемещения тел в точках касания равны (по величине и направлению).

---

## Устойчивость равновесия

Теорема Лагранжа, определяющая устойчивость равновесия, справедлива только для *консервативных систем*:
- связи стационарные и идеальные;
- силы потенциальны;
- потенциальная энергия не зависит явно от времени.

**Теорема Лагранжа:** Если в положении равновесия консервативной системы с идеальными связями потенциал имеет строгий изолированный минимум, то это положение - устойчиво.

Т.е. условие устойчивости положения равновесия получаем из неравенства $\boxed{\dfrac{d^2\Pi}{dq^2} > 0}$ при $q = q_0$.

А само положение равновесия $q = q_0$ определяем из уравнений равновесия $\boxed{\dfrac{d\Pi}{dq} = 0}$

(здесь подразумевается одна степень свободы, $q$ – обобщенная координата).

Аналогично можно исследовать **устойчивость относительного равновесия** для *приведенного потенциала* $\Pi^*$ для частного случая движения – вращения с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг неподвижной оси $z$.

$$\boxed{\Pi^* = \Pi + \Pi_e^{(J)}}$$

где $\Pi_e^{(J)}$ – *потенциал центробежной силы инерции.*

Для точки $\boxed{\Pi_e^{(J)} = -m(x^2+y^2)\dfrac{\omega^2}{2}}$ где $r^2 = x^2 + y^2$ – квадрат расстояния до оси вращения $z$;

Для тела $\boxed{\Pi_e^{(J)} = -I_z\dfrac{\omega^2}{2}}$ где $I_z$ – осевой момент инерции тела относительно оси $z$.

Т.е. положение относительного равновесия определяем из $\boxed{\dfrac{d\Pi^*}{dq} = 0}$ ⇒ $q = q_0$,

критерий устойчивости относительного положения равновесия: $\boxed{\dfrac{d^2\Pi^*}{dq^2} > 0}$ при $q = q_0$.

## 12. Задачи по дисциплине «Теоретическая механика»

**Тема занятия 1:** Движение материальной точки в векторно-координатном представлении. Законы Ньютона. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовом базисе.

1. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой 1,02 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с$^2$. Найти силу давления, производимого грузом на платформу во время их совместного спуска.

   *Ответ*: 5,92 Н.

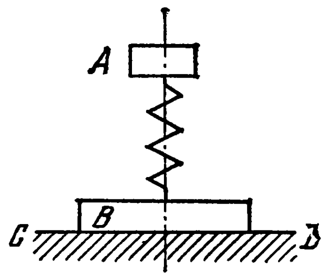
2. В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50 Н, при ускоренном – 51 Н. Найти ускорение кабины.

   *Ответ*: 0,196 м/с$^2$

3. Тело массой 2,04 кг совершает колебательное движение по горизонтальной прямой согласно закону $x = 10\sin\dfrac{pt}{2}$ м. Найти зависимость силы, действующей на тело, от координаты $x$, а также наибольшую и величину этой силы.

   *Ответ*: $F = -5{,}033x$ Н, $F_{\max} = 50{,}33$ Н.

4. Грузы $A$ и $B$ веса $P_A = 20$ Н и $P_B = 40$ Н соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Груз $A$ совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 см и периодом 0,25 сек. Вычислить силу наибольшего и наименьшего давления грузов $A$ и $B$ на опорную поверхность $CD$.

   *Ответ*: $R_{\max} = 72{,}8$ Н, $R_{\min} = 47{,}2$ Н.

5. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30$^0$ к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

   *Ответ*:1,61 сек.

6. Самолет начинает пикировать без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

   *Ответ*: $v = v_{\max}\sqrt{1 - e^{-2gs/v_{\max}^2}}$

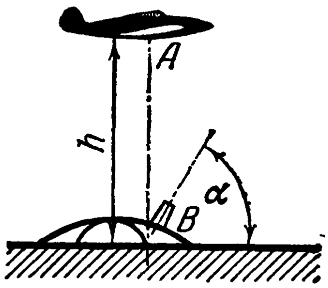
7. Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть $p$, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным $kSv$, где $k$ – коэффициент пропорциональности, $S$ – площадь горизонтальной проекции лодки, $v$ – величина скорости погружения. Масса лодки равна $M$. Определить скорость погружения $v$, если при $t = 0$ скорость $v_0 = 0$.

   *Ответ*: $v = \dfrac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right)$.

8. Тело падает на Землю с высоты $h$ без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти скорость тела $v$ которую оно приобретет когда достигнет поверхности Земли. Радиус Земли равен $R$, ускорение силы тяжести у поверхности Земли - $g$.

   *Ответ*: $v = \sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$.

9. Самолет $A$ летит над землей на высоте $h$ с горизонтальной скоростью $v_1$. Из орудия $B$ произведен выстрел по самолету в тот момент, когда самолет находился на одной вертикали с орудием. Найти: 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость $v_0$ снаряда для того, чтобы он мог попасть в самолет, и 2) под каким углом $a$ к горизонту должен быть сделан выстрел. Сопротивлением воздуха пренебречь.
*Ответ:*1) $v_0^2 \geq v_1^2 + 2gh$, 2) $\cos a = v_1/v_0$.

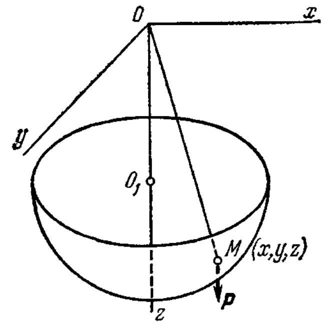



**Тема занятия 2:** Криволинейные ортогональные системы координат: цилиндрическая, сферическая, полярная. Дифференциальные уравнения движения точки в криволинейных координатах.

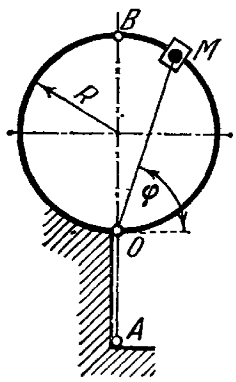
1. Шарик массой $m$, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью $a$ в отверстие, сделанное в плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити $T$, если известно, что в начальный момент нить расположена на прямой, расстояние между шариком и отверстием равно $R$, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна $v_0$.

   *Ответ*: В полярный координатах (если принять отверстие за начало координат и угол $j_0$ равным нулю): $r = R - at$; $j = \dfrac{v_0 t}{R - at}$; $T = \dfrac{m v_0^2 R^2}{(R - at)^2}$.

2. Сферический маятник состоит из нити $OM$ длины $l$, прикрепленной одним концом к неподвижной точке $O$, и тяжелой точки $M$ веса $P$, прикрепленной к другому концу нити. Точку $M$ отклонили из положения равновесия так, что её координаты стали: при $t = 0$ $x = x_0$, $y = 0$, и сообщили ей начальную скорость $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, $\dot{z}_0 = 0$. Определить, при каком соотношении начальных условий точка $M$ будет описывать окружность в горизонтальной плоскости и каково будет время обращения точки $M$ по этой окружности.
   *Ответ*: $v_0 = x_0\sqrt{g/z_0}$, $T = 2p\sqrt{z_0/g}$.

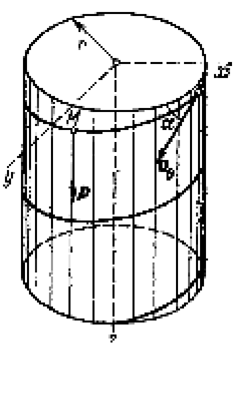



3. Гладкое тяжелое кольцо $M$ веса $Q$ может скользить без трения по дуге окружности радиуса $R$ см, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить $MOA$, проходящая через гладкое неподвижное кольцо $O$ и закрепленная в точке $A$. Принять, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо $M$ находится в точке $O$, и что для вытягивания нити на 1 см нужно приложить силу $c$. В начальный момент кольцо находится в точке $B$ в неустойчивом равновесии и при ничтожно малом толчке начинает скользить по окружности. Определить давление $N$, производимое кольцом на окружность.
   *Ответ*: $N = 2Q + cR + 3(Q + cR)\cos 2j$; давление направлено наружу при $N > 0$, внутрь при $N < 0$.

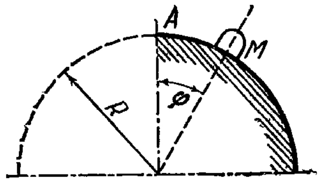



4. Тяжелая точка $M$ массой $m$ движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса $r$. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой и ось цилиндра вертикальной, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна по величине $v_0$ и составляет угол $a$ с горизонтом.

   *Ответ*: $N = \dfrac{m v_0^2 \cos^2 a}{r}$.

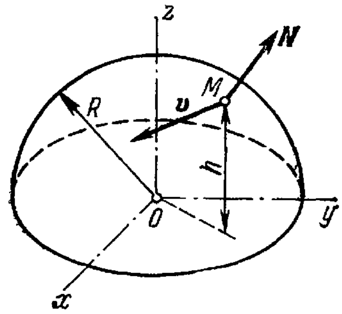


5. Камень $M$, находящийся на вершине $A$ гладкого полусферического купола радиуса $R$, получает начальную горизонтальную скорость $v_0$. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях $v_0$ камень сойдет с купола в начальный момент времени? Сопротивлением движению камня по куполу пренебречь.



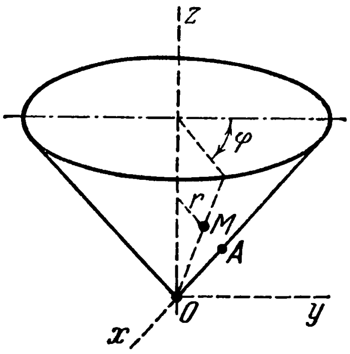

*Ответ*: $j = \arccos\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{v_0^2}{3gR}\right)$, $v_0 \geq \sqrt{gR}$.

6. Точка $M$ массы $m$ движется по гладкой поверхности полусферического купола радиуса $R$. Считая, что на точку действует сила тяжести, параллельная оси $z$, и зная, что в начальный момент точка имела скорость $v_0$ и находилась на высоте $h_0$ от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте $h$ от основания купола.




*Ответ*: $N = \dfrac{mg}{r}\left(3h - 2h_0 - \dfrac{v_0^2}{g}\right)$.

7. Точка $M$ массы $m$ движется по гладкой поверхности круглого конуса, угол раствора которого $2a$, под влиянием силы отталкивания от вершины $O$, пропорциональной расстоянию: $F = c \cdot OM$ Н, где $c = 1$ Н/м. Ось конуса направлена по вертикали вверх, точка двигается в однородном поле силы тяжести. В начальный момент точка $M$ находится в точке $A$, расстояние $OA$ равно $a$, начальная скорость $v_0$ направлена параллельно основанию конуса. Определить давление точки на поверхность конуса.



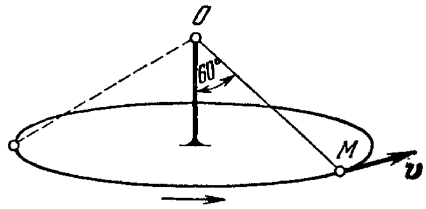

*Ответ*: $N = m\sin a\left(g + \dfrac{a^2 v_0^2 \sin 2a}{2r^3}\right)$.

8. Конический маятник имеет длину $l$ и описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $a$. Определить период обращения конического маятника.

*Ответ*: $T = \dfrac{2p\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}$.

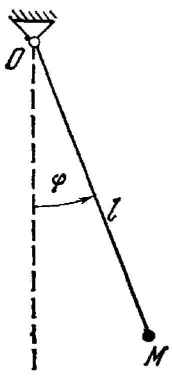
**Тема занятия 3:** Естественное описание движения точки вдоль траектории. Дифференциальные уравнения движения точки в естественных осях.

1. Груз $M$ массы 0,102 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной точке $O$, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол $60^0$.




Определить скорость $v$ груза и натяжение $T$ нити.
*Ответ*: $v = 2{,}1$ м/с, $T = 2$ Н.

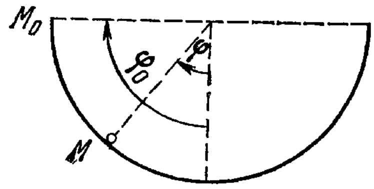
2. Груз $M$ веса 10 Н подвешен к тросу длины $l = 2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $j = \dfrac{p}{6}\sin 2pt$, где $j$ – угол отклонения троса от вертикали в радианах, $t$ – время в секундах. Определить натяжения $T_1$ и $T_2$ троса в верхнем и нижнем положениях груза.
*Ответ*: $T_1 = 32{,}1$ Н, $T_2 = 8{,}65$ Н.



3. Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет собой прямую, наклоненную к горизонту, так что на кривых участках внешний край выше внутреннего. С какой наименьшей и с какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус $R$ и угол наклона к горизонту $\alpha$, если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен $f$ ?

   *Ответ*: $v_{\min} = \sqrt{gR\dfrac{\mathrm{tg}\alpha - f}{1 + f\ \mathrm{tg}\alpha}}$, $v_{\max} = \sqrt{gR\dfrac{\mathrm{tg}\alpha + f}{1 - f\ \mathrm{tg}\alpha}}$

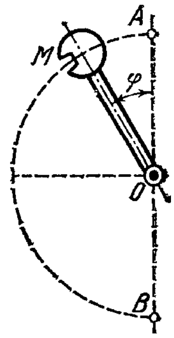
4. Точка $M$ массы $m$ движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса $r$. В начальный момент угол $\varphi_0 = \pi/2$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки $M$ и реакцию поверхности цилиндра при угле $\varphi = 30°$.




   *Ответ*: $v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$, $T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

5. Математический маятник длины $l$ вывели из положения равновесия, сообщив ему начальную скорость $v_0$, направленную по горизонтали. Определить длину дуги, которую он опишет в течение одного периода.

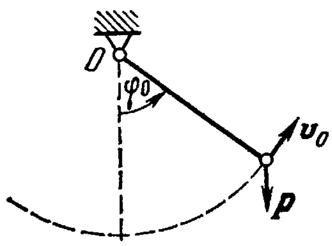
   *Ответ*: $s = 4l\arccos\left(1 - \dfrac{v_0^2}{2gl}\right)$.




6. Тяжелая стальная отливка массы $M = 20$ кг прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси $O$. Отливка падает из верхнего положения $A$ с ничтожно малой начальной скоростью. Пренебрегая массой стержня, определить давление на ось.

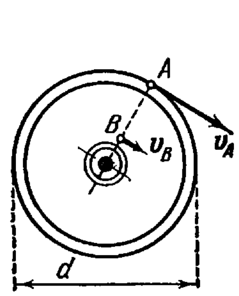
   *Ответ*: 980 Н.

7. Тяжелая отливка массы $m$ прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси $O$ и отклонен от вертикали на угол $\varphi_0$. Из этого начального положения отливке сообщают начальную скорость $v_0$. Определить усилие в стержне как функцию угла отклонения стержня от вертикали, пренебрегая массой стержня. Длина стержня $l$.



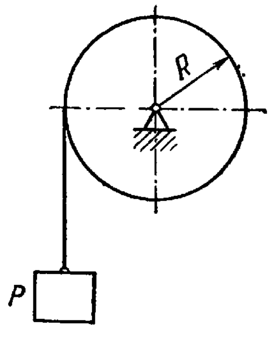

   *Ответ*: $N = 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + mv_0^2/l$. Если $N > 0$ - стержень растянут, если $N < 0$ стержень сжат.

**Тема занятия 4:** Кинематика твердого тела. Формулы распределения скоростей и ускорений точек тела. Сферическое, вращательное, плоское движение тела.




1. Точка $A$ шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка $B$, взятая на одном радиусе с точкой $A$, движется со скоростью 10 см/с; расстояние $AB = 20$ см. Определить угловую скорость $\omega$ и диаметр $d$ шкива

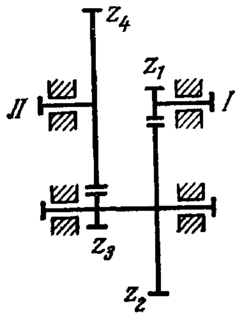
   *Ответ*: $\omega = 2$ рад/с, $d = 50$ см.




2. Вал радиуса $R = 10$ см приводится по вращение гирей $P$, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где $x$ – расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, $t$ – время в секундах. Определить угловую скорость $\omega$ и

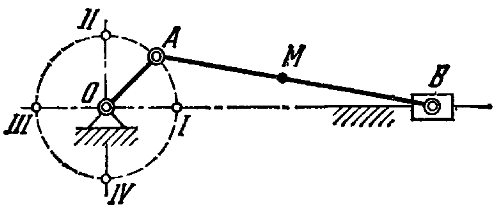
угловое ускорение $e$ вала, а также полное ускорение $a$ точки на поверхности вала в момент $t$.

*Ответ*: $w = 20t$ рад/с, $e = 20$ рад/с$^2$, $a = 200\sqrt{1+400t^2}$ см/с$^2$.




3. Редуктор скорости, служащий для замедления вращения и передающий вращение вала *I* валу *II*, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубцов: $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$. Определить передаточное отношение механизма.

   *Ответ*: $i_{\text{III}} = w_{\text{I}} / w_{\text{II}} = 35$

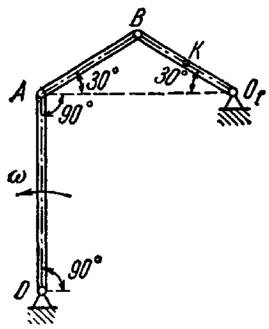



4. В кривошипно-шатунном механизме длина шатуна $OA = 40$ см, длина шатуна $AB = 2$ м; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, равной $6p$ рад/с. Найти угловую скорость $w$ шатуна и скорость средней его точки $M$ при четырех положениях кривошипа, для которых угол $AOB$ соответственно равен 0, $p/2$, $p$, $3p/2$.

   *Ответ*: I. $w = -\dfrac{6}{5}p$ рад/с, $v_M = 377$ см/с. II. $w = 0$, $v_M = 754$ см/с.

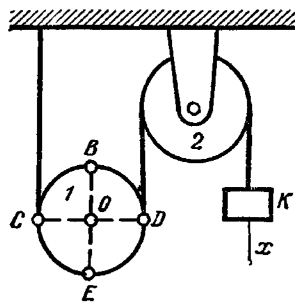
   III. $w = \dfrac{6}{5}p$ рад/с, $v_M = 377$ см/с. IV. $w = 0$, $v_M = 754$ см/с.

   Знак минус в выражении $w$ указывает, что шатун вращается в сторону, противоположную кривошипу.




5. Определить скорость точки $K$ четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке, если звено $OA$ длины 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка $K$ расположена в середине стержня $BO_1$.

   *Ответ*: 20 см/с

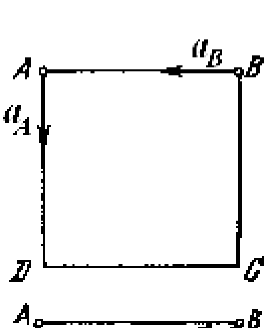



6. Подвижный блок *1* и неподвижный блок *2* соединены нерастяжимой нитью. Груз $K$, прикрепленный к концу этой нити, опускается вниз по закону $x = 2t^2$ м. Определить скорости точек $C$, $D$, $B$ и $E$, лежащих на ободе подвижного блока, в момент $t = 1$ с в положении, указанном на рисунке, если радиус подвижного блока *1* равен 0,2 м, а $CD \perp BE$. Найти также угловую скорость $w$ блока *1*.

   *Ответ*: $v_C = 0$, $v_D = 4$ м/с, $v_B = v_E = 2\sqrt{2}$ м/с, $w = 10$ рад/с.

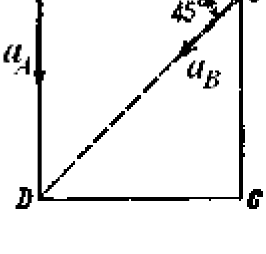
7. В условиях предыдущей задачи определить ускорения точек $C$, $B$, $D$ и $E$ подвижного блока в момент $t = 0{,}5$ с. Найти также угловое ускорение $e$ блока *1*.

   *Ответ*: $a_C = 5$ м/с$^2$, $a_B = 3{,}6$ м/с$^2$, $a_D = 6{,}4$ м/с$^2$, $a_E = 7{,}29$ м/с$^2$, $e = 10$ рад/с$^2$.




8. Квадрат $ABCD$ со стороною $a$ совершает плоское движение в плоскости рисунка. Найти положение мгновенного центра ускорений и ускорения вершин его $C$ и $D$, если известно, что в данный момент ускорения двух вершин $A$ и $B$ одинаковы по величине и равны 10 см/с$^2$. Направление ускорений $A$ и $B$ совпадает со сторонами квадрата, как указано на рисунке.

   *Ответ*: $a_C = a_D = 10$ см/с$^2$ и направлены по сторонам квадрата. Мгновенный центр ускорений находится в точке пересечении диагоналей квадрата.

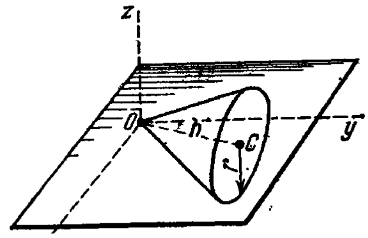



9. Квадрат $ABCD$ со стороною $a = 2$ см совершает плоское движение. В данный момент ускорения вершин $A$ и $B$ соответственно равны по

модулю $a_A = 2$ см/с$^2$, $a_B = 4\sqrt{2}$ см/с$^2$ и направлены, как указано на рисунке. Найти мгновенную угловую скорость $w$ и мгновенное угловое ускорение $e$ квадрата, а также ускорение точки *C*.

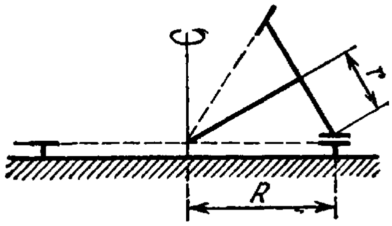
*Ответ*: $w = \sqrt{2}$ рад/с, $e = 1$ рад/с$^2$, $a_C = 6\,$см/с$^2$ направлено от *C* к *D*.

10. Конус, высота которого $h = 4\,$см и радиус основания $r = 3\,$см, катится по плоскости без скольжения, имея неподвижную вершину в точке $O$. Определить угловую скорость и угловое ускорении конуса, если скорость центра основания конуса $v_c = 48\,$см/с $=$ const .




*Ответ*: $w = 20\,$рад/с, $e = 300\,$рад/с$^2$.

11. Коническое зубчатое колесо, ось которого пересекается с геометрической осью плоской опорной шестерни в центре последней, обегает пять раз в минуту опорную шестерню. Определить угловую скорость $w_r$ вращения колеса вокруг его оси и угловую скорость $w$ вращения вокруг мгновенной оси, если радиус опорной шестерни вдвое больше радиуса колеса: $R = 2r$ .

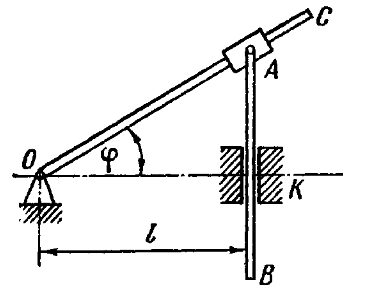



*Ответ*: $w_r = 1{,}047$ рад/с, $w = 0{,}907$ рад/с.

**Тема занятия 5:** Кинематика сложного движения точки и твердого тела.

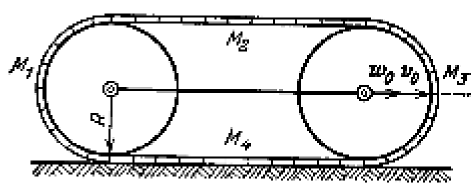
1. Корабль плывет на юг со скоростью $36\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идет курсом на юго-восток со скоростью 36 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля, определяемые наблюдателем, находящимся на палубе второго корабля.
*Ответ*: $v_r = 36\,$км/ч направлена на северо-восток.

*2.* В кулисном механизме при качании кривошипа *OC* вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун *A*, перемещаясь вдоль кривошипа *OC*, приводит в движение стержень *AB*, движущийся в вертикальных направлениях *K*. Расстояние *OK* = *l*. Определить скорость движения ползуна *A* относительно кривошипа *OC* в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.




*Ответ*: $v_r = \dfrac{lw\,\mathrm{tg}j}{\cos j}$

3. Найти скорости и ускорения точек *M₁*, *M₂*, *M₃* и *M₄* гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью *v₀* и ускорением *a₀*; радиусы колес трактора равны *R*; скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.

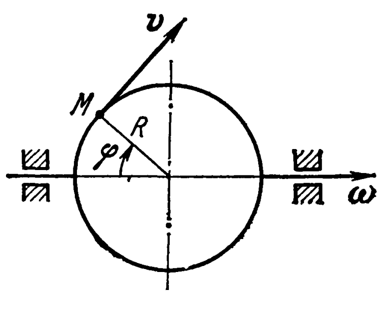



*Ответ*: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}, \quad v_2 = 2v_0, \quad v_4 = 0,$

$$a_1 = \sqrt{a_0^2 + (a_0 + v_0^2 / R)^2}, \quad a_2 = 2a_0,$$

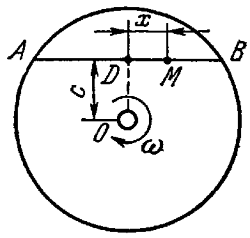
$$a_3 = \sqrt{a_0^2 + (a_0 - v_0^2 / R)^2}, \quad a_4 = 0,$$

4. По ободу диска радиуса *R*, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω, движется с постоянной по модулю скоростью *v* точка *M*. Найти абсолютное ускорение точки *M* как функцию угла φ, составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.



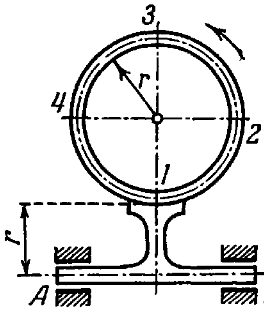

*Ответ*: $a_a = \sqrt{\dfrac{v^4}{R^2} + w^4 R^2 \sin^2 j + 2w^2 v^2 (1 + \cos^2 j)}.$

5. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. По хорде *AB* из ее середины *D* движется точка *M* с постоянной относительной скоростью *u*. Хорда отстоит от центра диска на расстоянии *c*. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* как функции расстояния *DM=x*.



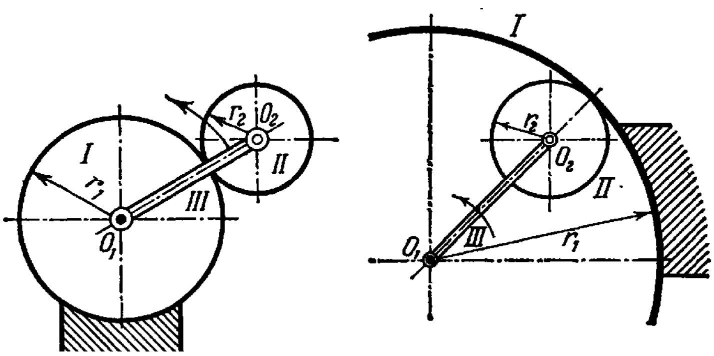

*Ответ*: $v_a = \sqrt{w^2 x^2 + (u + wc)^2}$, $a_a = w\sqrt{w^2 x^2 + (2u + wc)^2}$

6. Полое кольцо радиуса *r* жестко соединено с валом *AB*, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной скоростью *u*. Вал *AB* вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от *A* к *B*. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках *1, 2, 3 и 4*.



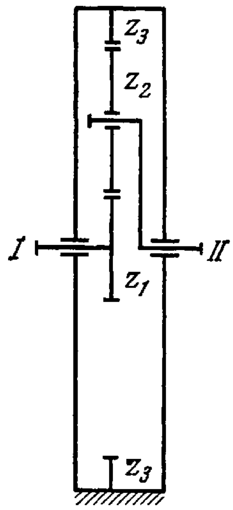

*Ответ*: $a_1 = rw^2 - \dfrac{u^2}{r}$, $a_3 = 3rw^2 + \dfrac{u^2}{r}$, $a_2 = a_4 = 2rw^2 + \dfrac{u^2}{r}$.

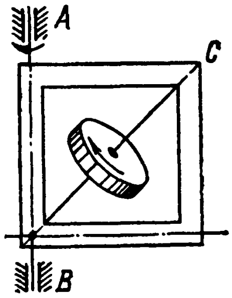
7. Кривошип *III* соединяет оси $O_1$ и $O_2$ двух зубчатых колес *I* и *II*, причем зацепление может быть или внешнее, или внутреннее, как указано на рисунке, колесо *I* остается неподвижным, а кривошип *III* вращается вокруг оси $O_1$ с угловой скоростью $\omega_3$. Зная радиусы колес $r_1$ и $r_2$, вычислить для колеса *II* его абсолютную угловую скорость $\omega_{23}$ по отношению к кривошипу.




*Ответ*: Внешнее зацепление: $w_2 = w_3 \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}$, $w_{23} = w_3 \dfrac{r_1}{r_2}$. Внутреннее зацепление: $w_2 = -w_3 \dfrac{r_1 - r_2}{r_2}$, $w_{23} = -w_3 \dfrac{r_1}{r_2}$. Знак минус указывает на то, что соответствующие тела вращаются в противоположные стороны.

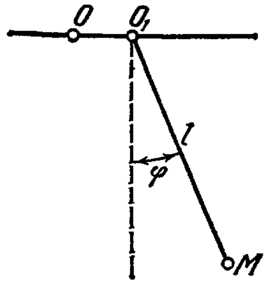
8. Редуктор скоростей состоит из трех зубчатых колес. Первое колесо (число зубцов $z_1$ = 20) насажено на ведущий вал *I*, делающий $n_1$ = 4500 об/мин, второе ($z_2$ = 25) свободно насажено на ось, жестко связанную с ведомым валом II, третье колесо ($z_3$ = 70) с внутренним зацеплением неподвижно. Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.
*Ответ*: $n_{II} = 1000$ *об / мин*, $n_2 = -1800$ *об / мин*.




9. Квадратная рама вращается вокруг оси *AB*, делая *2* об/мин. Вокруг оси *BC*, совпадающей с диагональю рамы, вращается диск, делая *2* об/мин. Определить абсолютную угловую скорость и угловое ускорение диска.
*Ответ*: $w = 0{,}39$ *рад / с*, $e = 0{,}031$ *рад / с*$^2$.

**Тема занятия 6:** Динамика относительного движения материальной точки.

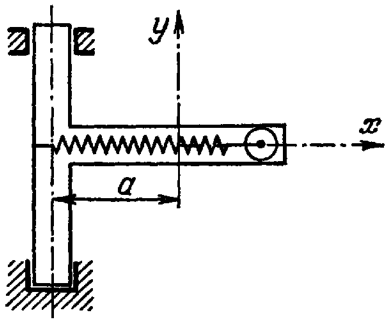



1. Точка привеса математического маятника длины $l$ движется по вертикали равноускоренно. Определить период $T$ малых колебаний маятника в двух случаях: 1) когда ускорение точки привеса направлено вверх и имеет какую угодно величину $p$; 2) когда это ускорение направлено вниз и величина его $p < g$.

   *Ответ*: 1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-p}}$.

2. Точка $O_1$ привеса маятника длины $l$ совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки $O$: $OO_1 = a\sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в момент, равный нулю, $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$.

   *Ответ*: $\varphi = \dfrac{ap^2}{l(k^2-p^2)}\left(\sin pt - \dfrac{p}{k}\sin kt\right)$, $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

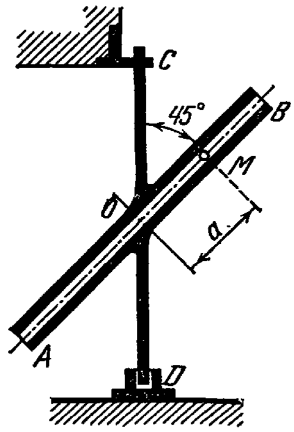



3. Шарик массы $m$, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой $c$, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии $a$ от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

   *Ответ*: В системе координат, начало которой совпадает с точкой равновесия шарика,

$$x = 2\frac{\omega^2 a}{k^2-\omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t \text{ при } k=\sqrt{\frac{c}{m}} > \omega$$

$$x = \frac{\omega^2 a}{\omega^2-k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2-k^2}\,t - 1\right) \text{ при } k=\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega$$

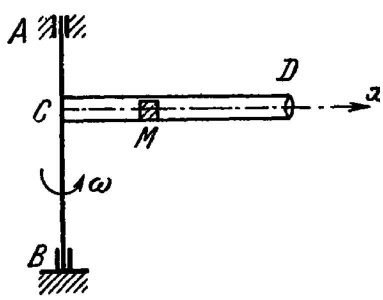



4. Трубка $AB$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси $CD$, составляя с ней неизменный угол 45°. В трубке находится тяжелый шарик $M$. Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки $O$ равно $a$. Трением пренебречь.

   *Ответ*: $OM = \left(a - \dfrac{g\sqrt2}{\omega^2}\right)\operatorname{ch}\dfrac{\omega t\sqrt2}{2} + \dfrac{g\sqrt2}{\omega^2}$.

5. Тяжелая точка может двигаться без трения по вертикальному проволочному кольцу, которое вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Радиус кольца равен R. Найти положение равновесия точки и определить, как будет двигаться точка, если в положении равновесия она получит малую скорость $v_0$ по касательной вверх.

   *Ответ*: Положение равновесия соответствует углу $\varphi_0 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 R}$, отсчитываемому от нижнего положения точки на круге. Точка, получившая малую скорость $v_0$, будет совершать малые колебания около положения равновесия согласно уравнению: $\varphi = \dfrac{v_0}{Rk}\sin kt$, где $k = \dfrac{\sqrt{\omega^4R^2-g^2}}{\omega R}$.




6. Горизонтальная трубка $CD$ равномерно вращается вокруг вертикальной оси $AB$ с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело $M$. Определить скорость $v$ тела относительно

трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна $L$. Трением пренебречь.

*Ответ*: $v = \sqrt{L^2 - x_0^2}w$

7. В условиях предыдущей задачи определить время движения тела в трубке.

   *Ответ*: $T = \dfrac{1}{w}\ln\dfrac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$

8. В условиях задачи 6 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен $f$.

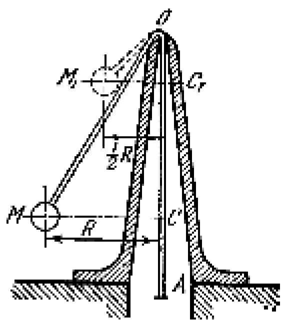
   *Ответ*: $\ddot{x} = w^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4w^2\dot{x}^2}$ : верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $\dot{x} > 0$.

9. Кольцо движется по гладкому стержню $AB$, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец $A$, делая один оборот в секунду; длина стержня 1 м; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 см от конца $A$ и имело скорость, равную нулю. Определить момент $t_1$, когда кольцо сойдет со стержня.

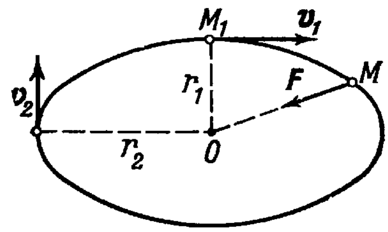
   *Ответ*: $t_1 = \dfrac{1}{2p}\ln 3 = 0{,}175\,\text{с}.$

**Тема занятия 7:** Теоремы динамики материальной точки. Законы сохранения.

1. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени $T$ тело пройдет путь длины $l = 39{,}2$ м, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.
   *Ответ*: Т = 5 с.




2. Гирька $M$ привязана к концу нерастяжимой нити $MOA$, часть которой $OA$ пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая 120 об/мин. Медленно втягивая нить $OA$ в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины $OM_1$ при которой гирька описывает окружность радиусом $R/2$. Сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности?
   *Ответ*: 480 об/мин.

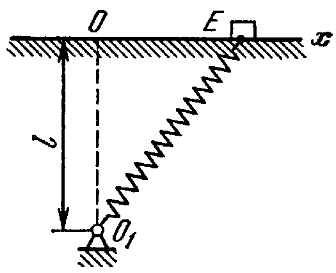



3. Точка $M$ движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость $\boldsymbol{v}_2$ в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $\boldsymbol{v}_1 = 30$ см/с, а $r_2$ в пять раз больше $r_1$.

   *Ответ*: $\boldsymbol{v}_2 = 6$ см/с.

4. Мальчик массы 40 кг стоит на полозьях спортивных саней, масса которых равна 20 кг, и делает каждую секунду толчок с импульсом 20 Н·с. Найти скорость, приобретаемую санями за 15 с, если коэффициент трения $f = 0{,}01$.

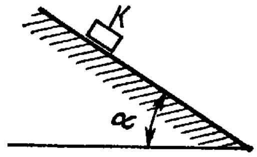
   *Ответ*: $\boldsymbol{v} = 3{,}53$ м/с.




5. Тело $E$, масса которого равна $m$, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости $c$, второй конец которой прикреплен к шарниру $O_1$. Длина недеформированной пружины равна $l_0$; $OO_1 = l$. В начальный момент тело $E$ отклонено от положения равновесия $O$ на конечную величину $OE = a$ и отпущено без начальной скорости. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.

*Ответ*: $v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right]}$.

6. Тело $K$ находится на шероховатой плоскости в покое. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha$ и $f_0 > \operatorname{tg}\alpha$, где $f_0$ – коэффициент трения покоя. В некоторой момент телу сообщена начальная скорость $v_0$, направленная вдоль плоскости вниз. Определить путь $s$, пройденный телом до остановки, если коэффициент трения при движении равен $f$.




*Ответ*: $s = \dfrac{v_0^2}{2g\left(f\cos a - \sin a\right)}$.

7. Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 см, равна 1,96 Н. С какой скоростью $\boldsymbol{v}$ вылетит из трубки шарик массы 30 г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально.

*Ответ*: $\boldsymbol{v}$ = 8,08 м/с.

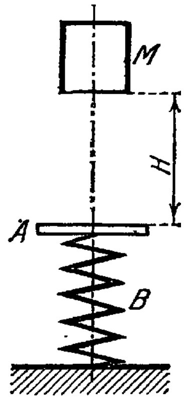
8. Тело брошено с поверхности Земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью $v_0$. Определить высоту $H$ поднятия тела, принимая во внимание, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли $R$ = 6370 км, $v_0$ = 1 км/с.

*Ответ*: $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51.38\,\textit{км}.$

9. Груз массы 1 кг подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке $O$. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость $\boldsymbol{v}_0$ в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 2,1 м/с. Определить натяжение нити в наинизшем положении и отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.
*Ответ*: 28,4 Н, 47,5.

10. Парашютист массы 70 кг выбросился из самолета и, пролетев 100 м, раскрыл парашют. Найти силу натяжения стропов, на которых человек был подвешен к парашюту, если в течение первых пяти секунд с момента раскрытия парашюта, при постоянной силе сопротивления движению, скорость парашютиста уменьшилась до 4,3 м/с. Сопротивлением воздуха движению человека пренебречь.
*Ответ*: 1246 Н.

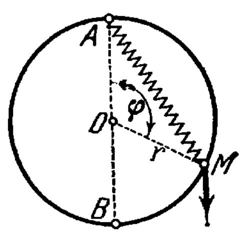
11. Груз $M$ веса $P$ падает без начальной скорости с высоты $H$ на плиту $A$, лежащую на спиральной пружине $B$. От действия упавшего груза $M$ пружина сжимается на величину $h$. Не учитывая веса плиты $A$ и сопротивлений, вычислить время $T$ сжатия пружины на величину $h$ и импульс $S$ упругой силы пружины за время $T$.




*Ответ*: $T = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{p}{2} - a\right)$, $\quad S = P\left(T + \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\right)$,

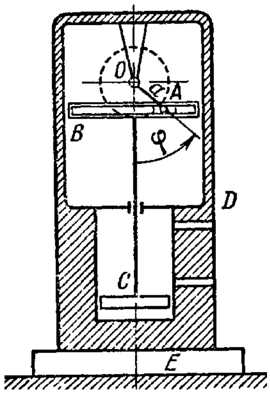
где $tg\,a = -\dfrac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$, $\quad k = \dfrac{\sqrt{2g\,(H+h)}}{h}$.

12. Груз $M$, подвешенный на пружине к верхней точке $A$ круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения. Найти, какова должна быть жесткость пружины для того, чтобы давление груза на кольцо в нижней точке $B$ равнялось нулю при следующих данных: радиус кольца 20 см, масса груза 5 кг, в начальном положении груза расстояние $AM$ равно 20 см и пружина имеет натуральную длину; начальная скорость груза равна нулю; массой пружины пренебречь.



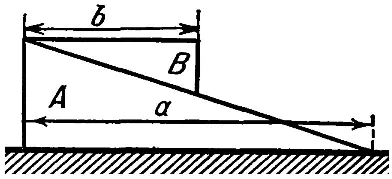

*Ответ*: Пружина должна удлиняться на 1 см при действии силы, равной 4,9 Н.

**Тема занятия 8:** Теоремы динамики систем материальных точек.
Законы сохранения.

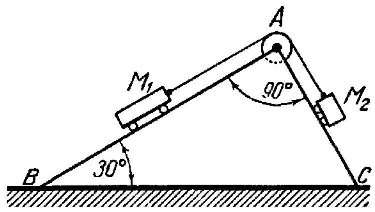



1. Определить силу давления на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую, если масса неподвижных частей корпуса $D$ и фундамента $E$ равна $M_1$, масса кривошипа $OA = a$ равна $M_2$, масса кулисы $B$ и поршня $C$ равна $M_3$. Кривошип $OA$, вращающийся равномерно с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.

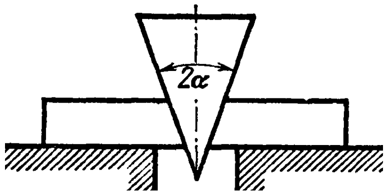
   *Ответ*: $N = (M_1 + M_2 + M_3)\,g + \dfrac{aw^2}{2}(M_2 + 2M_3)\cos wt.$




2. На однородную призму $A$, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма $B$; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, масса призмы $A$ втрое больше массы призмы $B$. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину $l$, на которую передвинется призма $A$, когда призма $B$, спускаясь по $A$, дойдет до горизонтальной плоскости.
   *Ответ*: $l = (a - b)/4$.



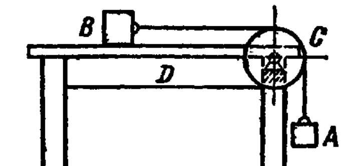

3. Два груза $M_1$ и $M_2$, соответственно массы $M_1$ и $M_2$, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок $A$, скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием $BC$ на гладкую горизонтальную плоскость. Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза $M_1$ на высоту $h$ = 10 см. Масса клина $M = 4M_1 = 16M_2$; массой нити и блока пренебречь.
   *Ответ*: Клин переместится вправо на 3,77 см.




4. Гладкий клин массы $M$ и с углом 2α при вершине раздвигает две пластины массы $M_1$ каждая, лежащие в покое на гладком горизонтальном столе. Написать уравнения движения клина и пластин и определить силу давления клина на каждую из пластин.

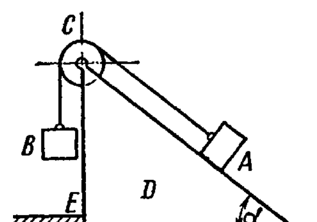
   *Ответ*: Уравнение движения клина: $s = \dfrac{at^2}{2}$, где $a = g\dfrac{M\,ctg\,a}{M\,ctg\,a + 2M_1\,tg\,a}$;

   уравнение движения пластин: $s_1 = \dfrac{a_1 t^2}{2}$, где $a_1 = a\,tg\,a$; сила давления $N = \dfrac{M_1 a_1}{\cos a}$.




5. Груз $A$ массы $M_1$, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок $C$, груз $B$ массы $M_2$. Определить силу давления стола $D$ на пол, если масса стола равна $M_3$. Массой нити пренебречь.

   *Ответ*: $N = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \dfrac{M_1^2}{M_1 + M_2}\right)g.$

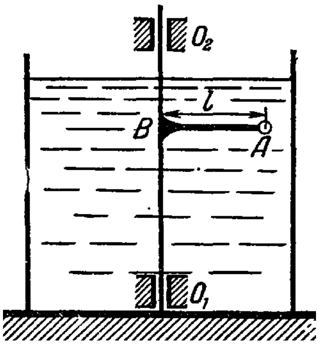



6. Груз $A$ массы $M_1$, опускаясь вниз по наклонной плоскости $D$, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок $C$, груз $B$ массы $M_2$. Определить горизонтальную составляющую давления наклонной плоскости $D$ на выступ пола $E$. Массой нити пренебречь.

   *Ответ*: $N = M_1 g\dfrac{M_1 \sin a - M_2}{M_1 + M_2}\cos a$.

7. Шарик $A$, находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня $AB$ длины $l$, приводится во вращение вокруг вертикальной оси $O_1O_2$ с начальной угловой скоростью $\omega_0$.

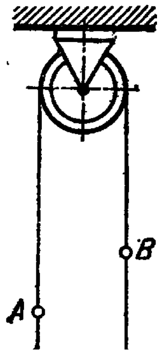
Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m w$, где $m$ — масса шарика, $\alpha$ — коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов $n$ которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.




*Ответ*: $T = \frac{l}{a}\ln 2, \quad n = \frac{l w_0}{4 p a}.$

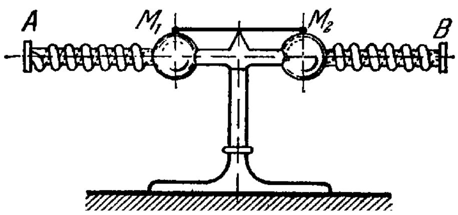
8. Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно $l$; верхний груз имеет массу $m_1$, нижний — массу $m_2$. Определить, на каком расстоянии $x$ от нижнего груза нужно поместить ось подвеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьшим; массой стержня пренебречь и грузы считать материальными точками.

*Ответ*: $x = l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}.$



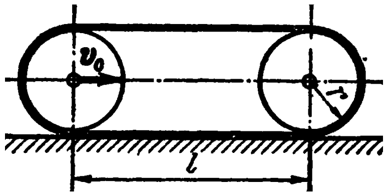

9. Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку $A$ каната ухватился человек, к точке $B$ подвязан груз одинаковой массы с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью $v$ относительно каната?
*Ответ*: Груз будет подниматься с канатом со скоростью $v/2$.

10. Однородный стержень $AB$ длины $2L$ = 180 см и массы $M_1$ = 2 кг подвешен в устойчивом положении равновесия на острие так, что ось его горизонтальна. Вдоль стержня могут перемещаться два шара массы $M_2$ = 5 кг каждый, прикрепленные к концам двух одинаковых пружин. Стержню сообщается вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n_1$ = 64 об/мин, причем шары расположены симметрично относительно оси вращения и центры их с помощью нити удерживаются на расстоянии $2l_1$=72 см друг от друга. Затем нить пережигается, и шары, совершив некоторое число колебаний, устанавливаются под действием пружин и сил трения в положение равновесия на расстоянии $2l_2$ = 108 см друг от друга. Рассматривая шары как материальные точки и пренебрегая массами пружин, определить новое число $n_2$ оборотов стержня в минуту.



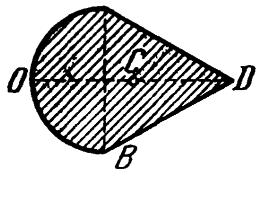

*Ответ*: $n_2 = \frac{6M_2 l_1^2 + M_1 L^2}{6M_2 l_2^2 + M_1 L^2} n_1 = 34$ об/мин.

11. Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью $v_0$. Расстояние между осями колес равно $l$, радиусы колес равны $r$, масса одного погонного метра гусеничной цепи равна $g$ .
*Ответ*: $T = 2g\,(l + p\,r)v_0^2.$



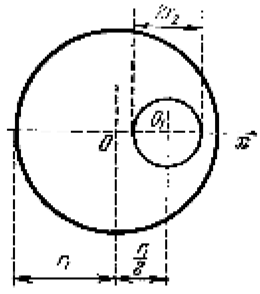

**Тема занятия 9:** Геометрия масс твердого тела: центр масс, осевые и центробежные моменты инерции, оператор инерции, главные оси инерции.

1. Определить положение центра тяжести $C$ площади, ограниченной полуокружностью $AOB$ радиуса $R$ и двумя прямыми равной длины $AD$ и $DB$, причем $OD = 3R$.



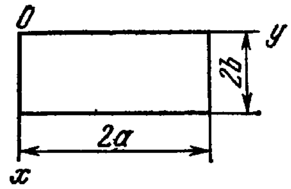

*Ответ*: $OC = \frac{3p + 16}{3p + 12} R = 1.19R.$

2. Определить положение центра тяжести однородного диска с круглым отверстием, предполагая радиус диска равным $r_1$, радиус отверстия равным $r_2$ и центр этого отверстия находящимся на расстоянии $r_1/2$ от центра диска.



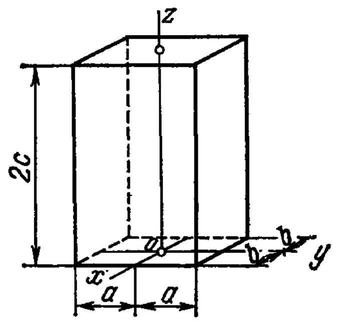
*Ответ*: $x_C = -\dfrac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.

3. Вычислить осевые $J_x$ и $J_y$ моменты инерции изображенной на рисунке однородной прямоугольной пластинки массы $M$ относительно осей $x$ и $z$ а также и центробежный момент инерции $J_{xy}$.



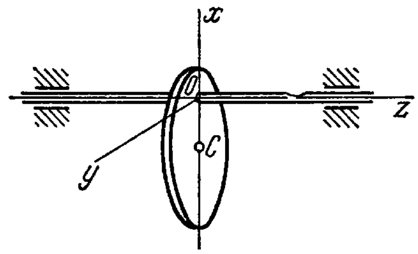

*Ответ*: $J_x = \frac{4}{3} Ma^2$, $J_y = \frac{4}{3} Mb^2$, $J_{xy} = Mab$.

4. Вычислить моменты инерции изображенного на рисунке однородного прямоугольного параллелепипеда массы $M$ относительно осей $x$, $y$ и $z$.




*Ответ*: $J_x = \dfrac{M}{3}\left(a^2 + 4c^2\right)$, $J_y = \dfrac{M}{3}\left(b^2 + 4c^2\right)$, $J_z = \dfrac{M}{3}\left(a^2 + b^2\right)$.

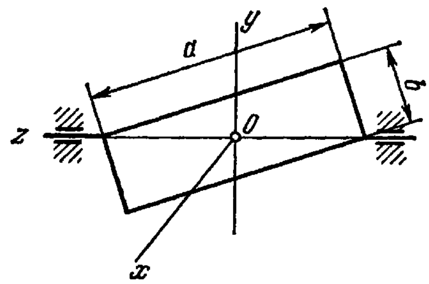
5. Однородный круглый диск массы $M$ эксцентрично насажен на ось $z$, перпендикулярную его плоскости. Радиус диска равен $r$, эксцентриситет $OC = a$, где $C$ — центр масс диска. Вычислить осевые $J_x$, $J_y$, $J_z$ и центробежные $J_{xy}$, $J_{xz}$, $J_{yz}$ моменты инерции диска. Оси координат показаны на рисунке.




*Ответ*: $J_x = \dfrac{Mr^2}{4}$, $J_y = M\left(\dfrac{r^2}{4} + a^2\right)$, $J_z = M\left(\dfrac{r^2}{2} + a^2\right)$,

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

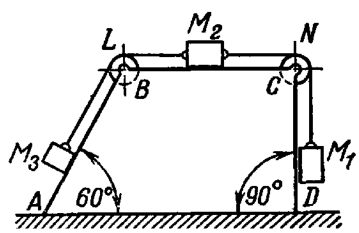
6. Однородная прямоугольная пластинка массы $M$ со сторонами длины $a$ и $b$ прикреплена к оси $z$, проходящей через одну из ее диагоналей. Вычислить центробежный момент инерции $J_{yz}$ пластинки относительно осей $y$ и $z$, лежащих вместе с пластинкой в плоскости рисунка. Начало координат совмещено с центром масс пластинки.




*Ответ*: $J_{yz} = \dfrac{M}{12}\dfrac{ab\left(a^2 - b^2\right)}{a^2 + b^2}$.

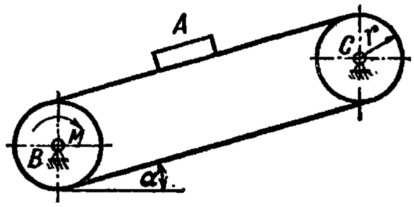
**Тема занятия 10:** Теоремы динамики твердого тела. Законы сохранения.

1. Три груза массы $M_1$ = 20 кг, $M_2$ = 15 кг и $M_3$ = 10 кг соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки $L$ и $N$. При опускании груза $M_1$ вниз груз $M_2$ перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ массы $M$ = 100 кг вправо, а груз $M_3$ поднимается по боковой грани $AB$ вверх. Пренебрегая трением между усеченной пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение пирамиды $ABCD$ относительно пола, если груз $M_1$ опустится вниз на 1 м. Массой нити пренебречь.
*Ответ*: Влево на 14 см.



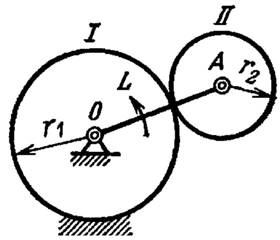

2. Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву $B$. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент $M$. Опреде-

лить скорость ленты транспортера $v$ в зависимости от ее перемещения $s$, если масса поднимаемого груза $A$ равна $M_1$, а шкивы $B$ и $C$ радиуса $r$ и массы $M_2$ каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.



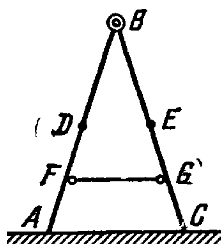

*Ответ*: $v=\sqrt{\dfrac{2\left(M-M_1\,gr\sin a\right)}{r\left(M_1+M_2\right)}}\,s.$

3. Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента $L$, приложенного к кривошипу $OA$. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо $I$ имеет радиус $r_1$, подвижное колесо $II$ — радиус $r_2$ и массу $M_1$ а кривошип $OA$ — массу $M_2$. Колесо $II$ считать однородным диском, а кривошип — однородным стержнем.



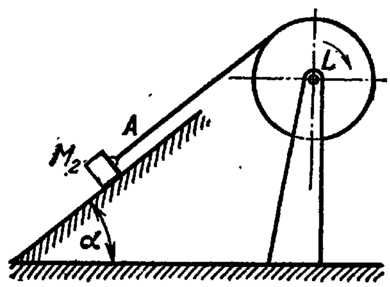

*Ответ*: $w=\dfrac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\dfrac{3Lj}{9M_1+2M_2}}\,.$

4. Стремянка $ABC$ с шарниром $B$ стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB = BC = 2l$, центры масс находятся в серединах $D$ и $E$ стержней, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр масс, равен $r$, расстояние шарнира $B$ от пола равно $h$. В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стержня $FG$. Пренебрегая трением в шарнире, определить: 1) скорость точки $B$ в момент удара ее о пол; 2) скорость точки $B$ в тот момент, когда расстояние ее от пола будет равно $h/2$.



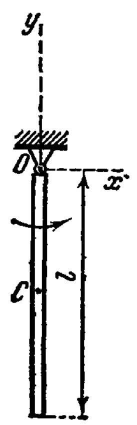

*Ответ*: 1) $v=2l\sqrt{\dfrac{gh}{l^2+r^2}}$; 2) $v=\dfrac{1}{2}\sqrt{gh\dfrac{16l^2-h^2}{2(l^2+r^2)}}.$

5. Постоянный вращающий момент $L$ приложен к барабану ворота радиуса $r$ и массы $M_1$. К концу $A$ намотанного на барабан троса привязан груз массы $M_2$, который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан ворота, повернувшись на угол $j$ ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен $f$. Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.




*Ответ*: $w=\dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{L-M_2gr(\sin a+f\cos a)}{M_1+2M_2}}\,j\,.$

6. Тяжелый однородный стержень длины $l$ подвешен своим верхним концом на горизонтальной оси $O$. Стержню, находившемуся в вертикальном положении, была сообщена угловая скорость $w_0=3\sqrt{g/l}$. Совершив пол-оборота, он отделяется от оси $O$. Определить в последующем движение стержня траекторию его центра масс и угловую скорость вращения ω.

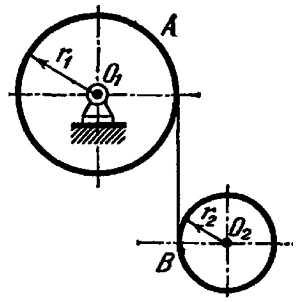



*Ответ*: 1) Парабола $y_C=\dfrac{l}{2}-\dfrac{2}{3l}x_C^2$; 2) $w=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}.$

7. Два однородных круглых цилиндра $A$ и $B$, массы которых соответственно равны $M_1$ и $M_2$, а радиусы оснований $r_1$ и $r_2$, обмотаны двумя гибкими нитями, завитки которых расположены симметрично относительно средних плоскостей, параллельных основаниям цилиндров; оси

цилиндров горизонтальны, причем образующие их перпендикулярны линиям наибольших скатов. Ось цилиндра $A$ неподвижна; цилиндр $B$ падает из состояния покоя под действием силы тяжести.

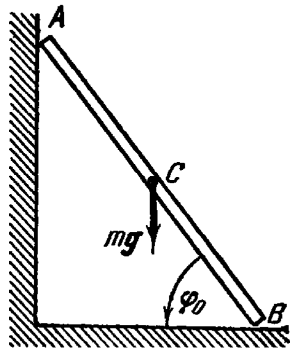
Определить в момент $t$ после начала движения, предполагая, что в этот момент нити еще остаются намотанными на оба цилиндра: 1) угловые скорости $\omega_1$ и $\omega_2$ цилиндров, 2) пройденный центром масс цилиндра $B$ путь $s$ и 3) натяжение $T$ нитей.




*Ответ*: 1) $\omega_1 = \dfrac{2gM_2}{r_1(3M_1 + 2M_2)}t, \quad \omega_2 = \dfrac{2gM_1}{r_2(3M_1 + 2M_2)}t,$

2) $s = \dfrac{g(M_1 + M_2)}{3M_1 + 2M_2}t^2; \quad T = \dfrac{M_1 M_2 g}{3M_1 + 2M_2}.$

8. Однородный стержень $AB$ длины $a$ поставлен в вертикальной плоскости под углом $\varphi_0$ к горизонту так, что концом $A$ он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом $B$ — на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости. 1) Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня. 2) Найти, какой угол $\varphi_1$ будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены.

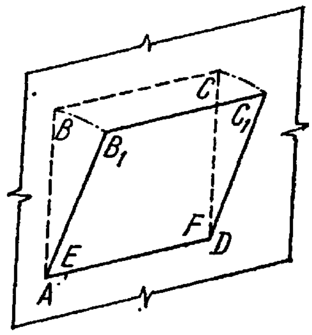



*Ответ*: 1) $\dot\varphi = \sqrt{\dfrac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}, \quad \ddot\varphi = -\dfrac{3g}{2a}\cos\varphi; \quad$ 2) $\sin\varphi_1 = \dfrac{2}{3}\sin\varphi_0.$

9. Использовав условие предыдущей задачи, определить угловую скорость $\dot\varphi$ стержня и скорость нижнего его конца в момент падения стержня на пол.

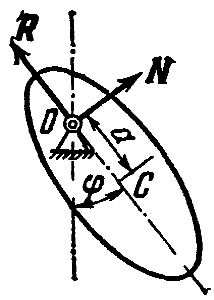
*Ответ*: $\dot\varphi = \sqrt{\dfrac{3g}{a}\left(1 - \dfrac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}, \quad v_B = \dfrac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}.$

10. Тонкая однородная доска $ABCD$ прямоугольной формы прислонена к вертикальной стене и опирается на два гвоздя $E$ и $F$ без шляпок; расстояние $AD$ равно $FE$. В некоторый момент доска начинает падать с ничтожно малой начальной угловой скоростью, вращаясь вокруг прямой $AD$. Исключая возможность скольжения доски вдоль гвоздей, определить угол $\alpha_1 = \angle BAB_1$ при котором горизонтальная составляющая реакции изменяет направление, и угол $\alpha_2$ в момент отрыва доски от гвоздей.




*Ответ*: $\alpha_1 = \arccos\dfrac{2}{3} = 48°11', \quad \alpha_2 = \arccos\dfrac{1}{3} = 70°32'.$

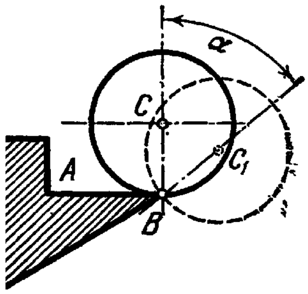
11. Твердое тело массы $M$ качается вокруг горизонтальной оси $O$, перпендикулярной плоскости рисунка. Расстояние от оси подвеса до центра масс $C$ равно $a$; радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен $r$. В начальный момент тело было отклонено из положения равновесия на угол $\varphi_0$ и отпущено без начальной скорости. Определить две составляющие реакции оси $R$ и $N$, расположенные вдоль направления, проходящего через точку подвеса и центр масс тела, и перпендикулярно ему. Выразить их в зависимости от угла $\varphi$ отклонения тела от вертикали.




*Ответ*: $R = Mg\cos\varphi + \dfrac{2Mga^2}{r^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \quad N = Mg\dfrac{r^2}{r^2 + a^2}\sin\varphi.$

12. Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки $AB$, край которой $B$ заострен и параллелен образующей цилиндра. Радиус основания цилиндра $r$. В момент отделения цилиндра от

площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край $B$, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CBC_1 = \alpha$. Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки, а также угол $\alpha$. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.



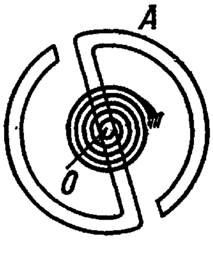

*Ответ*: $w = 2\sqrt{\dfrac{g}{7r}}, \quad a = \arccos\dfrac{4}{7} = 55{,}1°.$

**Тема занятия 11:** Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Метод кинетостатики.

1. Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным $M$: при этом возникает момент сил сопротивления $M_1$, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = aw^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен $J$.

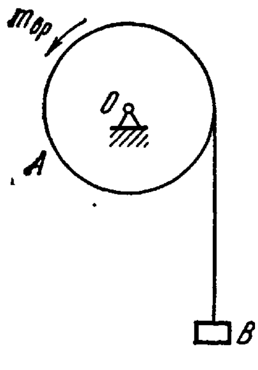
   *Ответ*: $w = \sqrt{\dfrac{M}{a}}\,\dfrac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}$, где $b = \dfrac{2}{J}\sqrt{aM}$.

2. Часовой балансир $A$ может вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести $O$, имея относительно этой оси момент инерции $J$. Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов. При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен $c$. Определить закон движения балансира, если в начальный момент в условиях отсутствия сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость $w_0$.

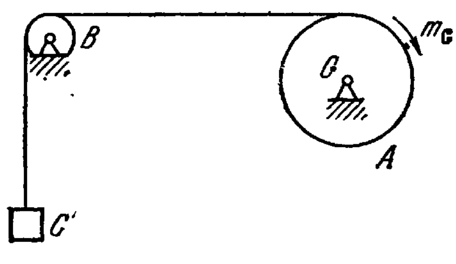
   *Ответ*: $j = w_0\sqrt{\dfrac{J}{c}}\sin\sqrt{\dfrac{c}{J}}\,t.$

3. При пуске в ход электрической лебедки к барабану $A$ приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный времени, причем $m_{вр} = at$, где $a$ — постоянная. Груз $B$ массы $M_1$ поднимается посредством каната, навитого на барабан $A$ радиуса $r$ и массы $M_2$. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

   *Ответ*: $w = \dfrac{(at - 2M_1gr)t}{r^2\,(2M_1 + M_2)}.$

4. Барабан $A$ массы $M_1$ и радиуса $r$ приводится во вращение посредством груза $C$ массы $M_2$, привязанного к концу нерастяжимого троса. Трос переброшен через блок $B$ и намотан на барабан $A$. К барабану $A$ приложен момент сопротивления $m_c$, пропорциональный угловой скорости барабана; коэффициент пропорциональности равен $a$. Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое. Массами каната и блока $B$ пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.

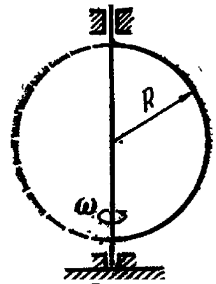
   *Ответ*: $w = \dfrac{M_2gr}{a}\left(1 - e^{-bt}\right)$, где $b = \dfrac{2a}{r^2(M_1 + 2M_2)}$; $\quad \lim\limits_{t\to\infty} w = \dfrac{M_2gr}{a} = \text{const}.$

5. Горизонтальная трубка *CD* может свободно вращаться вокруг вертикальной оси *AB*. Внутри трубки на расстоянии *MC* = *a* от оси находится шарик *M*. В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость $w_0$. Определить угловую скорость $w$ трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен *J*, *L* — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы *m*.

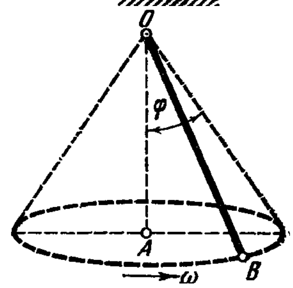

*Ответ*: $w = \dfrac{J + ma^2}{J + mL^2} w_0$.

6. Однородный круглый диск радиуса *R* и массы *M* вращается с постоянной угловой скоростью $w$ вокруг своего вертикального диаметра. Определить силу, разрывающую диск по диаметру.

*Ответ*: $2MRw^2/(3p)$.

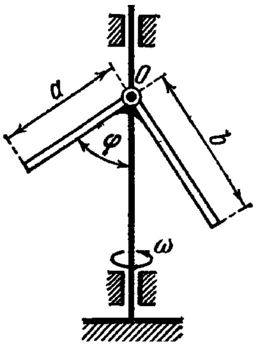



7. Тонкий прямолинейный однородный стержень длины *l* и массы *M* вращается с постоянной угловой скоростью $w$ около неподвижной точки *O* (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью *OA* и вершиной в точке *O*. Вычислить угол отклонения стержня от вертикального направления, а также величину *N* давления стержня на шарнир *O*.




*Ответ*: $j = \arccos \dfrac{3g}{2lw^2}, \quad N = \dfrac{1}{2} Mlw^2 \sqrt{1 + \dfrac{7g^2}{4l^2w^4}}$.

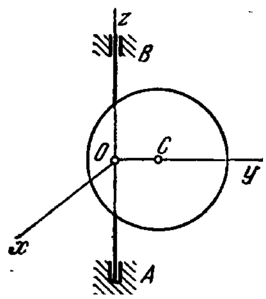
8. В центробежном тахометре два тонких однородных прямолинейных стержня длины *a* и *b* жестко соединены под прямым углом, вершина которого *O* шарнирно соединена с вертикальным валом; вал вращается с постоянной угловой скоростью $w$. Найти зависимость между $w$ и углом отклонения $j$, образованным направлением стержня длины *a* и вертикалью.



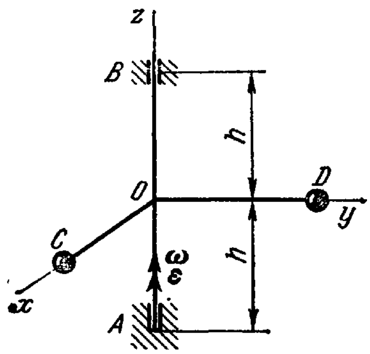

*Ответ*: $w^2 = 3g \dfrac{b^2 \cos j - a^2 \sin j}{\left(b^3 - a^3\right) \sin 2j}$.

9. Однородный круглый диск массы *M* равномерно вращается с угловой скоростью $w$ вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости диска и отстоящей от его центра масс *C* на расстоянии *OC* = *a*. Определить силы динамического давления оси на подпятник *A* и подшипник *B*, если *OB* = *OA*. Оси *x* и *y* неизменно связаны с диском.

*Ответ*: $X_A = X_B = 0, \quad Y_A = Y_B = Maw^2/2$.

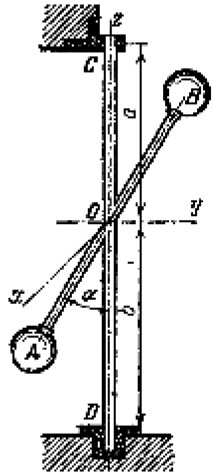



10. К вертикальной оси *AB*, вращающейся равноускоренно с угловым ускорением $e$, прикреплены два груза *C* и *D* посредством двух перпендикулярных оси *AB* и притом взаимно перпендикулярных стержней *OC* = *OD* = *r*. Определить силы динамического давления оси *AB* на подпятник *A* и подшипник *B*. Грузы *C* и *D* считать материальными точками массы *M* каждый. Массами стержней пренебречь. В начальный момент система находилась в покое. Оси *x* и *y* неизменно связаны со стержнями.

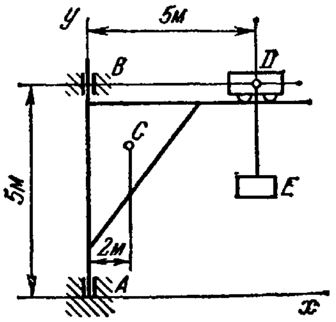



*Ответ*: $X_A = X_B = \dfrac{M}{2} re\left(et^2 + 1\right), \quad Y_A = Y_B = \dfrac{M}{2} re\left(et^2 - 1\right)$.

11. Стержень $AB$ длины $2l$, на концах которого находятся грузы равной массы $M$, вращается равномерно с угловой скоростью $w$ вокруг вертикальной оси $Oz$, проходящей через середину $O$ длины стержня. Расстояние точки $O$ от подшипника $C$ равно $a$, от подпятника $D$ равно $b$. Угол между стержнем $AB$ и осью $Oz$ сохраняет постоянную величину $a$. Пренебрегая массой стержня и размерами грузов, определить проекции сил давления на подшипник $C$ и подпятник $D$ в тот момент, когда стержень находится в плоскости $Oyz$.



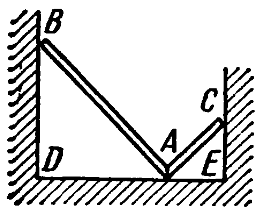
*Ответ*: $X_C = X_D = 0,\quad Y_C = -Y_D = \dfrac{Ml^2 w^2 \sin 2a}{(a+b)},\quad Z_D = -2Mg.$



12. Определить опорные реакции подпятника $A$ и подшипника $B$ поворотного крана при поднимании груза $E$ массы 3 т с ускорением $1/3g$. Масса крана равна 2 т, а его центр масс находится в точке $C$. Масса тележки $D$ равна 0,5 т. Кран и тележка неподвижны. Размеры указаны на рисунке.
*Ответ*: $X_A = -X_B = 52{,}1$ кН; $Y_A = 63{,}9$ кН.

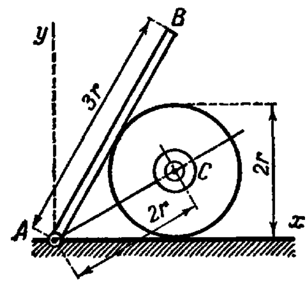
**Тема занятия 12:** Равновесие тела и системы тел.

1. Два однородных стержня $AB$ и $AC$ опираются в точке $A$ на гладкий горизонтальный пол и друг на друга по гладким вертикальным плоскостям, а в точках $B$ и $C$ на гладкие вертикальные стены. Определить расстояние $DE$ между стенами, при котором стержни находятся в положении равновесия, образуя друг с другом угол в 90°, если дано: длина $AB$ равна $a$, длина $AC$ равна $b$, вес $AB$ равен $P_1$, вес $AC$ равен $P_2$.

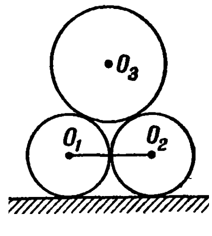


*Ответ*: $DE = \dfrac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}.$

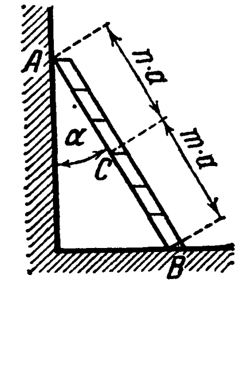
2. Однородный брусок $AB$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси $A$, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиуса $r$, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемого нерастяжимой нитью $AC$. Вес бруска 16 Н; длина $AB$ = $3r$, $AC$ = $2r$. Определить натяжение нити $T$ и силу давления бруска на шарнир $A$.
*Ответ*: $T = 6{,}9$ Н, $X_A = -6$ Н, $Y_A = -12{,}5$ Н.



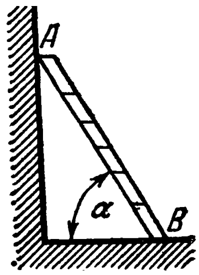
3. На двух одинаковых круглых однородных цилиндрах радиуса $r$ и веса $P$ каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и связанных за центры нерастяжимой нитью длины $2r$, покоится третий однородный цилиндр радиуса $R$ и веса $Q$. Определить натяжение нити, давление цилиндров на плоскость и взаимное давление цилиндров. Трением пренебречь.
*Ответ*: Давление каждого нижнего цилиндра на плоскость равно $P$ + $Q$/2. Давление между верхним и каждым из нижних цилиндров равно $\dfrac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}$. Натяжение нити равно $\dfrac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}$.



4. К вертикальной стене приставлена лестница $AB$, опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену $f_1$, о пол $f_2$. Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен $p$ и приложен в точке $C$, которая делит длину лестницы в отношении $m/n$. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций $N_A$ стены и $N_B$ пола для этого значения α.

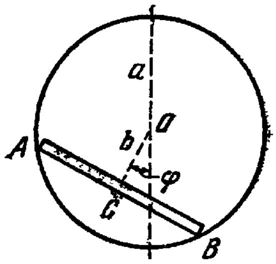


*Ответ*: $tg\,a = \dfrac{(m+n)\,f_2}{m-n\,f_1 f_2}$, $N_A = \dfrac{p\,f_2}{1+f_1 f_2}$, $N_B = \dfrac{p}{1+f_1 f_2}$.



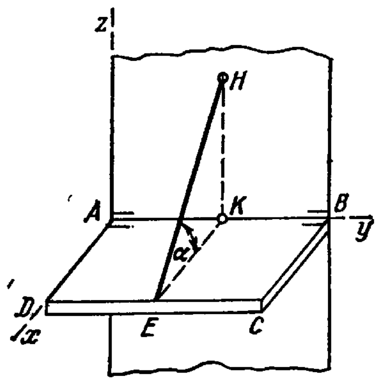

5. Лестница *A*В веса *P* упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен *f*. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого *p*?

   *Ответ*: $tg\,a \geq \dfrac{P+2p}{2f\,(P+p)}$.



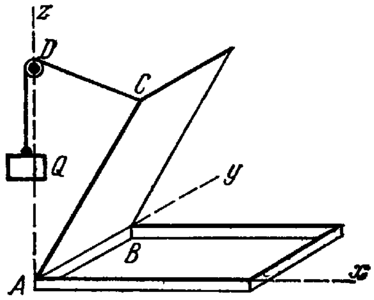

6. Однородный стержень своими концами *A* и *B* может скользить по негладкой окружности радиуса *a*. Расстояние *OC* стержня до центра *O* окружности, расположенной в вертикальной плоскости, равно *b*. Коэффициент трения между стержнем и окружностью равен *f*. Определить для положений равновесия стержня угол $j$, составляемый прямой *OC* с вертикальным диаметром окружности.

   *Ответ*: $ctg\,j \geq \dfrac{b^2\left(1+f^2\right)}{a^2 f} - f$.



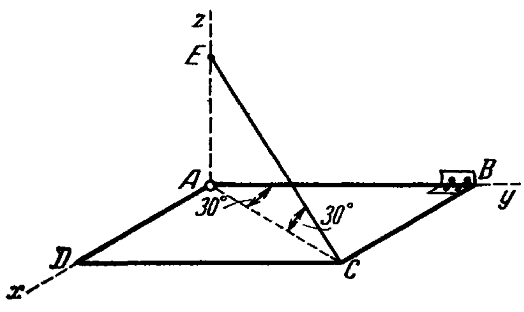

7. Прямоугольная однородная полка *ABCD* веса *G* удерживается в горизонтальном положении тросом *EH,* составляющим с плоскостью полки угол α. Определить натяжение *T* троса (весом его пренебречь) и реакции петель *A* и *B,* если *AK* = *KB* = *DE* = *EC* и *HK* перпендикулярно *AB*.

   *Ответ*: $T = \dfrac{G}{2\sin a}$, $X_A = X_B = \dfrac{G}{4} ctg\,a$, $Z_A = Z_B = \dfrac{G}{4}$.



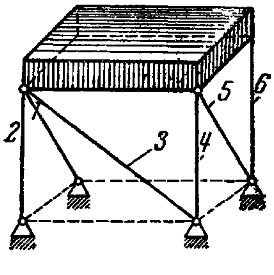

8. Однородная прямоугольная крышка веса *P* = 400 Н удерживается при открытой на 60° над горизонтом противовесом Q. Определить, пренебрегая трением на блоке *D,* вес Q и реакции шарниров *A* и *B,* если блок *D* укреплен на одной вертикали с *A* и *AD* =*AC*.

   *Ответ*: Q = 104 Н, $X_A$ = 100 Н, $Z_A$ = 173 Н, $X_B$ = 0, $Z_B$ = 200 Н.




9. Однородная прямоугольная рама веса 200 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира *A* и петли *B* и удерживается в горизонтальном положении веревкой *CE,* привязанной в точке *C* рамы и к гвоздю *E,* вбитому в стену на одной вертикали с *A,* причем ∠*ECA* = ∠*BAC* = 30°. Определить натяжение веревки и опорные реакции.

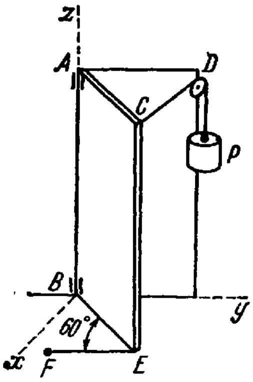
   *Ответ*: T = 200 Н, $X_A$ = 86,6 Н, $Y_A$ = 150 Н, $Z_A$ = 100 Н,
   $X_B$ = $Z_B$ = 0.



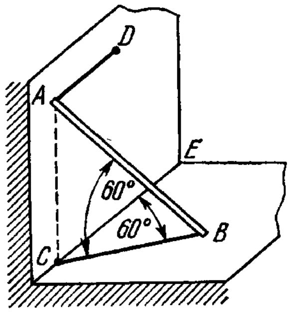

10. Однородная горизонтальная плита веса *P,* имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, прикреплена неподвижно к земле шестью прямолинейными стержнями. Определить усилия в опорных стержнях, обусловленные весом плиты, если концы стержней прикреплены к плите и неподвижным устоям шаровыми шарнирами.

    *Ответ*: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$, $S_2 = S_6 = -\dfrac{P}{2}$.

11. Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения *AB*, открыта на угол *CAD* = 60° и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, *CD*, перекинута через блок и натягивается грузом *P* = 320 Н, другая, *EF*, привязана к точке *F* пола. Вес двери 640 Н; ее ширина *AC* = *AD* = 1,8 м; высота *AB* = 2,4 м. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение *T* веревки *EF*, а также реакции цилиндрического шарнира в точке *A* и подпятника в точке *B*.
    *Ответ*: T = 320 Н, $X_A$ = 69 Н, $Y_A$= - 280 Н,
    $X_B$ = 208 Н, $Y_B$ = 440 Н, $Z_B$ = 640 Н.




12. Стержень *AB* удерживается в наклонном положении двумя горизонтальными веревками *AD* и *BC*. При этом в точке *A* стержень опирается на вертикальную стену, на которой находится точка *D*, а в точке *B* — на горизонтальный пол. Точки *A* и *C* лежат на одной вертикали. Вес стержня 8 Н. Трением в точках *A* и *B* пренебрегаем. Проверить, может ли стержень оставаться в равновесии, и определить натяжения $T_A$ и $T_B$ веревок и реакции опорных плоскостей, если $\angle ABC$ = $\angle BCE$ = 60°.
    *Ответ*: $T_A$ = 1,15 Н, $T_B$ = 2,3 $R_A$ = 2 Н, $R_B$ = 8 Н.




**Тема занятия 13:** Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

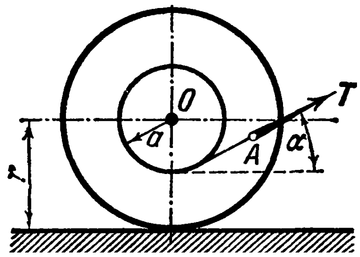
1. Ведущее колесо автомашины радиуса *r* и массы *M* движется горизонтально и прямолинейно. К колесу приложен вращающий момент *m*. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости, равен *r* . Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен *f*. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

    *Ответ*: $m \le fMg\dfrac{r^2 + r^2}{r}$.

2. Ось ведомого колеса автомашины движется горизонтально и прямолинейно. К оси колеса приложена горизонтально направленная движущая сила *F*. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости, равен *r* . Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен *f*. Радиус колеса равен *r*, масса колеса равна *M*. Какому условию должна удовлетворять величина силы *F* для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

    *Ответ*: $F \le fMg\dfrac{r^2 + r^2}{r^2}$.

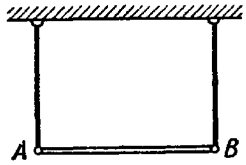
3. На барабан однородного катка массы *M* и радиуса *r*, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана нить, к которой приложена сила *T* под углом *a* к горизонту. Радиус барабана *a*, радиус инерции катка *r* . Определить закон движения оси катка *O*. В начальный момент каток находился в покое, затем катился без скольжения.



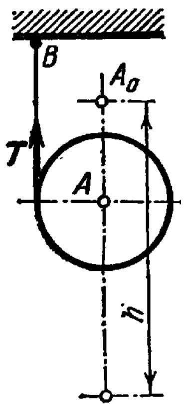

    *Ответ*: $x = \dfrac{T}{M}\dfrac{r\,(r\cos a - a)}{2\,(r^2 + r^2)}t^2$, причем ось *x* направлена слева направо.

4. Однородный стержень *AB* массы *M* горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.

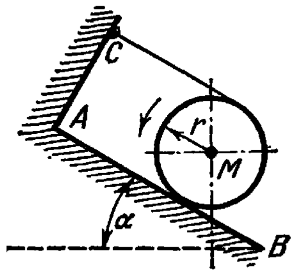
Указание. Составить дифференциальные уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом обрыва нити, пренебрегая изменением направления стержня и изменением расстояния центра масс стержня от другой нити.
*Ответ*: $T = Mg/4$.




5. Тяжелый круглый цилиндр *A* массы $m$ обмотан посредине тонкой нитью, конец которой *B* закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость оси цилиндра, после того как эта ось опустится на высоту $h$, и найти натяжение *T* нити.
*Ответ*: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$, $T = \frac{1}{3}mg$.

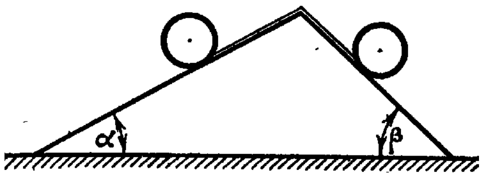



6. Две гибкие нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра массы *M* и радиуса $r$ так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельной основаниям. Цилиндр помещен на наклонной плоскости *AB* так, что его образующие перпендикулярны линии наибольшего ската, а концы *C* нитей закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости *AB*. Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, причем коэффициент трения равен $f_1$. Определить путь $s$, пройденный центром масс цилиндра за время $t$, и натяжение *T* нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.




*Ответ*: $s = \frac{1}{3}g(\sin a - 2f\cos a)t^2$, $T = \frac{1}{6}Mg(\sin a + f\cos a)$. Цилиндр остается в покое, если $tg\, a < 2f$.

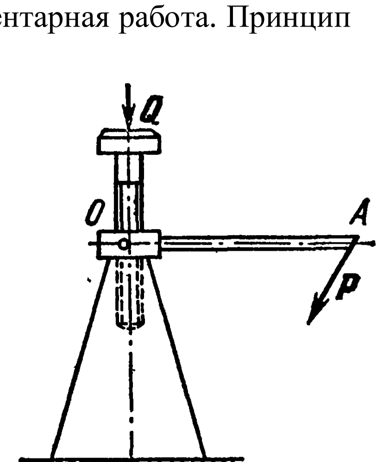
7. Два цилиндрических вала массы $M_1$ и $M_2$ скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы $a$ и $b$ с горизонтом. Валы соединены нерастяжимой нитью, концы которой намотаны на валы и к ним прикреплены. Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.



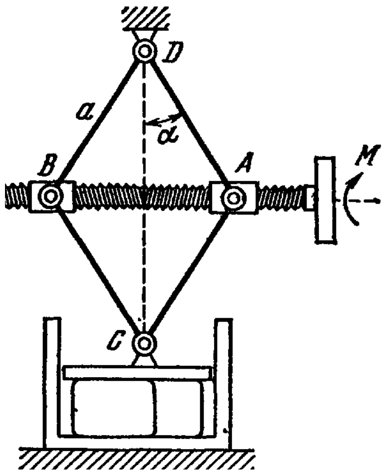

*Ответ*: $T = g\frac{M_1 M_2(\sin a + \sin b)}{3(M_1 + M_2)}$, $a = g\frac{M_1\sin a - M_2\sin b}{M_1 + M_2}$.

**Тема занятия 14:** Равновесие системы. Обобщенные координаты. Элементарная работа. Принцип возможных перемещений.

1. Груз $Q$ поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $OA$ = 0,6 м. К концу рукоятки, перпендикулярно ей, приложена сила *P*=160 Н. Определить величину силы тяжести груза $Q$, если шаг винта домкрата $h$ = 12 мм.
*Ответ*: Q = 52,2 кН.



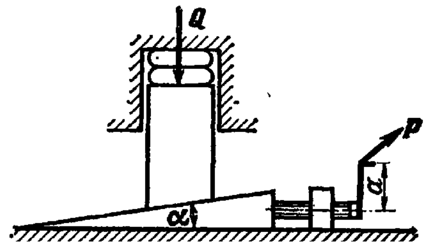

2. На маховичок коленчатого пресса действует вращающий момент *M*; ось маховичка имеет на концах винтовые нарезки шага $h$ противоположного направления и проходит через две гайки, шарнирно прикрепленные к двум вершинам стержневого ромба со стороною *a*; верхняя вершина ромба закреплена неподвижно,




нижняя прикреплена к горизонтальной плите пресса. Определить силу давления пресса на сжимаемый предмет в момент, когда угол при вершине ромба равен $2a$ .

*Ответ*: $P = p\dfrac{M}{h}ctg\,a$.

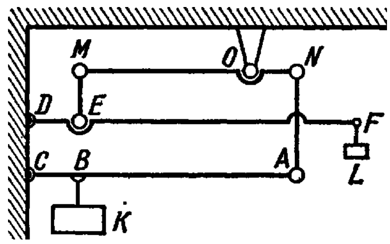
3. Определить зависимость между модулями сил $P$ и $Q$ в клиновом прессе, если сила $P$ приложена к концу рукоятки длины $a$ перпендикулярно оси винта и рукоятки. Шаг винта равен $h$. Угол при вершине клина равен $a$ .



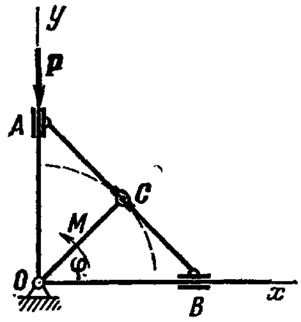

*Ответ*: $Q = P\dfrac{2pa}{h\,tg\,a}$.

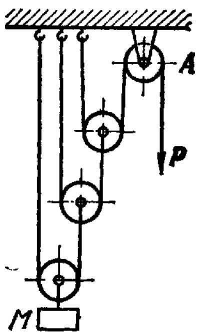
4. Грузы $K$ и $L$, соединенные системой рычагов, изображенных на рисунке, находятся в равновесии. Определить зависимость между массами грузов, если дано: $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{1}{10}$.

*Ответ*: $M_L = \dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{ON}{OM}\cdot\dfrac{DE}{DF}M_K = \dfrac{1}{300}M_K$.



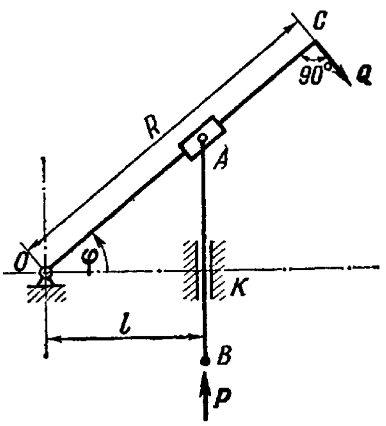

5. К ползуну $A$ механизма эллипсографа приложена сила $P$, направленная вдоль направляющей ползуна к оси вращения $O$ кривошипа $OC$. Какой вращающий момент надо приложить к кривошипу $OC$ для того, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип $OC$ образует с направляющей ползуна угол $j$ ? Механизм расположен в горизонтальной плоскости, причем $OC = AC = CB = l$.
*Ответ*: $M = 2Pl\cos\ j$ .



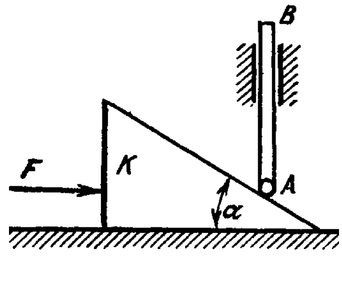

6. Полиспаст состоит из неподвижного блока $A$ и из $n$ подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение массы $M$ поднимаемого груза к силе $P$, приложенной к концу каната, сходящего с неподвижного блока
*Ответ*: $Mg/P = 2^n$.

7. В кулисном механизме при качании рычага $OC$ вокруг горизонтальной оси $O$ ползун $A$, перемещаясь вдоль рычага $OC$, приводит в движение стержень $AB$, движущийся в вертикальных направляющих $K$. Даны размеры: $OC = R$, $OK = l$. Какую силу $Q$ надо приложить перпендикулярно кривошипу $OC$ в точке $C$ для того, чтобы уравновесить силу $P$, направленную вдоль стержня $AB$ вверх?




*Ответ*: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2 j}$.

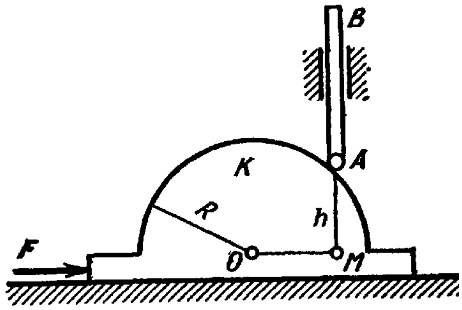
8. Кулак $K$ массы $M_1$ находится в покое на гладкой горизонтальной плоскости, поддерживая стержень $AB$ массы $M_2$, который расположен в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы $F$, приложенной к кулаку $K$ по горизонтали направо. Определить модуль силы $F$, если боковая поверхность кулака образует с горизонтом угол $a$ . Найти также область значений модуля силы $F$ в случае негладкой горизонтальной плоскости, если



коэффициент трения скольжения между основанием кулака *К* и горизонтальной плоскостью равен *f*.

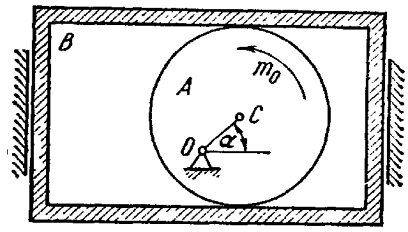
*Ответ*: 1) $F = M_2 g\,tg\,\alpha$, 2) $M_2 g\,tg\,\alpha - f(M_1 + M_2)g \le F \le M_2 g\,tg\,\alpha + f(M_1 + M_2)g$.

9. Круговой кулак *К* массы $M_1$ и радиуса *R* стоит на негладкой горизонтальной плоскости. Он соприкасается с концом *A* в стержня *AB* массы $M_2$, расположенного в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы *F*, приложенной к кулаку по горизонтали направо. При этом *AM* = *h*. Найти область значений модуля силы *F*, если коэффициент трения скольжения кулака о горизонтальную плоскость равен *f*.



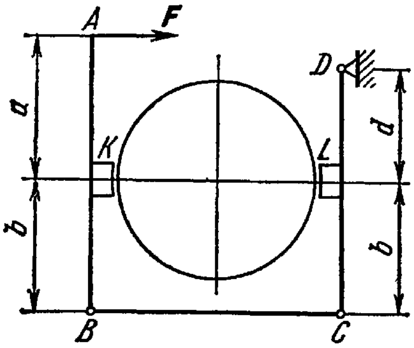

*Ответ*: $\dfrac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g - f(M_1 + M_2)g \le F \le \dfrac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g + f(M_1 + M_2)g.$

10. Круглый эксцентрик *A* массы $M_1$ насажен на неподвижную горизонтальную ось *O*, перпендикулярную плоскости рисунка. Эксцентрик поддерживает раму *B* массы $M_2$, имеющую вертикальные направляющие. Трением пренебречь. Эксцентриситет *OC* = *a*. Найти величину момента $m_0$, приложенного к эксцентрику, если при покое материальной системы *OC* образует с горизонталью угол $\alpha$.




*Ответ*: $m_0 = (M_1 + M_2)ga\cos\alpha$.

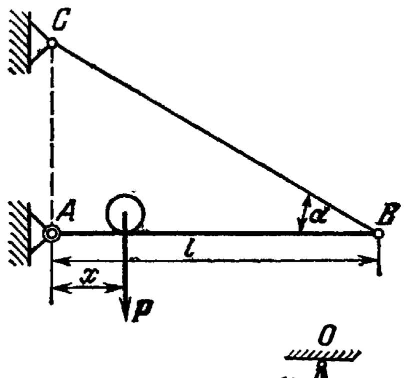
11. Колодочно-бандажный тормоз вагона трамвая состоит из трех тяг *AB*, *BC* и *CD*, соединенных шарнирами *B* и *C*. При действии горизонтальной силы *F* тормозные колодки *К* и *L*, соответственно прикрепленные к тягам *AB* и *CD*, прижимаются к колесу. Определить силы давления $N_K$ и $N_L$ колодок на колесо. Размеры указаны на рисунке. Вагон находится в покое.




*Ответ*: $N_K = F\,\dfrac{a+b}{b}$, $N_L = F\,\dfrac{a}{b}\,\dfrac{b+d}{d}$.

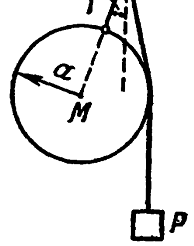
**Тема занятия 15:** Число степеней свободы систем. Вариации координат. Принцип возможных перемещений.

1. Горизонтальная балка крана, длина которой равна *l*, у одного конца укреплена шарнирно, а у другого конца *B* подвешена к стене посредством тяги *BC*, угол наклона которой к горизонту равен $\alpha$. По балке может перемещаться груз *P*, положение которого определяется переменным расстоянием *x* до шарнира *A*. Определить натяжение *T* тяги *BC* в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь.



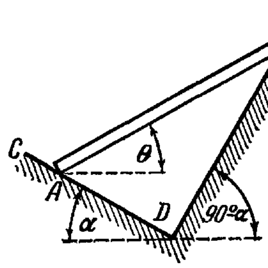

*Ответ*: $T = \dfrac{Px}{l\sin\alpha}$.

2. Однородный шар веса *Q* и радиуса *a* и гиря веса *P* подвешены на веревках в точке *O*, как показано на рисунке. Расстояние *OM* = *b*. Определить, какой угол $\varphi$ образует прямая *OM* с вертикалью при равновесии.




*Ответ*: $\sin\varphi = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{P}{P+Q}$.

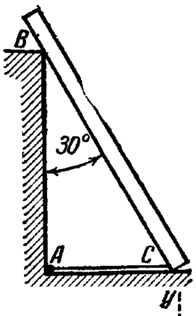
3. Однородная балка $AB$ веса $P$ опирается на две гладкие наклонные прямые $CD$ и $DE$, находящиеся в вертикальной плоскости; угол наклона первой из них к горизонту равен $a$, второй: $90° — a$. Найти угол $q$ наклона балки к горизонту в положении равновесия и давления ее на опорные прямые.




*Ответ*: $N_A = P\cos a$, $N_B = P\sin a$, $tg\,q = ctg\,2a$,

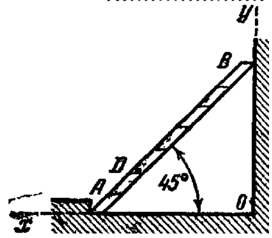
$q = 90° - 2a$ при $a \le 45°$.

4. Однородная балка веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой $B$ — на столб высоты 3 м, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкой $AC$, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки $T$ и реакции $R_B$ столба и $R_C$ пола.



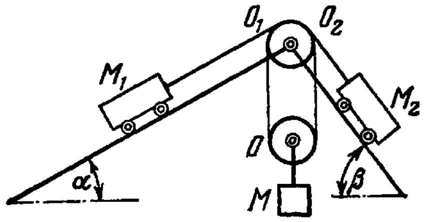

*Ответ*: $T$ = 150 Н, $R_B$ = 173 Н, $R_C$ = 513 Н.

5. К гладкой стене прислонена однородная лестница $AB$ под углом 45° к горизонту; вес лестницы 200 Н; в точке $D$ на расстоянии, равном 1/3 длины лестницы, от нижнего конца находится человек веса 600 Н. Найти силы давления лестницы на опору $A$ и на стену.



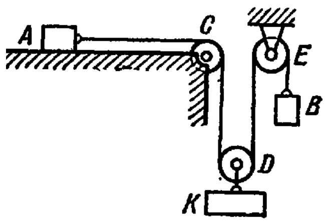

*Ответ*: $X_A$ = 300 Н, $Y_A$ = –800 Н, $X_B$ = –300 Н.

6. Найти массы $M_1$ и $M_2$ двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом массы $M$ на плоскостях, наклоненных к горизонту под углами $a$ и $b$, если грузы с массами $M_1$ и $M_2$ прикреплены к концам троса, идущего от груза с массой $M_1$ через блок $O_1$, насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку $O$, и затем через блок $O_2$, насаженный на ось блока $O_1$, к грузу массы $M_2$. Блоки $O_1$ и $O_2$ — соосные. Трением, а также массами блоков и троса пренебречь.



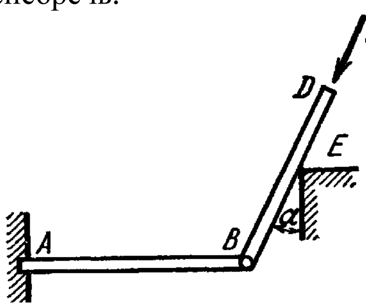

*Ответ*: $M_1 = \dfrac{M}{2\sin a}$, $M_2 = \dfrac{M}{2\sin b}$.

7. К концам нерастяжимой нити привязаны грузы $A$ и $B$ одинаковой массы. От груза $A$ нить проходит параллельно горизонтальной плоскости, огибает неподвижный блок $C$, охватывает подвижный блок $D$, затем огибает неподвижный блок $E$, где к другому концу нити привязан груз $B$. К оси подвижного блока $D$ подвешен груз $K$ массы $M$. Определить массу $M_1$ каждого из грузов $A$ и $B$ и коэффициент трения скольжения $f$ груза $A$ о горизонтальную плоскость, если система грузов находится в покое. Массой нити пренебречь.



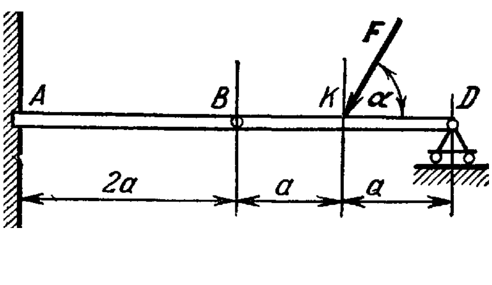

*Ответ*: $M_1 = M/2$; $f = 1$

8. Балки $AB$ и $BD$ соединены цилиндрическим шарниром $B$. Горизонтальная балка $AB$ защемлена в вертикальной стене сечением $A$. Балка $BD$, опирающаяся о гладкий выступ $E$, образует с вертикалью угол $a$. Вдоль балки $BD$ действует сила $F$. Определить горизонтальную составляющую реакции в защемленном сечении $A$. Массой балок пренебречь.



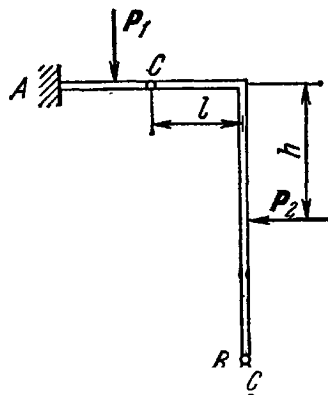

*Ответ*: $R_{Ax} = F\sin a$.

9. Две горизонтальные балки $AB$ и $BD$ соединены цилиндрическим шарниром $B$. Опора $D$ стоит на катках, а сечение $A$ защемлено в стенке. К балке $BD$ в точке $K$ приложена сосредоточенная сила $F$, образующая угол $a$ с



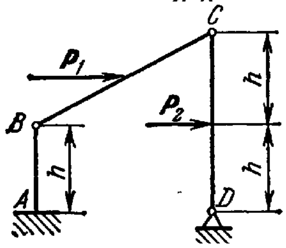
горизонтом. Размеры указаны на рисунке. Определить составляющие реакции в защемленном сечении $A$ и реактивный момент $m_p$ пары, возникающей в этом сечении. Массой балок пренебречь.

*Ответ*: $R_{Ax} = F\cos a$, $R_{Ay} = {}^{1}\!/_{2} F\sin a$, $m_p = Fa\sin a$.




10. Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами $C$. Верхние концы рам жестко защемлены в бетонную стену, нижние — опираются на цилиндрические подвижные опоры. Определить вертикальную реакцию защемления при действии сил $P_1$ и $P_2$.

    *Ответ*: $Y_A = P_1 - P_2 h/l$.



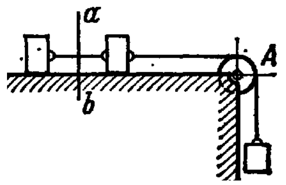

11. Две балки $BC$ и $CD$ шарнирно соединены в $C$, цилиндрическим шарниром $B$ прикреплены к вертикальной стойке $AB$, защемленной в сечении $A$, а цилиндрическим шарниром $D$ соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы $P_1$ и $P_2$. Определить горизонтальную составляющую реакции в сечении $A$. Размеры указаны на рисунке.

    *Ответ*: $R = P_1 + 1/2\, P_2$.

12. Определить момент $m_A$ реактивной пары, возникающей в заделке $A$ стойки $AB$, рассмотренной в предыдущей задаче.

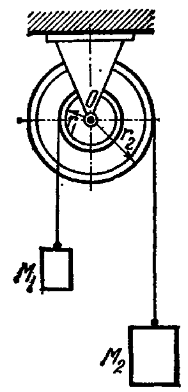
    *Ответ*: $m_A = \left(P_1 + {}^{1}\!/_{2} P_2\right)h$.

**Тема занятия 16:** Силы инерции. Принцип Даламбера. Работа активных сил и сил инерции на возможных перемещениях твердого тела. Принцип Даламбера–Лагранжа.

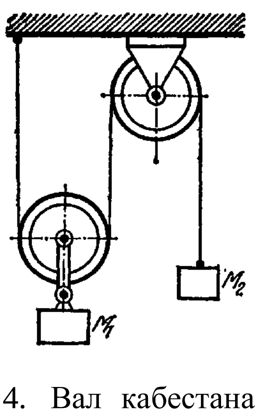



1. Три груза массы $M$ каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок $A$. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении $ab$. Массой нити и блока пренебречь.

   *Ответ*: $a = {}^{1}\!/_{3}\, g$, $T = {}^{1}\!/_{3}\, Mg$.



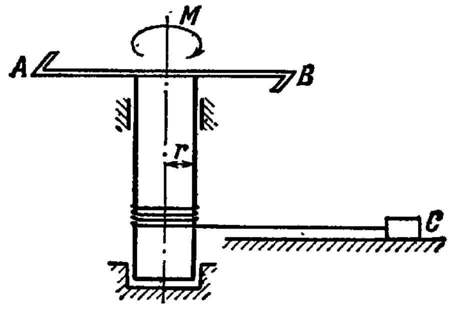

2. Два груза массы $M_1$ и $M_2$ подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на рисунке, на барабаны, имеющие радиусы $r_1$ и $r_2$ и насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести. Определить угловое ускорение $e$ барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей.




*Ответ*: $e = g\dfrac{M_2 r_2 - M_1 r_1}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}$.

3. К системе блоков, изображенной на рисунке, подвешены грузы: $M_1$ массы 10 кг и $M_2$ массы 8 кг. Определить ускорение $a_2$ груза $M_2$ и натяжение нити, пренебрегая массами блоков.

   *Ответ*: $a_2 = 2{,}8$ м/с$^2$, $T = 56{,}1$ Н.

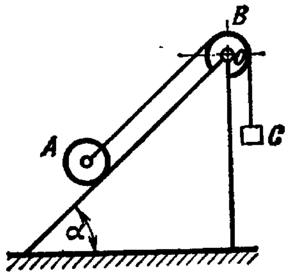



4. Вал кабестана — механизма для передвижения грузов — радиуса $r$ приводится в движение постоянным вращающим моментом $M$, приложенным к рукоятке $AB$. Определить ускорение груза $C$ массы $m$, если коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость равен $f$.

Массой каната и кабестана пренебречь.

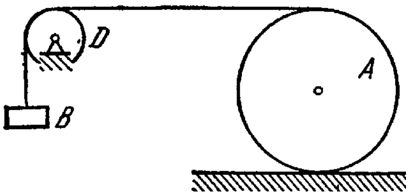
*Ответ*: $a = \dfrac{M - fmgr}{mr}$.

5. Каток *A* массы $M_1$, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством нерастяжимой нити, переброшенной через блок *B*, груз *C* массы $M_2$. При этом блок *B* вращается вокруг неподвижной оси *O*, перпендикулярной его плоскости. Каток *A* и блок *B* — однородные круглые диски одинаковой массы и радиуса. Наклонная плоскость образует угол $a$ с горизонтом. Определить ускорение оси катка. Массой нити пренебречь.



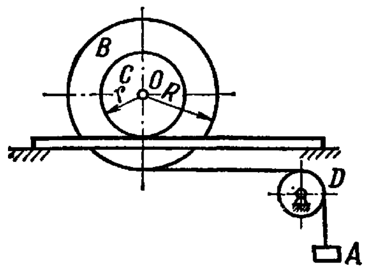

*Ответ*: $a = g\dfrac{M_1 \sin a - M_2}{2M_1 + M_2}$.

6. Груз *B* массы $M_1$ приводит в движение цилиндрический каток *A* массы $M_2$ и радиуса $r$ при помощи нити, намотанной на каток. Определить ускорение груза *B*, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен $f_k$. Массой блока *D* пренебречь.



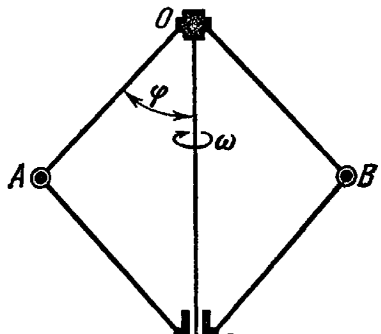

*Ответ*: $a = 8g\dfrac{M_1 - \frac{f_k}{2r}M_2}{8M_1 + 3M_2}$.

7. Груз *A* массы $M_1$, опускаясь вниз, посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок *D* и намотанной на шкив *B*, заставляет вал *C* катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив *B* радиуса *R* жестко насажен на вал *C* радиуса *r*; их общая масса равна $M_2$, а радиус инерции относительно оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка, равен $r$. Найти ускорение груза *A*. Массой нити и блока пренебречь.

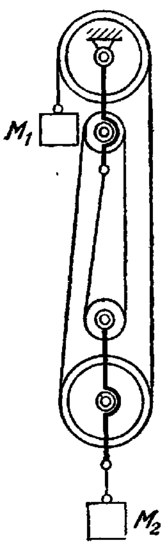



*Ответ*: $a = g\dfrac{M_1(R-r)^2}{M_1(R-r)^2 + M_2\left(r^2 + r^2\right)}$.

8. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $w$. Определить угол отклонения ручек *OA* и *OB* от вертикали, принимая во внимание только массу *M* каждого из шаров и массу $M_1$ муфты *C*, все стержни имеют одинаковую длину *l*.




*Ответ*: $\cos j = \dfrac{(M + M_1)g}{Mlw^2}$.

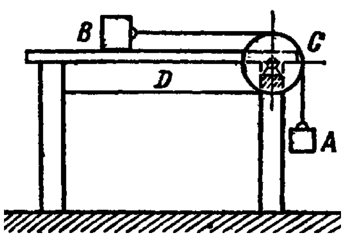



9. С каким ускорением *a* опускается груз массы $M_1$, поднимая груз массы $M_2$ с помощью полиспаста, изображенного на рисунке? Каково условие равномерного движения груза $M_1$? Массами блоков и троса пренебречь.

   Указание. Ускорение груза $M_2$ в четыре раза меньше ускорения груза $M_1$.

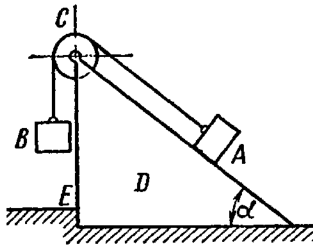
   *Ответ*: $a = 4g\dfrac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}, \quad \dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{1}{4}$.

10. Груз *A* массы $M_1$, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок *C*, груз *B* массы $M_2$. Определить силу давления стола *D* на пол, если масса стола равна $M_3$. Массой нити пренебречь.



*Ответ*: $N = \left( M_1 + M_2 + M_3 - \dfrac{M_1^2}{M_1 + M_2} \right) g.$

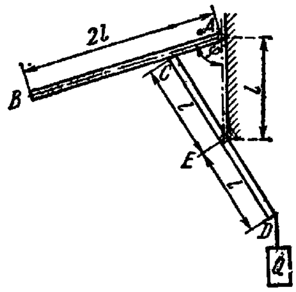
11. Груз *A* массы $M_1$, опускаясь вниз по наклонной плоскости *D*, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок *C*, груз *B* массы $M_2$. Определить горизонтальную составляющую давления наклонной плоскости *D* на выступ пола *E*. Массой нити пренебречь.




*Ответ*: $N = M_1 g \dfrac{M_1 \sin a - M_2}{M_1 + M_2} \cos a.$

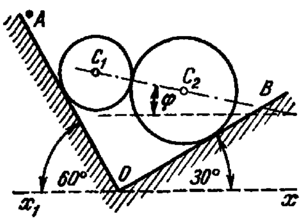
**Тема занятия 17:** Равновесие системы в обобщенных координатах. Потенциальные силы. Равновесие натуральных систем.

1. Однородный стержень *AB* длины 2*l* и веса *P* может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце *A* стержня. Он опирается на однородный стержень *CD* той же длины 2*l*, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину *E*. Точки *A* и *E* лежат на одной вертикали на расстоянии *AE* = *l*. К концу *D* подвешен груз *Q* = 2*P*. Определить угол $j$, образуемый стержнем *AB* с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.



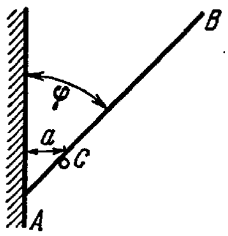

*Ответ*: $j = \arccos \frac{1}{8} = 82°50'.$

2. Между двумя гладкими наклонными плоскостями *OA* и *OB* положены два гладких соприкасающихся однородных цилиндра: цилиндр с центром $C_1$ веса $P_1$ = 10 Н и цилиндр с центром $C_2$ веса $P_2$ = 30 Н. Определить угол $j$, составляемый прямой $C_1C_2$ с горизонтальной осью $xOx_1$ давления $N_1$ и $N_2$ цилиндров на плоскости, а также силу *N* взаимного давления цилиндров, если $\angle AOx_1 = 60°$, $\angle BOx = 30°$.



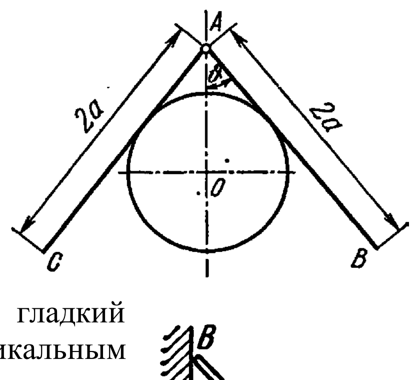

*Ответ*: $j = 0$; $N_1 = 20$ Н; $N_2$ = 34,6 Н; $N$ = 17,3 Н.

3. Прямолинейный однородный стержень *AB* длины 2*1* упирается нижним концом *A* в вертикальную стену, составляя с ней угол $j$. Стержень опирается также на гвоздь *C*, параллельный стене. Гвоздь отстоит от стены на расстоянии *a*. Определить угол $j$ в положении равновесия стержня.

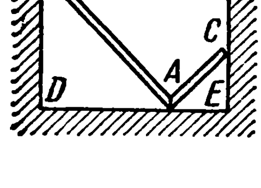



*Ответ*: $\sin j = \sqrt[3]{a/l}.$

4. На гладкий цилиндр радиуса *r* опираются два однородных тяжелых стержня, соединенных шарниром *A*. Длина каждого стержня равна 2*a*. Определить угол $2J$ раствора стержней, соответствующий положению равновесия.
*Ответ*: Угол $J$ определяется из уравнения $a\,tg^3 J - r\,tg^2 J - r = 0.$

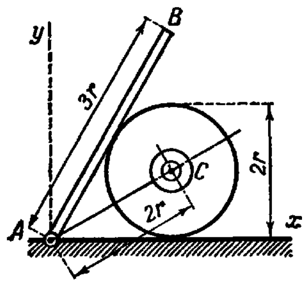



5. Два однородных стержня *AB* и *AC* опираются в точке *A* на гладкий горизонтальный пол и друг на друга по гладким вертикальным плоскостям, а в точках *B* и *C* на гладкие вертикальные стены. Определить расстояние *DE* между стенами, при котором стержни находятся в положении равновесия, образуя друг с другом угол в 90°, если дано: длина *AB* равна *a*, длина *AC* равна *b*, вес *AB* равен $P_1$, вес *AC* равен $P_2$.




*Ответ*: $DE = \dfrac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}.$

6. Однородный брусок $AB$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси $A$, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиуса $r$, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемого нерастяжимой нитью $AC$. Вес бруска 16 Н; длина $AB = 3r$, $AC = 2r$. Определить натяжение нити $T$ и силу давления бруска на шарнир $A$.

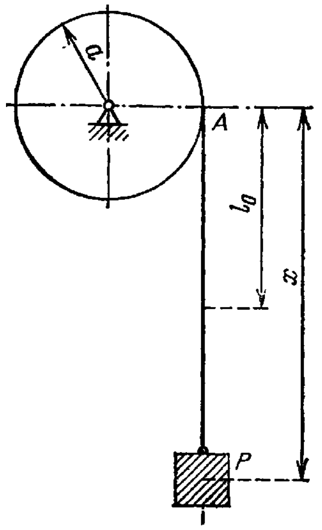



*Ответ*: $T = 6{,}9\,\text{Н},\ X_A = -6\,\text{Н},\ Y_A = -12{,}5\,\text{Н}.$

**Тема занятия 18:** Кинетическая энергия в обобщенных скоростях. Уравнения Лагранжа второго рода для систем с одной степенью свободы.

1. Передача вращения между двумя валами осуществляется двумя зубчатыми колесами, имеющими соответственно $z_1$ и $z_2$ зубцов, моменты инерции валов с насаженными на них колесами соответственно равны $J_1$ и $J_2$. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент $M_1$, а на другой вал — момент сопротивления $M_2$. Трением в подшипниках пренебречь.
*Ответ*: $\left(J_1 + i^2 J_2\right)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2$, где $i = z_1/z_2$ – передаточное число.

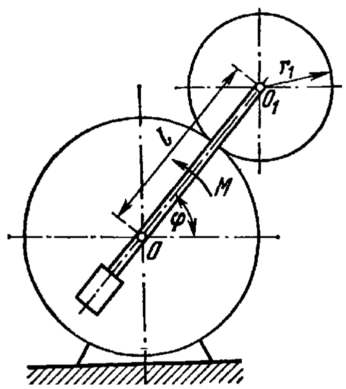
2. Определить движение груза массы $m$, висящего на однородном тросе массы $m_1$ и длины $l$; трос навернут на барабан радиуса $a$ и массы $m_2$ ось вращения горизонтальна; трением пренебречь, массу барабана считать равномерно распределенной по его ободу. В начальный момент $t = 0$ система находилась в покое, длина свисавшей части троса $l_0$.




Указание. Пренебречь размерами барабана по сравнению с длиной свешивающейся части троса.

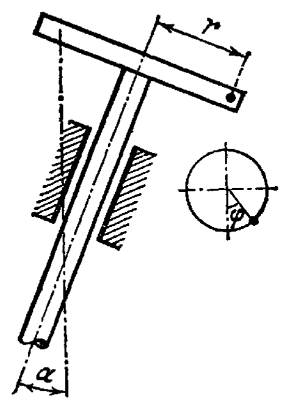
*Ответ*: $x = -\dfrac{ml}{m_1} + \left(l_0 + \dfrac{ml}{m_1}\right) ch\sqrt{\dfrac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2)l}}\,t.$

3. В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса $r_1$ насажена на кривошип с противовесом, вращающийся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента $M$. Определить угловое ускорение вращения кривошипа и окружное усилие $S$ в точке касания шестеренок, если расстояние между осями шестеренок равно $l$, момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен $J_0$, масса бегающей шестеренки $m_1$, момент инерции шестеренки относительно ее оси $J_1$; трением пренебречь, центр масс шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.




*Ответ*: $e = \dfrac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 l^2 / r_1^2}.\quad S = \dfrac{J_1 l}{r_1^2} e.$

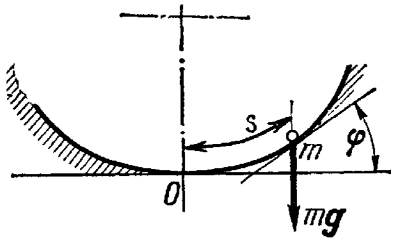
4. В машине для статического уравновешивания роторов подшипники наклонены под углом $a$ к вертикали. Ротор, помещенный в подшипник, имеет момент инерции $J$ (относительно своей оси) и несет неуравновешенную массу $m$ на расстоянии $r$ от оси. Написать дифференциальное уравнение движения ротора и определить частоту малых колебаний около положения равновесия.




*Ответ*: $\left(mr^2 + J\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin a \sin j = 0,\quad k = \sqrt{\dfrac{mgr\sin a}{mr^2 + J}},$

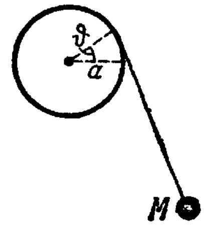
где $j$ – угол поворота ротора.

5. Материальная точка массы $m$ движется под влиянием силы тяжести по циклоидальной направляющей, заданной уравнением $s = 4a\sin\varphi$, где $s$ — дуга, отсчитываемая от точки $O$, а $\varphi$ — угол касательной к циклоиде с горизонтальной осью. Определить движение точки.




*Ответ*: $s = A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t + \varphi_0\right)$, где $A$ и $\varphi_0$ - постоянные интегрирования.

6. Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки $M$ массы $m$, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса $a$. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна $l$. Массой нити пренебречь.

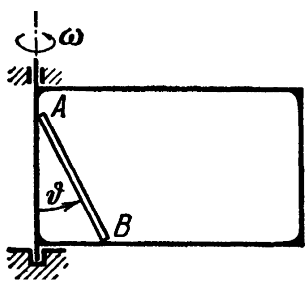



*Ответ*: $(l + a\vartheta)\ddot{\vartheta} + a\dot{\vartheta}^2 + g\sin\vartheta = 0$, где $\vartheta$ - угол отклонения маятника от вертикали.

7. Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки массы $m$, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l = l\,(t)$.

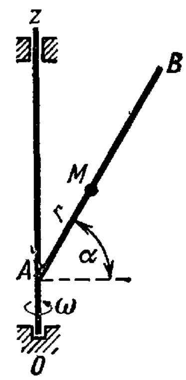
*Ответ*: $\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, где $\varphi$ – угол отклонения нити от вертикали.

8. Концы однородного тяжелого стержня $AB$ длины $2a$ и массы $M$ скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной стороны. Составить уравнение движения стержня и определить положение относительного равновесия.



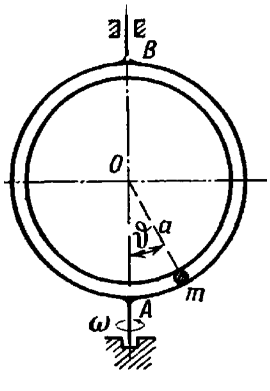

*Ответ*: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\vartheta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta - Mga\sin\vartheta = 0$, где $\vartheta$ – угол, образуемый стержнем с вертикалью. В положении равновесия $\vartheta = 0$ (неустойчивое равновесие).

9. Материальная точка $M$ движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню $AB$, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг неподвижной вертикальной оси. Стержень $AB$ образует угол $\alpha$ с горизонталью. Найти закон движения точки.




*Ответ*: Расстояние движущейся точки от точки пересечения прямой с вертикальной осью $r = C_1e^{\omega t\cos\alpha} + C_2e^{-\omega t\cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$, где $C_1$ и $C_2$ – постоянные интегрирования.

10. Материальная точка массы $m$ движется по круговой рамке радиуса $a$, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикального диаметра $AB$. Составить уравнение движения точки и определить момент $M$, необходимый для поддержания постоянства угловой скорости.

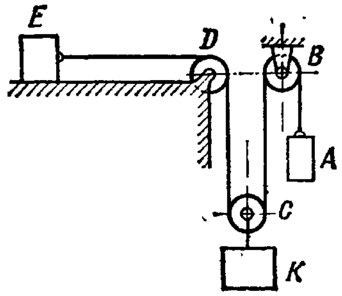



*Ответ*: $\ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0$, $\quad M = 2ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\omega\dot{\vartheta}$.

**Тема занятия 19:** Кинетическая энергия в обобщенных скоростях. Уравнения Лагранжа второго рода для систем с несколькими степенями свободы.

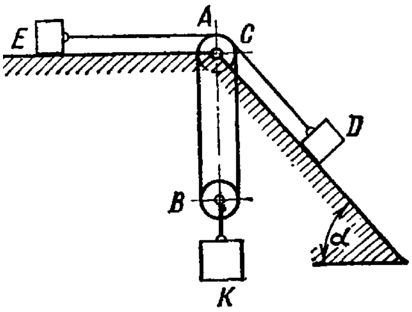
1. Однородная нить, к концу которой привязан груз $A$ массы $m$, огибает неподвижный блок $B$, охватывает подвижный блок $C$, поднимается вверх на неподвижный блок $D$ и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к ее концу привязан груз $E$ массы $m$. К оси блока $C$

прикреплен груз *К* массы $m_1$. Коэффициент трения скольжения груза *Е* о горизонтальную плоскость равен *f*. При каком условии груз *К* будет опускаться вниз, если начальные скорости всех грузов равнялись нулю? Найти ускорение груза *K*. Массами блоков и нити пренебречь.



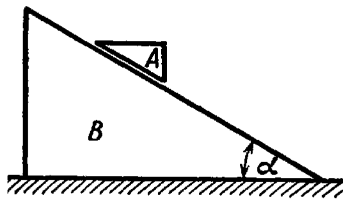

*Ответ*: $m_1 > m(1+f), \quad a = g\dfrac{m_1 - m(1+f)}{m_1 + 2m}.$

2. Два груза *D* и *E* массы *m* каждый привязаны к концам нерастяжимой нити. Эта нить от груза *E* идет через неподвижный блок *A*, затем охватывает подвижный блок *B*, возвращается вверх на неподвижный блок *C*, соосный с блоком *A*, проходит параллельно гладкой наклонной плоскости, где к концу нити привязан груз *D*. Наклонная плоскость образует угол $a$ с горизонтом. К подвижному блоку *B* прикреплен груз *К* массы $m_1$. Коэффициент трения скольжения груза *Е* о горизонтальную плоскость равен *f*. Массами блоков и нити пренебречь. Выяснить условие, при котором груз *К* будет опускаться. Найти ускорение этого груза. В начальный момент скорости всех грузов равнялись нулю.



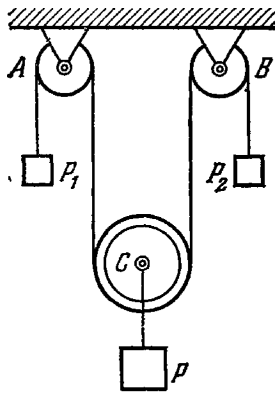

*Ответ*: $m_1 > m(f + \sin a), \quad a = g\dfrac{m_1 - m(f+\sin a)}{m_1 + 2m}.$

3. Призма *A* массы *m* скользит по гладкой боковой грани призмы *B* массы $m_1$, образующей угол $a$ с горизонтом. Определить ускорение призмы *B*. Трением между призмой *B* и горизонтальной плоскостью пренебречь.



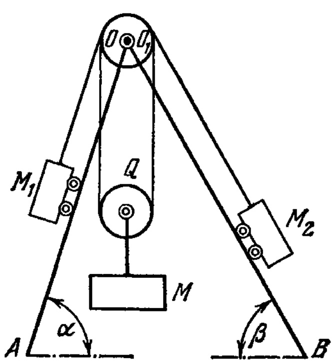

*Ответ*: $a = g\dfrac{m\sin 2a}{2(m_1 + m\sin^2 a)}.$

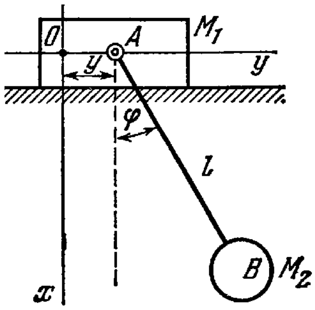
4. Через блоки *A* и *B* с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок *C*; части шнура, не лежащие на концах, вертикальны. Блок *C* нагружен гирей массы *m* = 4 кг, к концам шнура прикреплены грузы массы $m_1$ =2 кг и $m_2$ = 3 кг. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура и трением на осях.




*Ответ*: $a = \dfrac{1}{11}g$ (вверх), $a_1 = \dfrac{1}{11}g$ (вверх), $a_2 = \dfrac{3}{11}g$ (вниз).

5. Грузы $M_1$ и $M_2$ одинаковой массы *m* движутся по двум наклонным направляющим *OA* и *OB*, расположенным в вертикальной плоскости под углами $a$ и $b$ к горизонту; нить, соединяющая эти грузы, идет от груза $M_1$ через блок *O*, вращающийся около горизонтальной оси, охватывает подвижный шкив *Q*, несущий груз *M* массы $m_1$, и затем через блок $O_1$, надетый на ту же ось, что и блок *O*, идет к грузу $M_2$. Блоки $O_1$ и *O* соосные. Определить ускорение *a* груза *M*, пренебрегая трением, а также массами блока, шкива и нити.



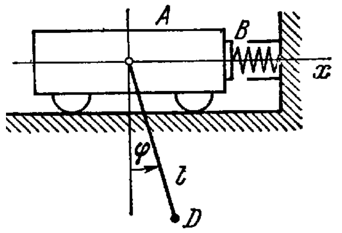

*Ответ*: $a = g\dfrac{m_1 - m(\sin a + \sin b)}{m_1 + 2m}.$

6. Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна $M_1$ массы $m_1$, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика $M_2$ массы $m_2$, соединенного с ползуном стержнем *AB* длины *l*. Стержень может вращаться вокруг

оси $A$, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь. Определить период малых колебаний эллиптического маятника.

*Ответ*: $\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot{x}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0,\quad l\ddot{\varphi}+\cos\varphi\,\ddot{x}+g\sin\varphi=0,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}}.$

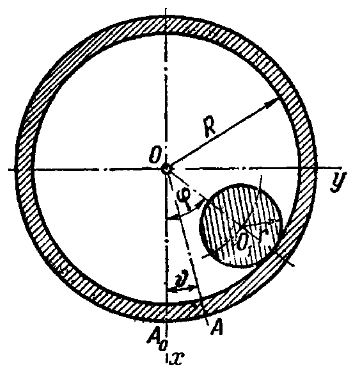
7. При наезде тележки $A$ на упругий упор $B$ начинаются колебания подвешенного на стержне груза $D$. Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы, если $m_1$ — масса тележки, $m_2$ — масса груза, $l$ — длина стержня, $c$ — коэффициент жесткости пружины упора $B$. Массой колес и всеми силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси $x$ взять в левом конце недеформированной пружины. Определить период малых колебаний груза при отсутствии упора $B$. Массой стержня пренебречь.




Указание. Пренебречь членом, содержащим множитель $\dot{\varphi}^2$, считать $c = 0$, $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$.

*Ответ:* $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=-cx,\ \ddot{x}\cos\varphi+l\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi;\ T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$

8. Шероховатый цилиндр массы $m$ и радиуса $r$ катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы $M$ и радиуса $R$, могущего вращаться около своей горизонтально расположенной оси $O$. Моменты инерции цилиндров относительно своих осей равны $mr^2/2$ и $MR^2$. Составить уравнения движения системы и найти их первые интегралы.

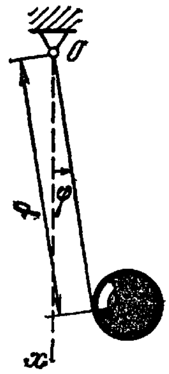



*Ответ*: $MR^2\dot{\vartheta}-\frac{1}{2}mR\left[(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\vartheta}\right]=C_1,$

$\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\vartheta}\right]^2+\frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2-mg(R-r)\cos\varphi=C_2,$

где $\varphi$ — угол поворота отрезка, соединяющего оси цилиндров, $\vartheta$ — угол поворота внешнего цилиндра.

9. Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса $R$, второй конец прикреплен к неподвижной точке $O$. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Пренебрегая массой нити, оставить дифференциальные уравнения движения цилиндра.




*Ответ*: $\ddot{x}-R\ddot{\varphi}-\frac{2}{3}r\dot{\varphi}^2=\frac{2}{3}g\cos\varphi,\quad \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)-Rr\dot{\varphi}^2=-gr\sin\varphi.$

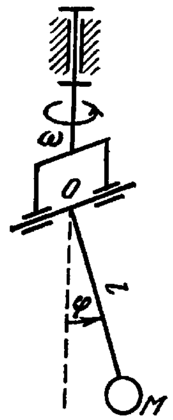
**Тема занятия 20:** Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Первые интегралы уравнений движения (обобщенный интеграл энергии, циклический импульс).

1. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения для математического маятника массы $m$ и длины $l$, положение которого определяется углом $\varphi$ отклонения его от вертикали. Проверить, что полученные уравнения эквивалентны обычному дифференциальному уравнению движения математического маятника.

*Ответ*: 1) $H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}-mgl\cos\varphi$; 2) $\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2},\quad \dot{p}=-mgl\sin\varphi$.

2. Материальная точка $M$ соединена с помощью стержня $OM$ длины $l$ с плоским шарниром $O$, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью $\omega$.

Определить условие устойчивости нижнего вертикального положения маятника, период его малых колебаний при выведении его из этого положения и обобщенный интеграл энергии. Массой стержня пренебречь.



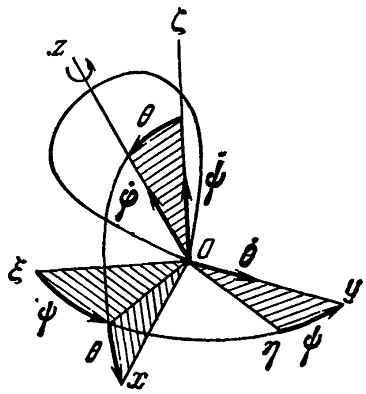

*Ответ*: 1) $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$;  2) $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g/l - \omega^2}}$;  3) $\dot\varphi^2 - \omega^2 \sin^2\varphi - 2\dfrac{g}{l}\cos\varphi = h.$

3. Материальная точка массы $m$ подвешена с помощью стержня длины $l$ к плоскому шарниру, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью $\omega$ (см. рисунок к задаче 2). Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения. Массу стержня не учитывать.

*Ответ*: 1) $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{p^2}{ml^2} - \dfrac{ml^2}{2}\omega^2 \sin^2\varphi - mgl\cos\varphi$;

$$2)\ \dot\varphi = \frac{p}{ml^2}, \quad \dot p = ml^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi .$$

4. Положение оси симметрии $z$ волчка, движущегося относительно неподвижной точки $O$ под действием силы тяжести, определяется углами Эйлера, углом прецессии $\psi$ и углом нутации $\theta$. Составить функцию Гамильтона для углов $\psi$, $\theta$ и $\varphi$ (угол собственного вращения) и соответствующих импульсов, если $m$ — масса волчка, $l$ — расстояние от его центра масс до точки $O$, $C$ — момент инерции относительно оси $z$, $A$ — момент инерции относительно любой оси, лежащей в экваториальной плоскости, проходящей через точку $O$.




*Ответ*: $H = \dfrac{1}{2A}\left[\dfrac{(P_\psi - P_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + P_\theta^2\right] + \dfrac{1}{2C}P_\varphi^2 + mgl\cos\theta .$

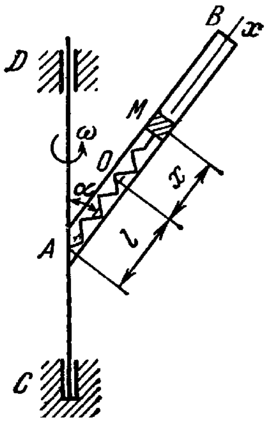
5. В условиях предыдущей задачи составить канонические уравнения движения волчка.

*Ответ*: $\dot\psi = \dfrac{P_\psi - P_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot P_\psi = 0,$

$$\dot\theta = \frac{P_\theta}{A}, \quad \dot P_\theta = -\frac{(P_\varphi\cos\theta - P_\psi)(P_\psi\cos\theta - P_\varphi)}{A\sin^3\theta} + mgl\sin\theta ,$$

$$\dot\varphi = -\frac{P_\psi - P_\varphi\cos\theta}{A\,tg\,\theta\sin\theta} + \frac{P_\varphi}{C}, \quad \dot P_\varphi = 0.$$

6. Трубка $AB$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси $CD$, составляя с ней угол $\alpha$. В трубке находится пружина жесткости $c$, один конец которой укреплен в точке $A$; ко второму концу пружины прикреплено тело $M$ массы $m$, скользящее без трения внутри трубки. В недеформированном состоянии длина пружины равна $AO = l$. Приняв за обобщенную координату расстояние $x$ от тела $M$ до точки $O$, определить кинетическую энергию $T$ тела $M$ и обобщенный интеграл энергии.

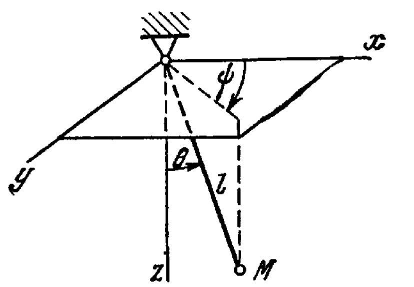



*Ответ*: $T = \dfrac{1}{2}m\left[\dot x^2 + (l+x)^2\omega^2\sin^2\alpha\right],$

$$m\dot x^2 - m(l+x)^2\omega^2\sin^2\alpha + cx^2 + 2mg\cos\alpha\, x = h,$$

где $h$ – постоянная интегрирования.

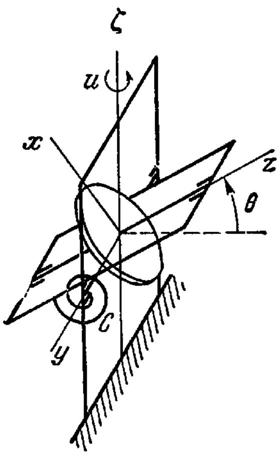
7. Найти первые интегралы движения сферического маятника длины $l$, положение которого определяется углами $\theta$ и $\psi$.




*Ответ*: 1) Интеграл, соответствующий циклической координате $\psi$ (интеграл моментов количества движения относительно оси $z$) $\dot\psi \sin^2\theta = n$;

2) интеграл энергии: $\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta - 2\dfrac{g}{l}\cos\theta = h$, где $n$ и $h$ – постоянные интегрирования.

8. Гироскопический тахометр установлен на платформе, вращающейся с постоянной угловой скоростью $u$ вокруг оси $x$. Определить первые интегралы движения, если коэффициент жесткости спиральной пружины равен *c*, моменты инерции гироскопа относительно главных центральных осей *x*, *y*, *z* соответственно равны *A*, *B* и *C*, причем *B* = *A*; силы трения на оси *z* собственного вращения гироскопа уравновешиваются моментом, создаваемым статором электромотора, приводящим во вращение гироскоп; силами трения на оси прецессии *y* пренебречь.

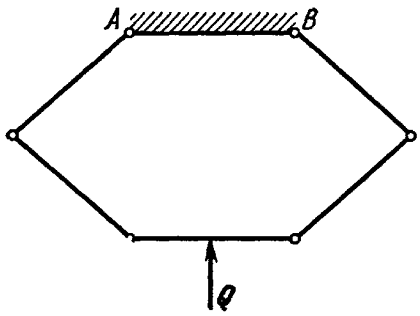



*Ответ*: 1) Интеграл, соответствующий циклической координате $\varphi$ (интеграл моментов количества движения относительно оси $z$): $\dot\varphi + u\sin\theta = n$;

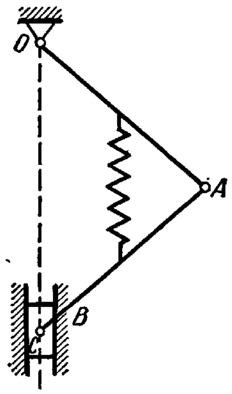
2) обобщенный интеграл энергии: $\dfrac{1}{2}\left[\left(C\dot\varphi^2 + A\dot\theta^2\right) - \left(Cu^2\sin^2\theta + Au^2\cos^2\theta\right)\right] + \dfrac{1}{2}c\theta^2 = h.$

**Тема занятия 21:** Устойчивость положений равновесия консервативных систем. Теорема Лагранжа.

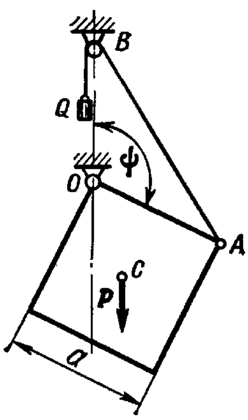
1. Шарнирный шестиугольник, состоящий из шести равных однородных стержней веса *p* каждый, расположен в вертикальной плоскости. Верхняя сторона шестиугольника *AB* неподвижно закреплена в горизонтальном положении; остальные стороны расположены симметрично по отношению к вертикали, проходящей через середину *AB*. Определить, какую вертикальную силу *Q* надо приложить в середине горизонтальной стороны, противоположной *AB*, для того чтобы система находилась в безразличном равновесии.
*Ответ*: $Q = 3p$.




2. Система состоит из двух однородных стержней *OA* и *AB* длины *a* и массы *m*, расположенных в вертикальной плоскости. В точке *A* стержни соединены шарниром. В точке *O* — неподвижный шарнир. В точке *B* стержень *AB* соединен шарниром с телом *C* массы $m_1$, которое может перемещаться по вертикали, проходящей через точку *O*. Середины стержней *OA* и *AB* соединены пружиной жесткости *c*. Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_0 < a$. Найти положения равновесия и условия их устойчивости. Трением и массой пружины пренебречь.
*Ответ*: При $2(m + m_1)g > c(a - l_0)$ одно устойчивое состояние равновесия $\varphi_1 = 0$, при $2(m + m_1)g < c(a - l_0)$ два состояния равновесия — неустойчивое $\varphi_1 = 0$ и устойчивое $\varphi_2 = \arccos\dfrac{2(m+m_1)g + cl_0}{ca}$.

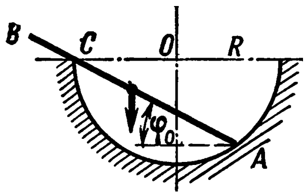



3. Однородная квадратная пластинка может вращаться в вертикальной плоскости около оси, проходящей через угол *O*; вес пластинки *P*, длина ее стороны *a*. К углу *A* пластинки привязана нить длины *l*, перекинутая через малый блок *B*, отстоящий на расстоянии *a* по вертикали от точки *O*. На нити висит груз веса $Q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



*Ответ*: Положения равновесия отвечают следующим значениям угла $\psi$ : $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/6$, $\psi_3 = \pi/2$, $\psi_4 = 3\pi/2$. Первое и третье положения равновесия устойчивы.

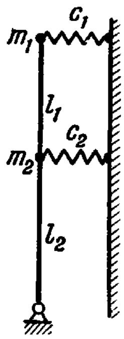
4. Однородный тяжелый стержень $AB$ длины $2a$ опирается на криволинейную направляющую, имеющую форму полуокружности радиуса $R$. Определить, пренебрегая трением, положение равновесия и исследовать его устойчивость.




*Ответ*: В положении равновесия стержень наклонен к горизонтальной линии под углом $\varphi_0$, определяемым из уравнения $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{8R}\left[a + \sqrt{a^2 + 32R^2}\right]$ (предполагается, что $\sqrt{2/3}\,R < a < 2R$).

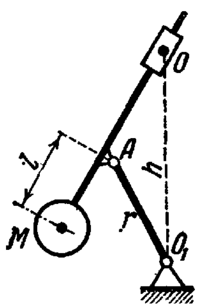
Это положение равновесия устойчиво.

5. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия «обращенного» двойного маятника, изображенного на рисунке. Маятник может быть схематизирован в виде двух материальных точек масс $m_1$ и $m_2$, связанных стержнями длин $l_1$ и $l_2$. В вертикальном положении равновесия пружины (жесткости их $c_1$ и $c_2$) не напряжены.




*Ответ*: Условия устойчивости имеют вид $c_1 l_1 > m_1 g$, $\left[(c_1 + c_2)\,l_2 - (m_1 + m_2)\,g\right]\left[c_1 l_1 - m_1 g\right] > c_1^2 l_1 l_2$.

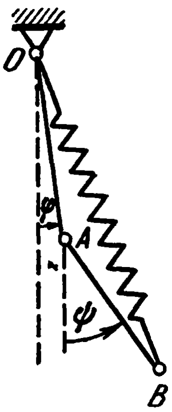
6. В маятнике паллографа груз $M$ подвешен на стержне $OM$, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик $O$ и шарнирно соединенном в точке $A$ с коромыслом $AO_1$, вращающимся около оси $O_1$. Длина коромысла $r$, расстояние от центра масс груза до шарнира $A$ равно $l$, расстояние $OO_1 = h$. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Размерами груза и массой стержней пренебречь.




*Ответ*: При $\sqrt{rl} > h - r$ – положение равновесия устойчиво;

при $\sqrt{rl} < h - r$ – неустойчиво.

7. Стержень $OA$ длины $a$ может свободно вращаться вокруг точки $O$. К концу $A$ стержня шарнирно прикреплен стержень $AB$ длины $a$, на другом конце которого закреплен груз $B$ массы $m$. Точка $O$ и точка $B$ соединены между собой пружиной жесткости $c$. Масса пружины пренебрежимо мала, длина пружины в ненапряженном состоянии равна $a$. Найти положения равновесия, считая, что система расположена в вертикальной плоскости. Массой стержней $AB$ и $OA$ пренебречь.




*Ответ*: Четыре состояния равновесия

$\varphi_1 = 0,\quad \psi_1 = 0;\quad \varphi_2 = \pi,\quad \psi_2 = \pi;\quad \varphi = \mp\varphi_3,\quad \psi = \pm\psi_3$,

где $\cos\varphi_3 = \cos\psi_3 = \dfrac{mg + ca}{2ca}$. При $mg > ca$ устойчиво состояние равновесия $\varphi_1 = 0,\ \psi_1 = 0$. При $mg < ca$ устойчивы состояния равновесия $\varphi = \mp\varphi_3,\ \psi = \pm\psi_3$. Состояние равновесия $\varphi_2 = \pi,\ \psi_2 = \pi$ всегда неустойчиво.

**Тема занятия 22:** Устойчивость относительного равновесия. Приведенный потенциал.

1. Двойной маятник, образованный двумя стержнями длины $l$ и материальными точками с массами $m$, подвешен на горизонтальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси $z$. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Массой стержней пренебречь.

*Ответ*: При $g/(l\omega^2) > 1 + 1/\sqrt{2}$ вертикальное положение равновесия маятника устойчиво.

2. Тяжелый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и вращающейся вокруг вертикальной оси *Oz* с постоянной угловой скоростью $w$ (ось *Oz* направлена вниз). Определить положения относительного равновесия шарика и исследовать их устойчивость.

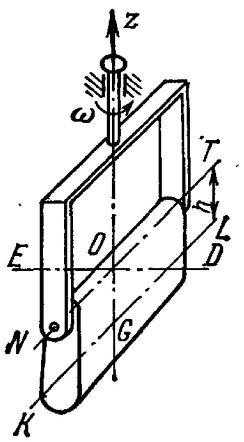
   *Ответ*: При $w^2 \le gc/a^2$ два положения равновесия: а) $x = 0$, $z = c$ (устойчивое); б) $x = 0$, $z = -c$ (неустойчивое).

   При $w^2 > gc/a^2$ существуют три положения равновесия: а) $x = 0$, $z = c$ (неустойчивое); б) $x = 0$, $z = -c$ (неустойчивое), в) $z = gc^2/\left(w^2a^2\right)$ (устойчивое).

3. Тяжелый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по параболе $x^2 = 2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью $w$ вокруг оси *Oz*. (Положительное направление оси *Oz* — вверх.) Определить положение относительного равновесия шарика и исследовать его устойчивость.

   *Ответ*: Существует единственное положение равновесия $z = 0$; оно устойчиво при $w^2 < g/p$ и неустойчиво при $w^2 > g/p$, при $w^2 = g/p$ — безразличное равновесие.

4. Твердое тело свободно качается вокруг горизонтальной оси *NT*, вращающейся вокруг вертикальной оси *Oz* с угловой скоростью $w$. Точка *G* — центр инерции тела; плоскость *NTG* является плоскостью симметрии, ось *OG*— главной осью инерции. Ось *KL* параллельна *NT*, ось *ED* проходит через точку *O* и перпендикулярна *NT* и *OG*. Моменты инерции тела относительно осей *OG*, *KL* и *ED* равны соответственно *C*, *A* и *B*; *h* — длина отрезка *OG*; *M* — масса тела. Определить возможные положения относительного равновесия и исследовать их устойчивость.




   *Ответ*: Возможным положением относительного равновесия отвечают следующие значения угла отклонения линии *OG* от оси *Oz*:

   а) $j = 0$ (устойчиво, если $B < C$; при $B > C$ оно устойчиво,

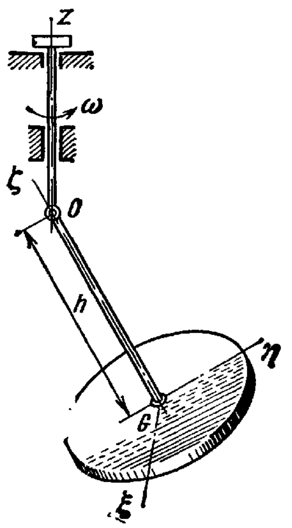
   если $w^2 < Mgh/(B - C)$, и неустойчиво при $w^2 > Mgh/(B - C)$;

   б) $j = p$ (неустойчиво, если $B > C$; при $B < C$ оно устойчиво,

   если $w^2 > Mgh/(C - B)$, и неустойчиво при $w^2 < Mgh/(C - B)$;

   в) $j = \arccos\left[Mgh/\left((B-C)w^2\right)\right]$ (существует, если $w^2 > Mgh/(B - C)$; устойчиво при $B > C$ и неустойчиво при $B < C$).

5. Определить положения относительного равновесия маятника, подвешенного с помощью универсального шарнира *O* к вертикальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью $w$; маятник симметричен относительно своей продольной оси; *A* и *C*—его моменты инерции относительно главных центральных осей инерции $x, h$ и $z$; $h$ — расстояние центра тяжести маятника от шарнира. Исследовать устойчивость положений равновесия маятника и определить период колебаний около среднего положения равновесия.



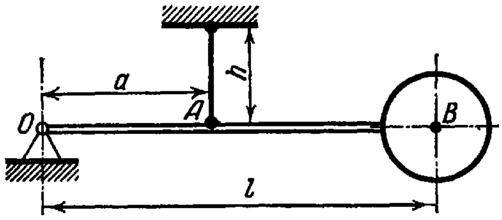

   *Ответ*: Положения равновесия и их устойчивость определяются формулами, данными в ответе к задаче 4 (в них нужно положить $B = A + Mh^2$). Период колебаний

   $$T = 2pw\sqrt{\frac{\left(A+Mh^2\right)\left(A+Mh^2-C\right)}{\left(A+Mh^2-C\right)^2w^4-M^2g^2h^2}}.$$

6. Тяжелая точка может двигаться без трения по вертикальному проволочному кольцу, которое вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Радиус кольца равен R. Найти положение равновесия точки и определить, как будет двигаться точка, если в положении равновесия она получит малую скорость $v_0$ по касательной вверх.

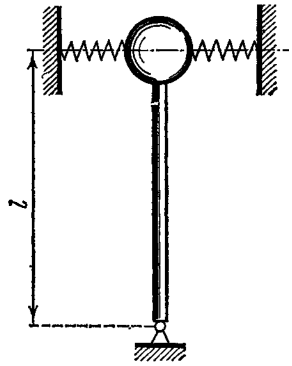
*Ответ*: Положение равновесия соответствует углу $j_0 = \arccos \frac{g}{w^2 R}$, отсчитываемому от нижнего положения точки на круге. Точка, получившая малую скорость v₀, будет совершать малые колебания около положения равновесия согласно уравнению: $j = \frac{v_0}{Rk} \sin kt$, где $k = \frac{\sqrt{w^4 R^2 - g^2}}{wR}$.

**Тема занятия 23:** Малые колебания консервативных систем около устойчивого положения равновесия с одной степенью свободы.



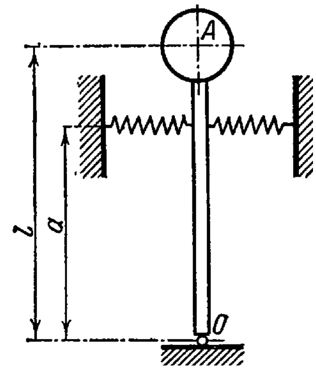

1. Жесткий стержень *OB* длины *l* может свободно качаться на шаровом шарнире около конца *O* и несет шарик веса *Q* на другом конце. Стержень удерживается в горизонтальном положении посредством нерастяжимого вертикального шнура длины *h*. Расстояние *OA* = *a*. Если шарик оттянуть перпендикулярно плоскости рисунка и затем отпустить, то система начнет колебаться. Пренебрегая массой стержня, определить период малых колебаний системы.

   *Ответ*: $T = 2p\sqrt{\frac{hl}{ag}}$.



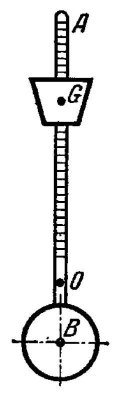

2. Определить период малых колебаний астатического маятника, употребляемого в некоторых сейсмографах для записи колебаний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длины *l*, несущего на конце массу *m*, зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости *c* с закрепленными концами. Массой стержня пренебречь, и считать пружины в положении равновесия ненапряженными.

   *Ответ*: $T = \frac{2p}{\sqrt{2\frac{c}{m} - \frac{g}{l}}}$.




3. Маятник состоит из жесткого стержня длины *l*, несущего массу *m* на своем конце. К стержню прикреплены две пружины жесткости *c* на расстоянии *a* от его нижнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Предполагая, что маятник установлен так, что масса *m* расположена выше точки подвеса, определить условие, при котором вертикальное положение равновесия маятника устойчиво, и вычислить период малых колебаний маятника.

   *Ответ*: $a^2 > \frac{mgl}{2c}$, $T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{2ca^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}}$.



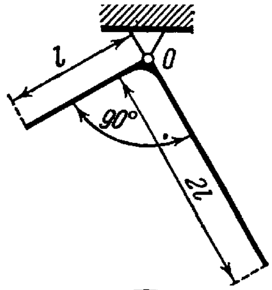

4. Определить период малых колебаний метронома, состоящего из маятника и добавочного подвижного груза *G* массы *m*. Момент инерции всей системы относительно горизонтальной оси вращения изменяется путем смещения подвижного груза *G*. Масса маятника *M*; расстояние центра масс маятника от оси вращения *O* равно $s_0$; расстояние *OG* = *s*; момент инерции маятника относительно оси вращения $J_0$.

   *Ответ*: $T = 2p\sqrt{\frac{J_0 + ms^2}{(Ms_0 - ms)g}}$.

5. Круглый обруч подвешен к трем неподвижным точкам тремя одинаковыми нерастяжимыми нитями длины $l$, так, что плоскость обруча горизонтальна. Нити в положении равновесия обруча вертикальны и делят окружность обруча на три равные части. Найти период малых колебаний обруча вокруг оси, проходящей через центр обруча.

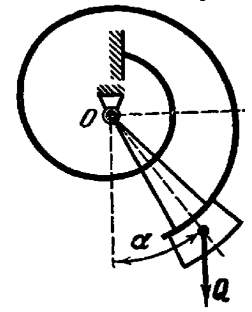
   *Ответ*: $T = 2p\sqrt{l/g}$.

6. Уголок, составленный из тонких однородных стержней длин $l$ и $2l$ с углом между стержнями 90°, может вращаться вокруг точки $O$. Определить период малых колебаний уголка около положения равновесия.

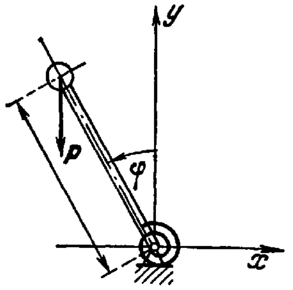
   *Ответ*: $T = 2p\,\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}}\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 7{,}53\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

7. В вибрографе, предназначенном для записи колебаний фундаментов, частей машин и т.п., маятник веса $Q$ удерживается под углом $a$ к вертикали с помощью спиральной пружины жесткости $c$; момент инерции маятника относительно оси вращения $O$ равен $J$, расстояние центра масс маятника от оси вращения $s$. Определить период свободных колебаний вибрографа.

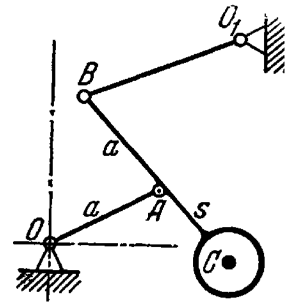
   *Ответ*: $T = 2p\sqrt{\dfrac{J}{Qs\sin a + c}}$.

8. Найти, при каком условии верхнее вертикальное положение равновесия маятника является устойчивым, если свободному вращению маятника препятствует спиральная пружина жесткости $c$, установленная так, что при верхнем вертикальном положении маятника она не напряжена. Вес маятника $P$. Расстояние от центра масс маятника до точки подвеса равно $a$. Найти, также период малых колебаний маятника, если его момент инерции относительно оси вращения равен $J_0$.

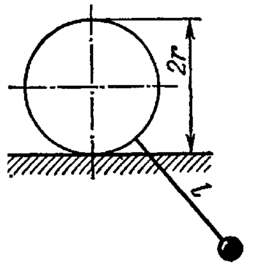
   *Ответ*: $c > Pa$, $\quad T = 2p\sqrt{\dfrac{J_0}{c - Pa}}$.

9. Пренебрегая массой стержней найти период малых колебаний маятника, изображенного на рисунке. Центр масс груза находится на продолжении шатуна шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ в точке $C$. В положении равновесия стержни $OA$ и $BC$ вертикальны, стержень $O_1B$ горизонтален: $OA = AB = a$; $AC = s$.

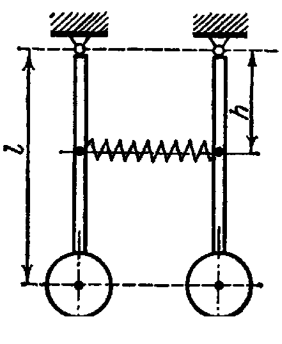
   *Ответ*: $T = 2p\,\dfrac{s + a}{\sqrt{g(s - a)}}$.

10. Диск массы $M$ и радиуса $r$ может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К диску жестко прикреплен стержень длины $l$, на конце которого находится точечная масса $m$. Найти период малых колебаний системы. Массой стержня пренебречь.

    *Ответ*: $T = 2p\sqrt{\dfrac{3Mr^2 + 2ml^2}{2mg(r + l)}}$.

**Тема занятия 24:** Малые колебания консервативных систем около устойчивого положения равновесия с несколькими свободы.

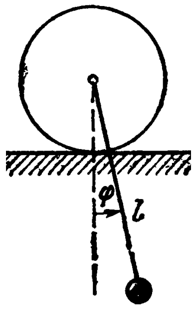



1. Два одинаковых маятника длины $l$ и массы $m$ каждый соединены на уровне $h$ упругой пружиной жесткости $c$, прикрепленной концами к стержням маятников. Определить малые колебания системы в плоскости равновесного положения маятников, после того как одному из

маятников сообщено отклонение на угол $a$ от положения равновесия; начальные скорости маятников равны нулю. Массами стержней маятников и массой пружины пренебречь.

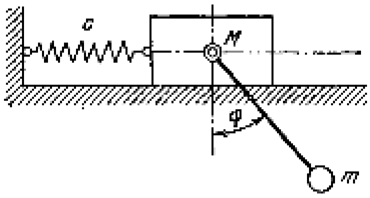
*Ответ*: $j_1 = a\cos\frac{k_1+k_2}{2}t\cos\frac{k_2-k_1}{2}t,\quad j_2 = a\sin\frac{k_1+k_2}{2}t\sin\frac{k_2-k_1}{2}t,$ где $j_1$ и $j_2$ – углы отклонения маятников от вертикали и $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}.$

2. Диск массы $M$ может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен стержень длины $l$, на конце которого находится точечный груз массы $m$. Найти период малых колебаний маятника. Массой стержня пренебречь.




*Ответ*: $T = 2p\sqrt{\frac{3M}{3M+2m}\frac{l}{g}}.$

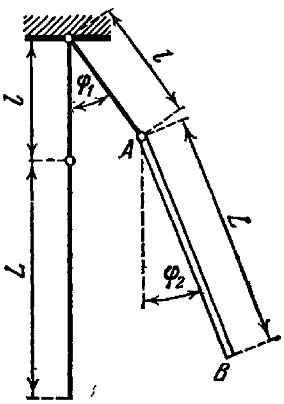
3. Маятник состоит из ползуна массы $M$, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массы $m$, соединенного с ползуном стержнем длины $l$, могущим вращаться вокруг оси, связанной с ползуном. К ползуну присоединена пружина жесткости $c$, другой конец которой закреплен неподвижно. Определить частоты малых колебаний системы.




*Ответ*: Искомые частоты являются корнями уравнения

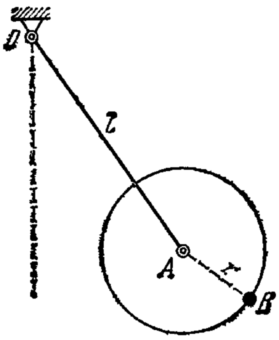
$$k^4 - \left[\frac{c}{M}+\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\right]k^2 + \frac{c}{M}\frac{g}{l} = 0.$$

4. Однородный стержень $AB$ длины $L$ подвешен при помощи нити длины $l = 0{,}5L$ к неподвижной точке. Пренебрегая массой нити, определить частоты главных колебаний системы и найти отношение отклонений стержня и нити от вертикали при первом и втором главных колебаниях.




*Ответ*: $k_1 = 0{,}677\sqrt{g/l},\quad k_2 = 2{,}558\sqrt{g/l};$ в первом главном колебании $j_1 = 0{,}847j_2,$ во втором $j_1 = -1{,}180j_2,$ где $j_1$ и $j_2$ – амплитуды углов, составляемых нитью и стержнем с вертикалью.

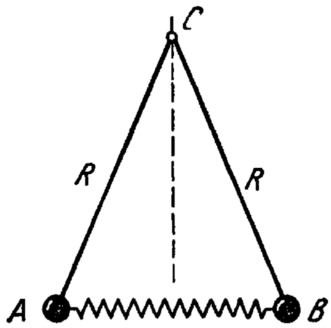
5. Круглый однородный диск радиуса $r$ и массы $M$ связан шарниром со стержнем $OA$ длины $l$, могущим поворачиваться около неподвижной горизонтальной оси. На окружности диска закреплена материальная точка $B$ массы $m$. Определить частоты свободных колебаний системы. Массой стержня пренебречь. Диск может вращаться в плоскости колебаний стержня $OA$.




*Ответ*: Частоты свободных колебаний являются корнями уравнения

$$k^4 - \frac{M+m}{M+3m}\left[1+2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2 + \frac{2m(M+m)}{M(M+3m)}\frac{g^2}{lr} = 0.$$

6. Два одинаковых жестких стержня длины $R$ имеют общую точку подвеса $O$. Стержни могут вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса независимо друг от друга. К концам стержней прикреплены два одинаковых груза $A$ и $B$ массы $m$ каждый, соединенные между собой пружиной жесткости $c$. Длина пружины в состоянии устойчивого равновесия системы равна $l$. Пренебрегая массой стержней, найти частоты главных колебаний около устойчивого положения равновесия грузов.




*Ответ*: $k_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\cos a},\quad k_2 = \sqrt{\frac{2c}{m}\cos^2 a + \frac{g}{R}\cos a},$ где $a = \arcsin\frac{l}{2R}.$