ШКОЛА — КОЛЛЕДЖ — УНИВЕРСИТЕТ

В. С. БЕЛОНОСОВ
М. В. ФОКИН

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание 8-е, исправленное и дополненное

СИБИРСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НОВОСИБИРСК • 2005

УДК 51 (075.4)
ББК 22.1я7
Б43

Рекомендовано к печати
Ученым советом механико-математического факультета
Новосибирского государственного университета

Белоносов В. С., Фокин М. В.

Б43 Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. — 8-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2005. — 606 с.: ил.

ISBN 5–94087–315–4

В пособии представлены варианты задач по математике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в Новосибирском государственном университете в 1975—2004 гг. Для каждого года и факультета приведены подробные решения одного из вариантов, к остальным даны ответы и указания.

Сборник предназначен для учителей и школьников старших классов, учащихся техникумов, руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто готовится к вступительным экзаменам по математике в вузы.

УДК 51 (075.4)
ББК 22.1я7

Издается с 1992 года

ISBN 5–94087–315–4

ОТ АВТОРОВ

Этот задачник составлен на основе вариантов, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в Новосибирском государственном университете в 1975–2004 годах. Настоящее издание — уже восьмое. Первые семь были выпущены в 1992–2003 годах и быстро разошлись. Книга прошла серьезную апробацию в Специализированном учебно-научном центре (физматшколе) и Высшем колледже информатики НГУ, на подготовительных отделениях некоторых вузов, во многих школах Новосибирска и других городов. По отзывам преподавателей, учащихся и их родителей задачник оказался не только удачным пособием для абитуриентов, но и полезным дополнением к школьным учебникам по математике.

Новое издание существенно переработано и дополнено по сравнению с предыдущими. Добавлены варианты 2003–2004 годов, предлагавшиеся как на летних вступительных экзаменах, так и на весенних — «репетиционных». Отредактированы решения многих старых задач, устранены замеченные опечатки в ранее публиковавшихся разделах.

Книга состоит из двух частей. В первой приведены условия задач, сгруппированные по годам и факультетам. Они даны практически в том же виде, что и на экзаменах; проведено лишь незначительное редактирование формулировок и уточнены обозначения. В каждом варианте задачи расположены в порядке возрастания трудности. На выполнение письменной работы абитуриентам предоставлялось 5 часов. Для получения положительной оценки достаточно было решить хотя бы две задачи.

Во второй части изложены решения, ответы и указания. Подробные решения приведены лишь к одному из однотипных вариантов каждой группы. Все остальные задачи снабжены ответами, а некоторые (в основном геометрические) — краткими указаниями. Структура вариантов для каждого факультета и в каждом году такова, что задачи под одинаковыми номерами близки по содержанию и методам решения. Читатель, разобравший приведенные решения для одного варианта, сможет проверить себя, применив изученные приемы к похожим задачам из остальных вариантов.

Мы не стремились к полному единообразию записи ответов и решений, а считали своей главной целью изложение основных идей и методов. В настоящее время издано значительное количество учебной и справочной литературы для поступающих в вузы, поэтому мы не стали выделять справочный материал в специальный раздел. Все необходимые пояснения даются по ходу изложения.

Представленные задачи — результат труда большого коллектива, состав которого в течение многих лет постепенно менялся. Все эти годы (за редкими исключениями) авторы участвовали в его работе как на предварительных этапах сочинения отдельных задач, так и при окончательном формировании вариантов. К сожалению, мы не в состоянии поименно перечислить здесь составителей всех задач, собранных в данной книге. Особенно заметный вклад в эту работу внесли А. А. Атавин, А. Д. Больбот, М. П. Вишневский, Э. Ш. Коспанов, Ю. В. Михеев, В. А. Чуркин и А. В. Васильев.

Авторы признательны преподавателям Физико-математической школы Р. С. Созоненко и Л. В. Мали, оказавшим существенную помощь при подготовке рукописи первого издания, а также редактору четвертого издания настоящей книги Л. М. Берзиной, чьи замечания и предложения позволили значительно улучшить качество изложения.

Новосибирск,
декабрь 2004 г.

В. С. Белоносов
М. В. Фокин

Часть I. ЗАДАЧИ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ

1975

Вариант 1

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-6x+8}-\sqrt{x^2-7x+10}<1$.

2. Дана окружность радиуса r. На расстоянии $2r$ от центра окружности выбрана точка A. Из этой точки проведены касательная и секущая, причем секущая равноудалена от центра окружности и от точки касания. Найти длину отрезка секущей, заключенного внутри круга.

3. Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x+\sin x+1}=\sin x-\cos x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}1+\log_y x+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{y}}(x+y)=\log_y 10+\log_y 10\cdot\log_{10}18,\\ 1=\log_{y-x}(29-2x-xy).\end{cases}$$

5. В основании треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Ребро AA' перпендикулярно ребру BC и образует угол в 60° с плоскостью основания ABC. Призма такова, что в нее можно вписать шар. Найти объем призмы.

Вариант 2

1. Решить неравенство $\sqrt{3x+\sqrt{9-x^2}}<\sqrt{3x+3}$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен a, CE — высота, проведенная из вершины прямого угла. Известно, что расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ACE, до катета BC в два раза больше радиуса этой окружности. Найти площадь треугольника ABC.

3. Решить уравнение $\sqrt{\cos 4x - \sin 6x} = \sin x - \cos x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(11-y) = 2 + 2\log_x(1+y), \\ \log_{10} y + \log_{10} y \cdot \log_y(x+y) = \log_{10} 3 - \log_{10} x + 1. \end{cases}$$

5. В основании прямоугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $AC = 2a$. Высота призмы равна $a/2$. Найти радиус шара, касающегося ребра $B'C'$ и граней $AA'B'B$, $AA'C'C$, ABC.

Вариант 3

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2-x-2} < 1$.

2. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $120°$, $2AB = AD = 2a$. Найти радиус окружности, проходящей через точку A и касающейся сторон BC и CD.

3. Решить уравнение $2\sin x = \sqrt{2 + 3\operatorname{tg} 2x}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x \cdot \log_x(y-x) - \log_y x = 1 - 2\log_y x \cdot \log_x 6, \\ \log_{y(y-x)} x + \log_{x/324} x = 0. \end{cases}$$

5. Пирамиды $SABCD$ и $S'ABCD$ имеют общее основание $ABCD$, представляющее собой ромб со стороной a и острым углом, равным $60°$. Вершины S и S' лежат по разные стороны от плоскости $ABCD$, причем боковые грани одной из пирамид образуют угол в $30°$ с основанием, а другой — угол в $60°$. Найти радиус шара, лежащего внутри многогранника $SABCDS'$ и касающегося всех его граней.

Вариант 4

1. Решить неравенство $\sqrt{5x + \sqrt{4-x^2}} < \sqrt{5x+2}$.

2. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 30°$. Из точки A проведен диаметр описанной окружности. В каком отношении этот диаметр делится стороной BC?

3. Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x - \sin 4x + 2} = \sqrt{2}\,\cos x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x (x - 3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{5/2}. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = a$, $\angle BAC = 120°$. Ребро SA перпендикулярно основанию и равно a. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер пирамиды.

Вариант 5

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 1$.

2. В треугольнике ABC угол BAC равен $30°$, центр окружности, проходящей через точки B, C и середину AB, лежит на стороне AC. Найти площадь треугольника, если радиус окружности равен r.

3. Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x - \cos 3x} = \sqrt{2}\,\sin x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y (2xy - 1) \cdot \log_{2xy-1} (y - x) = \log_y \dfrac{2xy - 1}{x + y}, \\ 2 + 2\log_{x+y} (y - x) = \log_{x+y} (13 - x^2 y^2). \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник со стороной, равной a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Известно, что плоскость, проведенная через вершину A параллельно BC и касающаяся вписанного шара, перпендикулярна грани SBC. Найти объем пирамиды.

Вариант 6

1. Решить неравенство $\sqrt{4x + \sqrt{25 - x^2}} < \sqrt{4x + 5}$.

2. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 2a$, $\angle ABC = \alpha$. Медиана треугольника, выходящая из вершины A, продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке D. Найти площадь треугольника BDC.

3. Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x - \sin x + 2} = \sqrt{2}\,\sin 2x$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(x+y)\cdot(\log_{x+y}20-1)=1+\log_x(x+y)\cdot\log_{x+y}y, \\ 4(1+\log_x y)\log_{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\log_{\sqrt{x}}\left(\frac{4}{5}\,xy+2\sqrt{xy}\right). \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной, равной a, и углом при вершине A, равным 60°. Ребро SA перпендикулярно основанию и равно $2a$. Через вершину A проведена плоскость перпендикулярно ребру SC. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

1976

Вариант 1

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, их сумма равна 19. Числа a_1, a_2+4, a_3+7 являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числа a_1, a_2, a_3.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\frac{2\cos x}{\sin 3x}.$$

3. В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса AE, которые пересекаются в точке K. Прямая, проходящая через вершину C и точку K, пересекает сторону AB в точке F. Найти длины отрезков AF и FB, если известно, что длина стороны AB равна c, а длина стороны AC равна b.

4. Решить неравенство

$$\log_{x^2+\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\geqslant 1.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На главной диагонали BD' куба выбрана точка F так, что $BF=2FD'$. Через вершину A, точку F и середину ребра CC' проведена плоскость. Найти отношение объемов частей, на которые делит куб эта плоскость.

Вариант 2

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, их сумма равна 7. Числа a_1, a_2+2, a_3-8 тоже являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти исходные числа.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 3x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что $AE = 2DE$?

4. Решить неравенство
$$\log_{x-2}(9x - 16 - x^2) > 2.$$

5. Прямоугольный параллелепипед с высотой, равной a, имеет в основании прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{3}$. Через одну из диагоналей основания проведена плоскость, составляющая угол 30° со второй диагональю основания. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

Вариант 3

1. Числа a_1, a_2, a_3, сумма которых равна 26, являются последовательными членами геометрической прогрессии и соответственно 1-м, 5-м и 17-м членами некоторой арифметической прогрессии. Найти эти числа.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\sin 7x + \sin x} = \cos 4x.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC через вершину B и середину высоты CD проведена прямая. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если известно, что угол A равен α, а угол B равен β?

4. Решить неравенство
$$\log_{x^2+x+1}\left(2x^2 - \frac{x}{2}\right) < 1.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра куба равна a. Через главную диагональ BD' куба проведена плоскость, образующая угол $30°$ с плоскостью $BB'D'D$. Найти площадь получившегося сечения.

Вариант 4

1. Числа a_1, a_2, a_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что числа a_1, a_2+6, a_3 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии, а числа a_1, a_2+6, a_3+48 — последовательные члены некоторой геометрической прогрессии. Найти числа a_1, a_2, a_3.

2. Решить уравнение $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 3x$.

3. Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F, причем длина отрезка AF в три раза больше длины отрезка FE. Длина медианы BD равна a, длина биссектрисы AE равна b. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+1}(3x^2 - x - 1) < 2.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 4$. Высота параллелепипеда равна $\frac{10}{3}$. Через диагональ AC основания проведена плоскость под углом $45°$ к ребру BC. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит параллелепипед.

Вариант 5

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены арифметической прогрессии, их сумма равна 21. Числа a_1-1, a_2+1, a_3+21 являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числа a_1, a_2, a_3.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos 3x + \sin x} = 2\cos x.$$

3. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла C и пересекающая продолжение стороны AC в точке D. Пусть E — середина отрезка BD. Определить, в каком отношении прямая AE делит площадь треугольника ABC, если известно, что длина стороны AC равна b, а длина стороны BC равна a.

4. Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) \geqslant 1.$$

5. Через главную диагональ куба с ребром a проведена плоскость, составляющая угол 60° с одной из граней. Найти площадь сечения куба этой плоскостью.

Вариант 6

1. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-3x+a=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+b=0$. Найти a и b.

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 7x+\cos x}{\cos 5x+\cos 3x}=\cos 2x.$$

3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC равна 12, длина боковой стороны CD равна 7 и угол BAD равен 60°. Известно, что точка пересечения биссектрис углов ABC и BCD лежит на основании AD. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$\log_{x^2-3x+3}\left(2x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right) < 1.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковая грань SBC перпендикулярна плоскости основания, причем $SB=SC$. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 5. На этой высоте выбрана точка M, которая делит высоту в отношении $2:3$, считая от вершины S. Через точку M и точки пересечения медиан в боковых гранях SAB и SAC проведена плоскость. Найти расстояние от вершины B до этой плоскости.

1977

Вариант 1

1. По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек A и B выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через t секунд в a метрах от B, а вторая встреча — в $2a$ метрах от A ($a > 0$, под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке). Найти скорости спортсменов.

2. Решить уравнение $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$.

3. Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом в точке A, отрезок AB — диаметр O_1. Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку B, равны 2, 3 и 4 см, считая от точки B. Найти радиусы окружностей.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение.

5. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, катеты AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в $60°$, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. Бригада должна изготовить a изделий. Когда она изготовила b изделий ($0 < b < a$), часть рабочих занялась другим делом, поэтому бригада стала ежедневно изготовлять на c изделий меньше. Все изделия были изготовлены за n дней. Сколько изделий в день изготовляла бригада в полном составе?

2. Решить уравнение $(2 + \operatorname{ctg} 3x) \operatorname{tg} x = 1$.

3. Окружности O_1, O_2, O_3 радиусов 1, 1 и 2 см соответственно попарно касаются друг друга внешним образом. A — точка касания O_1 и O_3, B — точка касания O_2 и O_3. Через точку B проведена касательная к O_3. Пусть C — ближайшая к B точка пересечения этой касательной с окружностью O_1. Найти длину хорды, отсекаемой окружностью O_3 на прямой AC.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x+1}(x^2 - ax) = 1$ имеет единственное решение.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция с острым углом 60° и основаниями AB и CD длины $2a$ и a соответственно. Грань SCD перпендикулярна плоскости основания и является правильным треугольником. Через вершины A и C проведена плоскость, параллельная прямой SD. Определить двугранный угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

Вариант 3

1. Велосипедист проехал a километров за t часов, причем вторую половину пути он проехал со скоростью на v км/ч меньшей, чем скорость, с которой он ехал первую половину пути. Определить скорость, с которой велосипедист ехал первую половину пути.

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

3. Через вершину правильного треугольника со стороной, равной единице, проведена прямая, которая делит его на два треугольника. Найти радиусы окружностей, вписанных в каждый из получившихся треугольников, если известно, что один из этих радиусов в два раза больше другого.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-1}(x + a) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через середины ребер AB, AD и SC проведена плоскость. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит пирамиду.

Вариант 4

1. В бассейн объемом V литров из трубы течет вода с постоянной скоростью. Когда в бассейне набирается V_1 литров воды ($0 < V_1 < V$), специальное устройство начинает забирать из бассейна воду со скоростью U литров в минуту. Тем не менее за T минут бассейн наполняется. С какой скоростью течет вода из трубы в бассейн?

2. Решить уравнение $\sqrt{1+2(\sin x+\sin 3x)}=\frac{1}{\sin x}$.

3. К окружности радиуса R проведены касательная и секущая под углом 60° друг к другу. Найти расстояние от центра окружности до точки пересечения касательной и секущей, если длина отрезка секущей, заключенного внутри круга, равна $\frac{8R}{5}$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x+a}(x-2)=2$ имеет единственное решение.

5. Дан прямой круговой конус высоты H с углом 30° между осью и образующей. Правильный тетраэдр $ABCD$ помещен в конус так, что его ребро AB параллельно оси конуса, вершина A лежит на основании, а остальные вершины — на боковой поверхности конуса. Найти длину ребра тетраэдра.

Вариант 5

1. По каналу из пунктов A и B выходят две лодки и идут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Дойдя до A или B, они сразу поворачивают обратно. Первый раз они поравнялись в n километрах от A, второй раз — в $2n$ километрах от B. Определить отношение скоростей лодок, если лодка, первоначально вышедшая из A, идет медленнее.

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 2x+2\sin 2x+4\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\sin x-\cos x.$$

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AB имеет длину a, угол A равен 60°. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются. Найти площадь трапеции.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-2}(x^2-ax+3a-9)=1$ имеет единственное решение.

5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют одинаковую длину a. Через середины боковых ребер, принадлежащих одной из боковых граней, проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти площадь получившегося сечения.

Вариант 6

1. Из двух труб льются с постоянными скоростями в бассейн две жидкости. После того как бассейн был заполнен ровно наполовину, первая труба работала еще 3 часа, а вторая — еще 12 часов. В результате бассейн был заполнен полностью, причем обеих жидкостей в нем оказалось поровну. За какое время заполнит бассейн первая труба?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = \sqrt{1 + 4\sin 2x \cos x}$.

3. В треугольнике ABC биссектриса CD и медиана BE перпендикулярны. Найти площадь треугольника, если длина медианы равна m, а длина биссектрисы равна l.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_x(ax^2 + x + 2) = 2$ имеет единственное решение.

5. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковые ребра AA', BB', CC' перпендикулярны прямой BC и образуют углы в $60°$ с плоскостью основания. Известно, что существует сфера, которая касается всех боковых ребер и ребер $A'C'$, $A'B'$, BC. Найти объем призмы.

1978

Вариант 1

1. Автомобиль, трогаясь с места, сначала двигался равноускоренно, а затем стал двигаться с постоянной скоростью. Известно, что за первые 25 секунд движения он прошел расстояние в 2 раза меньшее, чем расстояние, пройденное за первые 40 секунд. Найти время разгона автомобиля.

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x + \sqrt{2}\,\cos 2x + \cos 3x}{\sin x + \sqrt{2}\,\sin 2x + \sin 3x} = \sin 4x.$$

3. Длины оснований AB и CD трапеции $ABCD$ равны 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На отрезке CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E соответственно.

Известно, что длина отрезка BE в два раза больше длины отрезка DE. В каком отношении точка F делит отрезок AC?

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства

$$\log_{2+\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-5\right)\geqslant 1$$

являются одновременно решениями неравенства $a^4x^2-a^2x-2>0$.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$. Длина основания CD трапеции равна 1, а длины всех остальных ребер пирамиды равны 2; CM — высота боковой грани SBC; KL — средняя линия треугольника SCD, параллельная стороне CD. Через точку A проходит прямая, пересекающая прямые KL и CM в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 2

1. За первый месяц после пуска на заводе было изготовлено 5000 холодильников. Затем в течение нескольких месяцев подряд выпуск холодильников возрастал на 1000 штук в месяц до тех пор, пока завод не достиг проектной мощности. Известно, что за первые 2 года после пуска на заводе было изготовлено в 3 раза больше продукции, чем за первые 9 месяцев. Сколько холодильников в месяц выпускалось на заводе после достижения им проектной мощности?

2. Решить уравнение

$$2\cos x-\sin 3x=\frac{\cos 3x\cos x}{|\sin x|}.$$

3. Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен R. Диагонали AC и BD трапеции делятся точкой их пересечения E в отношении $1:3$, считая от меньшего основания CD. Угол DEC равен $60°$. Найти площадь трапеции.

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства

$$\log_{x+3}\left(\frac{11x}{2}+14\right)>2$$

являются одновременно решениями неравенства $a^2x^2-4\leqslant 0$.

5. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит правильный треугольник ABC. Все ребра призмы имеют длину 1; MN — средняя линия грани $BCC'B'$, параллельная ребру BC. Через центр треугольника ABC проходит прямая, пересекающая прямые AB' и MN в точках P и Q. Определить длину отрезка PQ.

Вариант 3

1. Поезд, имевший скорость 30 м/с, снизил ее в течение некоторого времени до 10 м/с, двигаясь равнозамедленно, а затем продолжал двигаться с постоянной скоростью. Известно, что за первые 20 секунд после начала торможения поезд прошел $\frac{5}{9}$ пути, пройденного им за 50 секунд после начала торможения. Найти ускорение поезда.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x \sin 5x - \cos x \cos 3x}{\cos 2x} = 2\sin^2 x.$$

3. Около треугольника ABC с равными сторонами AB и BC описана окружность радиуса R. Угол C треугольника равен α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Точка E — середина дуги BC описанной окружности. Найти радиус окружности, касающейся внешним образом описанной окружности в точке E и прямой AB.

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства $\log_{3x+2}(x^2 - 3x + 7) \leqslant 1$ являются одновременно решениями неравенства $(x+1)^2 - 4a^2(x+1) + 3a^4 \geqslant 0$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$; все ребра пирамиды имеют одинаковую длину 1. Точка M — середина ребра SA, SN — высота в треугольнике SBC. Через M проходит прямая, пересекающая прямые SN и BD в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 4

1. Автомобиль двигался с постоянной скоростью, а затем стал тормозить с постоянным ускорением -2 м/с^2 и остановился. Известно, что за последние 5 секунд перед остановкой он прошел $\frac{1}{7}$ часть расстояния, пройденного за предыдущие 10 секунд. Определить начальную скорость автомобиля.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2}\,|\cos x|} = \sin 2x + \cos 2x.$$

3. На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{2}$. Прямая l — общая касательная этих окружностей. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к l точка пересечения окружностей.

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ являются одновременно решениями неравенства $x^2 - 2x - a^4 + 1 \geqslant 0$.

5. Нижнее основание правильной усеченной четырехугольной пирамиды $ABCDA'B'C'D'$ — квадрат $ABCD$ со стороной 3; верхнее основание $A'B'C'D'$ — квадрат со стороной 1; длины боковых ребер AA', BB', CC', DD' равны 3. Точка M — середина ребра $C'D'$. Через M проходит прямая, пересекающая прямые AA' и BC в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 5

1. Автобус начал двигаться с ускорением $2\,\text{м}/\text{с}^2$, затем некоторое время ехал с постоянной скоростью, потом начал тормозить с тем же самым по абсолютной величине ускорением, что и во время разгона, и остановился через 24 секунды после начала движения. Известно, что все расстояние, пройденное автобусом, в 3 раза больше расстояния, пройденного за первые 9 секунд движения. Найти максимальную скорость автобуса и пройденный им путь.

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x + \cos 2x - \cos 3x - \cos 4x}{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

3. Около остроугольного треугольника ABC с равными сторонами AC и BC описана окружность радиуса R с центром в точке O. Другая окружность с центром в точке O касается сторон AC и BC и пересекает основание AB в точках D и E. Длина отрезка DE равна половине длины основания. Найти площадь треугольника ABC.

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства $\log_{4-x}(2x^2-5x-3) \leqslant 1$ являются одновременно решениями неравенства $x^2+a^2x-2a^4 \leqslant 0$.

5. В основании прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с острым углом $60°$. Длина основания AB трапеции равна 2; длины основания CD трапеции и боковых ребер AA', BB', CC', DD' призмы равны 1. Точка M — середина ребра BB', а N — середина ребра $A'B'$. Через M проходит прямая, пересекающая прямые AD' и $C'N$ в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 6

1. Спортсмен во время бега за 30 секунд до финиша развил скорость 6 м/с. Пробежав некоторое время с этой скоростью, он начал финишный рывок и двигался с ускорением 0,1 м/с^2 до самой линии финиша. Известно, что за последние 10 секунд бега спортсмен пробежал $\frac{3}{8}$ того расстояния, которое он пробежал за последние 30 секунд. За сколько метров до финиша спортсмен начал ускорение?

2. Решить уравнение $\cos 3x\,|\cos x| + \cos 2x = 0$.

3. В окружность радиуса 3 с центром в точке O вписана трапеция. Определить площадь трапеции, если известно, что окружность радиуса 1 с центром в точке O касается одного из оснований трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей.

4. Определить, для каких значений параметра a все решения неравенства

$$\log_{1+\frac{x}{2}}\left(\frac{5x^2}{4}+x\right) \geqslant 2$$

являются одновременно решениями неравенства $2a^2x^2+(a^4-2)x-a^2>0$.

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Точка M — середина ребра CC'. Через M проходит прямая, пересекающая прямые AD и BD' в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если ребро куба равно 1.

1979

Вариант 1

1. Расстояние между пунктами A и B равно 100 км. Велосипедист проедет это расстояние без остановок за 7 часов, если от A до промежуточного пункта C он будет ехать со скоростью v_0 (км/ч), а далее — с ускорением $\frac{3v_0}{2}$ (км/ч^2). Если от A до C велосипедист будет ехать со скоростью v_0, а от C до B — со скоростью v_1 (км/ч), то на весь путь ему потребуется столько же времени, сколько он потратит, двигаясь от A до C со скоростью v_1, а от C до B — со скоростью v_0. Найти v_0 при условии $v_0 \neq v_1$.

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2+2x-3} \frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \tfrac{1}{4}} = \sin\tfrac{3x}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Острый угол ABC ромба $ABCD$ равен $60°$. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

5. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, длина SA равна 3. На продолжениях ребер AB и SB выбраны соответственно точки M и N так, что B лежит на отрезке AM и на отрезке SN. Шар касается граней трехгранного угла с ребрами BC, BM, BN и плоскости SAC. Найти радиус шара.

Вариант 2

1. Расстояние 210 км разделено на три части: первая — 10 км, а вторая не равна первой. Автомобиль, двигаясь со скоростями v_1, v_2 и v_3 (км/ч) на первой, второй и третьей частях пути, за первые $\frac{49}{20}$ часа пройдет 125 км. На весь путь при таком режиме движения ему потребуется столько же времени, сколько он затратил бы, двигаясь со скоростями v_2, v_1, v_3 соответственно. На вторую и третью части пути ему потребуется в сумме одно и то же время, если он будет проходить их со скоростями v_2, v_3 или v_3, v_2. Если же автомобиль пройдет их без остановки, двигаясь на второй части пути со скоростью v_2, а на третьей — с ускорением $2v_1$ (км/ч^2), то на преодоление второй и третьей частей пути понадобится 3 часа. Определить v_1, v_2 и v_3 при условии $v_2 \neq v_3$.

2. Решить неравенство $\log_{2x^2-x}(|x+2|-|x|) > \log_{2x^2-x}\sqrt{2-x^2}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{4\cos^2 x - 2|\cos 3x| - 2} = 2\sin x$.

4. В угол, равный 60°, вписаны две пересекающиеся окружности. Касательные к окружностям, проходящие через их общую точку, образуют прямой угол. Найти радиусы окружностей, если длина их общей хорды равна a.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $AD = \sqrt{6}$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Шар, центр которого находится вне пирамиды, касается отрезков SB, SC и плоскостей SAD и $ABCD$. Найти радиус шара.

Вариант 3

1. Расстояние между станциями 200 км разделено на две части. Поезд проходит все расстояние за одно и то же время, если движется со скоростями v_0, v_1 или v_1, v_0 (км/ч) на первом и втором участках пути соответственно. Если скорость поезда на первом участке будет v_0, а на втором v_1 (км/ч), то за первые 2,5 часа он пройдет 126 км. Если, двигаясь без остановки, он пройдет первую часть пути со скоростью v_0, а вторую — с ускорением $2v_0$ (км/ч^2), то на весь путь ему понадобится 3 часа. Найти v_0 и v_1 при условии $v_0 \neq v_1$.

2. Решить неравенство $\log_{x^2+x+1}|x+3| > \log_{x^2+x+1}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{2-3\sin^2 x}}{\cos x}.$$

4. В окружность вписан четырехугольник, длина наименьшей стороны которого равна единице. Длины двух любых сторон этого четырехугольника, имеющих общую вершину, отличаются на единицу. Найти радиус окружности.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с равными катетами AB и AC. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Точка M — середина BC; $SM = 2AM = 2$. Точка K лежит на отрезке SM; $SM = 4SK$. Найти радиус шара, касающегося граней трехгранного угла с ребрами AS, AB и AC и плоскости, проведенной параллельно прямой BC через точку K и середину ребра AS.

Вариант 4

1. Расстояние 100 км разделено на три части, причем вторая часть равна половине первой. Двигаясь со скоростями v_1, v_2 и v_3 (км/ч) на первом, втором и третьем участках, мотоциклист тратит на весь путь столько же времени, сколько потребуется ему при движении со скоростями v_3, v_2, v_1 соответственно. Двигаясь без остановки, мотоциклист затратит на второй и третий участки пути $\frac{4}{3}$ часа, если второй участок он пройдет со скоростью v_2, а третий — с ускорением $3v_2$ (км/ч^2). Найти v_2 при условии $v_1 \neq v_3$.

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2} \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{|x+2|} > 0.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos x} + a = 0$ не имеет решений?

4. В прямой угол вписаны две пересекающиеся окружности. Длина общей хорды этих окружностей вдвое меньше расстояния между их центрами. Определить угол между касательными, проведенными к каждой из окружностей в точке их пересечения.

5. Плоскости двух равных трапеций $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны, длина их общего основания AB равна 1, боковые стороны BC и BC_1 перпендикулярны основанию AB, $CD > AB$. Угол между плоскостями DAD_1 и CBC_1 равен 60°. Шар касается всех граней трехгранного угла с ребрами AB, AD, AD_1 и плоскости BCC_1. Найти радиус шара.

Вариант 5

1. Расстояние 90 км разделено на три части, причем первая часть равна второй. Если велосипедист будет ехать первую, вторую и третью части пути со скоростями v_1, v_2, v_3 или v_1, v_3, v_2 (км/ч) соответственно, то в обоих случаях он затратит одно и то же время. Если же, двигаясь без остановки, первую часть пути он проедет со скоростью v_1, а вторую — с ускорением $\frac{v_1}{2}$ (км/ч^2), то на это ему понадобится 5 часов. Найти v_1 при условии $v_2 \neq v_1$.

2. Решить неравенство

$$\log_{|x|} \frac{|x+3|-|x|}{2-x} > 1.$$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = \sqrt{\operatorname{tg}^4 x - 7\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x + 8}$.

4. Найти радиус окружности, описанной вокруг равнобедренной трапеции с острым углом, вдвое меньшим тупого, если в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

5. Квадрат $ABCD$ является основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1. Точки M и N — середины SA и SC соответственно; точка K лежит на диагонали AC основания, причем $4CK = AC$. Найти радиус шара, касающегося лучей AD, AB, NM и NK.

Вариант 6

1. Расстояние 24 км разделено на три части, причем первая часть в два раза больше третьей. Турист затратит на весь путь одно и то же время, если первую, вторую и третью части пути он будет идти со скоростями v_1, v_2, v_3 или v_1, v_3, v_2 (км/ч) соответственно, при этом $v_2 \neq v_3$. Определить v_2, если известно, что туристу понадобится 3,5 часа, чтобы, двигаясь без остановки, пройти вторую часть пути со скоростью v_2 и третью — с ускорением $\frac{4v_2}{9}$ (км/ч^2).

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2-x-1}(|x+3|-|x|) > \log_{x^2-x-1}\sqrt{x^2-1}.$$

3. Решить уравнение

$$2ab\operatorname{ctg} 3x \sin 2x + 2(a^2+b^2)\frac{\sin 2x}{1+2\cos 2x} = (a^2+b^2)\frac{\operatorname{ctg} x}{4\cos^2 x - 1}.$$

4. В правильный треугольник со стороной длины a вписана окружность, через центр которой проходит другая окружность, касающаяся одной из сторон треугольника в его вершине. Найти длину общей хорды этих окружностей.

5. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка N — середина AC; точка M лежит на ребре BS, причем $SM = \frac{2}{3}$. Прямая l проходит через точку M и параллельна прямой SN. Шар касается лучей SA, SB, SC и прямой l. Найти расстояние от центра шара до вершины S.

1980

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x + 2\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{5}-4}{2}\sin x\right).$$

2. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Точка D лежит на дуге BC, а хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найти длину стороны BC, если угол BMD равен $120°$, $AB = R$, $BM : MC = 2 : 3$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{x+1} + 5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, $25^x + 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину BC. Найти радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx + y = ac^2, \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos\Big(2\sin x + (1+\sqrt{3})\cos x\Big) = \sin\Big((1-\sqrt{3})\cos x\Big).$$

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Прямые BC и AD пересекаются в точке K, углы CAD и ADB равны соответственно $120°$ и $30°$. Найти длину отрезка KC, если $KB : BC = 3 : 1$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $2^x - a$, -2^{-x-1}, $4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. В тетраэдре $ABCD$ ребра AC, BC, DC попарно перпендикулярны. Точка M лежит в плоскости ABC и одинаково удалена от ребер AB, BC и CD. Точка N лежит в плоскости BCD и одинаково удалена от тех же ребер. Найти длину отрезка MN, если $BC = CD = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + by = c^2, \\ bx + 2y = ac - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\cos\Big(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{4+\sqrt{2}}{2}\cos x\Big) = \sin\Big(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{4-\sqrt{2}}{2}\cos x\Big).$$

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Диагонали AC и BD пересекаются в точке L. Найти длину отрезка AC, если углы CAD и BDA равны $120°$ и $30°$ соответственно, $BL : LD = 3 : 2$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x} - a$, $-\frac{9}{2}\cdot 5^{1-x}$, $25^x + 81\cdot 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка O — центр шара радиуса $\sqrt{2}$, касающегося лучей AS, AC, AB. Найти длину отрезка OK, где K — середина SC.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\sin x + 2\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\sin x - \cos x\right).$$

2. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC. Через точки M, N, B, C проходит окружность радиуса $\sqrt{3}$. Найти длину отрезка AM, если $BC = 3$, $AM : MB = 2 : 1$, угол BAC равен $30°$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $3^{2+x} + 3^{2-x}$, $\frac{a}{2}$, $9^{1+x} + 9^{1-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1. Точка M лежит на основании $ABCD$ пирамиды и одинаково удалена от ребер AS, DS, причем $MS = MC$. Точка N лежит на грани SBC, одинаково удалена от тех же ребер, причем $NS = NC$. Найти площадь треугольника BMN.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} x + by = ac^2 + \frac{c}{2}, \\ (b+1)x + 2y = c - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin x + \frac{3}{4}\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x\right).$$

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R, центр которой лежит внутри этого четырехугольника. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти длину отрезка BM, если $AB = R$, $CD = R\sqrt{2}$, $AM : MC = 2 : 1$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x} - a$, $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3 \cdot 2^{2x+4}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна $\sqrt{2}$; MN — средняя линия треугольника BSC, параллельная BC. Шар касается лучей AS, AB, AC и отрезка MN, а его центр лежит вне тетраэдра. Найти радиус шара.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} x + 2by = a, \\ bx + (1-b)y = c^2 + ac \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\sin x + \frac{5}{2}\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right).$$

2. Вокруг четырехугольника $ABCD$ описана окружность радиуса 2, центр которой лежит внутри этого четырехугольника. Прямые BC и AD пересекаются в точке L. Найти длину отрезка CL, если $AB = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $BL : BC = 3 : 1$.

3. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $2^{2x+1} + 4^{-x}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 4^{2x} + 2^{-4x-3}$ образуют арифметическую прогрессию?

4. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка O — центр шара, касающегося ребер AS, BS, BC. Найти расстояние от точки O до плоскости ABC, если известно, что точка O лежит внутри тетраэдра и $AO = \sqrt{13}/6$.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} x + by = a, \\ bx + (b+2)y = c^2 + ac \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1981

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 5, \\ 4^x + 3^{2y} = 2^{x+2} \cdot 3^y - 11. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $3 + 2\cos^2 x = 8\sin x + 3\cos 2x$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AB равна 2, $\angle A = 60°$. Диагональ BD трапеции, биссектриса угла A и высота CK, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Найти длину основания CD.

4. Касательная к графику функции $y = -x^2 + 4x - 2$ пересекает ось абсцисс в точке A, а ось ординат — в точке B, причем $A \neq B$. Известно, что отрезок BO в два раза длиннее отрезка AO, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB.

4C*. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство

$$\log_8 x(x-4) + \log_8 \frac{x-2}{x-4} \geqslant a.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпен-

*Задача 4C предлагалась вместо задачи 4 тем абитуриентам, которые окончили школу до 1977 года и сдавали экзамены по «старой» программе.

дикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Найти угол между плоскостями α и β.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 4^y = 11, \\ 9^x + 2^{4y} = 3^{x+1} \cdot 4^y + 31. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $5\cos 2x + 6\sin^2 x = 12\cos x - 5$.

3. В трапеции $ABCD$ $AB = 2$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Известно, что биссектрисы углов A и D трапеции и высота CM, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Найти площадь трапеции.

4. Касательная к графику функции $y = 3x^2 - 9x + 2$ пересекает ось абсцисс в точке A, ось ординат — в точке B, причем $A \neq B$. Известно, что длина отрезка BO в три раза больше длины отрезка AO, где точка O — начало координат. Определить площадь треугольника AOB.

4С. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство

$$\log_2(x-1)(x-3) + \log_2\frac{x-2}{x-3} \leqslant a.$$

5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, длина боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 равна $\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым AC_1 и A_1B. Определить угол между прямой BC_1 и плоскостью α.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7^x + 2^y = 9, \\ 7^{2x} + 4^y = 2^y \cdot 7^{x+1} - 45. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $5 + 4\cos^2 x = 10\sin x + 4\cos 2x$.

3. Длина основания AB трапеции $ABCD$ равна 2, $\angle A = 90^\circ$, $AD = 1$. Пусть M — точка пересечения диагонали BD и высоты

CK, опущенной из вершины C на основание AB. Определить площадь трапеции, если известно, что $\angle MAB = 60^\circ$.

4. Касательная к графику функции $y = \frac{x^2}{3} + x - 1$ пересекает ось абсцисс в точке A, ось ординат — в точке B. Известно, что длина отрезка AO в 3 раза больше длины отрезка BO, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB.

4С. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство

$$\log_2(x+1)(x-3) + \log_2 \frac{x-1}{x+1} \geqslant a.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 2$. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, ее высота равна 3. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и BD. Определить угол между плоскостями α и β.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^x + 3^y = 8, \\ 25^x + 9^y = 5^x \cdot 3^{y+1} - 11. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $\sin^2 x - 4\cos 2x = 4(1 + 3\cos x)$.

3. Длина основания AB равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 3, $\angle A = 60^\circ$. Диагональ AC трапеции и биссектрисы углов B и D пересекаются в одной точке M. Определить длину основания CD.

4. Касательная к графику функции $y = -\frac{x^2}{4} - x + 1$ пересекает ось абсцисс в точке A, ось ординат — в точке B. Известно, что длина отрезка AO в два раза больше длины отрезка BO, где O — начало координат. Определить площадь треугольника AOB.

4С. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство

$$\log_8(x^2 - 4) + \log_8 \frac{x}{x+2} \leqslant a.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SC и AB, точка K — середина ребра BC. Определить угол между прямой AK и плоскостью α.

1982

Вариант 1

1. Решить уравнение $14x - 2x^2 = |x - 7|$.

2. Решить уравнение $4 + 2\cos^2 x = 7\sin 2x$. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Определить площадь ромба.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(a-1)x+3a+1 = 0$ удовлетворяет неравенству $x < -1$.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Точка M — середина ребра CD, N — середина ребра BC, точка P принадлежит ребру AB, причем $AP = 3BP$. Сфера касается плоскостей ABC и ACD, а точки ее касания с плоскостями лежат соответственно на прямых PN и AM. Найти радиус сферы.

Вариант 2

1. Решить уравнение $3x^2 - 15x = |5 - x|$.

2. Решить уравнение $6 + 5\sin 2x = 10\cos^2 x$. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

3. Основания AB и CD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 2 и 1, точка M — середина AB. Окружность, описанная около треугольника CDM, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник BCM. Определить площадь трапеции.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(a-2)x+4-3a = 0$ удовлетворяет неравенству $x > 1$.

5. Параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$, $AB = 3$, $AD = 1$, является основанием параллелепипеда. Боковые ребра AA_1,

BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны $\sqrt{3}$. Точка M выбрана на ребре CD так, что $DM = 2CM$. Сфера касается плоскостей $ABCD$ и AA_1D_1D, причем точки ее касания с плоскостями лежат соответственно на прямых BM и AD_1. Найти радиус сферы.

Вариант 3

1. Решить уравнение $2x - \frac{x^2}{2} = |4 - x|$.

2. Решить уравнение $\sin 2x + 16\cos^2 x = 4$. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведена высота AD. Окружность радиуса R вписана в треугольник ADB, ее центр совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Определить площадь треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(a-3)x+9-2a = 0$ удовлетворяет неравенству $x < 2$.

5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют длину 3, точка N принадлежит ребру BC, $CN = \sqrt{3}$, AM — высота боковой грани SAB. Сфера касается плоскостей $ABCD$ и SAB, причем точки касания лежат соответственно на прямых DN и AM. Определить радиус сферы.

Вариант 4

1. Решить уравнение $2x^2 + 6x = |x + 3|$.

2. Решить уравнение $6 + 11\sin 2x = 14\cos^2 x$. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. Сторона AB правильного треугольника ABC равна 1 и является катетом прямоугольного треугольника ABD, точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Окружность, описанная около треугольника ABC, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Найти расстояние между точками C и D.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 + 2(a - 4)x + 16 - 5a = 0$ удовлетворяет неравенству $x > 3$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 сторона основания ABC равна 2, высота призмы равна 4. Точка M — середина ребра AB, точка N — середина ребра AA_1. Точки P и Q выбраны на ребрах A_1C_1 и B_1B так, что $C_1P = 2PA_1$, $BQ = 3QB_1$. Сфера касается плоскостей ACC_1A_1 и ABB_1A_1, причем точки касания лежат соответственно на прямых NP и MQ. Определить радиус сферы.

1983

Вариант 1

1. Решить уравнение $1 + 2\sqrt{2}\,\sin\Bigl(x + \frac{\pi}{4}\Bigr) = 2\sin x$.

2. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_2(x-100) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{|x-101|}{105-x} + \log_2 \frac{|x-103|(105-x)}{x-100} > a$$

содержится единственное целое число.

3. Расстояние между центрами окружностей O_1 и O_2 равно $5r$, их радиусы равны соответственно r и $7r$. Хорда окружности O_2 касается окружности O_1 и делится точкой касания в отношении $1:6$. Найти длину этой хорды.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Плоскость α перпендикулярна прямой A_1C_1, плоскость β параллельна прямой CD_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

5. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 18 и $B \geqslant 222\,222\,222$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы.)

Вариант 2

1. Решить уравнение $1 - 2\sin x = \cos 2x$.

2. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2|x-150|}{x-146} - \log_2(151-x) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{|x-148|(x-146)}{151-x} < a$$

содержится единственное целое число.

3. Расстояние между центрами окружностей O_1 и O_2 равно $10r$, а их радиусы равны соответственно $5r$ и $6r$. Прямая, пересекающая окружность O_1 в точках A и B, касается окружности O_2 в точке C, причем $AB = 2BC$. Найти длину хорды AB.

4. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ имеют равную длину. Плоскость α перпендикулярна прямой AS, плоскость β параллельна прямой CD. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

5. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и $B \geqslant 44\,444\,444$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Вариант 3

1. Решить уравнение $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2\sin x$.

2. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(200-x) - \log_3 \frac{|x-199|}{x-195} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{|x-197|(x-195)}{3(200-x)} < a$$

содержится единственное целое число.

3. Расстояние между центрами окружностей O_1 и O_2 равно $7r$, их радиусы равны соответственно r и $5r$. Прямая пересекает окружность O_2 в точках A и B и касается окружности O_1 в точке C, причем $AB = 5BC$. Найти длину хорды AB.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 все ребра имеют равную длину, все плоские углы при вершине A равны 60°. Плоскость α перпендикулярна прямой A_1B_1, плоскость β параллельна прямой AA_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

5. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 24 и $B \geqslant 666\,666\,666$. Найти наибольшее и наименьшее из чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Вариант 4

1. Решить уравнение $1 + 2\sin x = \cos 2x$.

2. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_3 \frac{|x-500|}{504-x} - \log_{\frac{1}{3}}(x-499) + \log_3 \frac{|x-502|(504-x)}{x-499} > a$$

содержится единственное целое число.

3. Расстояние между центрами равных окружностей радиуса r равно $3r$. Прямая пересекает одну из окружностей в точках A и B и касается другой окружности в точке C, причем $AB = BC$. Найти длину хорды AB.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Все ребра призмы имеют одинаковую длину. Плоскость α перпендикулярна прямой BC_1, плоскость β параллельна прямой AA_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

5. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 36 и $B \geqslant 77\,777\,777$. Найти наибольшее и наименьшее из чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \frac{9 - 14\cos x}{8} = 2.$$

2. При каких значениях параметра a функция

$$y = \frac{1}{ax^2 + 4ax + 7}$$

определена для всех действительных значений x?

3. Косинус угла между боковыми сторонами AD и BC трапеции $ABCD$ равен $\frac{4}{5}$. В трапецию вписана окружность, причем сторона AD делится точкой касания на отрезки длины 1 и 4. Определить длину боковой стороны BC трапеции.

4. Поезд проходит расстояние от A до B по расписанию за некоторое время. Если увеличить скорость поезда на 8 км/ч, то он придет в B на 2 часа раньше; если уменьшить скорость на 3 км/ч, то поезд придет в B на час позже, чем по расписанию. Найти исходную скорость поезда и расстояние между A и B.

5. Пусть M — множество всех шестнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняются два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 1. Доказать, что все числа из множества M четные и множество M содержит более чем 10^6 чисел.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \frac{5 - 6\sin x}{8} = 2.$$

2. При каких значениях параметра a функция

$$y = \frac{1}{x^2 + 4ax + 2}$$

определена для всех действительных значений x?

3. Сумма внутренних углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна $135°$. В трапецию вписана окружность, причем боковая сторона AB делится точкой касания на отрезки длины $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Определить длину боковой стороны CD трапеции.

4. Бригада должна выполнить работу по плану за несколько дней. Если бригада будет выпускать каждый день на 10 деталей больше, чем по плану, то она выполнит работу на 5 дней раньше. Если бригада будет выпускать ежедневно на 5 деталей меньше, то она закончит работу на 3 дня позже, чем планировалось. Сколько всего деталей должна была изготовить бригада и сколько деталей планировалось выпускать ежедневно?

5. Пусть P — множество всех десятизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняются два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 3. Доказать, что все числа из множества P четные и множество P содержит более чем 10^3 чисел.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \frac{7 - 10\cos x}{8} = 2.$$

2. При каких значениях параметра a функция

$$y = \frac{2}{a^2x^2 - 4x + 3}$$

определена для всех действительных значений x?

3. Угол между боковыми сторонами AB и CD трапеции $ABCD$ равен $30°$. В трапецию вписана окружность, причем сторона AB делится точкой касания на отрезки длины $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$. Определить длину боковой стороны CD трапеции.

4. Бассейн наполняется водой за некоторое время. Если увеличить подачу воды в бассейн на 50 литров в минуту, то он наполнится на 40 минут быстрее. Если же увеличить подачу воды только на 20 литров в минуту, то он наполнится на 20 минут быстрее. Определить объем бассейна и исходное время его наполнения.

5. Пусть T — множество всех таких двенадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняются два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 9. Доказать, что все числа из множества T четные и множество T содержит более чем 10^4 чисел.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \frac{9 - 10\sin x}{16} = 2.$$

2. При каких значениях параметра a функция

$$y = \frac{4}{ax^2 - 4x + 3a}$$

определена для всех действительных значений x?

3. Угол между боковыми сторонами AB и CD трапеции $ABCD$ равен $60°$. В трапецию вписана окружность, причем сторона AB делится точкой касания на отрезки длины 1 и 27. Определить длину боковой стороны CD трапеции.

4. Экскаватор должен вырыть котлован за определенное время. Если он будет вынимать в час на $200\,\text{м}^3$ грунта больше, то работа будет закончена на 10 часов раньше графика. Если же экскаватор будет вынимать за каждый час на $100\,\text{м}^3$ меньше нормы, то работа будет выполнена на 10 часов позже, чем положено по графику. Найти объем котлована и часовую норму выработки экскаватора.

5. Пусть S — множество всех таких четырнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняются два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 5. Доказать, что все числа из множества S четные и множество S содержит более чем 10^5 чисел.

1985

Вариант 1

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-(a+3)x+2a = 0$, причем $x_1 = 4x_2$. Найти a.

2. Решить уравнение $\sin 2x + \cos 6x = 1 - 2\cos^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD. Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найти длину отрезка BM.

4. Решить неравенство

$$\frac{9 - 5^{x+2}}{3 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^{x+1} + 3} \leqslant 4.$$

5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$ параллельно ребру CD проведена плоскость β, которая делит тетраэдр на две части равных объемов. Найти расстояние от вершины B до плоскости β, если ребро тетраэдра равно 1.

Вариант 2

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-(a+5)x+4a=0$, причем $x_1=3x_2$. Найти a.

2. Решить уравнение $\cos 7x - \sin 6x = 2\sin^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов BAD и CDA пересекают сторону BC в точках M и N соответственно. Найти длину стороны AB, если известно, что $AM=12$, $DN=5$.

4. Решить неравенство

$$\frac{11-5\cdot 2^{x+1}}{2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+5} \leqslant 3.$$

5. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом A в 60° и стороной 2, высота призмы равна $\sqrt{3}$. Через вершину C параллельно диагонали BD основания проходит плоскость β, которая пересекает ребро AA_1 и делит призму на две части, объемы которых относятся как $1:2$. Найти расстояние от вершины A до плоскости β.

Вариант 3

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-(a+2)x+2a=0$, причем $x_1=2x_2$. Найти a.

2. Решить уравнение $\cos 5x + \sin 4x = 2\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Известно, что $AD=AB+BC=10$, $AM=8$. Найти длину отрезка DM.

4. Решить неравенство

$$\frac{9-2\cdot 7^{x+1}}{2\cdot 7^{2x}-7^{x+1}+3} \leqslant 4.$$

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота призмы равна 3. Через вершину A параллельно ребру BC проходит плоскость β, которая делит призму на две части равных объемов. Определить расстояние от вершины A_1 до плоскости β.

Вариант 4

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-(a+1)x+a=0$, причем $x_1=5x_2$. Найти a.

2. Решить уравнение $\sin 7x-\sin 2x=2\sin^2\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)-1$.

3. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD перпендикулярна боковой стороне CD и пересекает ее в точке M. Найти длину отрезка AM, если известно, что $CM=3$.

4. Решить неравенство

$$\frac{13-2\cdot 3^{x+1}}{2\cdot 3^{2x}-3^{x+2}+9}\leqslant 2.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра имеют длину 2. Через вершину S параллельно диагонали BD основания $ABCD$ проходит плоскость β, которая пересекает ребра AD и AB и делит пирамиду на части, объемы которых относятся как $1:3$. Определить расстояние от вершины A до плоскости β.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение $3\sin^2 x=\cos 2x+4\sin 2x$.

2. Числа $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$, $\log_2(3-3^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти x.

3. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD и диагоналями BD и AC. Известно, что $AC=3$, $BD=4$ и $\angle CAD=2\angle BDA$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+3y=a^2+1,\\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Точки M и N — соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра $SABC$. Ребра тетраэдра равны 1. На прямых

AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 2

1. Решить уравнение $4\cos^2 x - 5\sin 2x = 4 + \cos 2x$.

2. Числа $\log_7(6 - 2^x)$, $\log_{49}(3 \cdot 2^{x+2} - 4^x - 22)$, $\log_7(3 - 2^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти x.

3. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = 2\angle BAC$.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4ax + y = 8a - 4, \\ (1 - 5a)x + (a - 2)y = 9 - 18a \end{cases}$$

не имеет решений.

5. AC и DC_1 — диагонали смежных граней $ABCD$ и DCC_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. На прямых AC и DC_1 выбраны соответственно точки P и Q так, что прямая PQ параллельна диагонали BD_1 куба. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 3

1. Решить уравнение $2\cos 2x + 5\cos^2 x = 8\sin 2x - 6$.

2. Числа $\log_4(5 - 5^x)$, $\log_{16}(1 + 3 \cdot 5^x - 25^x)$, $\log_4(3 - 5^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти x.

3. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC и боковыми сторонами AB и CD. Известно, что $AD = 5$, $BC = 3$, $\angle ACD = 2\angle BAC$. Определить длину боковой стороны трапеции.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a - 6)y = 10a - 5a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ имеют длину 1. Точки M и N — середины ребер AB и SC соответственно. На прямых AS и BN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой CM. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 4

1. Решить уравнение $8 + 6\cos 2x = 7\sin 2x - 8\cos^2 x$.

2. Числа $\log_3(2^x - 1)$, $\log_9(2^{x+2} - 4^x - 1)$, $\log_3(2^x - 2)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти x.

3. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABM = 2\angle MBC$. Определить площадь треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3ax + 2y = 6a - 12, \\ \left(\frac{5}{2}\,a + 2\right)x + (a-2)y = 14 - 7a \end{cases}$$

не имеет решений.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основанием ABC длины всех ребер равны 1. На прямых A_1B и B_1C выбраны соответственно точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой AC_1. Найти длину отрезка PQ.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{3 - 5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 6\cos 2x}{5} = x - \frac{\pi}{3}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2 \frac{4}{x}\right| - 3} > \frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{2}\right| - 1}.$$

3. Из точки A проведены к окружности радиуса R касательная AM и секущая, которая пересекает окружность в точках K и L. Известно, что L — середина отрезка AK, $\angle AMK = 60^\circ$. Найти площадь треугольника AMK.

4. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leqslant y, \\ 3x + y - (2a+4) \leqslant 0. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $[-2, -1]$ оси Ox.

5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равно 1, точка M — середина AD. Через середину N отрезка B_1M перпендикулярно прямой B_1M проведена плоскость α. Найти расстояние от центра куба до плоскости α.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\arccos \frac{5 + 3\cos 2x - 7\sin x}{7\sqrt{2}} = x + \frac{\pi}{4}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 x| - 1} \geqslant \frac{1}{|\log_2 2x| - 2}.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана BD, $\angle ABC = 135^\circ$. Окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AB, ее радиус равен R. Найти площадь треугольника ABC.

4. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \leqslant y, \\ 2x + y - a \leqslant 0. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $[-1, 0]$ оси Ox.

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Через середину M отрезка AB_1 перпендикулярно прямой AB_1 проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\arccos\frac{8\cos 2x - 6\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1}{6} = x+\tfrac{\pi}{3}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_4 2x|-1} > \frac{1}{|\log_2\sqrt{x}|-1}.$$

3. Из точки A к окружности радиуса R проведены касательная AM и секущая, которая пересекает окружность в точках K и L. Известно, что L — середина отрезка AK, $\angle AMK = 45^\circ$. Найти площадь треугольника AMK.

4. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 8x^2+4(a+2)x-4 \leqslant y, \\ 2x+3y+(a+2) \geqslant 0. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ оси Ox.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, $SA=6$. Точки K и M — середины ребер AB и SC соответственно, через середину L отрезка MK проведена плоскость α, перпендикулярная прямой MK. Найти расстояние от середины N ребра AC до плоскости α.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\arcsin\frac{10\cos x - 8\sin^2 x - 3}{10\sqrt{2}} = x+\tfrac{\pi}{4}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_4 4x^2|-1} \geqslant \frac{1}{|\log_2 4x|-2}.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана BD, $\angle ABC = 120^\circ$. Окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AB, ее радиус равен R. Найти площадь треугольника ABC.

4. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 + 4(a-1)x - 2 \leqslant y, \\ x + 2y + (a+2) \geqslant 0. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $[\,0,\,1\,]$ оси Ox.

5. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, $SA = 4$. Точки M и K — середины ребер AB и SC соответственно. Через середину L отрезка MK проведена плоскость α, перпендикулярная прямой MK. Найти расстояние от центра основания $ABCD$ до плоскости α.

1988

Вариант 1.1*

1. На плоскости найти точку, симметричную точке с координатами (2; 4) относительно прямой, заданной уравнением $2x + y = 3$.

2. Решить уравнение $\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2 + 46x + 48) = 0$.

3. Окружность O_1 радиуса 3 касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 1 касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найти угол ABC.

4. Решить уравнение

$$\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cos x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 2$. Известно, что $SB = 4$, $SA = 3$, $SC = x$, $SD = y$. Определить, при каких значениях x и y объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

Вариант 1.2

1. На плоскости найти точку, симметричную точке с координатами (6; 3) относительно прямой, заданной уравнением $x + y = 5$.

*В 1988 году предлагались две группы вариантов (1.1–1.4 и 2.1–2.4) на двух экзаменационных потоках.

2. Решить уравнение $\log_{x+2}\log_2\log_{x+1}(11x^2+12x)=0$.

3. Окружность O_1 радиуса 2 касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 5 касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найти угол ABC.

4. Решить уравнение

$$\arcsin(1+2\cos x)+\arccos(1+3\operatorname{tg} x)=\frac{\pi}{2}.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 4 и острым углом A в 60°. Известно, что $SA=2$, $SB=4$, $SC=x$, $SD=y$. Определить, при каких значениях x и y объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

Вариант 1.3

1. На плоскости найти точку, симметричную точке с координатами (5; 2) относительно прямой, заданной уравнением $3x+2y=6$.

2. Решить уравнение $\log_{x+1}\log_3\log_{x+2}(x^3+10x^2+8x-1)=0$.

3. Окружность O_1 радиуса 2 касается стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 3 касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найти угол ABC.

4. Решить уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg} x\right)+\arccos\left(\frac{6}{\pi}+\operatorname{tg} x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=3$, $AC=\frac{4}{3}\sqrt{2}$. Известно, что $SA=3$, $SB=2$, $SC=x$. Определить, при каком значении x объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

Вариант 1.4

1. На плоскости найти точку, симметричную точке с координатами (4; 1) относительно прямой, заданной уравнением $x+2y=1$.

2. Решить уравнение $\log_{x+4}\log_3\log_{x+3}(x^2+7x+12)=0$.

3. Окружность O_1 радиуса 4 касается стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 1 касается сторон угла ABC и окружности O_1, центр O_2 лежит вне O_1. Найти угол ABC.

4. Решить уравнение

$$\arcsin\left(1+\frac{3}{2}\sin x\right)+\arccos\left(1+4\operatorname{ctg} x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD равны 1, $AD = BD = AC = 2$, $BC = x$. Определить, при каком значении x объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

Вариант 2.1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7^{2x}+4^{2y+1}=85, \\ 7^{x}+4^{y}=5. \end{cases}$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-\frac{4}{5}\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{6},\, 2\pi\right]$.

3. Площадь тупоугольного треугольника ABC равна $24\sqrt{5}$, его медианы AN и CM пересекаются под углом $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$, $AN - CM = 3$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целые корни.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Точки K и L — середины ребер AB и B_1C_1, точки M и N — середины ребер A_1B_1 и AC соответственно. Через прямые KL и MN проведены параллельные плоскости. Найти объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 2.2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{2x}+3^{2y+1}=36, \\ 5^{x}-3^{y}=4. \end{cases}$$

2. Найти все корни уравнения
$$\frac{5\sin 2x - 7\cos x - 14}{\sin\frac{x}{2}} = -40\cos\frac{x}{2},$$
принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{4},\, 2\pi\right]$.

3. Площадь тупоугольного треугольника ABC равна $9\sqrt{7}$, медианы AN и CM пересекаются под углом $\alpha = \arccos\frac{3}{4}$, $AN : CM = 3 : 2$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 = 0$ имеет только целые корни.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 заданы точка M — середина ребра AB и точка N — середина ребра B_1C_1. Через прямые B_1M и BN проведены параллельные плоскости. Найти объем части куба, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 2.3

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2x+1} + 5^{2y+1} = 288, \\ 3^x + 5^y = 8. \end{cases}$$

2. Найти все корни уравнения
$$\frac{5\sin 2x + 15\sin x - 4}{\cos\frac{x}{2}} = 16\cos\frac{x}{2},$$
принадлежащие отрезку $\left[\frac{2\pi}{3},\, 2\pi\right]$.

3. Площадь остроугольного треугольника ABC равна $24\sqrt{2}$, его медианы AN и CM пересекаются под углом $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$, $AN + CM = 15$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $2ax^2 + 5x + 4a^2 + 5 = 0$ имеет только целые корни.

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = BC = 1$, все боковые ребра равны 2. Точка K — середина ребра AC, точка L — середина ребра SB. Через прямые SK и CL проведены параллельные плоскости. Найти объем части пирамиды, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 2.4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2x} + 2^{2y+3} = 15, \\ 2 \cdot 3^x + 2^{y+1} = 3. \end{cases}$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{4\cos^2 x - 3}{\sin \frac{x}{2}} = -8\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right]$.

3. Площадь остроугольного треугольника равна 12, его медианы AN и CM имеют длину 6 и $3\sqrt{2}$ соответственно. Найти стороны треугольника ABC.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 2a^2x - 3 = 0$ имеет только целые корни.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ все ребра равны 2, точки P и Q выбраны на ребре AC так, что $AP = PQ = QC$, точки R и S принадлежат ребру BD, причем $DR = RS = SB$. Через прямые PS и QR проведены параллельные плоскости. Найти объем части тетраэдра, содержащейся между этими плоскостями.

1989

Вариант 1

1. Из пункта А в пункт Б выехал скорый поезд. Одновременно навстречу ему из Б в А выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт Б скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в А. Сколько времени находился в пути каждый поезд?

2. Решить уравнение

$$2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3\,\mathrm{tg}\,2x + 5.$$

3. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке

P, биссектриса угла ADC — в точке Q. Известно, что отрезки EQ, PQ и PF равны. Найти площадь трапеции.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|a-2x|+1=|x+3|$ имеет единственное решение.

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол в 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

Вариант 2

1. Два землекопа, работая вместе, выкопали канаву за 12 часов. Если бы сначала один из землекопов выкопал полканавы, а затем другой — оставшуюся половину, то на всю работу им потребовалось бы 25 часов. За сколько часов выкопает канаву каждый из землекопов отдельно?

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2.$$

3. Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 4. Перпендикуляр AP, опущенный из вершины A на сторону CD, делит среднюю линию трапеции пополам. Найти площадь трапеции.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x-a|-|2x+2|=3$ имеет единственное решение.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина также равна 1. Через прямую SB проведена плоскость, которая пересекает ребро AD и составляет острый угол 60° с прямой AC. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD?

Вариант 3

1. Пароход вышел из пункта А в пункт Б, расположенный ниже по течению реки, и, прибыв в пункт Б, сразу же вернулся обратно, затратив на весь путь 5 часов. Сколько времени идет пароход от Б до А, если плоты сплавляются от А до Б за 12 часов?

2. Решить уравнение

$$5\operatorname{tg}\Bigl(x-\frac{\pi}{4}\Bigr)+3\operatorname{tg}2x+2=0.$$

3. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно 4 и 6. Точка E — середина AB, точка F — середина BC. Биссектриса угла BAC пересекает среднюю линию EF в точке P, биссектриса угла ACB — в точке Q, причем $EQ = PQ = PF$. Найти площадь треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x+2|-|2x-a|=4$ имеет единственное решение.

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 1$. Боковые ребра AA', BB', CC' призмы также равны 1. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, которая пересекает ребро $A'C'$ и образует с ним угол в $60°$. В каком отношении эта плоскость делит ребро $A'C'$?

Вариант 4

1. Половину пути от дома до стадиона спортсмен преодолел шагом, а вторую половину — бегом, затратив на весь путь 16 минут. Со стадиона домой спортсмен возвратился за 12 минут, причем половину этого времени он шел, а вторую половину — бежал. Сколько времени понадобится спортсмену, чтобы шагом дойти от дома до стадиона?

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\Bigl(x+\frac{\pi}{4}\Bigr)\operatorname{tg}2x=2.$$

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12, точки M и N — середины равных сторон AB и BC соответственно. Высота AH пересекает среднюю линию MN в точке E, причем $NE = 2ME$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x+a|+|2x-3|=3$ имеет единственное решение.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 1$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Через прямую AC проведена плоскость, которая пересекает ребро SB и образует с ним угол в $60°$. В каком отношении эта плоскость делит ребро SB?

1990

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 112, \\ 2x - 7y = 1. \end{cases}$$

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$6\sin^2 x = 5 - 13\cos x + 3\cos 2x.$$

3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 14$, $AC = 15$, $BC = 13$ через основание высоты CH проводятся прямые, параллельные прямым AC и BC, которые пересекают соответственно стороны BC и AC треугольника в точках M и N. Прямая MN пересекает продолжение стороны AB в точке D. Найти длину отрезка BD.

4. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{(x+1)\cdot\log_3(x^2+x+1/2)} \geqslant 0.$$

5. Ребро куба $ABCDA'B'D'C'$ равно $2a$. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых BC' и AB', пересекается с прямой CD' в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54, \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$$

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$4\cos^2 x = 2 - 23\sin x - 3\cos 2x.$$

3. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая l, не пересекающая стороны BC и CD. Прямые BC, CD и BD пересекают прямую l соответственно в точках M, N и K. Определить сторону квадрата, если известно, что $MN = 3$, $NK = 1$.

4. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{(x+1)\cdot\log_5(x^2-5x+13/2)} \geqslant 0.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2a$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина $4a$. Точки M и N — середины боковых ребер SB и SC, точка K — середина ребра AB. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых MN и CK, пересекается с прямой SA в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 135, \\ 3x - 5y = 4. \end{cases}$$

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$2(1+\sin^2 x) = 2\cos 2x - 5\cos x.$$

3. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ является биссектрисой острого угла A при основании AD. Перпендикуляр, проведенный к диагонали AC через ее середину, пересекает продолжение боковой стороны CD в точке E. Найти длину отрезка DE, если известно, что $AB = 25$, $AC = 40$.

4. Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x\cdot\log_2(x^2+x+3/4)} \geqslant 0.$$

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB' и CC' все ребра имеют длину a, точки M и N — середины ребер $A'B'$ и $B'C'$. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых AA' и MN, пересекается с прямой BC в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 147, \\ 7x + 3y = 13. \end{cases}$$

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$2\cos^2 x = 1 - 7\sin x - 2\cos 2x.$$

3. Через вершину D ромба $ABCD$ проведена прямая l, не пересекающая стороны AB и BC. Прямые AB, BC и AC пересекают прямую l в точках P, Q и R соответственно. Найти длину отрезка QR, если известно, что $PD = 6$, $DQ = 4$.

4. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{(x+2)\cdot\log_4(x^2+3x+5/2)} \geqslant 0.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ все ребра имеют длину $2a$. Точки M и N — середины ребер SB и SC. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых AB и MN, пересекается с прямой SD в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

1991

Вариант 1

1. Теплоход плывет по течению Оби вдвое медленнее, чем скутер против течения, а по течению скутер плывет в четыре раза быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз в стоячей воде скорость скутера больше скорости теплохода?

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3\sqrt{5}$, $AC = 6$, $BC = 3$ проведена биссектриса CH. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CH и BC в точках P, Q и R соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников PHQ и CQR.

3. Решить неравенство

$$\log_{3-\sqrt{5}}(x+9)^2 \leqslant \left[\log_{3-\sqrt{5}}(\sqrt{5}-2)\right]\log_{\sqrt{5}-2}\left[(x+9)(x^2-4x+3)\right].$$

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{1-a}\Big(2 - \cos x + \sin\tfrac{x}{2}\Big) = 2$$

имеет решение.

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Точки P и Q — середины ребер SA и SB соответственно. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые CP и AQ перпендикулярны.

Вариант 2

1. Возвращаясь с рыбалки, Вася отдал Пете несколько рыб, чтобы уравнять улов. Если бы, наоборот, Петя отдал Васе столько же рыб, то у Васи оказалось бы в пять раз больше рыб, чем у Пети. Во сколько раз улов Васи больше улова Пети?

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$ проведена медиана CM. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CM, BC в точках P, Q, R соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников PMQ и CQR.

3. Решить неравенство

$$\log_{2-\sqrt{3}}\Big[(x-11)(x^2-4x-5)\Big] \geqslant \Big[\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)\Big]\log_{\sqrt{2}-1}(x-11)^2.$$

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{a-2}\Big(\tfrac{17}{8} + \cos x - \sin\tfrac{x}{2}\Big) = 3$$

имеет решение.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найти объем призмы, если известно, что прямые AB' и CA' перпендикулярны.

Вариант 3

1. Из первой бочки перелили во вторую некоторую порцию воды, и в первой бочке осталось втрое больше воды, чем стало во второй. Затем еще раз из первой бочки перелили во вторую такую же порцию воды, после чего во второй бочке стало вдвое меньше воды, чем осталось в первой бочке. Во сколько раз первоначально было больше воды в первой бочке, чем во второй?

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{5}$ проведена высота CH. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CH и BC в точках M, N и K соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников MHN и CNK.

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x+20)^2 \leqslant \Big[\log_{\sqrt{3}-1}(2-\sqrt{3})\Big] \log_{2-\sqrt{3}}\Big[(x+20)(x^2-2x-8)\Big].$$

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{a-3}\left(5 - 3\cos x - 6\sin\frac{x}{2}\right) = 2$$

имеет решение.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Точка P — середина ребра SB. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и SC перпендикулярны.

Вариант 4

1. От двух бревен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того, как от них еще раз отпилили по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

2. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 2 проведена высота BH. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AC, BH и BC в точках M, N, K соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников MNH и BNK.

3. Решить неравенство

$$\log_{4-\sqrt{10}}(x+16)^2 \leqslant \left[\log_{4-\sqrt{10}}(\sqrt{10}-3)\right] \log_{\sqrt{10}-3}\left[(x+16)(x^2-6x+8)\right].$$

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{a+1}\left(\frac{25}{8} + \cos x - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 3$$

имеет решение.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2. Точки P и Q — середины ребер SB и SD соответственно. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и CQ перпендикулярны.

1992

Вариант 1

1. В пачке письменных работ абитуриентов — не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку «отлично». Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой «отлично». Сколько работ было в пачке?

2. Решить уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0.$$

3. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4. Через вершину D проведена прямая l, пересекающая сторону BC и проходящая на расстоянии 2 от середины стороны AB. В каком отношении прямая l делит сторону BC?

4. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x - 2\alpha + 2| = y, \\ |y - \alpha + 2| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром длины 1. Прямая l лежит в плоскости ACD и проходит через точку C перпендикулярно AC. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AB и прямой l.

Вариант 2

1. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них — белые. Если отложить 3 самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(1 + \cos 2x + \cos 4x) = 0.$$

3. В ромбе $ABCD$ острый угол при вершине A равен $60°$, а его сторона равна 7. Через вершину B проведена прямая l, пересекающая сторону CD и проходящая на расстоянии $\sqrt{21}$ от середины стороны AD. В каком отношении прямая l делит сторону CD?

4. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|x + \frac{\alpha}{2} + 1\right| = y, \\ |y + 3\alpha - 3| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC длины всех ребер равны 1. Точки M и N — середины ребер $A'C'$ и CC' соответственно. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней $AA'B'B$, ABC и прямой MN.

Вариант 3

1. В урне лежали белые и черные шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу черных как 3 : 2. После того, как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных равно 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

2. Решить уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(\cos 2x - \cos 4x) = 0.$$

3. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 14. Через центр треугольника проведена прямая l, пересекающая сторону BC и проходящая на расстоянии $\sqrt{7}$ от середины стороны AB. В каком отношении прямая l делит сторону BC?

4. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|x - \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{3}\right| = y, \\ |y - 2\alpha - 2| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\sqrt{10}$. Точка M — середина SB, точка N лежит на ребре AB, причем $4BN = AB$. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AD и прямой MN.

Вариант 4

1. Рыбаки поймали n рыб, из них 48% окуней. Пять рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали и оказалось, что среди оставшихся 50% составляют окуни. Сколько рыб поймали рыбаки, если известно, что $30 \leqslant n \leqslant 100$?

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\cos 2x - \cos 4x) = 0.$$

3. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 28. Через середину BC проведена прямая l, пересекающая сторону AB и проходящая на расстоянии $5\sqrt{3}$ от середины AC. В каком отношении прямая l делит сторону AB?

4. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x + \alpha + 1| = y, \\ \left|y + \frac{\alpha}{3} + 1\right| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC, BC и CD попарно перпендикулярны, их длины равны 1. Точка M — середина BD, точка N лежит на AB, причем $3BN = AN$. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AC и прямой MN.

1993

Вариант 1

1. Найти $\cos 2x$, если $\sin x - \cos 2x = 1$.

2. Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, точка C — вершина параболы. Известно, что угол между касательными к этой параболе в точках A и B равен $90°$. Найти площадь треугольника ABC.

3. Через вершину A некоторого угла, равного $60°$, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису — в точке C. Найти сумму длин отрезков AB и AD, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 1.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+1}\left(2x+7+\sqrt{x+4}\right) + \log_{\sqrt{2}-1}\left(x+6+2\sqrt{x+4}\right) \leqslant 0.$$

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$. Точка N лежит на луче AC, $AN = 6$. Шар радиуса 4 касается лучей BA и BC, а его центр равноудален от точек A и N. Найти расстояние от центра шара до точки A.

Вариант 2

1. Найти $\cos 2x$, если $2\cos x + 2\cos 2x = 1$.

2. Парабола $y = -\frac{1}{2}x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, точка C — вершина параболы, а площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}$. Найти угол между касательными к этой параболе в точках A и B.

3. Через вершину A некоторого угла проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису — в точке C. Найти величину угла BAD, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна $3\sqrt{3}$, а сумма длин отрезков AB и AD равна 6.

4. Решить неравенство

$$\log_{2-\sqrt{3}}\left(3x+5+\sqrt{x+3}\right) + \log_{2+\sqrt{3}}\left(2x+3+2\sqrt{x+3}\right) \geqslant 0.$$

5. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$, $BC = 4$. Точка M расположена на луче BA так, что $BM =$

$= 8$. Найти радиус шара, который касается лучей CA и CB, если расстояние от центра шара до точки B и до точки M равно 10.

Вариант 3

1. Найти $\cos 2x$, если $8\sin x - 4\cos 2x = 3$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, точка C — вершина параболы, $a > 0$. Известно, что угол между касательными к этой параболе в точках A и B равен $90°$, площадь треугольника ABC равна 32. Найти a.

3. Через вершину A некоторого угла, равного $120°$, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису — в точке C. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если сумма длин отрезков AB и AD равна 2.

4. Решить неравенство

$$\log_{3+\sqrt{8}}\left(3x + 2 - 2\sqrt{x+2}\right) + \log_{3-\sqrt{8}}\left(2x + 1 - \sqrt{x+2}\right) \leqslant 0.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 8$, гипотенуза $AB = 10$. Точка M расположена на луче AC так, что $AM = 12$. Шар радиуса 12 касается лучей AB и BC, а его центр равноудален от точек C и M. Найти расстояние от центра шара до точки C.

Вариант 4

1. Найти $\cos 2x$, если $2\cos x + \cos 2x = 1$.

2. Парабола $y = 2x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, точка C — вершина параболы, а площадь треугольника ABC равна $\frac{3\sqrt{3}}{32}$. Найти угол между между касательными к этой параболе в точках A и B.

3. Через вершину A некоторого угла проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису — в точке C. Найти длину отрезка AC, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 3, а сумма длин отрезков AB и AD равна 4.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{5}-2}\left(2x + 1 - 2\sqrt{x+1}\right) + \log_{\sqrt{5}+2}\left(x + 3 - \sqrt{x+1}\right) \geqslant 0.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = 8$, $BC = 6$. Шар радиуса 6 касается лучей CB и BA, а его центр равноудален от точек C и A. Найти расстояние от центра шара до точки A.

1994

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{3\sin^2 x + 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\sqrt{-\pi x - x^2}} = 0.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4x + a = 0$, а y_1, y_2 — корни уравнения $y^2 + 8y + b = 0$. Известно, что числа y_1, x_1, y_2, x_2 — последовательные члены арифметической прогрессии. Найти a и b.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C, середина стороны BC и точка пересечения высот расположены на одной окружности. Найти углы треугольника ABC.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2\left(\sqrt{a+2} - x\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x - a - 1) = \log_4 9$$

имеет решение?

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка Q — центр грани $A'B'C'D'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки B, D, C', Q.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{5\cos^2 x + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\sqrt{\pi x - x^2}} = 0.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 10x - a = 0$, а y_1, y_2 — корни уравнения $y^2 - 6y + b = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, y_1, y_2 — последовательные члены арифметической прогрессии. Найти a и b.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C и точка пересечения высот расположены на одной окружности радиуса 5. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 6$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3\left(\sqrt{a+4} - x\right) + \log_{\frac{1}{3}}(x - a - 1) = \log_9 4$$

имеет решение?

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка K лежит на луче CA, $CK = 2\sqrt{2}$, M и N — середины ребер $D'C'$ и $B'C'$ соответственно. Найти радиус сферы, проходящей через точки M, N, A, K.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 x + 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2}{\sqrt{x - x^2}} = 0.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$, а y_1, y_2 — корни уравнения $y^2 + by + 4 = 0$. Известно, что числа x_1, y_1, x_2, y_2 — последовательные члены геометрической прогрессии. Найти a и b.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C и точка пересечения высот лежат на окружности, которая пересекает сторону BC в точке M. Известно, что $BM = 4$, $CM = 5$. Найти основание AB.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_5\left(\sqrt{a+3} - x\right) + \log_{\frac{1}{5}}(x - a - 2) = \log_{\sqrt{5}} 2$$

имеет решение?

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка M лежит на луче CA, $CM = 2\sqrt{2}$. Точки P и Q — середины ребер $D'A'$ и $A'B'$ соответственно. Найти радиус сферы, проходящей через точки M, A, P, Q.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\frac{6\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2 x - 1}{\sqrt{-2x - \pi x^2}} = 0.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 2 = 0$, а y_1, y_2 — корни уравнения $y^2 - by + 32 = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, y_1, y_2 — последовательные члены геометрической прогрессии. Найти a и b.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C и точка пересечения высот лежат на окружности, которая пересекает сторону BC в точке M. Найти углы треугольника ABC, если $BM = 4$, $AC = 5$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_7\left(\sqrt{a+6} - x\right) + \log_{\frac{1}{7}}(x - a - 2) = \log_{49} 4$$

имеет решение?

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$; $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка P лежит на луче DB, $DP = 2\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, проходящей через точки B, P, A', C'.

1995

Вариант 1.1*

1. Решить уравнение

$$x - 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{6}{x+1}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{tg}^2 x - 1 + \cos 2x} + \sqrt{2}\ \operatorname{tg}^2 x \sin 2x = 0.$$

3. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (4-a)x + ay = 1, \\ ax + 2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x < -1$, $y > -4$.

4. Основанием прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Точка M — середина ребра AB. Найти

*В 1995 году и далее варианты 1.1–1.4 предлагались на репетиционных, а 2.1–2.4 — на общих вступительных экзаменах.

объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC' и $B'D$ образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$.

Вариант 1.2

1. Решить уравнение

$$x+\sqrt{\frac{x}{x+3}}=\frac{2}{x+3}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos^2 x\sin^2 x-\cos^6 x-\sin^6 x}+\sin 4x=0.$$

3. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x+ay=1,\\ ax+(a+2)y=-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<4$, $y<-1$.

4. В основании прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=3$, $BC=1$. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки AC' и $B'C$ образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$.

Вариант 1.3

1. Решить уравнение

$$x+1-3\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}=\frac{4}{x+2}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{ctg}^2 x-1-\cos 2x}+\sqrt{2}\,\operatorname{ctg}^2 x\sin 2x=0.$$

3. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a+6)x-ay=2,\\ ax-y=-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<2$, $y>3$.

4. В основании прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 1$. Точка M — середина ребра AB. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC' и $B'C$ образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$.

Вариант 1.4

1. Решить уравнение

$$x - 5\sqrt{\frac{x}{x+5}} = \frac{6}{x+5}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 x \sin^2 x} + \sin 4x = 0.$$

3. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax + (3a-2)y = 2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x > -4$, $y > 2$.

4. В основании прямоугольного параллелепипеда с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Точка M — середина ребра AB. Точка N — середина ребра $B'C'$. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC' и CN образуют равные углы с плоскостью $A'BCD'$.

Вариант 2.1

1. Решить уравнение

$$\log_{2x+1}\left(5 + 8x - 4x^2\right) + \log_{5-2x}\left(4x^2 + 4x + 1\right) = 4.$$

2. Решить уравнение

$$2\cos 3x + \cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}\,\cos x.$$

3. Найти все значения параметра t, при которых в интервале $(7t,\ 3t-4)$ содержится хотя бы одно целое число.

4. В пирамиде $ABCD$ ребра AC, BC, DC попарно перпендикулярны и равны 4. Точка N — середина ребра AB, а точка M расположена на ребре AD так, что $AM = 3\,MD$. Шар с центром на прямой CN касается ребра AD в точке M. Найти радиус шара.

Вариант 2.2

1. Решить уравнение

$$2\log_{x+3}\Big(2x^2+10x+12\Big)+\tfrac{1}{2}\,\log_{2x+4}\Big(x^2+6x+9\Big)=5.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x=\sqrt{2}\,\sin 5x+\sin\Big(x+\tfrac{5\pi}{2}\Big).$$

3. Найти все значения параметра q, при которых в интервале $(8q+5,\,4q)$ содержится хотя бы одно целое число.

4. В пирамиде $ABCD$ ребра DA, AB, BC попарно перпендикулярны и равны 3. Точка M расположена на ребре BD так, что $DM : MB = 1 : 2$. Шар с центром на прямой AC касается ребра BD в точке M. Найти радиус шара.

Вариант 2.3

1. Решить уравнение

$$\log_{x-2}\Big(7x-10-x^2\Big)+\log_{5-x}\Big(x^2-4x+4\Big)=4.$$

2. Решить уравнение

$$2\sin 5x+\sqrt{3}\,\sin\Big(\tfrac{5\pi}{2}-x\Big)=\sin x.$$

3. Найти все значения параметра p, при которых в интервале $(2p-3,\,5p)$ содержится хотя бы одно целое число.

4. В основании пирамиды $ABCD$ лежит равносторонний треугольник ABC, стороны которого равны 4. Ребро AD перпендикулярно плоскости ABC и также равно 4. Точка M расположена на ребре CD так, что $DM : MC = 1 : 3$. Шар с центром на прямой AB касается ребра CD в точке M. Найти радиус шара.

Вариант 2.4

1. Решить уравнение

$$2\log_{2x+1}\Big(3+5x-2x^2\Big)+\tfrac{1}{2}\,\log_{3-x}\Big(4x^2+4x+1\Big)=5.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{2}\,\cos 3x=\sin\Big(\tfrac{7\pi}{2}-x\Big).$$

3. Найти все значения параметра a, при которых в интервале $(3a,\, 6a-1)$ содержится хотя бы одно целое число.

4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, стороны которого равны 3. Ребро SA перпендикулярно основанию и равно $3\sqrt{2}$. Точка M расположена на ребре SC так, что $SM : MC = 1 : 2$. Шар с центром на прямой AB касается ребра SC в точке M. Найти радиус шара.

1996

Вариант 1.1

1. В университете на репетиционном экзамене по математике было предложено пять задач. Оценку «хорошо» получили те, кто решил первые две задачи и еще какие-то две. Решившие все задачи получили оценку «отлично». В университет было зачислено 100 человек, получивших оценку «хорошо» или «отлично». Из них 80 человек решили третью задачу, 70 — четвертую и 60 — пятую. Сколько человек получили оценку «хорошо»?

2. Решить уравнение $\cos 3x=2\sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{5}$, расстояние от ее центра до вершины C равно 5 и сторона AB равна $4\sqrt{5}$. Найти стороны AC и BC.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(1-p)x^2+2px-(p+2)=0$ имеет два различных положительных корня.

5. В основании правильной пирамиды $SABCD$ с боковыми ребрами длины 5 лежит квадрат со стороной 6. Все грани другой пирамиды $TSAB$ равны между собой. Найти расстояние между прямыми TA и SC, если известно, что пирамиды расположены по разные стороны от их общей грани.

Вариант 1.2

1. В племени АБы-ВыГаДать на пост вождя претендовало три кандидата: Е, Ж, З. По правилам выборов голосование осуществлялось путем вычеркивания из бюллетеня не более одного кандидата. После подсчета голосов оказалось, что за Е подано 50% голосов, за Ж — 70% и за З — 90% голосов. В голосовании приняло участие 200 человек. Сколько из них проголосовало за всех трех кандидатов?

2. Решить уравнение $\sin 3x + 2\sin\Bigl(x - \frac{\pi}{3}\Bigr) = 0$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{5}$, расстояние от ее центра до вершины C равно $5\sqrt{2}$, а периметр треугольника равен $12\sqrt{5}$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $px^2 + 2(p-1)x + (p-3) = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

5. Две правильные пирамиды $SABC$ и $TABC$ расположены по разные стороны от общей грани ABC. Точка M — середина ребра SB. Найти расстояние между прямыми AM и CT, если $AB = 8$, $SA = 5$, $TA = 6$.

Вариант 1.3

1. В соревнованиях по прыжкам участвовали 45 человек. Из них 40 выполнили норму первого разряда по прыжкам в высоту, 30 — по прыжкам в длину и 25 — по прыжкам с шестом. Оказалось, что каждый участник выполнил норму первого разряда хотя бы по двум дисциплинам. Сколько участников выполнили норму первого разряда ровно по двум дисциплинам?

2. Решить уравнение $\sin 3x + 2\cos\Bigl(x - \frac{\pi}{6}\Bigr) = 0$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен 1, расстояние от ее центра до вершины C равно $\sqrt{5}$, а сумма сторон AC и BC равна 8. Найти стороны треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(1-p)x^2 + 2(p-3)x + (4-p) = 0$ имеет два различных положительных корня.

5. В основании правильной пирамиды $SABCD$ с боковыми ребрами длины 3 лежит квадрат со стороной 4. Все грани другой пирамиды $TSBC$ равны между собой. Найти расстояние между прямыми AS и CT, если известно, что пирамиды расположены по разные стороны от их общей грани.

Вариант 1.4

1. На болоте А на должность дирижера лягушачьего оркестра претендовало три кандидата: Б, В и Г. По правилам выбора голосование осуществлялось кваканием в поддержку выбранного кандидата, причем промолчать (набрав в рот воды) можно не более одного раза из трех. Квакометр показал, что за Б подано 60%, за В — 70% и за Г — 85% голосов всех лягушек, принявших участие в голосовании. Сколько процентов лягушек квакнуло три раза?

2. Решить уравнение $\cos 3x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{2}$, расстояние от ее центра до вершины C равно $2\sqrt{5}$. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что его площадь равна 12.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-2)x^2 + 2px + (p+1) = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

5. Равносторонний треугольник ABC является основанием двух правильных пирамид $SABC$ и $TABC$, расположенных от него по разные стороны. Точка M — середина SC. Найти расстояние между прямыми BM и AT, если $AB = 6$, $AS = 5$, $AT = 8$.

Вариант 2.1

1. Купил Роман раков, вчера — мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня — по 990, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25 200 рублей, из них переплаты из–за отсутствия сдачи в сумме составили от 160 до 200 рублей. Сколько Роман купил раков вчера и сколько сегодня?

2. Решить уравнение $2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1+8\sin x}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 12$, $PQ = 5$.

4. Найти все решения неравенства

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left[\log_2\frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3}16\right] \geqslant 0$$

и указать наименьшее из них.

5. В пирамиде $ABCD$ ребро BD перпендикулярно ребрам AB и CD. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что $BD : CD : PQ : AB = 3 : 4 : 5 : 6$, где P и Q — середины ребер CD и AB соответственно.

Вариант 2.2

1. Папа Карло выстрогал Буратино и отправил его в школу, дав ему на букварь несколько деревянных рублей, не более 30 штук. Буратино продал все рубли коллекционерам по 150 сольдо за каждый. Пять сольдо он сунул себе за щеку, не более трех закопал на поле Чудес, а на оставшиеся купил хлеба по цене 51 сольдо за корочку. Сколько корочек хлеба купил Буратино?

2. Решить уравнение $\sqrt{3\cos x - 6\sin x} = \sqrt{10}\,\sin\frac{x}{2}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности. Сторона CD касается этой окружности в точке Q, а отрезок AQ пересекает окружность в точке P. Найти радиус окружности, если известно, что $AP = 2$, $PQ = 7$.

4. Найти все решения неравенства

$$\left(x^{\log_3 x} - 9\right)\left[\log_7\frac{x+1}{7} + \log_{x+1}\frac{7}{x+1}\right] \leqslant 0$$

и указать наибольшее из них.

5. В пирамиде $ABCD$ точки P и Q лежат на ребрах AD и BC так, что $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Найти угол между прямыми AB и DC, если известно, что $AB = DC = 2PQ$.

Вариант 2.3

1. Монастырь закупил серьги по цене 531 000 рублей за одну золотую и 135 000 — за одну серебряную. Всего на покупку было истрачено 14 327 950 рублей, из них не более 15 000 — за доставку. Когда все серьги раздали сестрам, каждой досталась одна серьга — кому золотая, а кому серебряная. Сколько сестер было в монастыре?

2. Решить уравнение $2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{11 - 8\sin x}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{15}$, $PQ = 1$.

4. Найти все решения неравенства

$$\left(16 - x^{\log_4 x}\right)\left[2\log_4 \frac{8x+7}{64} + 3\log_{8x+7} 8\right] \geqslant 0$$

и указать наименьшее из них.

5. В пирамиде $ABCD$ точка P — середина ребра CD. Ребро AD перпендикулярно ребрам CD и AB. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что $AD : CD : AB : BP = 3 : 4 : 5 : 5$.

Вариант 2.4

1. У Фрола было мыло, не менее 6 кусков, а у Прокла — шилья, не более 30 штук. Столковались они считать каждое шило за 8 700 рублей, а кусок мыла — за 4 500, да и поменялись. Прокл отдал Фролу все свои шилья и забрал у него все мыло. Сколько мыла выменял Прокл, если Фрол доплатил Проклу 3 350 рублей и остался ему должен не более 500 рублей?

2. Решить уравнение $\sqrt{6\sin x - 13\cos x} = \sqrt{10}\,\sin\frac{x}{2}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности. Сторона AB касается этой окружности в точке Q, а отрезок CQ пересекает окружность в точке P. Найти радиус окружности, если известно, что $CP = 4$, $PQ = 21$.

4. Найти все решения неравенства

$$\left(x^{\log_5 x} - 25\right)\left[\log_{81} \frac{2x+3}{27} + \log_{6x+9} \frac{27}{2x+3}\right] \leqslant 0$$

и указать наибольшее из них.

5. В пирамиде $ABCD$ точки M и N лежат на ребрах AC и BD так, что $AM : MC = BN : ND = 1 : 3$. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что $AB : MN : CD = 3 : 4 : 9$.

1997

Вариант 1.1

1. Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро — 10 сольдо. Смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{128(\sqrt{x}-1)^7}}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{2x-2}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекают сторону BC в точках M и K соответственно, а отрезки AM и DK пересекаются в точке P. Найти длину стороны BC, если известно, что $AB = 15$ и $AP : PM = 3 : 2$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x}{1 - 2\cos 2x} = \frac{\cos 4x}{\sqrt{3} - 2\sin 2x}.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, стороны которого равны $2\sqrt{3}$, боковые ребра пирамиды равны 4. Точки M и K — середины ребер SB и BC соответственно. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PAB.

Вариант 1.2

1. Для того чтобы купить каменный домик одному, Ниф-Нифу не хватает 19 золотых, а Нуф-Нуфу — 9 золотых. Бережливый Наф-Наф накопил денег столько же, сколько у Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа вместе. Смогут ли поросята купить домик втроем?

2. Решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^9}} = \sqrt{32x-32}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и K соответственно, а продолжения отрезков BM и CK пересекаются в точке P. Найти длину стороны AD, если известно, что $AB = 12$ и $PM : MB = 1 : 4$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 6x}{1 + 2\cos 2x} = \frac{\sin 6x}{\sqrt{3} + 2\sin 2x}.$$

5. В правильной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны $8\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 6. Точки M и K — середины ребер SD и CD соответственно. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PBD.

Вариант 1.3

1. Мальчиш Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, если же только корзину печенья — то 4 доллара, а если только коробку конфет, то останется 8 долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{x} - 1/2)^7}}{\sqrt{x} + 1/2} = \frac{1}{8}\sqrt{x - \frac{1}{4}}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекают сторону CD в точках M и K соответственно, а отрезки AM и BK пересекаются в точке P. Найти длину стороны BC, если известно, что $MK = 6$ и $AM : AP = 5 : 4$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos 4x} = \frac{\cos 3x}{\sqrt{3} - 2\sin 4x}.$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 12$, $BC = 8$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC, $SA = 6$. Точки M и K — середины ребер AC и SB соответственно. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PAB.

Вариант 1.4

1. Для того чтобы купить в харчевне полпорции жареных пескарей, коту Базилио не хватает 3 сольдо, а лисе Алисе — 10 сольдо. Они закопали свои деньги на поле Чудес, и на следующий день их совместный капитал утроился. Смогут ли теперь кот Базилио и лиса Алиса купить порцию жареных пескарей на двоих?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{(2\sqrt{x}-1)^{13}}}{\left(\sqrt{x-1/4}\right)^3} = \sqrt{2}\,(2\sqrt{x}+1).$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов C и D пересекают сторону AB в точках M и K соответственно, а продолжения отрезков CM и DK пересекаются в точке P. Найти длину стороны AD, если известно, что $MK = 16$ и $CM : MP = 4 : 1$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x}{\sqrt{3}+2\cos x} = \frac{\sin 4x}{1+2\sin x}.$$

5. В правильной призме $ABCA'B'C'$ ребра основания ABC равны 4, боковые ребра AA', BB', CC' равны 3. Точка M — середина ребра BC, точка K выбрана на ребре $A'B'$ так, что $A'K = 3$. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PAB.

Вариант 2.1

1. Статистика знает все. В городе Урюпинске 47,7% всех детей считают, что их нашли в капусте, 15,1% — что их принес аист, а оставшиеся 37,2% детей вообще не знают, откуда взялись. Аналогичная статистика среди мальчиков такова: соответственно 33, 20 и 47%. Сколько процентов урюпинских девочек считают, что их принес аист, если 63% из них полагают, что были найдены в капусте?

2. Найти все общие корни уравнений

$$\sin x - 5\cos 2x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 2\sin^2 x - 7\sin 2x + 6 = 0.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D так, что $AD : DB = 4 : 5$. Известно, что треугольники ABC

и ACD подобны, $\angle ABC = \arccos\frac{3}{4}$, $CD = 10$. Определить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\log_{x+\frac{2}{9}} 3 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 3$.

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 3$ — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' равны 4. Точки P и Q — середины ребер $A'B'$ и CC' соответственно. На прямой $B'C'$ выбрана точка M так, что расстояния от точек P и Q до прямой AM равны. Определить длину отрезка $B'M$.

Вариант 2.2

1. Статистика знает все. В городской думе города Урюпинска 60% всех депутатов считают секвестр полезной мерой для экономики, 30% — вредной, а оставшиеся 10% стесняются произнести это слово вслух. В то же время остальные взрослые жители Урюпинска (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают секвестр полезным для экономики, 20% – вредным, а остальные 70% думают, что секвестр — это садовые ножницы. Сколько процентов всех взрослых жителей Урюпинска считают секвестр полезной мерой для экономики, если вредным его считают 20,01% из них?

2. Найти все общие корни уравнений

$$5\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad \sin 2x + 14\cos^2 x - 8 = 0.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D так, что $AD : DB = 8 : 1$. Известно, что треугольники ABC и ACD подобны, $CD = 2\sqrt{10}$, $\angle BAC = 45°$. Определить площадь треугольника BCD.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+\frac{12}{49}} 7 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 7.$$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' равны 1, точка K — середина ребра AB. На прямой BB' выбрана точка P так, что расстояния от точек K и C' до прямой DP равны. Определить длину отрезка BP.

Вариант 2.3

1. Статистика знает все. В городе Урюпинске 29% всех жителей наиболее благоприятным местом для жизни во Вселенной назвали Марс, 19,3% — Сникерс, а оставшиеся 51,7% жителей уверены в том, что хороших мест для жизни нет нигде, включая Урюпинск. Аналогичная статистика среди той части урюпинских жителей, которые любят шоколад, такова: соответственно 50, 40 и 10%. Сколько процентов жителей, которые не любят шоколад, считают, что хороших мест для жизни нет нигде, если 5,5% из тех, кто не любит шоколад, назвали Сникерс наиболее благоприятным местом для жизни?

2. Найти все общие корни уравнений

$$3\sin x - 5\cos 2x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 8 + 7\sin 2x - 2\sin^2 x = 0.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D так, что $AD : DB = 9 : 7$. Известно, что треугольники ABC и ACD подобны, $CD = 9$, $\angle ACB = \arccos\frac{1}{9}$. Определить радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+\frac{3}{16}} 4 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 4.$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 8$ — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' равны 8, точка M — середина ребра $C'D'$. На прямой AA' выбрана точка P так, что расстояния от точек B' и D до прямой MP равны. Определить длину отрезка AP.

Вариант 2.4

1. Статистика знает все. Опрос взрослых жителей города Урюпинска показал, что 10% всех мужчин предпочитают пить чай из чашек, 30% — из стаканов, для остальных 60% мужчин посуда значения не имеет. Аналогичная статистика среди женщин такова: соответственно 40, 15 и 45%. Сколько процентов всех взрослых жителей Урюпинска предпочитают пить чай из чашек, если для 52,2% из них посуда не имеет значения?

2. Найти все общие корни уравнений

$$5\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 14\cos^2 x + \sin 2x - 6 = 0.$$

3. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D так, что $AD : DB = 7 : 2$. Известно, что треугольники ABC и ACD подобны, $CD = 2\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60°$. Определить площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+\frac{6}{25}} 5 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 5.$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$ — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' равны $2\sqrt{3}$. Точки K и L — середины ребер CD и $A'D'$ соответственно. На прямой $A'B'$ выбрана точка M так, что расстояния от точек B и L до прямой KM равны. Определить длину отрезка $A'M$.

1998

Вариант 1.1

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 + ax + a$ и $y = (1-a)x^2 - x$ имеют не более одной общей точки.

2. Решить уравнение

$$2 + \frac{\sqrt{x^2+7x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+7x+2}}.$$

3. Задан квадрат $ABCD$ со стороной 2 и построены две окружности: первая — на стороне BC как на диаметре, вторая — с центром в вершине D и радиусом 2. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны AB и двух данных окружностей.

4. Решить уравнение $3\cos 2^x = 1 + 4\sin 2^{x-1}$.

5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 1. Точка M находится в плоскости грани SAD и равноудалена от вершин S, C и D. Найти объем пирамиды $SMAB$.

Вариант 1.2

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 - ax - a$ и $y = (1+a)x^2 + 2x$ имеют не более одной общей точки.

2. Решить уравнение

$$1 + \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+7x-6}} = \frac{\sqrt{x^2+7x-6}}{\sqrt{x+1}}.$$

3. Задан квадрат $ABCD$ со стороной 3 и построены две окружности: первая имеет радиус 1 и касается сторон AD и AB, вторая — с центром в вершине C и радиусом 3. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны AD и двух данных окружностей.

4. Решить уравнение $1 + 2\cos 2^{x+1} = 3\cos 2^{x}$.

5. Задан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 2. Точка K — центр грани $A'B'C'D'$, точка M находится в плоскости AKD и равноудалена от точек K, C и D. Найти объем пирамиды $MABK$.

Вариант 1.3

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 - ax - a$ и $y = (1+a)x^2 - x - 1$ имеют не более одной общей точки.

2. Решить уравнение

$$2 + \frac{8\sqrt{x-6}}{\sqrt{x^2+2x-51}} = \frac{\sqrt{x^2+2x-51}}{\sqrt{x-6}}.$$

3. Задан квадрат $ABCD$ со стороной 6 и построены две окружности: первая — на стороне CD как на диаметре, вторая имеет радиус 2 и касается сторон AB и BC. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны BC и двух данных окружностей.

4. Решить уравнение $2\cos 2^{x+1} + \sin 2^{x} + 1 = 0$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра имеют длину 2. Точка K — середина ребра AA', точка M находится в плоскости грани $AA'C'C$ и равноудалена от точек K, B' и C'. Найти объем пирамиды $MBCK$.

Вариант 1.4

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 + ax + a + 2$ и $y = (1-a)x^2 - 2x$ имеют не более одной общей точки.

2. Решить уравнение

$$1 + \frac{\sqrt{x^2+4x-14}}{\sqrt{x-2}} = \frac{12\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2+4x-14}}.$$

3. Задан квадрат $ABCD$ со стороной 2 и построены две окружности: первая — вписана в квадрат, вторая — с центром в вершине A и радиусом 2. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны CD и двух данных окружностей.

4. Решить уравнение $3\cos 2^x - 2\cos 2^{x-1} = 1$.

5. Задан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 4. Точка K — центр куба, точка M находится в плоскости $AB'C'D$ и равноудалена от точек K, C' и D'. Найти объем пирамиды $MA'B'K$.

Вариант 2.1

1. Боб подарил другу Биллу несколько акций нефтяной компании. Часть акций Билл продал в тот же день, а остальные — через неделю, когда их стоимость на бирже уменьшилась из-за финансового кризиса, выручив в итоге этих операций некоторую сумму денег. Если бы Билл продал все акции сразу, то выручил бы в 1,25 раза больше, а если бы наоборот продал все акции через неделю, то выручил бы за них в 1,6 раза меньше, чем ему удалось получить на самом деле. Во сколько раз уменьшилась стоимость каждой акции за неделю?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5|y-2| = 11, \\ |x| + 2y = 5. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и AMK, равны соответственно 12 и 9. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BCK.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2\sin 2x + 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{22}/3$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду сферы и пересекает ребра AB и AC в точках M и N. Известно, что площадь треугольника SMN равна $\frac{7}{12}$. Определить: а) длину отрезка MN; б) объем пирамиды $SAMN$.

Вариант 2.2

1. В стране объявили деноминацию и выпустили в обращение одновременно со старыми сольдо новые, которые было трудно отличить от старых. Проходив весь день с шарманкой по городу, папа Карло заработал немного денег, среди которых наряду со старыми впервые попались и новые сольдо. Если он этого не заметит и посчитает все сольдо за старые, то получится, что он заработал в 5 раз меньше, чем на день раньше. Если же наоборот подсчитать собранные деньги так, как будто все сольдо новые, то получится, что он заработал в 200 раз больше, чем на день раньше. Сколько стоит новый сольдо по отношению к старому?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2|x| + 1, \\ 3x + |y| = 2y + 9. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает сторону AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMK и BKC, равны соответственно 7 и 9. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 1 + 2\cos x.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота SH пирамиды равна $2\sqrt{2}$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду сферы и пересекает ребра BC и CD в точках M и N. Известно, что $MN = \frac{5}{6}$. Определить: а) площадь треугольника SMN; б) объем пирамиды $SMNC$.

Вариант 2.3

1. Из Грейтвилля в Литтлвилль вышел Гулливер, а навстречу ему из Литтлвилля по той же дороге уже шел Лилипут. Каждый считал количество своих шагов от исходного пункта. Встретившись, они сложили свои результаты и удивились. Гулливер — тому, что сумма оказалась вдвое больше, чем он насчитал накануне, шагая от Литтлвилля до Грейтвилля, а Лилипут — тому, что сумма оказалась в 8 раз меньше, чем он насчитал накануне, пройдя все расстояние от Грейтвилля до Литтлвилля. Во сколько раз шаг Гулливера длиннее шага Лилипута?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 2|y-1| + 2, \\ 2|x| + 3y = 4x + 12. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает сторону AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и AMK, равны соответственно 6 и 4. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BCK.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = 2\sin x + 1.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота SH пирамиды равна

$2\sqrt{6}$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду сферы и пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Известно, что площадь треугольника SMN равна $\frac{13}{6}$. Определить: а) длину отрезка MN; б) объем пирамиды $SMNB$.

Вариант 2.4

1. Новое поколение выбирает пепси ... Дружная семья посетила однажды вечером безалкогольный бар и потратила некоторую сумму денег. Родители пили квас, а дети — пепси. Если бы все пили только квас и выпили вместе то же самое общее число стаканов, то им пришлось бы заплатить за вечер в 1,2 раза меньше, а если бы все пили пепси, то заплатили бы в 1,5 раза больше, чем было уплачено. Во сколько раз стакан пепси дороже стакана кваса?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + 3y = 2x - 8, \\ x + 2|y| = 6. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMK и BKC, равны соответственно 21 и 4. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{6}/3$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду сферы и пересекает ребра AC и BC в точках M и N. Известно, что $MN = \frac{7}{9}$. Определить: а) площадь треугольника SMN; б) объем пирамиды $SMNC$.

1999

Вариант 1.1

1. Решить неравенство
$$\sqrt{4x-4}+\sqrt{x+1}\leqslant\sqrt{3-x}.$$

2. Решить уравнение
$$\sin\left(4x+\frac{3}{x}\right)=\sin 4x+\sin\frac{3}{x}.$$

3. В треугольнике ABC точка K — середина медианы BM. Известно, что $AB=7$, $BC=5$, $AK=6$. Найти CK.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\,0)$ в направлении точки $(2;\,1)$, отражается от прямой $x+2y=3$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через вершину B_1 и середины ребер AA_1, AC проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости α, если известно, что расстояние от середины ребра CC_1 до этой плоскости равно 9.

Вариант 1.2

1. Решить неравенство
$$\sqrt{10-2x}+\sqrt{3-x}\leqslant\sqrt{1+x}.$$

2. Решить уравнение
$$1+\cos\left(3x+\frac{1}{x}\right)=\cos 3x+\cos\frac{1}{x}.$$

3. В треугольнике ABC на продолжении медианы BM выбрана точка K так, что $MK : BM = 1 : 2$. Известно, что $AB=5$, $BC=3$, $CK=4$. Найти AK.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\,0)$ в направлении точки $(4;\,1)$, отражается от прямой $x+2y=3$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через вершину A_1 и середины ребер AC, BB_1 проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости α, если известно, что расстояние от вершины A до этой плоскости равно 8.

Вариант 1.3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{5-3x}+\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{x+1}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin\Big(x+\tfrac{5}{2x}\Big)=\cos x+\cos\tfrac{5}{2x}.$$

3. В треугольнике ABC точка K — середина медианы BM. Известно, что $AB=6$, $AK=5$, $CK=4$. Найти BC.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\,0)$ в направлении точки $(3;\,2)$, отражается от прямой $2x+3y=6$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через середины ребер AC, BB_1 и A_1B_1 проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости α, если известно, что расстояние от середины ребра AA_1 до этой плоскости равно 6.

Вариант 1.4

1. Решить неравенство

$$\sqrt{4x-8}+\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{3-x}.$$

2. Решить уравнение

$$1-\cos\Big(2x+\tfrac{5}{x}\Big)=\sin 2x+\sin\tfrac{5}{x}.$$

3. В треугольнике ABC на продолжении медианы BM выбрана точка K так, что $MK : BM = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AK = 2$, $CK = 3$. Найти BC.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\,0)$ в направлении точки $(3;\,1)$, отражается от прямой $2x + 3y = 6$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через вершину B и середины ребер A_1B_1, AC проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра CC_1 до плоскости α, если известно, что расстояние от вершины B_1 до этой плоскости равно 2.

Вариант 2.1

1. Решить неравенство $x^2 - 2\sqrt{x^2 - x} < x + 15$.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin(x/3)}{\cos(x/4)} = 1.$$

3. В окружность вписан прямоугольник со сторонами 6 и 8. Из некоторой точки M данной окружности на диагонали прямоугольника опущены перпендикуляры MP и MQ. Доказать, что длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M на окружности, и найти длину PQ.

4. Решить неравенство
$$\sqrt{3}\,\log_{27}(\log_x 3) + \log_x(\log_3 x) \leqslant 0.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD в три раза больше BC. Точки K и N — середины ребер BC и CD соответственно, площадь треугольника SKN равна 21. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SKN и делит ребро AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины A.

Вариант 2.2

1. Решить неравенство $x^2 - \sqrt{x^2 - 2x} < 2x + 12$.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin(x/5)}{\cos(x/4)} = -1.$$

3. На плоскости проведены две прямые под углом 60° друг к другу. Из некоторой точки M плоскости на эти прямые опущены перпендикуляры MP и MQ. Известно, что $PQ = 3$. Доказать, что все такие точки M лежат на одной окружности, и найти ее радиус.

4. Решить неравенство
$$\sqrt{2}\,\log_2(\log_x \tfrac{1}{2}) \leqslant \log_{\sqrt{x}}(\log_{1/2} x).$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD относится к BC, как $2:3$. Точки L и N — середины ребер AD и CD соответственно, площадь треугольника SLN равна 63. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SLN и делит ребро BC в отношении $2:1$, считая от вершины B.

Вариант 2.3

1. Решить неравенство $2\sqrt{x^2+x} - x > x^2 - 8$.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin(x/5)}{\cos(x/6)} = 1.$$

3. На окружности радиуса 1 выбрана точка M. Из нее опущены перпендикуляры MP и MQ на диагонали некоторого вписанного в окружность прямоугольника. Известно, что $PQ = 1/\sqrt{2}$. Доказать, что все такие прямоугольники равны, и найти длины их сторон.

4. Решить неравенство
$$\log_2(\log_x 2) + \sqrt{2}\,\log_x(\log_2 x) \leqslant 0.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD в три раза больше BC. Точки M и K — середины ребер AD и CD соответственно, площадь треугольника SMK равна 135. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SMK и делит ребро AB в отношении $2:1$, считая от вершины A.

Вариант 2.4

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2+2x}-x^2>2x-20$.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin(x/7)}{\cos(x/6)}=-1.$$

3. На плоскости дан прямоугольник площади 450. Из некоторой точки M плоскости на диагонали прямоугольника опущены перпендикуляры MP и MQ. Известно, что $PQ=7$. Доказать, что все такие точки M лежат на одной окружности, и найти ее радиус, если он в три раза меньше длины диагонали прямоугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_3(\log_x \tfrac{1}{3}) \leqslant \sqrt{3}\,\log_x(\log_{1/3} x).$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD относится к BC, как $3:2$. Точки L и M — середины ребер BC и CD соответственно, площадь треугольника SLM равна 96. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SLM и делит ребро AD в отношении $1:2$, считая от вершины A.

2000

Вариант 1.1

1. Определить, при каких целых значениях x функция

$$f(x)=\frac{x^2+x-16}{x-1}$$

принимает наименьшее целое значение.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}2x\,\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}4x\,\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}3x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что $BK=3$, $KN=2$.

4. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения $(p-6)x^2+2px-1=0$ различны и полусумма этих корней не больше, чем их произведение.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2, боковые ребра равны 5, точка M — середина ребра SB. Отрезок CM проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SA. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Вариант 1.2

1. Определить, при каких целых значениях x функция

$$f(x)=\frac{x^2-x-17}{x-2}$$

принимает наименьшее целое значение.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}3x\ \operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}=\frac{\operatorname{ctg}x\ \operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении $1:3$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK=3$, $KN=1$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения $(p+2)x^2-2px+1=0$ различны и произведение этих корней не меньше, чем пятая часть их суммы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 3, боковые ребра равны 5. Ребро AB проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SC. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Вариант 1.3

1. Определить, при каких целых значениях x функция

$$f(x)=\frac{x^2-2x-24}{x-3}$$

принимает наименьшее целое значение.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} 5x \operatorname{ctg} 4x}{\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} 4x} = \frac{\operatorname{ctg} 3x \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 2x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB точка N делит катет AC в отношении $2:1$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BN пересекает биссектрису AM в точке K так, что $AK = 9$, $KM = 4$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения $(p-3)x^2 + 2px - 4 = 0$ различны и сумма этих корней не больше, чем половина их произведения.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания ABC равны 3, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 4. Отрезок AB_1 проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую A_1C. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Вариант 1.4

1. Определить, при каких целых значениях x функция

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 22}{x - 4}$$

принимает наименьшее целое значение.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} 3x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC точка N делит гипотенузу AC в отношении $1:7$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BN пересекает биссектрису AM в точке K так, что $AK = 5$, $KM = 7$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения $(2p+3)x^2 - 4px + 4 = 0$ различны и произведение этих корней не меньше, чем четверть их суммы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 1, боковые ребра равны 3, точка M — середина ребра SC. Отрезок DM проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SB. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Вариант 2.1

1. Периметр треугольника равен 60, а наибольшая его сторона в сумме с учетверенной наименьшей равна 71. Найти стороны треугольника, если одна из них в два раза больше другой.

2. Решить уравнение $(3 - 5\sin x)\operatorname{tg}|x| = \sin 2x$.

3. В окружность радиуса 9 вписан треугольник ABC, у которого медиана BM и высота BH равны соответственно 11 и 7. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,8} \frac{7 - 2 \cdot 3^x}{3} \geqslant \log_{1,25} 3.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 5$ и $AC = 2\sqrt{7}$. Все боковые ребра пирамиды равны 4. Сфера, центр которой лежит на продолжении ребра BS за точку S, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти радиус сферы.

Вариант 2.2

1. Периметр треугольника равен 280, а удвоенная наибольшая его сторона в сумме с утроенной наименьшей равна 455. Найти стороны треугольника, если одна из них в два раза больше другой.

2. Решить уравнение $(6\cos x - 3)\operatorname{ctg}|x| + \sin 2x = 0$.

3. В окружность радиуса 13 вписан треугольник ABC. Его высота BH равна 17, точка H делит сторону AC на отрезки, разность которых равна 10. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,4} \frac{12 - 4 \cdot 5^{-x}}{5} \leqslant \log_{2,5} \left(\frac{1}{5}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, причем $\angle ABC = 90°$, $AB = 6$. Все боковые ребра пирамиды равны 13. Сфера радиуса $156/25$, центр которой лежит на ребре BS, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти объем пирамиды.

Вариант 2.3

1. Периметр треугольника равен 56, а учетверенная наименьшая его сторона на 21 длиннее наибольшей из сторон. Найти стороны треугольника, если одна из них в два раза больше другой.

2. Решить уравнение $(4-6\sin x)\operatorname{tg} x=\sin 2|x|$.

3. В окружность радиуса $5\sqrt{2}$ вписан треугольник ABC. Его медиана BM равна 8 и образует со стороной AC угол в 45°. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x}\cdot\log_{0,08}\frac{8-4^{x+1}}{3}\geqslant\log_{12,5}4.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=3$, $AC=\sqrt{15}$ и $BC=2\sqrt{6}$. Все боковые ребра пирамиды равны $7/2$. Сфера, центр которой лежит на ребре SA, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти радиус сферы.

Вариант 2.4

1. Периметр треугольника равен 61, а наибольшая его сторона в три раза длиннее наименьшей. Найти стороны треугольника, если одна из них на 9 больше другой.

2. Решить уравнение $(2\cos x+1)\operatorname{ctg} x+\sin 2|x|=0$.

3. В окружность радиуса $\sqrt{5}$ вписан треугольник ABC. Его медиана BM равна 3, а расстояние между центром окружности и точкой пересечения медиан треугольника ABC равно 1. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x}\cdot\log_{0,625}\frac{11-2^{1-x}}{5}\leqslant\log_{1,6}\left(\frac{1}{2}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, причем $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2$. Все боковые ребра пирамиды равны 5. Сфера радиуса 20, центр которой лежит на продолжении ребра CS за точку S, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти объем пирамиды.

2001

Вариант 1.1

1. Найти множество значений функции
$$f(x) = 2\cos 2x + 2\cos x + 1.$$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy + 5yz - 6xz = -2z, \\ 2xy + 9yz - 9xz = -12z, \\ yz - 2xz = 6z. \end{cases}$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 8$, $AC = 4$. На стороне BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются друг друга. Найти площади треугольников ABM и ACM.

4. В магазине «Непарная обувь» за два дня продали 2 одинаковых правых сапога, 13 одинаковых левых сапог и один валенок, причем в первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Левый сапог дешевле правого и дороже валенка на одну и ту же сумму. Сколько левых и сколько правых сапог продали в один день с валенком?

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 4. Точка K лежит на ребре BC, причем $KC = 1$. Плоскость α, проходящая через точки A и K, пересекает ребро DD_1. Площадь сечения куба плоскостью α равна $25/2$. Найти отношение объемов частей куба, на которые его делит плоскость α.

Вариант 1.2

1. Найти множество значений функции
$$f(x) = \cos 2x + 3\cos x + 2.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2xy + 2yz + xz = -10y, \\ -4xy + 3yz = 6y, \\ 23xy - 16yz - 3xz = -y. \end{cases}$$

3. В треугольнике ABC стороны $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. На стороне AC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники BAM и BCM, касаются друг друга. Найти, в каком отношении отрезок BM делит площадь треугольника ABC.

4. Пацюк пригласил восемнадцать эников и двух бэников есть вареники. Разместившись за двумя столами, они уничтожили все вареники, поданные поровну на оба стола. Все ели вареники только со своего стола, причем каждый эник съел вареников больше каждого бэника, но меньше Пацюка на одно и то же число штук. Сколько эников и сколько бэников сидело за одним столом с Пацюком?

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 2. Точка K лежит на ребре CC_1, причем $KC = 2/3$. Плоскость α, проходящая через точки B_1 и K, пересекает ребро AB и делит куб на две части, отношение объемов которых равно 13 : 95. Найти площадь сечения куба плоскостью α.

Вариант 1.3

1. Найти множество значений функции

$$f(x) = 2\cos 2x + 2\sin x - 1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x, \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x, \\ 2xy + xz = 4x. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$, $AC = 4$ на гипотенузе BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются друг друга. Найти площади треугольников ABM и ACM.

4. В аптеке «У Дуремара» два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 умеренных пиявок, 2 злобных и одну вялую. Каждая умеренная пиявка дешевле каждой злобной и дороже вялой на одну и ту же величину. Сколько и каких пиявок приобрел тот, кто купил вялую пиявку?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер $AA_1 = 5$, $AB = 6$, $AD = 7$. Точка K — середина ребра BB_1. Плоскость α, проходящая через точки A и K, пересекает ребро A_1D_1. Площадь сечения параллелепипеда плоскостью α равна $75/2$. Найти отношение объемов частей параллелепипеда, на которые его делит плоскость α.

Вариант 1.4

1. Найти множество значений функции

$$f(x) = \cos 2x - 3\sin x - 2.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - 5yz - xz = 3y, \\ xy + yz = -y, \\ -5xy + 4yz + xz = -4y. \end{cases}$$

3. В треугольнике ABC стороны $AB = 12$, $BC = 10$, $AC = 8$. На стороне AB выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники CAM и CBM, касаются друг друга. Найти, в каком отношении отрезок CM делит площадь треугольника ABC.

4. От фирмы «Рога и копыта» после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиря. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиря целиком досталась Балаганову, рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер $AA_1 = 7/3$, $AB = 4$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра BC.

Плоскость α, проходящая через точки D и K, пересекает ребро AA_1 и делит параллелепипед на две части, отношение объемов которых равно $1 : 3$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью α.

Вариант 2.1

1. В магазине «Мойдодыр» в продаже имеются стиральные порошки в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было $3 : 4 : 6$. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало $2 : 5 : 8$. Известно, что число пачек превосходного порошка возросло на 80%, а обычного порошка — уменьшилось не более чем на 10 пачек. Сколько всего пачек порошка было в магазине сначала?

2. Решить уравнение

$$3\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\arccos(1/3)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, пересекает продолжение стороны AD в точке M и продолжение стороны CD — в точке K. Известно, что $AM = 23$, $CK = 22$. Найти площадь параллелограмма.

4. Решить неравенство

$$\log_{x-1} \frac{10}{6x^2 - 15} + \log_{\sqrt{2}+1}(3 + 2\sqrt{2}) \leqslant 0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AB к основанию CD равно $2 : 3$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SM = MC$, $SK : KA = 3 : 2$, отрезки KN и LM параллельны. Найти длину отрезка KN, если $LM = 5$.

Вариант 2.2

1. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60%, серые — 30%, а белые — 10% от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истребленных им белых ворон составляет 120% от количества истребленных серых и 30% от количества истребленных черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело $2/3$ всех белых ворон и не более 150 черных?

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} = 3\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{\cos x}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в два раза больше стороны AB. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, пересекает продолжение стороны AD в точке M и продолжение стороны CD — в точке K. Известно, что $AM = 15$, $CK = 12$. Найти площадь параллелограмма.

4. Решить неравенство

$$\log_{2-3x} \frac{1}{1-3x^2} + \log_{2-\sqrt{3}} (7 - 4\sqrt{3}) \geqslant 0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AD к основанию BC равно $3 : 4$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SL = LB$, $SN : ND = 2 : 3$, отрезки KL и NM параллельны. Найти длину отрезка KL, если $NM = 3$.

Вариант 2.3

1. На автостоянке стояли «Мерседесы», «Запорожцы» и прочие иномарки в количественном соотношении $2 : 3 : 6$. После того как на стоянку подъехало некоторое количество «Мерседесов» и «Запорожцев» общим числом не более 100 машин, а 40% прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало $5 : 7 : 4$. Сколько автомобилей уехало со стоянки?

2. Решить уравнение

$$3\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\arccos(1/4)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и D, пересекает сторону BC в точке M и сторону CD — в точке K. Известно, что $BM = 7$, $DK = 1$. Найти площадь параллелограмма.

4. Решить неравенство

$$\log_{2x-1}\frac{3}{8x^2-6}+\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(5+2\sqrt{6})\leqslant 0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AB к основанию CD равно $4:5$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SK=KA$, $SM:MC=4:3$, отрезки KN и LM параллельны. Найти длину отрезка KN, если $LM=10$.

Вариант 2.4

1. Черепашки снова идут в бой. Из них 45% входят в клан «ниндзя», 30% — в клан «нундзя» и 25% — в клан «няндзя». После трудной победы над жестоким врагом подсчитали, что число погибших в бою черепашек из клана «няндзя» составляет 120% от числа убитых из клана «нундзя» и 60% от числа убитых из клана «ниндзя». Сколько всего черепашек участвовало в битве, если уцелела лишь 1/4 часть клана «няндзя», а в клане «ниндзя» осталось не более 40 черепашек?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3}-3\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB в два раза больше стороны AD. Окружность, проходящая через вершины A, B и D, пересекает сторону BC в точке M и сторону CD — в точке K. Известно, что $BM=1$, $DK=8$. Найти площадь параллелограмма.

4. Решить неравенство

$$\log_{1-2x}\frac{5}{1-5x^2}+\log_{\sqrt{5}-2}(9-4\sqrt{5})\geqslant 0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AD к основанию BC равно $3:5$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SN=ND$, $SL:LB=1:2$, отрезки KL и NM параллельны. Найти длину отрезка KL, если $NM=9$.

2002

Вариант 1.1

1. Решить неравенство
$$\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-1}-1} \leqslant 5.$$

2. Решить уравнение
$$\sin\frac{x+2}{2} + \sin\frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}\sin x.$$

3. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC — стороне AE, при этом $AB : DE = 8 : 5$, $BC : AE = 2 : 3$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь четырехугольника $BCDE$ равна 21.

4. Параллелограмм $ABCD$ расположен на плоскости так, что его диагонали AC и BD лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $y = x$ и $y = -2x$ соответственно, а сторона AB содержит точку с координатами $(4; 1)$. Какое наименьшее значение может принимать площадь параллелограмма $ABCD$?

5. В сферу радиуса 3 вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD — диаметр этой сферы. Известно, что $AD = 2\sqrt{6}$. Найти объем призмы.

Вариант 1.2

1. Решить неравенство
$$\frac{4x-5}{\sqrt{x^2-1}-1} \leqslant 5.$$

2. Решить уравнение
$$\cos\frac{x+2}{3} - \cos\frac{x-2}{3} = \frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}.$$

3. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC — стороне AE, при этом $AB : DE = 7 : 2$, $BC : AE = 3 : 4$. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$, если площадь треугольника ACD равна 22.

4. Треугольник ABC расположен на плоскости так, что его сторона AC и медиана BO лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $x = -3y$ и $y = 2x$ соответственно, а сторона AB содержит точку с координатами $(-3; 8)$. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника ABC?

5. В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок BD — диаметр этой сферы, точка M — середина ребра CC_1. Известно, что $BM = 2\sqrt{6}$, $DM = 4$. Найти объем призмы.

Вариант 1.3

1. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{\sqrt{x^2-2}-1} \leqslant 3.$$

2. Решить уравнение

$$\cos\frac{x+2}{2} + \cos\frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}\sin x.$$

3. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC — стороне AE, при этом $AB : DE = 9 : 4$, $BC : AE = 1 : 4$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 57.

4. Параллелограмм $ABCD$ расположен на плоскости так, что его диагонали AC и BD лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $y = 2x$ и $y = -4x$ соответственно, а сторона BC содержит точку с координатами $(-1; -5)$. Какое наименьшее значение может принимать площадь параллелограмма $ABCD$?

5. В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок AD — диаметр этой сферы, точки M и N — середины ребер BC и CC_1 соответственно. Известно, что $DM = \sqrt{6}$, $DN = 3$. Найти объем призмы.

Вариант 1.4

1. Решить неравенство

$$\frac{7x-9}{\sqrt{x^2-2}-1} \leqslant 9.$$

2. Решить уравнение

$$\sin\frac{x+2}{3} - \sin\frac{x-2}{3} = \frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}.$$

3. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC — стороне AE, при этом $AB : DE = 7 : 5$, $BC : AE = 3 : 5$. Найти площадь четырехугольника $BCDE$, если площадь треугольника ACD равна 20.

4. Треугольник ABC расположен на плоскости так, что его сторона AC и медиана BO лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $y = 3x$ и $x = 5y$ соответственно, а сторона BC содержит точку с координатами $(1; -4)$. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника ABC?

5. В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок C_1D — диаметр этой сферы, точка M — середина ребра CC_1. Известно, что $DM = 2\sqrt{6}$, $DB_1 = 6$. Найти объем призмы.

Вариант 2.1

1. Найти все пары чисел (a, b), при которых функция

$$f(x) = \frac{(a+5b)x+a+b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{1-3\sin x}}{\cos x} = \sqrt{4-14\,\mathrm{tg}^2\,x}.$$

3. Две окружности радиусов 3 и 2 касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Найти BC и AD, если известно, что площадь трапеции равна $25\sqrt{3}/2$.

4. Решить неравенство

$$\log_{5-\frac{1}{x}} 2 \leqslant 3.$$

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F, G — середины ребер A_1B_1, CC_1, AD и CD соответственно. Плоскость FB_1D_1 пересекает отрезок MN в точке K, а плоскость GB_1D_1 — в точке L. Найти отношение $MK : KL : LN$.

Вариант 2.2

1. Найти все пары чисел $(a,\, b)$, при которых функция

$$f(x) = \frac{(2a+3b)x+a+2b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{4\cos x+1}}{\sin x} = \sqrt{5-19\operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Известно, что площади треугольников ABC и ACD равны $12\sqrt{7}$ и $4\sqrt{7}$ соответственно, $BC : AD = 1 : 2$. Найти радиусы окружностей.

4. Решить неравенство

$$\log_{2+\frac{1}{x}} 3 \leqslant 4.$$

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F — середины ребер AB, B_1C_1 и DD_1 соответственно. Плоскость A_1BD пересекает отрезок MN в точке K, а плоскость A_1BF — в точке L. Найти отношение $MK : KL : LN$.

Вариант 2.3

1. Найти все пары чисел $(a,\, b)$, при которых функция

$$f(x) = \frac{(3a+2b)x+a+3b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2+6\sin x}}{\cos x}=\sqrt{5-19\operatorname{tg}^2 x}.$$

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Известно, что площади треугольников ABC и BCD равны 15 и 10 соответственно, $CD=2\sqrt{5}$. Найти AD и BC.

4. Решить неравенство

$$\log_{6-\frac{1}{x}} 4 \leqslant 3.$$

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N и F — середины ребер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскость B_1AC пересекает отрезок MN в точке K, а плоскость ACF — в точке L. Найти отношение $MK:KL:LN$.

Вариант 2.4

1. Найти все пары чисел $(a,\, b)$, при которых функция

$$f(x)=\frac{(4a+7b)x+a+4b}{ax+b}$$

постоянна во всей области ее определения.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{1-4\cos x}}{\sin x}=\sqrt{3-13\operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна $9\sqrt{11}$, $AB:CD=2:1$, $BC:AD=3:4$. Найти радиусы окружностей.

4. Решить неравенство

$$\log_{3+\frac{1}{x}} 5 \leqslant 4.$$

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N и G — середины ребер B_1C_1, CD и BB_1 соответственно. Плоскость GCD_1 пересекает отрезок MN в точке K, а плоскость ACD_1 — в точке L. Найти отношение $MK : KL : LN$.

2003

Вариант 1.1

1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает велосипедист и догоняет пешехода через полчаса. Если бы скорость велосипедиста была на 16 % выше, то он догнал бы пешехода через 25 минут. Какое время потребуется велосипедисту, чтобы догнать пешехода, если его скорость будет на 20 % ниже исходной?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x}{\sin 3x} = 2.$$

3. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную окружность в точке M. Найти BD, если $AB = 7$, $BC = 9$, $BM = 13$.

4. Решить неравенство $\left|6\sqrt{2x-6} - 8\right| \geqslant 2x - 5$.

5. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AC = BC = 5$, $AB = AD = 8$, $BD = 4$. Объем пирамиды равен $4\sqrt{15}$. Найти ребро CD.

Вариант 1.2

1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает автомобиль и догоняет пешехода через 20 минут. Если бы скорость автомобиля была на 30 % выше, то он догнал бы пешехода через 15 минут. На сколько процентов ниже исходной должна быть скорость автомобиля, чтобы он догнал пешехода за 25 минут?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3}\cos 4x - \sin 4x}{\cos 3x} = 2.$$

3. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную окружность в точке M. Найти AC, если $AB = 3$, $BC = 6$, $BM = 9$.

4. Решить неравенство $\left|16\sqrt{x-4} - 25\right| \geqslant 2x - 1$.

5. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AB = BC = 7$, $AC = AD = 10$, $CD = 12$. Объем пирамиды равен $32\sqrt{6}$. Найти ребро BD.

Вариант 1.3

1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно двинулись пешеход и велосипедист. Их встреча произошла через 36 минут. Если бы скорость велосипедиста была на 12,5 % ниже, то они встретились бы через 40 минут. Какое время пройдет до их встречи, если скорость велосипедиста будет на 25 % выше исходной?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x}{\sin 3x} = 2.$$

3. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную окружность в точке M. Найти BD, если $AB = 2$, $BC = 4$, $DM = \frac{3}{2}$.

4. Решить неравенство $\left|6\sqrt{4-2x} - 8\right| \geqslant 5 - 2x$.

5. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AC = BC = 7$, $AB = BD = 4$, $AD = 2$. Объем пирамиды равен $5\sqrt{3}$. Найти ребро CD.

Вариант 1.4

1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно двинулись пешеход и скороход. Они встретились через 1 час 20 минут. Если бы скорость скорохода была на 25 % ниже, то встреча состоялась бы через 1 час 36 минут. На сколько процентов выше исходной должна быть скорость скорохода, чтобы встреча состоялась через 1 час 15 минут после начала движения?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x}{\cos 3x} = 2.$$

3. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную окружность в точке M. Найти AC, если $AB = 2$, $BC = 4$, $DM = 3$.

4. Решить неравенство $\left|16\sqrt{2-x} - 25\right| \geqslant 11 - 2x$.

5. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AB = AC = 9$, $BC = BD = 6$, $CD = 4$. Объем пирамиды равен 32. Найти ребро AD.

Вариант 2.1

1. В Тридевятом царстве в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 9 рублей и золотые монеты достоинством 81 рубль. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 23 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 700 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\arccos(3x^2) + 2\arcsin x = 0$.

3. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PM = 3$.

4. Решить неравенство $2^{2x+1} + 2 \cdot 4^{|x+1|} \leqslant 5$.

5. Даны две сферы радиусов 1 и 5 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что $AB = 4\sqrt{3}$, $CD = 4$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2.2

1. В Восьмиречье в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 8 рублей и 64 рубля. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 20 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 500 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\arccos(\frac{x^2}{2}) = 2\arccos x$.

3. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 6$, $CP : PM = 3 : 2$.

4. Решить неравенство $3^{2x+1} + 3 \cdot 9^{|x+1|} \geqslant 10$.

5. Даны две сферы радиусов 2 и 5 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что $CD = 6$, а угол между прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{6}{7}$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2.3

1. В Семиземье в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 7 рублей и золотые монеты достоинством 49 рублей. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 17 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 300 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\arccos(x^2) + 2\arcsin(3x) = 0$.

3. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $AM = 16$, $BM = 4$.

4. Решить неравенство $2^{x+1} + 3\cdot 2^{|x-1|} \geqslant 14$.

5. Даны две сферы радиусов 3 и 4 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что $AB = 13$, а угол между прямыми AB и CD равен $\arcsin\frac{5}{13}$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2.4

1. В Шестьляндии в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 6 рублей и 36 рублей. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 14 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 200 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\arccos(x^2) = 2\arccos(2x)$.

3. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CM = 8$, $AM : BM = 1 : 2$.

4. Решить неравенство $3^{x-1} + 4\cdot 3^{|x-2|} \leqslant 21$.

5. Даны две сферы радиусов 3 и 5 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что угол между прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{6}{7}$, а $AB - CD = 2$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

2004

В этом году вместо устных экзаменов по математике проводился письменный теоретический тур, где предлагались варианты Т1.1–Т1.2 и Т2.1–Т2.2.

Вариант 1.1

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух «десяток», второй — ровно три «девятки», а третий — не менее одной «восьмерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Для каждого значения параметра a найти все решения неравенства $|x+a| \leqslant x$.

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 2 : 1$ и $CN : ND = 2 : 9$. Найти отношение $AD : BC$ оснований трапеции.

4. Найти все такие решения уравнения

$$\frac{2}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{20},$$

что $\sin x - \cos x > 0$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам BC, AB и A_1B_1 соответственно, причем $BK = \frac{1}{3}$, $AL = \frac{3}{4}$, $A_1M = \frac{1}{4}$. Прямая l пересекает прямые CD, C_1K, B_1D_1 и LM в четырех различных точках P, Q, R и S соответственно. Найти длину отрезка PS.

Вариант 1.2

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более трех «десяток», второй — ровно три «девятки», а третий — не менее одной «семерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Для каждого значения параметра a найти все решения неравенства $|x - a| \geqslant x$.

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Отношение боковых сторон трапеции $AB : CD = 2 : 3$. Основание AD трапеции касается окружности в точке K так, что $AK : KD = 1 : 2$. Найти отношение $AD : BC$ оснований трапеции.

4. Найти все такие решения уравнения

$$\frac{3}{\sin x} - \frac{2}{\cos x} = \sqrt{52},$$

что $\sin x + \cos x > 0$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам A_1B_1, A_1D_1 и AD соответственно, причем $A_1K = \frac{1}{2}$, $A_1L = \frac{1}{3}$, $AM = \frac{2}{3}$. Прямая l пересекает прямые BK, A_1C_1, LM и CD в четырех различных точках P, Q, R и S соответственно. Найти длину отрезка PS.

Вариант 1.3

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 138 очков. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более одной «десятки», второй — ровно четыре «девятки», а третий — не менее одной «семерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Для каждого значения параметра a найти все решения неравенства $|x + a| \geqslant x$.

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 4 : 3$ и $CN : ND = 1 : 3$. Найти отношение $AB : CD$ боковых сторон трапеции.

4. Найти все такие решения уравнения

$$\frac{5}{\sin x} + \frac{4}{\cos x} = 2\sqrt{41},$$

что $\cos x - \sin x > 0$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам C_1D_1, B_1C_1 и BC соответственно, причем $C_1K = \frac{1}{3}$, $C_1L = \frac{1}{4}$, $BM = \frac{1}{4}$. Прямая l пересекает прямые AB, LM, A_1C_1 и DK в четырех различных точках P, Q, R и S соответственно. Найти длину отрезка PS.

Вариант 1.4

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 142 очка. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух «десяток», второй — ровно две «девятки», а третий — не менее одной «восьмерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Для каждого значения параметра a найти все решения неравенства $|x - a| \leqslant x$.

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, причем $AM : MB = 3 : 2$. Отношение оснований трапеции $AD : BC = 3 : 1$. Найти отношение $AB : CD$ боковых сторон трапеции.

4. Найти все такие решения уравнения

$$\frac{6}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} = 2\sqrt{61},$$

что $\sin x + \cos x > 0$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам AD, CD и C_1D_1 соответственно, причем $AK = \frac{1}{2}$, $CL = \frac{2}{3}$, $C_1M = \frac{1}{3}$. Прямая l пересекает прямые LM, B_1D_1, A_1K и AB в четырех различных точках P, Q, R и S соответственно. Найти длину отрезка PS.

Вариант Т1.1

1. Найти все действительные значения a, при каждом из которых числа $\sqrt{a^2+1}$ и $\sqrt{4a^2+37}$ оба целые.

2. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку M дуги окружности S_2, которая лежит вне круга S_1 проводятся прямые MA и MB, вторично пересекающие окружность S_1 в точках C и D, лежащих вне круга S_2. Показать, что длина отрезка CD не зависит от выбора точки M.

3. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

$$\frac{\sin x}{y} + \frac{\sin y}{x} \geqslant \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin y}{y}.$$

4. Доказать, что в пространстве существует прямая, образующая равные углы с тремя заданными попарно не параллельными прямыми.

Вариант Т1.2

1. Найти все действительные значения a, при каждом из которых числа $\sqrt{a^2+9}$ и $\sqrt{4a^2-3}$ оба целые.

2. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку M дуги окружности S_2, которая лежит внутри круга S_1 проводятся прямые MA и MB, вторично пересекающие окружность S_1 в точках C и D. Показать, что длина отрезка CD не зависит от выбора точки M.

3. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

$$\frac{\cos x}{y} + \frac{\cos y}{x} \leqslant \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos y}{y}.$$

4. Доказать, что в пространстве существует плоскость, образующая равные углы с тремя заданными попарно не параллельными прямыми.

Вариант 2.1

1. Путь из пункта А в пункт Б катер проплыл за 10 часов, двигаясь против течения реки. На обратном пути из Б в А у катера сломался двигатель, поэтому последнюю треть пути он двигался со скоростью течения реки. Всего на обратный путь ушло 14 часов.

Сколько времени потребовалось бы катеру на обратный путь, если бы двигатель не сломался?

2. Решить неравенство

$$\log_x \log_2 \left(\frac{22}{3} - 2^{3-x}\right) \geqslant 1.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 9$, $HL = 4$ и $AH : HK = 4 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BKL.

4. Найти все значения x, для которых числа $\sin 7x$, $\sin 4x$, $\sin x$ являются последовательными членами строго возрастающей арифметической прогрессии.

5. Три шара лежат на плоском столе, касаясь его в вершинах прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 72$ и $AC = 48$. Радиусы первых двух шаров, касающихся стола в точках A и B, равны соответственно 32 и 8. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар покатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти радиус третьего шара.

Вариант 2.2

1. В первый день бригада выполнила задание за 8 часов, работая без прогульщика Василия. Во второй день бригада в полном составе выполнила $\frac{5}{6}$ такого же задания, а оставшуюся часть Василий доделывал в одиночку. Всего на выполнение задания во второй день ушло 9 часов. Сколько времени требуется бригаде, чтобы выполнить задание в полном составе?

2. Решить неравенство

$$\log_x \log_3 \left(\frac{11}{2} - 7 \cdot 3^{-x}\right) \geqslant 1.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 8$, $HL = 3$ и $AH : HK = 6 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника HLK.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\cos x$, $\sin 3x$, $\cos 7x$ являются последовательными членами строго убывающей арифметической прогрессии.

5. Три шара радиусов 45, 20 и 9 лежат на плоском столе, касаясь его соответственно в вершинах A, B и C прямоугольного треугольника ABC с катетом $AC = 90$ и гипотенузой BC. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар прокатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти длину катета AB.

Вариант 2.3

1. Теплоход проплыл первую четверть пути из пункта А в пункт Б с выключенным двигателем, двигаясь по течению реки. Весь путь из А в Б занял 13 часов. На обратный путь из Б в А теплоход затратил 5 часов. Сколько времени потребуется теплоходу на путь из А в Б, если двигатель не выключать на всем протяжении пути?

2. Решить неравенство

$$\log_x \log_2 \left(\frac{14}{3} - 5 \cdot 2^{-x}\right) \geqslant 1.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $AH = 9$, $HK = 2$ и $CH : HL = 2 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BKL.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\cos 7x$, $\sin 4x$, $\cos x$ являются последовательными членами строго возрастающей арифметической прогрессии.

5. Три шара лежат на плоском столе, касаясь его в вершинах прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 30$ и $AC = 40$. Радиусы первого и третьего шаров, касающихся стола в точках A и C, равны соответственно 20 и 4. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар покатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти радиус второго шара.

Вариант 2.4

1. Два насоса, работая одновременно, наполняют бассейн за 4 часа. Если 60 % объема заполнить с помощью первого насоса, а затем оставшуюся часть — с помощью второго, менее мощного, то на заполнение бассейна уйдет 11 часов. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить весь бассейн, используя только первый насос?

2. Решить неравенство

$$\log_x \log_3 \left(\frac{13}{2} - 10 \cdot 3^{-x}\right) \geqslant 1.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $AH = 16$, $HK = 3$ и $CH : HL = 3 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника HLK.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 7x$ являются последовательными членами строго убывающей арифметической прогрессии.

5. Три шара радиусов 9, 1 и 2 лежат на плоском столе, касаясь его соответственно в вершинах A, B и C прямоугольного треугольника ABC с катетом $AB = 16$ и гипотенузой BC. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар покатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти длину катета AC.

Вариант Т2.1

1. Доказать, что $\log_{448} 112 < \frac{7}{9}$.

2. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что сумма $AM^2 + BM^2 + CM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

3. Доказать, что

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{7}{25} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = \pi.$$

4. Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD равны 1 и 3, а объем пирамиды равен 2. Доказать, что длина ребра BC не меньше 4.

Вариант Т2.2

1. Доказать, что $\log_{640} 160 > \frac{7}{9}$.

2. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность. Доказать, что сумма $AM^2+BM^2+CM^2$ не зависит от выбора точки M на окружности.

3. Доказать, что

$$\arcsin\frac{24}{25} + \arccos\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \pi.$$

4. Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и BC равны 1 и 4, а объем пирамиды равен 6. Доказать, что длина ребра CD не меньше 9.

ФАКУЛЬТЕТЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ГЕОЛОГО-ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ

1975

Вариант 1

1. Решить неравенство $\sqrt{2x+\sqrt{16-x^2}} < \sqrt{2x+4}$.

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30°, а катет, лежащий против этого угла, равен a. Через вершину прямого угла проведена окружность, касающаяся гипотенузы и отсекающая от катетов хорды равной длины. Найти ее радиус.

3. Решить уравнение $3\cos x = \frac{1}{\cos 3x}$.

4. Решить уравнение

$$\log_{x-4}(x-2)\cdot\log_7(x-4)^2 + \log_7(8-x)^2 = 2.$$

5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая m, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар радиуса r касается всех сторон треугольника и прямой m. Найти расстояние от точки A до центра шара, если известно, что $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$.

Вариант 2

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-2} - \sqrt{x^2-2x-3} < 1$.

2. В окружность радиуса r вписана трапеция $ABCD$ с острым углом при основании AD, равным α. Известно, что биссектриса угла C проходит через центр окружности. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение $\sin 6x - \cos x = \cos 3x - \sin 4x$.

4. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x}}(3-x)\cdot\log_2 x+\log_2(x-6)^2=4.$$

5. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит треугольник ABC, в котором $AB=BC=a$, $\angle ABC=90^\circ$. Высота призмы равна a. На ребре AB выбрана точка D так, что $2BD=AD$. Через точки C и D параллельно AC' проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Вариант 3

1. Решить неравенство $\sqrt{x+\sqrt{36-x^2}}<\sqrt{x+6}$.

2. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC, равного a. Биссектриса угла A, равного 45°, проходит через середину боковой стороны CD. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}2x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Решить уравнение

$$\log_2 3\cdot\log_{x+5}4-\log_4(x-5)^2\cdot\log_{x+5}2=1.$$

5. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ служит треугольник ABC, в котором $AB=a$, $AC=2a$, $\angle BAC=120^\circ$. Высота призмы равна a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, которая делит пополам двугранный угол с ребром AB.

Вариант 4

1. Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x-4}<1$.

2. В равнобедренной трапеции основания относятся как $1:2$, а диагональ делит острый угол пополам. Найти площадь трапеции, если длина диагонали равна a.

3. Решить уравнение $1-\operatorname{tg}x=2\cos 2x$.

4. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x}}(6-x)\cdot\log_6 x+\log_6(x-1)^2=2.$$

5. На ребре BC правильного тетраэдра $SABC$ выбрана точка D так, что $CD=2BD$. Через точки A и D перпендикулярно плоскости ABC проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если ребро тетраэдра равно $3a$.

1976

Вариант 1

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены арифметической прогрессии, их сумма равна 21. Числа a_1-1, a_2+1, a_3+21 являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числа a_1, a_2, a_3.

2. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 7x + \cos^2 8x$.

3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, а длина средней линии равна l. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \frac{4}{x^2-6x+12}.$$

5. Шар радиуса R касается всех граней трехгранного угла, плоские углы при вершине которого равны 60°, 60° и 90°. Найти расстояние от вершины угла до центра шара.

Вариант 2

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, их сумма равна 7. Числа a_1, a_2+2, a_3-8 тоже являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти исходные числа.

2. Решить уравнение $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1 - \operatorname{tg} x \cos 2x$.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает сторону CD в середине. Найти площадь параллелограмма, если радиус окружности равен R.

4. Решить неравенство

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{3x^2-10x+2} > \frac{2}{2x^2+1}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Высота параллелепипеда равна 3. Через диагональ BD проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найти площадь получившегося сечения.

Вариант 3

1. Числа a_1, a_2, a_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, их сумма равна 19. Числа a_1, a_2+4, a_3+7 являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти исходные числа.

2. Решить уравнение $\sin^3 x\,(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x\,(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, больший катет BC которого имеет длину 5, из вершины прямого угла C опущена высота CD. В треугольник CBD вписана окружность с центром O, радиус которой равен 1. Определить, в каком отношении прямая AO делит площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\left(x^2+x+1\right)^{x^2-2x-2}>\frac{1}{x^2+x+1}.$$

5. В кубе с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' на ребре CC' выбрана точка E так, что $CE=2C'E$. Через диагональ $B'D'$ верхнего основания и точку E проведена плоскость. Найти расстояние от вершины A до проведенной плоскости, если длина ребра куба равна 1.

Вариант 4

1. Числа a_1, a_2, a_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что числа a_1, a_2+6, a_3 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии, а числа a_1, a_2+6, a_3+48 — последовательные члены некоторой геометрической прогрессии. Найти числа a_1, a_2, a_3.

2. Решить уравнение

$$1-\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}^2 x=\frac{\cos 3x-\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

3. Точка A внутри круга радиуса R удалена от центра O круга на расстояние, равное a. Через точку A проведены две хорды, образующие углы в 30° с диаметром AO. Вычислить площадь вписанного в круг четырехугольника, диагонали которого совпадают с проведенными хордами.

4. Решить неравенство
$$\left(x^2+\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x-\frac{1}{4}} > \frac{3}{3x^2+2}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 1. Через диагональ BD' проведена плоскость, перпендикулярная плоскости $BB'D'D$. Найти расстояние от точки A до проведенной плоскости.

1977

Вариант 1

1. Из пункта А был отправлен вниз по реке плот. Одновременно из пункта Б, расположенного ниже по реке в 100 км от А, вышел навстречу катер, который дошел до А, повернул вниз по течению и догнал плот в 80 км от А через 10 часов после отправления плота. Найти скорость катера в стоячей воде.

2. Решить уравнение $1+\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}\sin x$.

3. Окружность радиуса R касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и M соответственно. Известно, что центр окружности лежит на стороне AC, M — середина стороны BC, длина отрезка BK в два раза больше длины отрезка AK. Найти площадь треугольника.

4. Решить уравнение
$$3\cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2\cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Через вершину B и середины ребер CC' и $A'D'$ проведена плоскость. Найти величину двугранного угла, образованного этой плоскостью и плоскостью основания.

Вариант 2

1. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и Б и ехали с постоянными скоростями. Их встреча произошла за 1 час до прихода первого автомобиля в Б и за 4 часа до прихода второго автомобиля в А. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго?

2. Решить уравнение $(2 + \operatorname{ctg} 3x) \operatorname{tg} x = 1$.

3. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина его диагонали BD равна 10. На плоскости выбрана точка O, удаленная от вершин B и D на одинаковое расстояние, равное 13. Найти расстояние от точки O до ближайшей вершины прямоугольника.

4. Решить уравнение

$$2 \cdot 7^{\log_{2x}(x^2-1)^2} - 9 \cdot 14^{\log_{2x}(x^2-1)} + 7 \cdot 4^{\log_{2x}(x^2-1)} = 0.$$

5. Дан правильный тетраэдр $SABC$ с ребром длины 1. Точки D, E и F лежат соответственно на ребрах AS, BS, CS, причем $AD = BE = \frac{1}{3}$, $CF = \frac{2}{3}$. Найти объем пирамиды $DEFG$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Вариант 3

1. Два самолета вылетают одновременно из пунктов А и Б и летят навстречу друг другу с постоянными скоростями. Их встреча произошла через 3 часа после вылета, а еще через 2 часа первый самолет приземлился в Б. Через какое время после вылета приземлился в А второй самолет?

2. Решить уравнение $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1$.

3. Два прямоугольных треугольника ABC и BCD имеют общую гипотенузу BC, длина которой равна 5, и расположены так, что катеты AB и CD пересекаются в точке O. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник DOB, в 3 раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник AOC, а длина катета BD равна 3. Найти площадь треугольника BOC.

4. Решить уравнение

$$6 \cdot 9^{\log_{x+1}(2x+3)} - 13 \cdot 36^{\log_{(x+1)^2}(2x+3)} + 6 \cdot 4^{\log_{x+1}(2x+3)} = 0.$$

5. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, в котором острый угол A равен $60°$, а длины сторон AB и BC — соответственно a и $2a$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, а их длины равны a.

Через вершины A, B' и D' проведена плоскость. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

Вариант 4

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов А и Б навстречу друг другу и ехали с постоянными скоростями. Встретились они через 2 часа. Первый велосипедист приехал в Б на 3 часа позже, чем второй в А. Сколько времени каждый из них находился в пути?

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

3. Длина основания AB трапеции $ABCD$ равна a, угол A — прямой, острый угол B при основании равен α. Известно, что окружности, построенные на основаниях AB и CD трапеции как на диаметрах, касаются. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение

$$10 \cdot 5^{\log_{x-2}(2x-3)^2} - 29 \cdot 10^{\log_{x-2}(2x-3)} + 10 \cdot 2^{\log_{x-2}(2x-3)^2} = 0.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны $3a$ и $4a$ соответственно. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину a. Через середины ребер AB, SC и точку, лежащую на ребре AC и удаленную от вершины A на расстояние a, проведена плоскость. Определить двугранный угол, образованный этой плоскостью и плоскостью основания.

1978

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ (x+y)^2 - \frac{y^2}{2} = 7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $1 - \cos 3x \operatorname{ctg} x = \sin 3x$.

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D таким образом, что длина отрезка BD в 4 раза больше длины отрезка

AD. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACD и BCD. Известно, что прямая O_1O_2 параллельна прямой BC. Определить, в каком отношении прямая O_1O_2 делит площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{4}\right)\geqslant 1.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; точка N — середина ребра AB, точка M — середина ребра BB', O — точка пересечения диагоналей грани $BCC'B'$. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если известно, что длина ребра куба равна 1.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{3y}{x}-6=\frac{3}{xy}, \\ \frac{6y}{x}+\frac{4x}{y}+1=\frac{45}{xy}. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$2\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

3. В трапеции $ABCD$ угол DAB при основании AB равен 45°. Известно, что окружность радиуса R с центром в точке C касается диагонали BD и продолжений сторон AB и AD трапеции. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(2+\frac{x}{3}\right)+\log_3\left(3-\frac{2}{x}\right)\leqslant 1.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной длины 1. Ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Центр сферы, касающейся ребер SA, AB и AC, лежит в плоскости SBC. Найти радиус сферы.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 4y^2 = 2, \\ 2x^2 - xy + 8y^2 = 11. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x} = \cos 2x - \sin 2x.$$

3. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD имеют длины 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На основании CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E. Известно, что E — середина отрезка BD. Определить, в каком отношении точка F делит отрезок AC.

4. Решить неравенство

$$\log_5\left(6 + \frac{2}{x}\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(1 + \frac{x}{10}\right) \leqslant 1.$$

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Точка M — середина высоты AO треугольника ADB; KL — средняя линия грани $AA'B'B$, параллельная ребру AB. Через точку M проведена прямая, пересекающая прямые KL и $A'D'$ в точках P и Q соответственно. Найти длину отрезка PQ, если длина ребра куба равна 1.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{7y}{2x} - 3 = \frac{5}{2xy}, \\ \frac{4x}{y} + \frac{7y}{x} - 10 = \frac{3}{xy}. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D. Отрезки AD, DC и BD имеют длины 1, 2 и 3 соответственно. Известно, что центры O_1 и O_2 окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC, и точка B лежат на одной прямой. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_8\left(10+\tfrac{5}{x}\right)+\log_{\frac{1}{8}}\left(2-\tfrac{x}{8}\right)\leqslant 1.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 1. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 1. Определить радиус сферы, касающейся плоскости основания и боковых ребер SA, SB и SC.

1979

Вариант 1

1. Два автомобиля едут навстречу друг другу и встречаются через 6 дней. Если бы первый проехал $\frac{2}{3}$ пути, пройденного вторым, а второй $\frac{1}{3}$ пути, пройденного первым, то первому понадобилось бы для этого на два дня меньше, чем второму. Если бы первый автомобиль ехал 1,8 дня, а второй — 1,6 дня, то вместе они проехали бы 520 км. Сколько километров в день проезжает каждый автомобиль?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5=\dfrac{x+y}{x-y}+6\cdot\dfrac{x-y}{x+y}, \\ 2=xy. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x-2\sqrt{3}\,\sin 2x+2\sqrt{3}\,\sin x-6\cos x-1=0.$$

4. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABC прямой, $AB=BC=a$. Окружность с центром в точке D касается сторон AB, BC и прямой AC. Определить площадь пересечения круга, ограниченного этой окружностью, и четырехугольника $ABCD$.

5. Длина ребра куба с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 равна 1. Точки M, N и K лежат на ребрах AA_1, D_1C_1 и CC_1 соответственно, причем $A_1M=\sqrt{3}/2$, $D_1N=$

$= \sqrt{2}/2$, $CK = \sqrt{3}/3$. Через точку K проходит прямая l, параллельная прямой MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри куба.

Вариант 2

1. Два землекопа, работая вместе, выкапывают котлован за 10 дней. Если бы первый землекоп сделал $\frac{3}{4}$ всего объема работы второго, а второй — $\frac{4}{15}$ объема работы первого, то первому понадобилось бы на один день больше, чем второму. Если бы первый землекоп работал 3 дня, а второй — 4, то вместе они бы вынули 34 м^3 грунта. Какой объем грунта вынимает каждый из землекопов в день?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -1 = \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{2xy}{y-x}, \\ xy = 2x + 3. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\cos ax \cos bx = \operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{4}\right) \cos cx \cos dx,$$

где a, b, c, d — последовательные положительные члены арифметической прогрессии.

4. Одна окружность вписана в прямоугольный треугольник, а другая проходит через центр первой и касается одного из катетов треугольника в вершине прямого угла. Найти угол между касательными, проведенными к каждой из окружностей в точке их пересечения.

5. Правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являются основаниями прямой треугольной призмы с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Точки M и N — середины AA_1 и B_1C_1 соответственно. Через середину L ребра AC проходит прямая l, параллельная отрезку MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри призмы, если длины всех ребер призмы равны 1.

Вариант 3

1. Два велосипедиста находятся в пути 6 часов. Если бы первый из них проехал половину всего пути, пройденного вторым, а второй — третью часть всего пути, пройденного первым, то второму понадобилось бы для этого на час больше, чем первому. Если бы первый ехал 2 часа, а второй — 30 минут, то вместе они проехали бы 35 км. Найти скорость каждого велосипедиста.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{x-y}{y} + \dfrac{2y}{x-y}, \\ xy = x+4. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения $4\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, принадлежащие отрезку $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.

4. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABC равен $60°$, $AB = a$, $BC = 2a$. Окружность с центром в точке D касается сторон AB, BC и прямой AC. Определить площадь пересечения ограниченного этой окружностью круга и четырехугольника $ABCD$.

5. Плоскости двух квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны. Длина их общей стороны AB равна 1. Точки P, Q, R — середины отрезков AD, C_1D_1, CC_1 соответственно. Через точку R проходит прямая l, параллельная отрезку PQ. Найти длину части прямой l, заключенной внутри призмы ADD_1BCC_1.

Вариант 4

1. Два завода производят одну и ту же продукцию и выполняют план за 10 дней. Если бы первый завод сделал $\frac{1}{4}$ часть всей плановой продукции второго, а второй — $\frac{1}{5}$ часть всей плановой продукции первого, то первому понадобилось бы для этого на 4 дня больше, чем второму. Если бы первый завод работал 5 дней, а второй — 3 дня, то вместе они бы изготовили 1100 единиц продукции. Сколько единиц продукции выпускает за день каждый завод?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = 2, \\ \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{xy}{x-y} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\cos 2x - \sqrt{3}\,\sin 2x + 5\cos x + 5\sqrt{3}\,\sin x - 6 = 0$.

4. В окружность радиуса R вписан прямоугольный треугольник. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности, если расстояние между центрами упомянутых окружностей равно $R/2$.

5. Ребра AB, AC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ попарно перпендикулярны, а их длины равны 1. Точки M и N лежат на ребрах AB и CD соответственно, причем $AM = \frac{1}{3}$, $DN = \sqrt{2}/3$. Точка F — середина биссектрисы DE в треугольнике BDC. Через F проходит прямая l, параллельная отрезку MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри пирамиды.

1980

Вариант 1

1. Решить уравнение $\cos^2 x(1 - \sin x) = 1 + \sin^3 x$.

2. Длина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{2}$. Углы ABC, ACD и DAC равны соответственно $105°$, $42°$ и $63°$. Найти площадь круга, описанного около треугольника ABD.

3. Найти все неотрицательные корни уравнения

$$\log_6\left(2 + 2^{1-x}\right) - \frac{x}{1 - \log_{1/2} 3} = \log_6 a.$$

4. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Сфера касается ребер AA', $A'D'$, AB и пересекает ребро CC' в точке M такой, что $CM = \frac{1}{3}$. Найти радиус сферы.

5. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства

$$x^4 - 4x^2 + 3 \leqslant 0.$$

Каково при этом максимальное значение выражения $1 + ax - x^2$?

Вариант 2

1. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = 2(\operatorname{ctg} 2x + 1)\sin 2x$.

2. В сектор, дуга которого содержит $30°$, вписан квадрат так, что на дуге сектора лежат две вершины этого квадрата. Радиус сектора равен 13 см. Доказать, что площадь квадрата не превосходит 20 см^2.

3. Найти все неотрицательные корни уравнения

$$x + \log_6\left(1 + 2\cdot 3^{x-1}\right) = x\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \log_6 6a.$$

4. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Сфера касается ребер AA', AB, AD и пересекает ребро CC' в точке M такой, что $CM = 0{,}31$. Найти радиус сферы.

5. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства

$$\left((x-1)^2 - 2{,}5\right)^2 \leqslant 2{,}25.$$

Каково при этом максимальное значение выражения $2x + 2ax - x^2$?

Вариант 3

1. Решить уравнение $\cos 2x - \sin 2x = 2\cos x + 2\sin x + 1$.

2. Длина диагонали BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равна $\sqrt{2}$. Углы BAE, CED, BCD и CDE равны соответственно $135°$, $25°$, $100°$ и $100°$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Найти все неотрицательные корни уравнения

$$\log_6\left(1 + 2\cdot 3^x\right) + \frac{x}{1 + \log_3 2} = \log_6 a.$$

4. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Точка P находится внутри куба и равноудалена от ребер AA', AB, $A'D'$. Найти длину отрезка BP, если $C'P = 1$.

5. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства

$$(x+1)^4 - 4(x+1)^2 + 3 \leqslant 0.$$

Каково при этом минимальное значение выражения $x^2 - 2ax + 2x$?

Вариант 4

1. Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin 6x - \sin 2x = \sin x \cos 3x$.

2. В сектор, дуга которого содержит $30°$, вписан квадрат так, что одна из сторон квадрата лежит на прямолинейном участке границы сектора. Доказать, что площадь квадрата не превосходит $100\,\text{см}^2$, если радиус сектора равен 25 см.

3. Найти все неотрицательные корни уравнения

$$\tfrac{2}{3}\,x + \log_8\bigl(1 + 4^x\bigr) = \log_8 a.$$

4. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Каждая из двух сфер одинакового радиуса $R = \sqrt{3}/2$ касается ребра AB основания и боковых ребер AA' и CC'. Найти расстояние между центрами этих сфер.

5. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства

$$(x+2)\Bigl(\sqrt{x^2} - 1\Bigr) \leqslant 0.$$

Каково при этом минимальное значение выражения $x^2 - 4ax + 3$?

1981

Вариант 1

1. Из молока, жирность которого 5%, делают творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Определить, сколько творога получается из 1 т молока.

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\,\cos x - \sin x = 2\cos 5x$.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках D и E. Определить площадь треугольника ABC, если $DE = 1$.

4. Решить неравенство

$$\tfrac{2}{x} + 3 \leqslant \sqrt{41 - \tfrac{16}{x}}.$$

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Шар радиуса $\sqrt{6}/4$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\sqrt{6}/12$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, CB, DB за вершину B. Определить расстояние между центрами шаров.

Вариант 2

1. После смешивания растворов, содержащих 25% и 60% кислоты, получился раствор, содержащий 39% кислоты. Определить, в какой пропорции были смешаны растворы.

2. Решить уравнение $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$.

3. Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке N и продолжение стороны BC в точке D. Площади треугольников AMN и NCD равны. Определить длину отрезка MN.

4. Решить неравенство

$$\tfrac{1}{x} - 1 \leqslant \sqrt{13 - \tfrac{6}{x}}.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1, боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол в 60°. Шар радиуса $\sqrt{3}/12$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\sqrt{3}/4$ касается граней трехгранного угла с вершиной B. Определить расстояние между центрами шаров.

Вариант 3

1. Добытая руда содержит 21% меди, обогащенная — 45%. Известно, что в процессе обогащения 60% добытой руды идет в отходы. Определить процентное содержание меди в отходах.

2. Решить уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin 9x$.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Окружность, вписанная в угол CAB, проходит через вершину C и пересекает сторону BC в еще одной точке D. Определить площадь треугольника ABC, если $CD = \sqrt{2}$.

4. Решить неравенство

$$1 - \tfrac{2}{x} \leqslant \sqrt{25 - \tfrac{24}{x}}.$$

5. В основании правильной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота пирамиды равна $\sqrt{3}$. Шар радиуса $\sqrt{3}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, SB, CB за вершину B. Определить расстояние между центрами шаров.

Вариант 4

1. Первая обувная фабрика выпускает 25% обуви со знаком качества, вторая фабрика — 55%. Известно, что обувь со знаком качества составляет 40,6% их общей продукции. Определить, сколько пар обуви в день выпускает вторая фабрика, если первая выпускает в день 12 тысяч пар.

2. Решить уравнение $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos 6x$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = 1$, $\angle B = 120°$. Через середину D стороны AC проходит прямая, которая пересекает сторону BC в точке E и продолжение стороны AB в точке F. Площади треугольников BEF и DEC равны. Найти длину отрезка EF.

4. Решить неравенство

$$2 + \tfrac{1}{x} \leqslant \sqrt{40 - \tfrac{5}{x}}.$$

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 2. Шар радиуса $\frac{\sqrt{6}}{12}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B. Определить расстояние между центрами этих шаров.

1982

Вариант 1

1. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{6x - x^2 - 5}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(4x^4 + 3x^2 + 6) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) \geqslant \log_2(3x^2 + 6).$$

3. Угол между векторами $\vec{a} = (\alpha;\ 1;\ \sqrt{6/5})$ и $\vec{b} = (3;\ 1;\ 0)$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найти α (базис прямоугольный).

3С[*]**.** В остроугольном треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, косинус угла ACB равен $3/4$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить уравнение $\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 6x = \sin\left(10x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, плоскости граней SAB и ABC перпендикулярны, $SA = SB$, высота пирамиды равна 1. На ребре SA выбрана точка M так, что $AM = 2SM$, точка N — середина ребра SC. Плоскость α проходит через точки B, M и N. Найти расстояние от точки A до плоскости α.

Вариант 2

1. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{21 + 4x - x^2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(2x^4 + 3x^2 + 8) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2) \geqslant \log_3(x^2 + 4).$$

3. Угол между векторами $\vec{a} = (\sqrt{2/5};\ \alpha;\ 1)$ и $\vec{b} = (0;\ 2;\ -1)$ равен $\frac{\pi}{6}$. Найти α (базис прямоугольный).

3С. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям AB и CD, $AB = 3$, $CD = 1$. Окружность, построенная на стороне BC как на диаметре, касается стороны AD. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение $1 + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 8x = \sin 5x$.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, ее высота равна $12/5$. Плоскость α проходит через прямую SA параллельно диагонали BD основания. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.

---

[*]Задача 3С предназначалась вместо задачи 3 для тех абитуриентов, которые окончили школу до 1977 г. и сдавали экзамены по «старой» программе.

Вариант 3

1. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{16 - 6x - x^2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_5(3x^4 + x^2 + 6) + \log_{\frac{1}{5}}(2x^2 + 6) \geqslant \log_5(x^2 + 1).$$

3. Угол между векторами $\vec{a} = (-\sqrt{2};\ \sqrt{6};\ \alpha)$ и $\vec{b} = (1;\ 0;\ \sqrt{2})$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найти α (базис прямоугольный).

3С. В остроугольном треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 9$, косинус угла ACB равен $\frac{2}{3}$. Найти длину медианы CM треугольника ABC.

4. Решить уравнение $\cos\left(6x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 10x = \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$.

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\sqrt{3}$. Точки M, N, P — середины ребер BC, CC_1, A_1C_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M, N и P. Найти расстояние от вершины A до плоскости α.

Вариант 4

1. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{24 + 2x - x^2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(3x^4 + 3x^2 + 20) + \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 + 4) \geqslant \log_2(x^2 + 5).$$

3. Угол между векторами $\vec{a} = (-2\sqrt{3};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \alpha)$ и $\vec{b} = (0;\ 1;\ \sqrt{3})$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найти α (базис прямоугольный).

3С. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям и равна 2. Окружность, построенная на AD как на диаметре, касается боковой стороны BC трапеции в точке K, причем $BK = 4KC$. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение $\cos 10x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 6x$.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$, точка M — середина ребра AB. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, ее высота равна $3\sqrt{2}/4$. Через прямую DM параллельно прямой SA проходит плоскость α. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.

1983

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 2x \cos x = \operatorname{tg} 3x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x \sin x.$$

2. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $10/3$, косинус угла C равен $5/13$, а площадь треугольника равна 60. Найти стороны треугольника ABC.

3. По беговой дорожке длиной 400 м от одной стартовой линии одновременно стартовали два бегуна (разрядник и начинающий). Скорость разрядника на 200 м/мин больше скорости начинающего. Через полминуты после старта разрядник остановился на 20 секунд. За это время начинающий обогнал разрядника. Какой могла бы быть скорость разрядника, чтобы, несмотря на остановку, он смог закончить дистанцию первым? Скорости бегунов во время движения неизменны и постоянны.

4. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{a^2-2}[(a^2-1)x^2 + 2x + 2] > 1.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие лежат на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найти длину медианы треугольника.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 2\cos^2 x.$$

2. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $3/2$, $AB = 5$, а площадь треугольника ABC равна 12. Найти остальные стороны треугольника ABC.

3. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 13,5 км, одновременно выехал велосипедист и вышел пешеход. Скорость велосипедиста на 12 км/ч больше скорости пешехода. Через 30 минут велосипедист остановился и простоял 1,5 часа. За это время пешеход обогнал велосипедиста. Какой могла быть скорость пешехода, если известно, что велосипедист несмотря на остановку прибыл в пункт B первым? Скорости велосипедиста и пешехода во время движения неизменны и постоянны.

4. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{a^2-1}(a^2x^2 - 2ax + 4) > 1.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны $\sqrt{2}$. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна из его вершин совпадает с серединой ребра AA_1, а две другие лежат на прямых AC и B_1D_1 соответственно. Найти площадь треугольника.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} 3x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x.$$

2. В треугольнике ABC $AB = 10$, радиус вписанной окружности равен 3, $\cos\angle C = 3/5$. Найти остальные стороны треугольника ABC.

3. В два одинаковых резервуара объемом 75 м^3 каждый одновременно начала поступать вода из труб, в первый резервуар — по первой трубе, во второй — по второй. Производительность первой трубы на 10 $м^3$/ч больше производительности второй. Через час работы первую трубу перекрыли на 15 минут, в результате количество воды во втором резервуаре превысило количество воды в первом. С какой производительностью могла бы работать первая труба, чтобы несмотря на перерыв в работе первый резервуар наполнился быстрее второго? Известно, что производительность каждой трубы во время работы неизменна и постоянна.

4. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{a^2-1}[(a^2-2)x^2+2x+5]>1.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с серединой ребра AA_1, а две другие лежат на прямых A_1D_1 и CD соответственно. Найти длину биссектрисы этого треугольника.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sin 3x\cos x=\operatorname{tg}4x\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos 3x\sin x.$$

2. В треугольнике ABC $AB=13$, радиус вписанной окружности равен $10/3$, сумма длин сторон AC и BC равна 23. Найти стороны AC и BC этого треугольника.

3. Две буровые установки начали одновременно бурить скважины глубиной по 1050 м каждая. Скорость бурения первой установки на 400 м в месяц больше скорости бурения второй. Через месяц работы на первой установке произошла поломка, на устранение которой понадобилось два месяца. К моменту окончания ремонта выяснилось, что вторая установка достигла большей глубины по сравнению с первой. С какой скоростью могла бы работать вторая установка, если известно, что первая установка закончила работу по бурению скважины быстрее второй, несмотря на остановку? Скорость бурения каждой установки во время работы неизменна и постоянна.

4. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{a^2-6}[(a^2-1)x^2+4ax+5]<1.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с центром грани $ABCD$, а две другие лежат на прямых B_1D_1 и CC_1 соответственно. Найти высоту этого треугольника.

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение $\sin 5x^2+\sin 8x^2=0$.

2. Решить уравнение $\log_{2x}(2x^2-x-14)=1$.

3. Два ромба $ABCD$ и $AMNK$, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $30°$. Известно, что углы при вершине A каждого ромба равны $60°$, площадь пересечения ромбов равна $5\sqrt{3}$, а площадь их объединения равна $23\sqrt{3}$. Найти площадь каждого из ромбов.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2+1)\sin^2 x+2a^2\sin x+\frac{1}{2}=0$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Две сферы одинакового радиуса касаются друг друга, причем центр первой сферы совпадает с вершиной D, а центр второй сферы расположен внутри куба и она касается ребер трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус сфер.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\cos 7x^2+\cos 6x^2=0$.

2. Решить уравнение $\log_x(3x^2-7x-15)=2$.

3. Равносторонние треугольники ABC и AMN, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $30°$. Известно, что площадь пересечения треугольников ABC и

AMN равна $63\sqrt{3}/8$, а площадь их объединения равна $215\sqrt{3}/8$. Найти площадь каждого из треугольников.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$2(a^2+1)\cos^2 x + 4a^2\cos x + 1 = 0$$

не имеет решений.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус второй сферы.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\sin 2x^2 - \sin 9x^2 = 0$.

2. Решить уравнение $\log_x(x^2-12) = 1$.

3. Два квадрата $ABCD$ и $AMNK$, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $45°$. Известно, что площадь пересечения квадратов равна $17/2$, а площадь их объединения равна $69/2$. Найти площадь каждого из квадратов.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x + a^2\sin x + \tfrac{1}{2} = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Центр сферы радиуса 1 находится в вершине D. Вторая сфера, центр которой находится внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла куба с вершиной A_1. Найти радиус второй сферы.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\cos 4x^2 - \cos 11x^2 = 0$.

2. Решить уравнение $\log_x(3x^2-5x+3) = 2$.

3. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABC и AMN имеющие общую вершину A, расположены так, что их катеты AB и AM образуют угол в $45°$. Угол при вершине A в каждом из треугольников прямой. Известно, что площадь пересечения треугольников равна 49, а площадь их объединения равна 213. Найти площадь каждого из треугольников.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$\cos^2 x + a^2 \cos x + 1 = 0$$

не имеет решений.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, центр которой находится внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла куба с вершиной B_1. Найти радиус второй сферы.

1985

Вариант 1

1. Определить, какое из двух чисел больше: $5^{\left(\frac{1}{2}\log_{25} 27 - \log_{1/5} 3\right)}$ или $3\sqrt{3}$.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 27 = 2(x+1)^2 + y^2, \\ 9 = xy + y. \end{cases}$$

3. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ таковы, что $AD = 3BC$. На сторонах AB и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM = 2AM$ и прямая MN делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $CN : ND$.

4. Решить уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 7x$.

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 1. Точка M выбрана на ребре AB так, что $AM = 2MB$, точка N — середина ребра A_1C_1. Через вершину C и точки M и N проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью основания ABC.

Вариант 2

1. Определить, какое из двух чисел больше: $3^{\left(\frac{1}{4}\log_9 625 - \frac{3}{4}\log_{1/3} 5\right)}$ или $\sqrt{125}$.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 28 = 3x^2 + (y+3)^2, \\ 8 = xy + 3x. \end{cases}$$

3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки M и N. Прямые BN и AM пересекаются в точке K, при этом $KN = 3BK$, $DN = 2CN$. Найти отношение $BM : MC$.

4. Решить уравнение $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 5x$.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = 2$. Через вершины B_1, D и точку M — середину ребра BC проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью грани $ABCD$.

Вариант 3

1. Определить, какое из двух чисел больше: $7^{\left(\frac{1}{4}\log_{49} 32 - \frac{1}{2}\log_{1/7} 4\right)}$ или $\sqrt[3]{16}$.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 21 = 5(x-1)^2 + y^2, \\ 2 = xy - y. \end{cases}$$

3. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и N. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $BK = 2KN$, $AK = 3KM$. Найти отношение $BM : MC$.

4. Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 6x$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, высота пирамиды равна 2. Точки M и N — середины ребер SB и CD соответственно. Через вершину A и точки M и N проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью основания $ABCD$.

Вариант 4

1. Определить, какое из двух чисел больше: $2^{\left(\frac{5}{4}\log_{8} 49 - \frac{1}{2}\log_{1/4} 7\right)}$ или $7\sqrt[3]{7}$.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 6 = 2x^2 + (y-4)^2, \\ 2 = 4x - xy. \end{cases}$$

3. Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $AK = 3KM$, $KN = 2BK$. Найти отношение $CN : ND$.

4. Решить уравнение $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos 9x$.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точка M — середина ребра C_1D_1, точка N выбрана на ребре AB так, что $AN = 2NB$. Через вершину D и точки M, N проведена плоскость α. Определить двугранный угол между плоскостью α и плоскостью грани $ABCD$.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение $4\cos^2 x - 5\sin 2x = 4 + \cos 2x$.

2. Решить уравнение

$$\log_{49}(7x+28)^2 + \log_7(7x-28) = \log_7(2x^2-6x-9) + 2.$$

3. Длина стороны BC треугольника ABC равна a, угол A равен α ($\alpha > \frac{\pi}{2}$). Точка D лежит на прямой AB и равноудалена от точек A и C. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, C, D.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8a - 4 = 4ax + y, \\ 9 - 18a = (1-5a)x + (a-2)y \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1D_1$ равна 1, длины боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 равны 2. Плоскость α проходит через вершины A, B и C_1; плоскость β проходит через вершины B_1, C и точку M — середину ребра AA_1. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью основания ABC.

Вариант 2

1. Решить уравнение $3\sin^2 x = \cos 2x + 4\sin 2x$.

2. Решить уравнение

$$\log_5(5x-15) + \log_{25}(x+3)^2 = \log_5(2x^2-4x-10) + 1.$$

3. Длина стороны BC треугольника ABC равна a, а угол BAC равен α. Точка O — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2+1=ax+3y, \\ 5a^2+5=(3a+14)x+(a+8)y \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1, ее высота равна 2. Плоскость α проходит через вершины A, S и середину M ребра BC, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины ребер AS и CS. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью основания $ABCD$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $2\cos 2x + 5\cos^2 x = 8\sin 2x - 6$.

2. Решить уравнение

$$\log_2(2x-2)+\log_4(x+1)^2=2+\log_2(x^2+x-3).$$

3. Длина стороны BC треугольника ABC равна a, угол A равен α. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2-2a=2ax+y, \\ 10a-5a^2=-10x+(a-6)y \end{cases}$$

не имеет решений.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины ребер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью грани ABC.

Вариант 4

1. Решить уравнение $8 + 6\cos 2x = 7\sin 2x - 8\cos^2 x$.

2. Решить уравнение

$$\log_3(2x-4) + \log_9(x+2)^2 = 1 + \log_3(x^2+2x-9).$$

3. В остроугольном треугольнике ABC длина стороны BC равна a, угол A равен α. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6a - 12 = 3ax + 2y, \\ 14 - 7a = \left(\frac{5}{2}\,a + 2\right)x + (a-2)y \end{cases}$$

не имеет решений.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость α проходит через вершины A, B_1 и D_1, плоскость β проходит через вершины A_1, C_1 и середину M ребра BC. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью грани $ABCD$.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение $(13x^2 + 2x - 14)\arccos x = 0$.

2. Решить уравнение

$$2^{2\sin 2x - 2\cos 2x + 3} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos 2x - \sin 2x - \log_6 14} + 3^{2\sin 2x - 2\cos 2x + 1} = 0.$$

3. Определить, при каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь.

4. Из трех кусков сплавов меди и никеля с соотношением по массе этих металлов $2:1$, $3:1$, $5:1$ получили новый сплав. Его масса оказалась равной 12 кг, а соотношение меди и никеля в нем составило $4:1$. Найти массу каждого исходного куска, если первый весил вдвое больше второго.

5. В пирамиде $ABCD$ ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, $DC = \sqrt{13}$, $\angle ACB = 60^\circ$. Центр сферы радиуса 5 находится в вершине D. Найти длину линии пересечения сферы с основанием ABC.

Вариант 2

1. Решить уравнение $(17x^2 + 2x - 18)\arcsin x = 0$.

2. Решить уравнение

$$3^{2\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos 2x + 2} - \left(\frac{1}{15}\right)^{-\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \log_{15} 18} + 5^{2\cos 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x + 1} = 0.$$

3. Определить, при каком значении высоты AN равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) периметра 6 имеет наибольшую площадь.

4. Из трех кусков сплавов серебра и меди с соотношением масс этих металлов $3:2$, $2:3$, $1:4$ получили новый сплав. Его масса оказалась равной 22 кг, а соотношение серебра и меди в нем составило $1:1$. Найти массу каждого исходного куска, если второй весил вдвое больше третьего.

5. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 3 и острым углом B, равным 60°. Высота призмы равна $3/2$. Центр сферы радиуса 3 находится в вершине C_1. Найти длину линии пересечения сферы и основания $ABCD$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $(15x^2 + 2x - 16)\arccos x = 0$.

2. Решить уравнение

$$3^{2\cos 2x - 2\sin 2x + 2} - \left(\frac{1}{15}\right)^{\sin 2x - \cos 2x - \log_{15} 18} + 5^{2\cos 2x - 2\sin 2x + 1} = 0.$$

3. Определить, при каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 8 имеет наибольшую площадь.

4. Из трех кусков сплавов олова и свинца с соотношением масс этих металлов $4:1$, $1:1$ и $1:4$ получили новый сплав. Его масса оказалась равной 24 кг, а соотношение олова и свинца в нем составило 2 : 3. Найти массу каждого исходного куска, если первый весил вдвое больше второго.

5. Дан прямой круговой цилиндр, высота которого равна 4, а радиус основания равен 3. В некоторой точке C, лежащей на окружности одного из оснований, находится центр сферы радиуса 6. Определить длину линии пересечения сферы с другим основанием цилиндра.

Вариант 4

1. Решить уравнение $(22x^2 + 2x - 23)\arcsin x = 0.$

2. Решить уравнение

$$2^{2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x + 3} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - \log_6 14} + 3^{2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x + 1} = 0.$$

3. При каком значении высоты равнобедренная трапеция с острым углом 45° и периметром 8 имеет наибольшую площадь?

4. Из трех кусков сплавов золота и серебра с соотношением масс этих металлов 1 : 1, 1 : 5 и 5 : 1 получили новый сплав. Его масса оказалась равной 24 кг, а соотношение золота и серебра в нем составило 2 : 1. Найти массу каждого исходного куска, если третий кусок весил втрое больше первого.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1, в вершине A_1 находится центр сферы радиуса 2. Найти длину линии пересечения сферы и основания $ABCDEF$.

1988

Вариант 1.1*

1. Парабола с вершиной, лежащей на оси Ox, касается прямой, проходящей через точки $A(-1;\,-1)$ и $B(4;\,4)$, в точке A. Найти уравнение параболы.

*В 1988 г. предлагались две группы вариантов (1.1–1.4, 2.1–2.4) на двух экзаменационных потоках.

2. Решить уравнение

$$4\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x - 2\sin^2 x = \sin 2x.$$

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки M и N — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, K — середина дуги AB, не содержащей точку C. Найти площадь четырехугольника $AMNK$.

4. Решить уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2 + 46x + 48) = 0.$$

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AK, $AE : EK = 1 : 3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2, $K_2F : FL_2 = 3 : 5$. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 1.2

1. Парабола с вершиной, лежащей на оси Oy, касается прямой, проходящей через точки $A\,(-1;\,1)$ и $B\,(1;\,5)$, в точке B. Найти уравнение параболы.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 1 = 2\sin 2x$.

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки E и F — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, M и K — точки пересечения хорды EF с катетами AC и BC. Найти площадь четырехугольника $AMKB$.

4. Решить уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+1}(11x^2 + 12x) = 0.$$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 3 лежит в основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами, равными 1. Параллелепипед $AKLMA_2K_2L_2M_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2, MM_2 симметричен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относительно точки A. Точка E лежит на отрезке AM, $AE = 1$. Точка F выбрана на отрезке L_2M_2 так, что $L_2F = 1$. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Вариант 1.3

1. Парабола с вершиной, лежащей на оси Ox, касается прямой, проходящей через точки $A\,(1;\,2)$ и $B\,(2;\,4)$, в точке B. Найти уравнение параболы.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} = \sin 2x + 2\cos^2 x.$$

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$ описана окружность. Точки E и F — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, M и K — точки пересечения хорды EF с катетами AC и BC. Найти длину отрезка MK.

4. Решить уравнение

$$\log_{x+1}\log_3\log_{x+2}(x^3 + 10x^2 + 8x - 1) = 0.$$

5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 2. Призма $AKLA_1K_1L_1$ с основанием AKL и боковыми ребрами AA_1, KK_1, LL_1 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки P — середины отрезка AA_1. Точка E выбрана на отрезке LK_1 так, что $LE : EK_1 = 1 : 3$, точка F — середина отрезка PL. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 1.4

1. Парабола с вершиной, лежащей на оси Oy, касается прямой, проходящей через точки $A\,(1;\,1)$ и $B\,(-1;\,3)$, в точке A. Найти уравнение параболы.

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = 2\cos 2x + 1$.

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$ описана окружность. Точки M и N — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, K — середина дуги AB, не содержащей точку C. Найти площадь четырехугольника $CMKN$.

4. Решить уравнение

$$\log_{x+4} \log_3 \log_{x+3}(x^2 + 7x + 12) = 0.$$

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 1. Призма $BCDKLM$ с боковыми ребрами BK, CL, DM симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки P — середины ребра BC. Точка E — середина отрезка PK, точка F выбрана на отрезке KM так, что $KF : FM =: 3$. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 2.1

1. Решить уравнение

$$\lg \frac{6x^2 + 1}{1 - 3x} + \lg \frac{3x - 1}{5x - 5} = 0.$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{5 \sin 2x - 7 \cos x - 14}{\sin \frac{x}{2}} = -40 \cos \frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi \right]$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$, $BC = 1$ вписан в прямоугольник $AMNK$. Известно, что вершина C лежит на стороне MN, $MC : CN = 2 : 1$, а точка B лежит на стороне NK прямоугольника. Найти площадь треугольника ABK.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}}.$$

5. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$, $AC = 4$ лежит в основании треугольной пирамиды $SABC$, боковые ребра которой равны 5. На луче AC выбраны точки M и N так, что $AM = 1$, $AN = 6$; на луче BS выбраны точки P и Q таким образом, что $BP = 1$, $BQ = 3$. Найти объем пирамиды $MNPQ$.

Вариант 2.2

1. Решить уравнение

$$\lg\frac{4x^2+1}{2-x}+\lg\frac{2-x}{11x+4}=0.$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-\frac{4}{5}\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{6},\, 2\pi\right]$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$ вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B и C лежат на его сторонах, не содержащих точку A. Найти площадь квадрата.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}.$$

5. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=2$, $AC=4$ лежит в основании треугольной пирамиды $SABC$, боковые ребра которой равны 4. На луче CA выбраны точки M и N так, что $CM=1$, $CN=6$; на луче BS выбраны точки P и Q таким образом, что $BP=2$, $BQ=5$. Найти объем пирамиды $MNPQ$.

Вариант 2.3

1. Решить уравнение

$$\lg\frac{2x^2+3}{3x+1}+\lg\frac{3x+1}{3x+5}=0.$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{5\sin 2x+15\sin x-4}{\cos\frac{x}{2}}=16\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{2\pi}{3},\, 2\pi\right]$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC=2$, $BC=3$. На прямую, проходящую через точку C, опущены перпендикуляры AH и BK. Известно, что точка H лежит между точками C и K, причем $CK=3CH$. Найти площадь трапеции $AHBK$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$$

5. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, боковые ребра равны 4 и образуют угол в 60° с плоскостью основания. На луче BC выбраны точки M и N так, что $BM = 2$, $BN = 7$; на луче AA_1 выбраны точки P и Q таким образом, что $AP = 2$, $AQ = 5$. Найти объем пирамиды $MNPQ$.

Вариант 2.4

1. Решить уравнение

$$\lg\frac{2x^2+1}{x+1}+\lg\frac{x+1}{3x+10}=0.$$

2. Найти все корни уравнения

$$\frac{4\cos^2 x-3}{\sin\frac{x}{2}}=-8\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $\left[\,\frac{7\pi}{6},\,2\pi\,\right]$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = 1$, $BC = 2$. На прямую, проходящую через вершину C, опущены перпендикуляры AH и BK. Известно, что точка C лежит между точками H и K, причем $CK = 3CH$. Найти площадь трапеции $AHKB$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6.$$

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 3, боковые ребра равны 5. Точки M и N выбраны на луче AB так, что $AM = 1$, $AN = 7$; точки P и Q выбраны на луче CS таким образом, что $CQ = 2$, $CP = 6$. Найти объем пирамиды $MNPQ$.

1989

Вариант 1

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом — 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

2. Решить уравнение $4\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = \frac{5}{\cos x}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC медианы BM, CN и высота AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\sqrt{21x+16} - \sqrt{x-4} < 20$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Все боковые ребра пирамиды равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость α. Определить угол между плоскостью α и плоскостью SAC.

Вариант 2

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 40%, а во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра?

2. Решить уравнение $4\operatorname{tg} 2x + 7\operatorname{ctg} 2x = \frac{13}{\sin 2x}$.

3. В треугольнике ABC медианы AM, BN и высота AH равны соответственно 5, $7/2$ и 3. Точка M лежит между B и H. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\sqrt{9x+4} - \sqrt{x-2} < 8$.

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза BC которого равна 1, $\angle ABC = 60°$. Ребра AD, BD, CD имеют длину $\sqrt{13}/4$, точка M — середина ребра CD. Через прямую BM под углом 45° к плоскости ABC проведена плоскость, пересекающая ребро AC в некоторой точке N. Найти отношение $AN : NC$.

Вариант 3

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 10%, а в другом — 20% меди. Сколько нужно первого и второго сплавов, чтобы получить 15 кг нового сплава, содержащего 14% меди?

2. Решить уравнение $5\sin x \operatorname{tg} x + 7\cos x + 11 = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высота AH, медиана BM и сторона BC соответственно равны 9, 15/2 и 7. Найти длину медианы CN.

4. Решить неравенство $\sqrt{5x+6} - \sqrt{x-1} < 4$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Ребро AD перпендикулярно плоскости основания, $AD = 1$. Точка M — середина ребра BD. Через прямую MC параллельно высоте AH треугольника ABC проведена плоскость α. Определить угол между плоскостью α и плоскостью ABD.

Вариант 4

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 30%, а во втором — 50% золота. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 10 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 42% золота?

2. Решить уравнение $5\cos 2x + 2\sin 2x \operatorname{tg} 2x + 7 = 0$.

3. В треугольнике ABC высота AH, медиана BN и сторона BC равны соответственно 5, 13/2 и 10. Найти длину медианы AM, если известно, что точка H лежит между B и M.

4. Решить неравенство $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+2} < 3$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 1$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно $2\sqrt{5}$, точка M — середина CD. Через прямую BM под углом 45° к плоскости SAB проведена плоскость, пересекающая ребро SA в некоторой точке N. Найти отношение $SN : NA$.

1990

Вариант 1

1. Решить уравнение $\log_x 2 + \log_{2x} 4 = \log_{8x} 16$.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$2\cos^2 x = 1 - 7\sin x - 2\cos 2x.$$

3. Прямая l_1 касается окружностей O_1 и O_2 внешним образом (т. е. окружности лежат по одну сторону от прямой l_1), расстояние между точками касания равно 24. Прямая l_2 является внутренней общей касательной (т. е. окружности лежат по разные стороны от прямой l_2), а расстояние между точками касания в этом случае равно 7. Наименьшее расстояние между точками окружностей O_1 и O_2 равно 1. Найти радиусы данных окружностей.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x+22}}{x+4} < 1$.

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $4/\sqrt{3}$, высота призмы равна 3. Пусть K — точка пересечения диагоналей BC' и $B'C$ боковой грани $BB'C'C$. Сфера, центр которой принадлежит призме, касается граней ABC, $AA'B'B$, $AA'C'C$ и прямой $A'K$. Найти радиус сферы.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\log_x 25 + \log_{125x} 5 = \log_{25x} 625$.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$2(1 + \sin^2 x) = 2\cos 2x - 5\cos x.$$

3. Прямая l_1 касается окружностей O_1 и O_2 внешним образом (т. е. окружности лежат по одну сторону от прямой l_1), расстояние между точками касания равно 12. Прямая l_2 является внутренней общей касательной (т. е. окружности лежат по разные стороны от прямой l_2), расстояние между точками касания равно 8. Найти радиусы окружностей O_1 и O_2, если известно, что радиус одной из них в пять раз больше радиуса другой.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x-4} < 1$.

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 1 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней $ABCD$, $AA'B'B$, $AA'D'D$ и прямой $A'C$. Найти радиус сферы.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\log_{4x} 4 + \log_{8x} 8 = \log_x 16$.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$4\cos^2 x = 2 - 23\sin x - 3\cos 2x.$$

3. К двум окружностям O_1 и O_2 проведены две внешние общие касательные l_1 и l_2 (т. е. такие, для каждой из которых окружности O_1 и O_2 лежат по одну сторону от касательной), а также общая внутренняя касательная l_3 (для которой окружности лежат по разные стороны от нее). Известно, что расстояние между точками касания l_3 с окружностями O_1 и O_2 равно 2 и что l_3 образует с прямыми l_1 и l_2 соответственно углы в $30°$ и $90°$. Найти радиусы данных окружностей.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{5x+11}}{x+1} < 1$.

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $3\sqrt{3}$, высота SH пирамиды равна 2. Сфера, центр которой лежит внутри пирамиды, касается граней ABC, SAB, SAC и высоты SH. Найти радиус сферы.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\log_x 9 + \log_{3x} 27 = \log_{9x} 81$.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$6\sin^2 x = 5 - 13\cos x + 3\cos 2x.$$

3. Окружности O_1 и O_2 касаются в точке A. К окружностям проведена общая касательная l, отрезок которой между точками касания имеет длину 5. Известно, что расстояние от точки A до касательной l равно 2. Найти радиусы данных окружностей.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x-3} < 1$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Сфера, центр которой лежит внутри пирамиды, касается граней $ABCD$, SCB, SCD и ребра SA. Найти радиус сферы.

1991

Вариант 1

1. Из первой бочки перелили во вторую некоторое количество воды, и в первой бочке осталось втрое больше воды, чем стало во второй. Затем еще раз из первой бочки перелили во вторую столько же воды, после чего во второй бочке стало вдвое меньше воды, чем осталось в первой. Во сколько раз первоначально было больше воды в первой бочке, чем во второй?

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E так, что угол BEC прямой. Найти площадь треугольника BCE, если $BC = \sqrt{10}$, а расстояние от центра квадрата до точки E равно 1.

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x+20)^2 \leqslant \left[\log_{\sqrt{3}-1}(2-\sqrt{3})\right] \log_{2-\sqrt{3}}\left[(x+20)(x^2-2x-8)\right].$$

4. Решить уравнение $\cos x + \sin x + |\cos x - \sin x| = 2\operatorname{ctg} x$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Точка P — середина ребра SB. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и SC перпендикулярны.

Вариант 2

1. Возвращаясь с рыбалки, Вася отдал Пете несколько рыб, чтобы уравнять улов. Если бы, наоборот, Петя отдал Васе столько же рыб, то у Васи оказалось бы в пять раз больше рыб, чем у Пети. Во сколько раз улов Васи больше улова Пети?

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен равносторонний треугольник ABD так, что вершины C и D оказались по разные стороны от прямой AB. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = 6$, а расстояние от центра треугольника ABD до вершины C равно $\sqrt{21}$.

3. Решить неравенство

$$\log_{2-\sqrt{3}}\left[(x-11)(x^2-4x-5)\right] \geqslant \left[\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)\right]\log_{\sqrt{2}-1}(x-11)^2.$$

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x| = 2\cos x$.

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найти объем призмы, если известно, что прямые AB' и CA' перпендикулярны.

Вариант 3

1. Теплоход плывет по течению Оби вдвое медленнее, чем скутер против течения, а скутер по течению плывет в четыре раза быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз в стоячей воде скорость скутера больше скорости теплохода?

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ так, что вершина C находится вне квадрата. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = \sqrt{13}$, а расстояние от центра квадрата до вершины C равно 3.

3. Решить неравенство

$$\log_{3-\sqrt{5}}(x+9)^2 \leqslant \left[\log_{3-\sqrt{5}}(\sqrt{5}-2)\right]\log_{\sqrt{5}-2}\left[(x+9)(x^2-4x+3)\right].$$

4. Решить уравнение $\cos x + \sin x + |\cos x - \sin x| = 2\operatorname{tg} x$.

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Точки P и Q — середины ребер SA и SB. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые CP и AQ перпендикулярны.

Вариант 4

1. От двух бревен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того как от них еще раз отпилили по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

2. На стороне AB равностороннего треугольника ABC как на гипотенузе построен прямоугольный треугольник ABD так, что вершины C и D расположены по одну сторону от прямой AB. Найти площадь треугольника ABD, если известно, что $AB = \sqrt{21}$, а расстояние от центра треугольника ABC до вершины D равно 1.

3. Решить неравенство

$$\log_{4-\sqrt{10}}(x+16)^2 \leqslant \\ \leqslant \left[\log_{4-\sqrt{10}}(\sqrt{10}-3)\right] \log_{\sqrt{10}-3}\left[(x+16)(x^2-6x+8)\right].$$

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x| = 2\sin x$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2. Точки P и Q — середины ребер SB и SD соответственно. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и CQ перпендикулярны.

1992

Вариант 1

1. Из пункта A одновременно в одном и том же направлении отправились велосипедист и пешеход. Через 1 час велосипедист остановился на 10 минут, а затем развернулся и поехал навстречу пешеходу. Их встреча произошла через 34 минуты после разворота велосипедиста. Через какое время после старта произошла бы их встреча, если бы велосипедист остановился на 20 минут? Скорости велосипедиста и пешехода постоянны.

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos^2 x}(2\cos^2 x \cdot \sin 2x) = \log_{\cos x}\sqrt{3\sin x \cdot \cos x}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина биссектрисы CL равна 12. Найти стороны треугольника, если известно, что $AB > AC$ и что прямая, параллельная CL и делящая площадь треугольника пополам, пересекает его по отрезку длиной $3\sqrt{10}$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{x}}\left[\frac{x^2}{3(x-1/2)^2}\right] \leqslant 2.$$

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 10. Точки P, Q и R лежат на лучах DD', DA и DC соответственно. Найти площадь сечения куба плоскостью PQR, если $DP = DQ = DR = 21$.

Вариант 2

1. Туристы в лодке гребли 1 час вверх по реке, а затем 15 минут плыли по течению, сложив весла. После этого они 30 минут гребли вниз по течению и прибыли к месту старта. Через какое время после старта вернулись бы туристы на то же место, если бы после часовой гребли вверх по реке они плыли по течению, сложив весла, 6 минут? Скорость лодки при гребле в стоячей воде и скорость течения реки постоянны.

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos^2 x}(3\sin 4x \cdot \cos^2 x) = \log_{\cos x}\sqrt{\sin 4x \cdot \sin^2 x}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина высоты CH равна $3\sqrt{14}$. Найти стороны треугольника, если известно, что $AB > AC$ и что прямая, параллельная CH и делящая площадь треугольника пополам, пересекает его по отрезку длиной $2\sqrt{21}$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt[3]{x-1}}\left[\frac{(x-1)^3}{2(x-5/3)^2}\right] \geqslant 6.$$

5. Дана прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC, в которой $AB = 4$, $AC = A'A = 2$, $AB \perp AC$. Точки K и L лежат на лучах $A'C'$ и $B'B$ соответственно, $A'K = 4$, $B'L = 3$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки K и L параллельно прямой AB.

Вариант 3

1. Из пункта А одновременно в противоположных направлениях отправились велосипедист и пешеход. Через 1 час велосипедист остановился на 20 минут, а затем развернулся и через 130 минут догнал пешехода. Через какое время после старта из пункта А велосипедист догнал бы пешехода, если бы остановился на 10 минут? Скорости велосипедиста и пешехода постоянны.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin^2 x}(8\sin^3 x \cdot \cos x) = \log_{\sin x} \sqrt{3\sin 2x}.$$

3. В равнобочной трапеции $ABCD$ угол A равен $60°$, а длина диагонали AC равна $2\sqrt{3}$. Найти площадь трапеции, если известно, что прямая, параллельная AC и делящая площадь трапеции пополам, пересекает трапецию по отрезку, длина которого равна 3.

4. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^2}\left[\frac{(x+1)^3}{(x+1/2)^2}\right] \leqslant 1.$$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD перпендикулярны, $AD = BD = \sqrt{2}$, $AC = BC = AB = 2$. Точка K лежит на луче CA, $KC = 4$, а точка M вместе с точками D, C и серединой AB образуют прямоугольник. Найти площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и K параллельно AB.

Вариант 4

1. Туристы на лодке 1 час гребли вниз по реке и 30 минут плыли по течению, сложив весла. Затем они 3 часа гребли против течения и прибыли к месту старта. Через какое время после старта вернулись бы туристы, если бы после часовой гребли вниз по реке они сразу же стали грести обратно? Скорость лодки при гребле в стоячей воде и скорость течения реки постоянны.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin^2 x}(2\sin 4x \cdot \sin^2 x) = \log_{\sin x} \sqrt{\sin 2x \cdot \cos 2x}.$$

3. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота CH равна 24. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что прямая, параллельная CH и делящая площадь треугольника пополам, пересекает его по отрезку длиной 15.

4. Решить неравенство
$$\log_{(x+2)^3}\left[\frac{2(x+2)^2}{(x+3/2)^2}\right] \geqslant \frac{1}{3}.$$

5. Квадрат $ACC'A'$ является боковой гранью прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$. Точка M лежит на луче $A'C'$, $A'M = 3$, $AC = AB = 2$, угол CAB — прямой. Найти периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через точки M и B параллельно прямой AB'.

1993

Вариант 1

1. Найти $\cos 2x$, если $2\cos x + 2\cos 2x = 1$.

2. Сто один человек купили 212 воздушных шаров четырех цветов, причем ни у кого не было двух шаров одного цвета. Число купивших четыре шара на 13 больше числа купивших два шара. Сколько человек купили только 1 шар?

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса 4, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника CDE, если $BD = 5$, $CD = 2$.

4. Решить неравенство
$$\log_{3\sqrt{2}}(x^2 - 6x + 4) + \log_{\sqrt{2}/6}\left(5 - \frac{9x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \geqslant 0.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 5$, $AD = 10$, $AA' = 2\sqrt{5}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $A'B'$ на плоскость BMD, где M — середина ребра $B'C'$.

Вариант 2

1. Найти $\cos 2x$, если $\sin x - \cos 2x = 1$.

2. Каждый из 113 человек, сдававших экзамен, получил оценку либо 2, либо 3, либо 4, либо 5. Сумма всех оценок равна 412. Сколько было выставлено пятерок, если четверок оказалось на 31 больше, чем двоек?

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса 3, пересекающая сторону AC в точке D. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BDC, если $AB = 5$, $BC = 7$.

4. Решить неравенство

$$\log_{4\sqrt{3}}(2x^2 + 2x - 1) + \log_{\sqrt{3}/12}(2 - x - x^2) \geqslant 0.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 2$, $AD = 4$, $AA' = \sqrt{14}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $C'D'$ на плоскость $A'MC$, где M — середина AD.

Вариант 3

1. Найти $\cos 2x$, если $8\sin x - 4\cos 2x = 3$.

2. Девяносто пять студентов сдали зачеты по четырем предметам. Всех записей в зачетных книжках о сдаче зачетов было сделано 280. Сдавших три зачета столько же, сколько сдавших 1 зачет. Сколько студентов сдали все четыре зачета, если каждый сдал хотя бы один зачет?

3. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3; $AB = 5$. Через вершины A и C проведена окружность радиуса 7, пересекающая луч CB в точке D. Найти длину AD.

4. Решить неравенство

$$\log_{2\sqrt{6}}(x^2 + 2x - 5) + \log_{\sqrt{6}/12}(2x^2 - 6x + 3) \leqslant 0.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $A'C$ на плоскость BDC'.

Вариант 4

1. Найти $\cos 2x$, если $2\cos x + \cos 2x = 1$.

2. На экзамене каждому из трех студентов был предложен один и тот же список из 40 вопросов. Назовем вопрос очень трудным, если на него все ответили неверно, трудным, если только один студент ответил верно, средним, если только двое ответили верно, и легким, если все ответили верно. Известно, что легких вопросов вдвое больше, чем очень трудных. Каково число трудных вопросов, если общее число верных ответов равно 64?

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса 9, пересекающая луч AC в точке E, не лежащей на стороне AC. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BCE, если $AB = 7$, $BC = 2$.

4. Решить неравенство

$$\log_{5\sqrt{2}}(x^2 - 4x + 1) + \log_{\sqrt{2}/10}(2 + 5x - x^2) \leqslant 0.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 3$, $AD = 3\sqrt{2}$, $AA' = 2$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $C'D$ на плоскость $B'CM$, где M — середина AD.

1994

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x - \cos 3x} = 1 + \sin 2x.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а $x_1 - x_2$ и $x_1 + x_2$ — корни уравнения $x^2 - bx + a^2 = 0$. Найти числа a и b.

3. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AD угол в $30°$. Точка K — середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найти длину диагонали AC, если расстояние от точки E до прямой BC равно 1.

4. Решить неравенство

$$|x - 1|^{2\sqrt{x+2}} < |x - 1|^{x+1}.$$

5. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны 1. На луче AB выбрана точка M ($AM > AB$) так, что косинус угла между прямыми AC и DM равен $\frac{1}{4}$. Найти BM.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\sin x = (2 + \sin 2x)(\cos x - \cos 3x)$.

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а x_1 и $2x_2$ — корни уравнения $x^2 + 3bx + a = 0$. Найти числа a и b.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $60°$. Точка K — середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найти AB, если расстояние от точки E до прямой BC равно $2\sqrt{3}$.

4. Решить неравенство

$$|x+1|^{2\sqrt{x+3}} < |x+1|^{1-x}.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Все ребра пирамиды равны 1. На луче AD выбрана точка M так, что косинус угла, образованного прямыми SM и DC, равен $\frac{1}{3}$. Найти AM.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} = 2 + \sin 2x.$$

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — корни уравнения $x^2 + bx - a = 0$. Найти числа a и b.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $45°$, сторона CD равна 6. Точка K — середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой BC.

4. Решить неравенство

$$|x-2|^{2\sqrt{x+1}} < |x-2|^{x-3}.$$

5. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида. Все ребра пирамиды равны 1. На ребре AB выбрана точка M так, что косинус угла, образованного прямыми AC и DM, равен $\frac{1}{6}$. Найти BM.

Вариант 4

1. Решить уравнение $3\sin x = (1 + \sin 2x)(\cos x - \cos 3x)$.

2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а $x_1 - 1$ и $x_2 - x_1$ — корни уравнения $x^2 + (b+1)x + (a+2) = 0$. Найти числа a и b.

3. В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AB = 2\sqrt{3}$ точка K — середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найти углы параллелограмма, если известно, что расстояние от точки E до прямой BC равно 2.

4. Решить неравенство

$$|x+2|^{2\sqrt{x+4}} < |x+2|^{1/2-x}.$$

5. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$, все ребра которой равны 1. Точка M лежит на ребре AD и косинус угла, образованного прямыми SM и AB, равен $\frac{5}{9}$. Найти AM.

1995

Вариант 1.1*

1. Решить уравнение $2\sin 2x \sin 4x + \cos 6x = \sin 3x$.

2. Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счет в банк «Навроде» под 500% годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной Ф. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, а остальные положил в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк «Вампириал» под 50% годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил $\frac{1}{6}$ Ф, а Буратино — в три раза меньше. Сколько процентов годовых выплачивает банк «Обирон»?

3. Решить уравнение $81 \cdot 2^{x(x-1)} = 4 \cdot 3^{2x}$.

4. Через середину стороны ромба перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая пересекает противолежащую сторону

*В 1995 г. и далее варианты 1.1–1.4 предлагались на репетиционных, а 2.1–2.4 — на общих вступительных экзаменах.

и делит ромб на части, площади которых равны 12 и 27. Найти сторону ромба.

Вариант 1.2

1. Решить уравнение $\sin 7x - 2\sin 2x \cos 5x = \cos 4x$.

2. По лыжне кольцевого маршрута бегут с постоянными скоростями Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые 2 минуты, а с Чебурашкой — каждые 3 минуты. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

3. Решить уравнение $25 \cdot 4^{x(3-x)} = 16 \cdot 5^{2x}$.

4. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника перпендикулярно гипотенузе проводится прямая, которая делит треугольник на части, площади которых равны 25 и 39. Найти длину гипотенузы.

Вариант 1.3

1. Решить уравнение $2\sin 4x \cos 2x - \sin 6x = \cos 3x$.

2. Из Останкино на Шаболовку шел Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел $\frac{1}{3}$ часть пути, вдогонку ему из Останкино выбегает Филя, а навстречу с Шаболовки — Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 часов и встретил Хрюшу в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Степашка и Хрюша? Предполагается, что каждый из персонажей двигался с постоянной скоростью.

3. Решить уравнение $27 \cdot 5^{x(x-2)} = 125 \cdot 3^{x}$.

4. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая пересекает вторую боковую сторону и делит треугольник на части, площади которых равны 30 и 66. Найти длину боковой стороны треугольника.

Вариант 1.4

1. Решить уравнение $2\sin 2x \sin 5x + \cos 7x = \sin 4x$.

2. Когда Штирлиц и Кэт одновременно отплывают на лодках по реке навстречу друг другу, то они встречаются через 2 часа. Если бы плыла только Кэт, а Штирлиц ее ждал на берегу, то встреча произошла бы на час позже. Сколько времени придется грести Штирлицу против течения до встречи с Кэт, если она не сможет плыть на лодке? Предполагается, что скорость течения реки, а также скорости движения наших героев постоянны.

3. Решить уравнение $64 \cdot 3^{2x} = 9 \cdot 4^{x(4-x)}$.

4. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая пересекает основание треугольника и делит треугольник на части, площади которых равны 50 и 94. Найти длину боковой стороны треугольника.

Вариант 2.1

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1$.

2. В резервуар, содержащий 100 кг водного раствора соли, в котором соль составляет 15%, по одной трубе со скоростью 20 кг/мин поступает раствор, содержащий 5% соли, а по другой трубе со скоростью 10 кг/мин поступает раствор, содержащий 15% соли. Через какое время в резервуаре окажется раствор, содержащий 10% соли?

3. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = \cos x - \sin x$.

4. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AH и BK пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $AO = 3$, $OH = 1$.

Вариант 2.2

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-10} = 1$.

2. В одной стране в обращении находились 1 000 000 долларов, 20% которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны по 50 000 долларов в месяц, из которых фальшивыми оказывались 30%. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5%?

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} = \sin x + \cos x$.

4. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AH и BK пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $AO = 6$, $BO = 1$.

Вариант 2.3

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+50} - \sqrt[3]{x-48} = 2$.

2. В электропечь, содержащую 1000 кг расплава меди и олова с содержанием меди 10%, из одного ковша со скоростью 100 кг/мин льется расплав тех же металлов, содержащий 12% меди, а из другого ковша со скоростью 200 кг/мин льется расплав тех же металлов, содержащий 5% меди. Через какое время в печи окажется расплав, содержащий 8% меди?

3. Решить уравнение $\cos x + \frac{1}{\sin x} = \sin x + \operatorname{ctg} x$.

4. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AH и CM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $AO = 4$, $AH = 5$.

Вариант 2.4

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-53} = 2$.

2. В резервуар, содержащий 2 тонны водного раствора соли, в котором соль составляет 8,2%, по трубе со скоростью 100 кг/ч начинает поступать раствор, содержащий 5% соли, и в то же время из резервуара испаряется по 2 кг воды за каждый час. Через какое время в резервуаре окажется раствор, содержащий 6% соли?

3. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$.

4. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AH и BK пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $OH = 1$, $OK = 6$.

1996

Вариант 1.1

1. Решить уравнение $\sin 3x + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

2. Найти все решения неравенства $3\sqrt{x^2 - 60x + 500} + 5x \geqslant 70$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{5}$, расстояние от ее центра до вершины C равно $5\sqrt{2}$. Найти сумму длин сторон AC и BC, если известно, что площадь треугольника ABC равна 30.

4. Решить уравнение

$$\left(\log_{6x+5} 2 + \log_{6x+5} 5\right) \log_4 10 = \left(\frac{1}{2} + \log_4 5 - \log_{6x+5} 10\right) \log_{x^2} 100.$$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ основание ABC имеет стороны $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$, а высота пирамиды DP равна 12. Луч BP является биссектрисой угла ABC и пересекает ребро AC в точке E, при этом $BP = 2BE$. Найти площадь грани ABD.

Вариант 1.2

1. Решить уравнение $\cos 3x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Найти все решения неравенства $\sqrt{3x^2 - 18x + 15} + 8 \geqslant 2x$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{5}$, расстояние от ее центра до вершины C равно 5, сторона AB равна $4\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\left(1 + \log_5 2 - \log_{x+4} 10\right) \log_{x^2} 100 = \left(1 + \log_5 2\right) \log_{x+4} 10.$$

5. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, причем SD — высота пирамиды. Найти площадь грани SAB, если $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$, $SD = 24$.

Вариант 1.3

1. Решить уравнение $\cos 3x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Найти все решения неравенства $4\sqrt{x^2 + 5x - 50} + 10 \geqslant 5x$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен 1, расстояние от ее центра до вершины C равно $\sqrt{5}$, а сумма длин сторон AC и BC равна 8. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 10 - \log_{x+3} 10\right) \log_{x^2} 100 = \left(\frac{1}{2} + \log_4 5\right) \log_{x+3} 10.$$

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Высота пирамиды DP равна $\sqrt{12}$, а точка P лежит на луче CP, пересекающем ребро AB в точке M так, что $BM = 2AM$, $CP = 3MC$. Найти площадь грани ACD.

Вариант 1.4

1. Решить уравнение $\sin 3x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

2. Найти все решения неравенства $2\sqrt{2x^2 - 8x - 10} + 3x \geqslant 3$.

3. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\sqrt{2}$, расстояние от ее центра до вершины C равно $2\sqrt{5}$. Найти сторону AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 12.

4. Решить уравнение

$$\left(\log_{9x+1} 2 + \log_{9x+1} 5\right)\left(\log_8 5 + \frac{1}{3}\right) = \left(\log_8 10 - \log_{9x+1} 10\right)\log_{x^2} 100.$$

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Высота пирамиды DQ равна $\frac{72}{5}$, а точка Q лежит на луче BQ, который перпендикулярен ребру AC и пересекает его в точке P, при этом $BQ = 2BP$. Найти площадь грани BCD.

Вариант 2.1

1. Папа Карло выстрогал Буратино и отправил его в школу, дав ему на букварь несколько деревянных рублей, не более 30 штук. Буратино продал все рубли коллекционерам по 150 сольдо за каждый. Пять сольдо он сунул себе за щеку, не более трех закопал на поле Чудес, а на оставшиеся купил хлеба по цене 51 сольдо за корочку. Сколько корочек хлеба купил Буратино?

2. Решить уравнение $\sqrt{\sqrt{2}\,\sin x + (\sqrt{6} - 2)\cos x} = 2\sin\frac{x}{2}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности радиуса 1 с центром в точке O. Найти площадь трапеции, если известно, что $AO = 3$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(2x+2)(x^2 - 3x + 2)}}{x - 2} \geqslant 2x - 2.$$

5. В основании пирамиды с вершиной S лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 6$ и $BD = 8$. Перпендикуляр, опущенный из вершины S на основание, пересекает его в точке H — середине ребра BC. Найти объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая SH касается этой сферы в точке S.

Вариант 2.2

1. Купил Роман раков, вчера — мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня — по 990, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25 200 рублей, из них переплаты из–за отсутствия сдачи составили в сумме от 160 до 200 рублей. Сколько Роман купил раков вчера и сколько сегодня?

2. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\sin x}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности с центром O. Найти площадь трапеции, если $AO = 3$, $BO = 1$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} \leqslant x-3.$$

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = BC = 6$. Найти объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая AD касается этой сферы в точке D и перпендикулярна основанию.

Вариант 2.3

1. Монастырь закупил серьги по цене 531 000 рублей за одну золотую и 135 000 — за одну серебряную. Всего на покупку серег было истрачено 14 327 950 рублей, из них не более 15 000 — за доставку. Когда все серьги раздали сестрам, каждой досталась одна серьга — кому золотая, а кому серебряная. Сколько сестер было в монастыре?

2. Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\sin x}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности с центром O. Найти площадь трапеции, если известно, что $AB = 4$, $BO = 1$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(1-x)(x^2+8x+15)}}{x+5} \leqslant x+3.$$

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = BC = 8$. Найти объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая CD касается этой сферы в точке D и перпендикулярна основанию.

Вариант 2.4

1. У Фрола было мыло, не менее 6 кусков, а у Прокла — шилья, не более 30 штук. Столковались они считать каждое шило за 8700 рублей, а кусок мыла — за 4500 рублей, да и поменялись. Прокл отдал Фролу все свои шилья и забрал у него все мыло. Сколько мыла выменял Прокл, если Фрол доплатил Проклу 3350 рублей и остался ему должен не более 500 рублей?

2. Решить уравнение $\sqrt{\sqrt{2}\sin x - (\sqrt{6}+2)\cos x} = 2\sin\frac{x}{2}$.

3. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с периметром 12 описана около окружности с центром O. Найти площадь трапеции, если $AO = 2$.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{(2x-2)(x^2-7x+12)}}{x-4} \geqslant 2x-6.$$

5. В основании пирамиды с вершиной S лежит ромб $ABCD$ с диагональю $BD = 6$ и сторонами, равными 5. Перпендикуляр, опущенный из вершины S на основание, пересекает диагональ AC в точке H, причем $CH : AH = 1 : 7$. Найти объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая SH касается этой сферы в точке S.

1997

Вариант 1.1

1. Для того чтобы купить каменный домик одному, Ниф-Нифу не хватает 19 золотых, а Нуф-Нуфу — 9 золотых. Бережливый Наф-Наф накопил денег столько же, сколько у Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа вместе. Смогут ли поросята купить домик втроем?

2. Решить уравнение
$$\log_2\left(\frac{-2x-1}{x+2}\right) = \log_{1/4}\left(\frac{x-2}{4x+1}\right).$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и K соответственно, а продолжения отрезков BM и CK пересекаются в точке P. Найти длину стороны AD, если известно, что $AB = 12$ и $PM : MB = 1 : 4$.

4. Решить уравнение
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 6x}{\sin 4x} = 0.$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 9$ является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$; боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 3. На диагонали $A'C$ параллелепипеда выбрана точка P так, что угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AP}$ равен $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти отношение $A'P : PC$.

Вариант 1.2

1. Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро — 10 сольдо. Смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

2. Решить уравнение
$$\log_3\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = \log_{1/9}\left(\frac{4x-2}{x+2}\right).$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекают сторону BC в точках M и K соответственно, а отрезки AM и DK пересекаются в точке P. Найти длину стороны BC, если известно, что $AB = 15$ и $AP : PM = 3 : 2$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 12x}{\sin 8x} = \frac{\cos 6x}{\cos 2x}.$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$ является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$; боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 3. На отрезке DC' выбрана точка P так, что угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AP}$ равен $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти отношение $DP : PC'$.

Вариант 1.3

1. Мальчиш Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, если же только корзину печенья — то 4 доллара, а если только коробку конфет, то останется 8 долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья?

2. Решить уравнение

$$\log_5\left(\frac{-2x-3}{x+3}\right) = \log_{1/25}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right).$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекают сторону CD в точках M и K соответственно, а отрезки AM и BK пересекаются в точке P. Найти длину стороны BC, если известно, что $MK = 6$ и $AM : AP = 5 : 4$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 16x}{\sin 12x} = \frac{\cos 7x}{\cos 3x}.$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 8$ является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$; боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 2. На отрезке BC' выбрана точка P так, что угол между векторами $\vec{AB'}$ и $\vec{AP}$ равен $\operatorname{arctg} 3$. Найти отношение $BP : PC'$.

Вариант 1.4

1. Для того чтобы купить в харчевне полпорции жареных пескарей, коту Базилио не хватает 3 сольдо, а лисе Алисе — 10 сольдо.

Они закопали свои деньги на поле Чудес, и на следующий день их совместный капитал утроился. Смогут ли теперь кот Базилио и лиса Алиса купить порцию жареных пескарей на двоих?

2. Решить уравнение

$$\log_4\left(\frac{x}{2x+3}\right) = \log_{1/16}\left(\frac{4x+6}{x-1}\right).$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов C и D пересекают сторону AB в точках M и K соответственно, а продолжения отрезков CM и DK пересекаются в точке P. Найти длину стороны AD, если известно, что $MK = 16$ и $CM : MP = 4 : 1$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} + \frac{\cos 6x}{\sin 4x} = 0.$$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной длины 2 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$; боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 1. На отрезке $B'D'$ выбрана точка P так, что угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AP}$ равен $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найти отношение $B'P : PD'$.

Вариант 2.1

1. Статистика знает все. В городской думе города Урюпинска 60% всех депутатов считают секвестр полезной мерой для экономики, 30% — вредной, а оставшиеся 10% стесняются произнести это слово вслух. В то же время остальные взрослые жители Урюпинска (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают секвестр полезным для экономики, 20% — вредным, а остальные 70% думают, что секвестр — это садовые ножницы. Сколько процентов всех взрослых жителей Урюпинска считают секвестр полезной мерой для экономики, если вредным его считают 20,01% из них?

2. Решить уравнение

$$\frac{5\cos 2x + 2\cos x - 3}{\sin 2x + 14\cos^2 x - 8} = 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и BC проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину стороны AB, если известно, что $BP = 5$, $PH = 1$.

4. Решить неравенство $\log_{x^2+12/49} 7 \geqslant \log_x 7$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, точка D — середина ребра SB. Через середины K и L отрезков SA и CD проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние от точки M до вершины A.

Вариант 2.2

1. Статистика знает все. В городе Урюпинске 47,7% всех детей считают, что их нашли в капусте, 15,1% — что их принес аист, а оставшиеся 37,2% детей вообще не знают, откуда взялись. Аналогичная статистика отдельно среди мальчиков такова: соответственно 33, 20 и 47%. Сколько процентов урюпинских девочек считают, что их принес аист, если 63% из них полагают, что были найдены в капусте?

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x - 5\cos 2x + 2}{2\sin^2 x - 7\sin 2x + 6} = 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину катета AB, если известно, что $BP = 10$, $PH = 2$.

4. Решить неравенство $\log_{x^2+2/9} 3 \geqslant \log_x 3$.

5. В основании треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Через середины K и L отрезков $A'B'$ и BC' проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние от точки M до центра O вписанной в треугольник ABC окружности.

Вариант 2.3

1. Статистика знает все. В городе Урюпинске 29% всех жителей наиболее благоприятным местом для жизни во Вселенной назвали

Марс, 19,3% — Сникерс, а оставшиеся 51,7% жителей уверены в том, что хороших мест для жизни нет нигде, включая Урюпинск. Аналогичная статистика среди той части урюпинских жителей, которые любят шоколад, такова: соответственно 50, 40 и 10%. Сколько процентов остальных жителей, которые не любят шоколад, считают, что хороших мест для жизни нет нигде, если 5,5% из них назвали Сникерс наиболее благоприятным местом для жизни?

2. Решить уравнение

$$\frac{3\sin x - 5\cos 2x + 1}{8 + 7\sin 2x - 2\sin^2 x} = 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину катета AB, если известно, что $AP = 10$, $PM = 20$.

4. Решить неравенство $\log_{x^2+3/16} 4 \geqslant \log_x 4$.

5. В основании треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4, точка D — середина ребра BB'. Через середины K и L отрезков AB' и CD проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние от точки M до вершины A.

Вариант 2.4

1. Статистика знает все. Опрос взрослых жителей города Урюпинска показал, что 10% всех мужчин предпочитают пить чай из чашек, 30% — из стаканов, для остальных 60% мужчин посуда значения не имеет. Аналогичная статистика среди женщин такова: соответственно 40, 15 и 45%. Сколько процентов всех взрослых жителей Урюпинска предпочитают пить чай из чашек, если для 52,2% из них посуда не имеет значения?

2. Решить уравнение

$$\frac{5\cos 2x + 4\cos x - 1}{14\cos^2 x + \sin 2x - 6} = 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и BC проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину стороны AB, если известно, что $AP = 5$, $PM = 10$.

4. Решить неравенство $\log_{x^2+6/25} 5 \geqslant \log_x 5$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, точка E — середина ребра SC. Через середины K и L отрезков SA и ED проведена прямая, которая пересекает плоскость основания $ABCD$ в точке M. Найти расстояние от точки M до вершины A.

1998

Вариант 1.1

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 - ax - a$ и $y = (1+a)x^2 + 2x$ не имеют общих точек.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (2-x) + \log_3 \frac{y}{2} = 2, \\ x^2 + y^2 = 4x + 41. \end{cases}$$

3. Задан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Окружность радиуса $2\sqrt{5}$ касается прямой AC в точке A, боковой стороны BC в некоторой точке D и пересекает боковую сторону AB в точке M. Найти периметр треугольника ABC, если $AM : MB = 5 : 4$.

4. Решить уравнение $1 + 2\cos 2^{x+1} = 3\cos 2^x$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' точки M и K — середины отрезков $A'B'$ и $A'C$ соответственно. Известно, что прямая MK образует угол в $45°$ с плоскостью $AA'B'B$, $MK = 3$. Найти объем призмы $ABCA'B'C'$.

Вариант 1.2

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 + ax + a$ и $y = (1-a)x^2 - x$ не имеют общих точек.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 \frac{x}{7} + \log_4 (2 - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 2y + 52. \end{cases}$$

3. Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность касается прямой AB в точке A, катета BC в некоторой точке D и пересекает гипотенузу AC в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $AM = 24$, $MC = 1$.

4. Решить уравнение $3\cos 2^{x} = 1 + 4\sin 2^{x-1}$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Точка M выбрана на ребре SC так, что $SM = 3MC$. Известно, что прямая BM образует угол в $30°$ с плоскостью ASB, $BM = 3\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 1.3

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 - ax - a$ и $y = (1 + a)x^2 - x - 1$ не имеют общих точек.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 \frac{x}{4} + \log_5 (1 - y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 40 + 2y. \end{cases}$$

3. Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность радиуса 2 касается прямой AB в точке A, катета BC в некоторой точке D и пересекает гипотенузу AC в точке M. Найти площадь треугольника ABC, если $AM : MC = 3 : 2$.

4. Решить уравнение $2\cos 2^{x+1} + \sin 2^{x} + 1 = 0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Точки M и K — середины ребер AC и SB соответственно. Известно, что прямая MK образует угол в $45°$ с плоскостью ASC, $MK = \sqrt{6}$. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 1.4

1. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y = x^2 + ax + a + 2$ и $y = (1-a)x^2 - 2x$ не имеют общих точек.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 (1-x) + \log_2 y = 3, \\ x^2 + y^2 = 2x + 64. \end{cases}$$

3. Задан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Окружность касается прямой AC в точке A, боковой стороны BC в некоторой точке D и пересекает боковую сторону AB в точке M. Найти радиус окружности, если $AM = 3$, $MB = 1$.

4. Решить уравнение $3\cos 2^{x} - 2\cos 2^{x-1} = 1$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' точки M и K — середины ребер AB и $A'C'$ соответственно. Известно, что прямая MK образует угол в 30° с плоскостью $AA'B'B$, $MK = 2\sqrt{3}$. Найти объем призмы $ABCA'B'C'$.

Вариант 2.1

1. В стране объявили деноминацию и выпустили в обращение одновременно со старыми сольдо новые, которые было трудно отличить от старых. Проходив весь день с шарманкой по городу, папа Карло заработал немного денег, среди которых наряду со старыми впервые попались и новые сольдо. Если он этого не заметит и посчитает все сольдо за старые, то получится, что он заработал в 5 раз меньше, чем на день раньше. Если же наоборот подсчитать собранные деньги так, как будто все сольдо новые, то получится, что он заработал в 200 раз больше, чем на день раньше. Сколько стоит новый сольдо по отношению к старому?

2. Решить уравнение $\log_5 |x-3| = \log_5 (x^2 - 3x) + 1$.

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AK = 11$, $BK = 2$, $CD = 10\sqrt{5}$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 1 + 2\cos x.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{10}$. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в квадрат $ABCD$ окружности и пересекает ребра BC и CD в точках M и N, причем $MN = \frac{5}{6}$. Найти объем пирамиды $SMNC$.

Вариант 2.2

1. Боб подарил другу Биллу несколько акций нефтяной компании. Часть акций Билл продал в тот же день, а остальные — через неделю, когда их стоимость на бирже уменьшилась из-за финансового кризиса, выручив в итоге этих операций некоторую сумму денег. Если бы Билл продал все акции сразу, то выручил бы в 1,25 раза больше, а если бы наоборот продал все акции через неделю, то выручил бы за них в 1,6 раза меньше, чем ему удалось получить на самом деле. Во сколько раз уменьшилась стоимость каждой акции за неделю?

2. Решить уравнение $\log_3 |4 - x| = \log_3 (2x^2 - 8x) - 1$.

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $AK = 4$, $DK = 6$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2\sin 2x + 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в треугольник ABC окружности и пересекает ребра AB и AC в точках M и N. Объем пирамиды $SAMN$ равен $\sqrt{66}/90$, а длина отрезка MN равна $\frac{7}{10}$. Найти длину бокового ребра пирамиды.

Вариант 2.3

1. Из Грейтвилля в Литтлвилль вышел Гулливер, а навстречу ему из Литтлвилля по той же дороге уже шел Лилипут. Каждый считал количество своих шагов от исходного пункта. Встретившись, они сложили свои результаты и удивились. Гулливер — тому, что сумма оказалась вдвое больше, чем он насчитал накануне, шагая от Литтлвилля до Грейтвилля, а Лилипут — тому, что сумма оказалась в 8 раз меньше, чем он насчитал накануне, пройдя все расстояние от Грейтвилля до Литтлвилля. Во сколько раз шаг Гулливера длиннее шага Лилипута?

2. Решить уравнение $\log_4 |x-5| = \log_4 (x^2-5x)+1$.

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $BC = 2\sqrt{5}$, $CK = 4$, $DK = 22$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = 2\sin x + 1.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в квадрат $ABCD$ окружности и пересекает ребра BC и CD в точках M и N. Известно, что $MN = \frac{13}{15}$, а объем пирамиды $SMNC$ равен $4\sqrt{6}/45$. Найти величину двугранного угла между плоскостью основания и боковой гранью пирамиды.

Вариант 2.4

1. Новое поколение выбирает пепси … Дружная семья посетила однажды вечером безалкогольный бар и потратила некоторую сумму денег. Родители пили квас, а дети — пепси. Если бы все пили только квас и выпили вместе то же самое общее число стаканов, то им пришлось бы заплатить за вечер в 1,2 раза меньше, а если бы все пили пепси, то заплатили бы в 1,5 раза больше, чем было уплачено. Во сколько раз стакан пепси дороже стакана кваса?

2. Решить уравнение $\log_2 |2-x| = 2 + \log_2 (x^2-2x)$.

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AB = 10$, $CD = 25$, $AK = 4\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, длины боковых ребер пирамиды равны $\sqrt{2}$. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в треугольник ABC окружности и пересекает ребра AB и AC в точках M и N, причем $MN = \frac{7}{9}$. Найти объем пирамиды $SAMN$.

1999

Вариант 1.1

1. Решить неравенство $\sqrt{10-2x}+\sqrt{3-x}\leqslant\sqrt{1+x}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{12}\cos x+\sqrt{11-4\sin x}=0$.

3. В треугольнике ABC на продолжении медианы BM выбрана точка K так, что $MK : BM = 1 : 2$. Известно, что $AB = 5$, $CK = 4$, $BC = 3$. Найти AK.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0; 0)$ в направлении точки $(4; 1)$, отражается от прямой $x+2y = 3$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB и BC перпендикулярны, $AB = 4\sqrt{6}$, $BC = 6$, $AD = BD = CD = 7$. Через прямые AB и CD проведены параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями.

Вариант 1.2

1. Решить неравенство $\sqrt{4x-4}+\sqrt{x+1}\leqslant\sqrt{3-x}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{5+\sin x}+\sqrt{6}\cos x=0$.

3. В треугольнике ABC точка K — середина медианы BM. Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$, $AK = 6$. Найти CK.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0; 0)$ в направлении точки $(2; 1)$, отражается от прямой $x+2y = 3$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AD, AC, BC попарно перпендикулярны, $AD = 3$, $AC = 2$, $BC = 1$. Через прямые AB и CD проведены параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями.

Вариант 1.3

1. Решить неравенство $\sqrt{5-3x} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{x+1}$.

2. Решить уравнение $2\sin x = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}\cos x}$.

3. В треугольнике ABC точка K — середина медианы BM. Известно, что $AB = 6$, $AK = 5$, $CK = 4$. Найти BC.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\, 0)$ в направлении точки $(3;\, 2)$, отражается от прямой $2x + 3y = 6$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, AC, AD попарно перпендикулярны, $AB = 4$, $AC = 1$, $AD = 16$. Точка M — середина ребра AB. Через прямые CM и BD проведены параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями.

Вариант 1.4

1. Решить неравенство $\sqrt{4x-8} + \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{3-x}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{3 - \sqrt{3}\,\cos x} = \sqrt{6}\,\sin x$.

3. В треугольнике ABC на продолжении медианы BM выбрана точка K так, что $MK : BM = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AK = 2$, $CK = 3$. Найти BC.

4. Луч света, выпущенный из точки $(0;\, 0)$ в направлении точки $(3;\, 1)$, отражается от прямой $2x + 3y = 6$ по закону «угол падения равен углу отражения». Найти точку пересечения отраженного луча с осью абсцисс Ox. Система координат Oxy на плоскости — прямоугольная.

5. В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD перпендикулярны, $AB = 2$, $AC = BC = \sqrt{5}$, $AD = BD = \sqrt{10}$. Через прямые AD и BC проведены параллельные плоскости. Найти расстояние между этими плоскостями.

Вариант 2.1

1. Решить уравнение $x^2 - \sqrt{x^2 - 2x} = 2x + 12$.

2. Решить уравнение $\sin\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{4} = 0$.

3. В прямоугольник площади 34 вписан ромб с диагоналями $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ таким образом, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти длины сторон прямоугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_x 2) \leqslant 2\log_{\sqrt{x}}(\log_2 x).$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, боковые ребра равны $3\sqrt{3}$. Точки M и N — середины ребер AB и AS соответственно. Найти объем пирамиды $DMNSB$.

Вариант 2.2

1. Решить уравнение $x^2 - 2\sqrt{x^2 - x} = x + 15$.

2. Решить уравнение $\sin\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{4}$.

3. В прямоугольник со сторонами 6 и 8 вписан ромб площади 36 так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти длины диагоналей этого ромба.

4. Решить неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{x}} 2) + 5\log_{\sqrt{x}}(\log_{\frac{1}{2}} x) \leqslant 0.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 4, боковые ребра равны $\sqrt{33}$. Точки M, N, K — середины ребер AB, BS, BC соответственно. Найти объем пирамиды $MNKCS$.

Вариант 2.3

1. Решить уравнение $2\sqrt{x^2 + x} - x = x^2 - 8$.

2. Решить уравнение $\sin\frac{x}{5} = \cos\frac{x}{6}$.

3. В прямоугольник со сторонами 2 и 4 вписан ромб со стороной $\sqrt{6}$ таким образом, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти площадь ромба.

4. Решить неравенство

$$2\log_2\left(\log_x \frac{1}{2}\right) \geqslant 3\log_{\sqrt{x}}\left(\log_2 \frac{1}{x}\right).$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 4, боковые ребра равны $\sqrt{17}$. Точки M, N, K — середины ребер SC, SD, SA соответственно. Найти объем пирамиды $MNKAD$.

Вариант 2.4

1. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x} - x^2 = 2x - 20$.

2. Решить уравнение $\sin\frac{x}{7} + \cos\frac{x}{6} = 0$.

3. В прямоугольник площади 36 вписан ромб так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти длины сторон прямоугольника, если известно, что периметр ромба равен 20, а его площадь равна 24.

4. Решить неравенство

$$\log_2(\log_x 2) + \log_{\sqrt{x}}(\log_2 x) \geqslant 0.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, боковые ребра равны $\sqrt{11}$. Точки M и N — середины ребер SC и SD соответственно. Найти объем пирамиды $BMNDC$.

2000

Вариант 1.1

1. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 40%, а в другом — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра?

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-7} \leqslant \sqrt{x-3}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB биссектриса BN пересекает медиану AM в точке K так, что $AK = 8$, $KM = 7$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x \, \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{ctg} x \, \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x}.$$

5. На отрезке A_1C в единичном кубе с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 расположена точка K. Прямая D_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая BK — плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. Известно, что $LM = 3\sqrt{3}$. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок A_1C.

Вариант 1.2

1. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом — 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x - 1} \leqslant \sqrt{2 - x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB биссектриса AN пересекает медиану BM в точке K. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что $BK = 14$, $KM = 5$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \, \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} 4x \, \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x}.$$

5. На отрезке AB_1 в единичном кубе с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 расположена точка K. Прямая C_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая DK — плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. Известно, что $LM = 5\sqrt{3}/6$. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок AB_1.

Вариант 1.3

1. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 10%, а в другом — 20% меди. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 15 кг нового сплава, содержащего 14% меди?

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{3x+1} \leqslant \sqrt{3-x}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB точка M делит катет BC в отношении $2:1$, считая от вершины B. Известно, что биссектриса BN пересекает отрезок AM в точке K так, что $AK = 9$, $KM = 4$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} 5x \operatorname{ctg} 4x}{\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} 4x} = \frac{\operatorname{ctg} 3x \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 2x}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 3. Точка K расположена на отрезке BD_1. Прямая C_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая AK — плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. Известно, что $LM = 13$. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок BD_1.

Вариант 1.4

1. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 30%, а в другом — 50% золота. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 10 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 42% золота?

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-5} \leqslant \sqrt{x-2}.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB точка M делит сторону AC в отношении $1:2$, считая от вершины A. Известно, что биссектриса AN пересекает отрезок BM в точке K так, что $BK = 2$, $KM = 5/3$. Найти стороны треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} 3x}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны

$\sqrt{3}$. Точка K расположена на отрезке BC_1. Прямая D_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая AK — плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. Известно, что $LM = 9\sqrt{5}/10$. Определить, в каком отношении точка K делит отрезок BC_1.

Вариант 2.1

1. Фирма «Badminton» веников не вяжет, зато делает ракетки. Фирма «Podmeton» ракеток не делает, зато вяжет веники. Если первая увеличит дневной выпуск своей продукции на 5%, а вторая за день свяжет на 140 веников больше, чем обычно, то по выпуску продукции в штуках за день фирмы сравняются. Они сравняются также и в случае, когда первая произведет в день на 65 ракеток меньше, а вторая выпустит веников в день на 5% больше, чем обычно. Сколько ракеток и сколько веников выпускают фирмы обычно за день?

2. Решить уравнение $(6\cos x - 3)\operatorname{ctg} x + \sin 2x = 0$.

3. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,4} \frac{12 - 4 \cdot 5^{-x}}{5} \leqslant \log_{2,5} \left(\frac{1}{5}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, причем $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$. Все боковые ребра пирамиды равны 13. Сфера радиуса $156/25$, центр которой лежит на ребре BS, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти объем пирамиды.

Вариант 2.2

1. Если число волков в тамбовском лесу увеличится на 1000 голов, а количество зайцев возрастет на 10%, то на каждого зайца будет приходиться ровно по одному волку. Если же поголовье волков в тамбовском лесу сократится на 10%, а зайцев станет на 955 меньше, то на каждого зайца будет ровно по два волка. Сколько волков и сколько зайцев в тамбовском лесу?

2. Решить уравнение $(3 - 5\sin x)\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно, отрезки AN и FM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,8} \frac{7 - 2 \cdot 3^x}{3} \geqslant \log_{1,25} 3.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 5$ и $AC = 2\sqrt{7}$. Все боковые ребра пирамиды равны 4. Сфера, центр которой лежит на продолжении ребра BS за точку S, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти радиус сферы.

Вариант 2.3

1. Если удлинить бороду Деду Морозу на 12 см, а косу Снегурочке — на 10%, то коса станет вдвое длиннее бороды. Если же Дед Мороз укоротит Снегурочке ее косу на 10%, а она в ответ обрежет бороду Деда Мороза на 8 см, то коса станет втрое длиннее бороды. Найти длину бороды Деда Мороза и длину косы Снегурочки.

2. Решить уравнение $(4 - 6\sin x)\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N — середины сторон BC и DE соответственно, отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,08} \frac{8 - 4^{x+1}}{3} \geqslant \log_{12,5} 4.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{15}$ и $BC = 2\sqrt{6}$. Все боковые ребра пирамиды равны $7/2$. Сфера, центр которой лежит на ребре SA, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти радиус сферы.

Вариант 2.4

1. В огороде бузина, а в Киеве дядька. Если бузина подрастет вверх на 14,5 см, а месячная зарплата дядьки увеличится на 5%, то высота бузины в сантиметрах сравняется с зарплатой дядьки в гривнах. Сравняются они также и в случае, когда зарплата дядьки уменьшится на 6 гривен, а бузина вырастет на 5%. Определить зарплату киевского дядьки и высоту бузины в огороде.

2. Решить уравнение $(2\cos x + 1)\operatorname{ctg} x + \sin 2x = 0$.

3. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} \cdot \log_{0,625} \frac{11 - 2^{1-x}}{5} \leqslant \log_{1,6} \left(\frac{1}{2}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, причем $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$. Все боковые ребра пирамиды равны 5. Сфера радиуса 20, центр которой лежит на продолжении ребра CS за точку S, касается плоскости основания пирамиды и проходит через точку S. Найти объем пирамиды.

2001

Вариант 1.1

1. Решить уравнение

$$(3\cos 2x + 10\sin x + 1)\sqrt{1 - 2\cos x} = 0.$$

2. Решить неравенство $3x < \sqrt{6x + 19} - 1$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана $AD = 6$, причем $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BAD = 75^\circ$. Найти сторону AC.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2xy + 2yz + xz = -10y, \\ -4xy + 3yz = 6y, \\ 23xy - 16yz - 3xz = -y. \end{cases}$$

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M — середина ребра CC_1. Найти площадь ортогональной проекции грани BB_1C_1C на плоскость BD_1M.

Вариант 1.2

1. Решить уравнение

$$(2\cos 2x + 7\cos x)\sqrt{2\sin x + 1} = 0.$$

2. Решить неравенство $2x + \sqrt{6 - 4x} > 1$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана $AD = 5$, причем $\angle BAD = 15^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$. Найти сторону AC.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 5yz - 6xz = -2z, \\ 2xy + 9yz - 9xz = -12z, \\ yz - 2xz = 6z. \end{cases}$$

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M — середина ребра A_1D_1. Найти площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость BC_1M.

Вариант 1.3

1. Решить уравнение

$$(3\cos 2x - 16\cos x - 3)\sqrt{2\sin x - 1} = 0.$$

2. Решить неравенство $x + \sqrt{20 - 6x} > 3$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана $AD = 3$, причем $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle CAD = 15^\circ$. Найти сторону AB.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x, \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x, \\ 2xy + xz = 4x. \end{cases}$$

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M — середина ребра B_1C_1. Найти площадь ортогональной проекции грани CC_1D_1D на плоскость A_1CM.

Вариант 1.4

1. Решить уравнение

$$(17\sin x - 3\cos 2x)\sqrt{2\cos x + 1} = 0.$$

2. Решить неравенство $\sqrt{12x+11} - 2 > 3x$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана $AD = 2$, причем $\angle BAD = 60°$, $\angle CAD = 75°$. Найти сторону AB.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - 5yz - xz = 3y, \\ xy + yz = -y, \\ -5xy + 4yz + xz = -4y. \end{cases}$$

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M — середина ребра AD. Найти площадь ортогональной проекции грани AA_1D_1D на плоскость B_1CM.

Вариант 2.1

1. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60%, серые — 30%, а белые — 10% от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истребленных им белых ворон составляет 120% от количества истребленных серых и 30% от количества истребленных черных ворон. Сколько ворон перестрелял Нехорошев, если уцелело 2/3 всех белых ворон и 49 серых?

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} = 3\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{\cos x}.$$

2П*. Решить уравнение

$$6\cos^2 2x - 10\cos^2 x + 1 = 0.$$

*Задача 2П предназначалась вместо задачи 2 для абитуриентов, поступавших на факультет психологии и на специальность «Экономика и право» экономического факультета.

3. В треугольнике ABC проведена высота BH, основание которой лежит на стороне AC. Известно, что $AH = 4$, $CH = 1$ и $2\,AB = 3\,BC$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить неравенство

$$2 + \log_{2-3x} \frac{1}{1-3x^2} \geqslant 0.$$

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что расстояние между серединами ребер AD и BC равно 1, а расстояние между серединами ребер AB и CD равно 7. Найти длину ребра BC.

Вариант 2.2

1. В магазине «Мойдодыр» в продаже имеются стиральные порошки в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было $3 : 4 : 6$. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало $2 : 5 : 8$. Известно, что число пачек необычного порошка возросло на 55, а обычного порошка — уменьшилось на 10%. Сколько всего пачек порошка стало в магазине?

2. Решить уравнение

$$3 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}.$$

2П. Решить уравнение

$$4 \cos^2 2x - 8 \sin^2 x + 1 = 0.$$

3. В треугольнике ABC проведена высота BH, основание которой лежит на стороне AC. Известно, что $AB = 8$, $BC = 4$ и $AH = 5\,HC$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$2 + \log_{x-1} \frac{10}{6x^2 - 15} \leqslant 0.$$

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что $BC = 2$, а расстояние между серединами ребер AD и BC равно 3. Найти расстояние между серединами ребер AB и CD.

Вариант 2.3

1. На автостоянке стояли «Мерседесы», «Запорожцы» и прочие иномарки в количественном соотношении $2:3:6$. После того как на стоянку подъехало некоторое количество «Мерседесов» и 33 «Запорожца», а 40% прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало $5:7:4$. Сколько «Мерседесов» стало на стоянке?

2. Решить уравнение

$$3\operatorname{ctg} x - \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

2П. Решить уравнение

$$6\,\sin^2 2x - 10\,\cos^2 x + 3 = 0.$$

3. В треугольнике ABC проведена высота BH, основание которой лежит на продолжении стороны AC. Известно, что $AH = 5$, $CH = 1$ и $AB = 3\,BC$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$2 + \log_{2x-1} \frac{3}{8x^2 - 6} \leqslant 0.$$

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что $BC = 5$, а расстояние между серединами ребер AD и BC равно 6. Найти длину ребра AD.

Вариант 2.4

1. Черепашки снова идут в бой. Из них 45% входят в клан «ниндзя», 30% — в клан «нундзя» и 25% — в клан «няндзя». После трудной победы над жестоким врагом подсчитали, что число погибших в бою черепашек из клана «няндзя» составляет 120% от числа убитых из клана «нундзя» и 60% от числа убитых из клана «ниндзя». Сколько черепашек погибло в бою, если уцелела лишь 1/4 часть клана «няндзя», а в клане «нундзя» осталось 23 черепашки?

2. Решить уравнение
$$\frac{\sqrt{3}-3\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x.$$

2П. Решить уравнение
$$4\,\sin^2 2x-8\,\sin^2 x+3=0.$$

3. В треугольнике ABC проведена высота BH, основание которой лежит на продолжении стороны AC. Известно, что $AB=9$, $BC=6$ и $AH=4\,HC$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Решить неравенство
$$2+\log_{1-2x}\frac{5}{1-5x^2}\geqslant 0.$$

5. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что $BC=5$, $AD=7$. Найти расстояние между серединами ребер AD и BC.

2002

Вариант 1.1

1. Решить неравенство
$$\frac{4\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-1}-1}\leqslant 5.$$

2. Решить уравнение
$$\frac{7-10\sin x}{5\sin x-3}=\frac{7-8\operatorname{tg} x}{4\operatorname{tg} x-3}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки K и L так, что $BK:KC=3:1$, $CL:LD=5:2$. Найти площадь пятиугольника $ABKLD$, если площадь треугольника AKL равна 22.

4. Студент половину пути от дома до университета прошел пешком, а вторую половину проехал на автобусе, затратив на весь путь 30 минут. Возвращаясь, четверть пути студент прошел пешком, а три четверти проехал на автобусе, затратив в целом 17 минут. Во сколько раз скорость автобуса больше скорости студента? Время ожидания автобуса не учитывается.

5. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 вписана сфера с центром O. Прямая A_1O пересекает плоскости граней BB_1C_1C и ABC в точках K и M соответственно. Найти объем призмы, если $KM = 5/2$.

Вариант 1.2

1. Решить неравенство

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-1}-1} \leqslant 5.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{9+10\sin x}{5\sin x+4} = \frac{9+6\operatorname{tg} x}{3\operatorname{tg} x+4}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки K и L так, что $BK : KC = 2 : 1$, $CL : LD = 3 : 5$. Найти площадь треугольника AKL, если площадь четырехугольника $BKLD$ равна 21.

4. Если половину пути от города А до города В проехать на поезде, а вторую половину лететь на самолете, то на весь путь уйдет 8,5 часов. Если же пятую часть пути ехать на поезде, а оставшуюся — лететь на самолете, то на весь путь уйдет 4 часа. Во сколько раз скорость самолета больше скорости поезда? Время на пересадку не учитывается.

5. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 вписана сфера с центром O. Прямая B_1O пересекает плоскость грани ABC в точке K. Найти длину отрезка A_1K, если объем призмы равен 54.

Вариант 1.3

1. Решить неравенство

$$\frac{7\sqrt{x}-9}{\sqrt{x-2}-1} \leqslant 9.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{7+10\cos x}{5\cos x+3}=\frac{7+8\operatorname{ctg} x}{4\operatorname{ctg} x+3}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки K и L так, что $BK:KC=1:3$, $CL:LD=5:4$. Найти площадь треугольника AKL, если площадь пятиугольника $ABKLD$ равна 57.

4. Спортсмен три четверти дистанции пробежал с одной скоростью, а на оставшейся части увеличил скорость и прошел всю дистанцию за 1 минуту 9 секунд. Если бы он две трети дистанции бежал с начальной скоростью, а последнюю треть — с увеличенной, то прошел бы всю дистанцию за 1 минуту 8 секунд. Во сколько раз спортсмен увеличил скорость?

5. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 вписана сфера с центром O. Прямая AO пересекает грань BB_1C_1C в точке M. Найти объем призмы, если $B_1M=\sqrt{13}$.

Вариант 1.4

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-2}-1}\leqslant 3.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{9-10\cos x}{5\cos x-4}=\frac{9-6\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg} x-4}.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD выбраны точки K и L так, что $BK:KC=3:2$, $CL:LD=2:5$. Найти площадь четырехугольника $BKLD$, если площадь треугольника AKL равна 20.

4. Треть лыжной трассы состоит из подъемов, а две трети — из спусков. Чтобы пройти эту трассу в одном направлении, лыжнику требуется 33 минуты, а чтобы пройти в противоположном направлении — на 11 минут больше. Во сколько раз скорость лыжника на спусках больше, чем на подъемах? Считается, что его скорости на всех спусках и на всех подъемах постоянны.

5. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 вписана сфера с центром O. Прямая CO пересекает грань AA_1B_1B в точке K. Найти длину отрезка BK, если объем призмы равен 16.

Вариант 2.1

1. Сравнивая прямоугольник и квадрат, получили, что периметр прямоугольника на 10 % больше периметра квадрата, а площадь прямоугольника на 17 % больше площади квадрата. Найти площадь квадрата, если известно, что диагональ прямоугольника равна 20.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos x = \sqrt{2\cos 4x - \cos 2x + 1}.$$

3. Две окружности радиусов 3 и 1 касаются друг друга внешним образом. Через центры окружностей проведены параллельные диаметры AB и CD так, что отрезки BC и AD не пересекаются. Найти BC и AD, если известно, что $BC : AD = 3 : 4$.

3П*. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC точка D на стороне BC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что угол BAD в три раза больше угла CAD. Найти величину угла BAC.

4. Решить неравенство

$$\log_4(|2x+1| - |x-2|) \geqslant \log_2\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 12. Точки M, N и F — середины ребер A_1B_1, CC_1 и AD соответственно. Плоскость FB_1D_1 пересекает отрезок MN в точке K. Найти длину отрезка NK.

---

*Задача 3П предназначалась вместо задачи 3 для абитуриентов, поступавших на факультет психологии и на специальность «Экономика и право» экономического факультета.

Вариант 2.2

1. Сравнивая прямоугольник и квадрат, получили, что периметр прямоугольника на $5\,\%$ больше периметра квадрата, а площадь прямоугольника на $2\,\%$ меньше площади квадрата. Найти площадь прямоугольника, если его диагональ равна 35.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2\cos 4x + \cos 2x + 1}.$$

3. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Через центры окружностей проведены параллельные диаметры AB и CD так, что отрезки BC и AD не пересекаются. Известно, что радиус одной окружности в два раза больше радиуса другой, $BC = 6$, $AD = 8$. Найти радиусы окружностей.

3П. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC точка D на стороне BC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что угол ADB в три раза больше угла BAD. Найти величину угла CAD.

4. Решить неравенство

$$\log_9(|2x-3| - |x+2|) \geqslant \log_3 \sqrt{\frac{x+2}{x-5}}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 7. Точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно. Плоскость A_1BD пересекает отрезок MN в точке K. Найти длину отрезка NK.

Вариант 2.3

1. Сравнивая прямоугольник и квадрат, получили, что периметр прямоугольника на $20\,\%$ меньше периметра квадрата, а площадь прямоугольника на $37\,\%$ меньше площади квадрата. Найти площадь квадрата, если известно, что диагональ прямоугольника равна 13.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2\cos 4x - 3\cos 2x + 1}.$$

3. Две окружности с радиусами 5 и 1 касаются друг друга внешним образом. Через центры окружностей проведены параллельные диаметры AB и CD так, что отрезки BC и AD не пересекаются. Найти BC и AD, если известно, что $2AD = 3BC$.

3П. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC точка D на стороне BC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что угол BAD в шесть раз больше угла ABC. Найти величину угла ADB.

4. Решить неравенство

$$\log_4(|2x+3| - |x-1|) \geqslant \log_2 \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 2. Точки M, N и F — середины ребер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскость ACF пересекает отрезок MN в точке L. Найти длину отрезка NL.

Вариант 2.4

1. Сравнивая прямоугольник и квадрат, получили, что периметр квадрата на 20 % больше периметра прямоугольника, а площадь квадрата на 62 % больше площади прямоугольника. Найти площадь прямоугольника, если его диагональ равна 25.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos x = \sqrt{2\cos 4x + 3\cos 2x + 1}.$$

3. Две окружности радиусов 4 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через центры окружностей проведены параллельные диаметры AB и CD так, что отрезки BC и AD не пересекаются. Найти AD, если $BC = 7$.

3П. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC точка D на стороне BC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что угол ACB в семь раз больше угла BAD. Найти величину угла ADB.

4. Решить неравенство

$$\log_9(|2x-1| - |x+3|) \geqslant \log_3 \sqrt{\frac{x+3}{x-4}}.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 1. Точки M, N и G — середины ребер B_1C_1, CD и BB_1 соответственно. Плоскость GCD_1 пересекает отрезок MN в точке K. Найти длину отрезка MK.

2003

Вариант 1.1

1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает автомобиль и догоняет пешехода через 20 минут. Если бы скорость автомобиля была на 30 % выше, то он догнал бы пешехода через 15 минут. На сколько процентов ниже исходной должна быть скорость автомобиля, чтобы он догнал пешехода за 25 минут?

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos 4x = 2\cos 3x + \sin 4x$.

3. Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Известно, что радиус окружности равен $3\sqrt{13}$ и $AB : BC : CD = 3 : 4 : 5$. Найти длину хорды AD.

4. Решить уравнение $\left|16\sqrt{x-4} - 25\right| = 2x - 1$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC. Ребра SB и SC перпендикулярны и образуют с плоскостью основания углы $\arcsin\frac{1}{3}$ и $\arcsin\frac{1}{4}$ соответственно, а расстояние от вершины A до плоскости SBC равно 25. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 1.2

1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает велосипедист и догоняет пешехода через полчаса. Если бы скорость велосипедиста была на 16 % выше, то он догнал бы пешехода через 25 минут. Какое время потребуется велосипедисту, чтобы догнать пешехода, если его скорость будет на 20 % ниже исходной?

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 3x - \sin 2x$.

3. Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Найти радиус окружности, если $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 6$.

4. Решить уравнение $\left|6\sqrt{2x-6} - 8\right| = 2x - 5$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC. Ребра SA и SB перпендикулярны и образуют с плоскостью основания углы в $30°$ и $45°$ соответственно, а объем пирамиды равен $4\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до плоскости ASB.

Вариант 1.3

1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно двинулись пешеход и велосипедист. Их встреча произошла через 36 минут. Если бы скорость велосипедиста была на 12,5 % ниже, то они встретились бы через 40 минут. Какое время пройдет до их встречи, если скорость велосипедиста будет на 25 % выше исходной?

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos 4x = 2\sin 3x - \sin 4x$.

3. Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Известно, что $AB = 1$, $BC = 4$, а радиус окружности равен $\sqrt{19}$. Найти длину хорды AD.

4. Решить уравнение $\left|6\sqrt{4-2x} - 8\right| = 5 - 2x$.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ грани ABC и SAB — прямоугольные треугольники с гипотенузой AB. Известно, что $AC = BC$, ребра SA и SB образуют с плоскостью основания углы $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}$ соответственно, а объем пирамиды равен 80. Найти расстояние от вершины C до плоскости ASB.

Вариант 1.4

1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно двинулись пешеход и скороход. Они встретились через 1 час 20 минут. Если бы скорость скорохода была на 25 % ниже, то встреча состоялась бы через 1 час 36 минут. На сколько процентов выше исходной должна быть скорость скорохода, чтобы встреча состоялась через 1 час 15 минут после начала движения?

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos 2x = 2\cos 3x + \sin 2x$.

3. Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Найти CD, если $AB = 5$, $AD = 14$, а радиус окружности равен $\sqrt{51}$.

4. Решить уравнение $\left|16\sqrt{2-x} - 25\right| = 11 - 2x$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Ребра SA и SB перпендикулярны и образуют с плоскостью основания углы в 30° и 45° соответственно, а расстояние от вершины C до плоскости SAB равно $\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 2.1

1. В Восьмиречье в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 8 рублей и 64 рубля. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 20 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 500 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

3. Окружность с центром на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC касается катетов AB и BC в точках M и N соответственно. Найти периметр треугольника ABC, если $AM = 4$, $CN = 9$.

4. Решить уравнение $3^{2x+1} + 3\cdot 9^{|x+1|} = 10$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{7}$. Через середины M и N ребер SA и SD перпендикулярно плоскости SBC проведена плоскость, пересекающая ребра SC и SB в точках K и L. Найти объем пирамиды $SMNKL$.

Вариант 2.2

1. В Тридевятом царстве в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 9 рублей и золотые монеты достоинством 81 рубль. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 23 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 700 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} 2x$.

3. Окружность с центром на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC касается катетов AB и BC в точках M и N соответственно. Найти длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины прямого угла, если $AM = 3$, $CN = 12$.

4. Решить уравнение $2^{2x+1} + 2 \cdot 4^{|x+1|} = 5$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{5}$. Через середины M и N ребер SB и SC перпендикулярно плоскости SBC проведена плоскость, пересекающая ребра SD и SA в точках K и L. Найти объем пирамиды $SMNKL$.

Вариант 2.3

1. В Семиземье в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 7 рублей и золотые монеты достоинством 49 рублей. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 17 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 300 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 3x = 2\operatorname{tg} 2x$.

3. Окружность с центром на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC касается катетов AB и BC в точках M и N соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AM = 8$, $CN = 2$.

4. Решить уравнение $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{|x-1|} = 14$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{7}$. Точки M и N расположены соответственно на ребрах SB и SC так, что $SM : MB = = SN : NC = 1 : 3$. Через точки M и N перпендикулярно плоскости SBC проведена плоскость, пересекающая ребра SD и SA в точках K и L. Найти объем пирамиды $SMNKL$.

Вариант 2.4

1. В Шестьляндии в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 6 рублей и 36 рублей. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 14 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 200 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

2. Решить уравнение $3\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 3x$.

3. Окружность с центром на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC касается катетов AB и BC в точках M и N соответственно. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины прямого угла, если $AM = 9$, $CN = 1$.

4. Решить уравнение $3^{x-1} + 4 \cdot 3^{|x-2|} = 21$.

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны 3. Точки M и N расположены соответственно на ребрах SA и SD так, что $SM : MA = = SN : ND = 2 : 1$. Через точки M и N перпендикулярно плоскости SBC проведена плоскость, пересекающая ребра SC и SB в точках K и L. Найти объем пирамиды $SMNKL$.

2004

Вариант 1.1

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более трех «десяток», второй — ровно три «девятки», а третий — не менее одной «семерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Решить уравнение $\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} = 0$.

3. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что две его вершины M и N лежат на гипотенузе AC, а вершины K и L — на катетах BC и AB. Известно, что точка M лежит между точками A и N, $AM = 3$, $NC = 2$ и площадь прямоугольника $KLMN$ равна $10\sqrt{6}$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{3}{\sin x} - \frac{2}{\cos x} = \sqrt{52}.$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 1. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка N — центр грани AA_1D_1D. Плоскость, проходящая через точки B, K и N, пересекает прямые A_1C_1 и CD в точках Q и S соответственно. Найти длину отрезка QS.

Вариант 1.2

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух «десяток», второй — ровно три «девятки», а третий — не менее одной «восьмерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Решить уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-2x} + \sqrt{x-1} = 0.$

3. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что две его вершины M и N лежат на гипотенузе AC, а вершины K и L — на катетах BC и AB. Известно, что $AM = 2$, $MN = 6$, $NC = 1$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{2}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{20}.$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 1. Точка K лежит на ребре BC, причем $BK = \frac{1}{3}$, а точка N — центр грани AA_1B_1B. Плоскость, проходящая через точки C_1, K и N, пересекает прямые CD и B_1D_1 в точках P и R соответственно. Найти длину отрезка PR.

Вариант 1.3

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 138 очков. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более одной «десятки», второй — ровно четыре «девятки», а третий — не менее одной «семерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{7-2x}+\sqrt{x-2}=0$.

3. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что две его вершины M и N лежат на гипотенузе AC, а вершины K и L — на катетах BC и AB. Известно, что точка M лежит между точками A и N, $AM=4$, $CN=3$ и площадь треугольника ABC равна $63\sqrt{3}$. Найти площадь прямоугольника $KLMN$.

4. Решить уравнение

$$\frac{5}{\sin x}+\frac{4}{\cos x}=2\sqrt{41}.$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 1. Точка K лежит на ребре C_1D_1, причем $C_1K=\frac{1}{3}$, а точка N — центр грани BCC_1B_1. Плоскость, проходящая через точки D, K и N, пересекает прямые AB и A_1C_1 в точках P и R соответственно. Найти длину отрезка PR.

Вариант 1.4

1. За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 142 очка. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух «десяток», второй — ровно две «девятки», а третий — не менее одной «восьмерки». Сколько очков набрал каждый из стрелков?

2. Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{14-x}+\sqrt{x-4}=0$.

3. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что две его вершины M и N лежат на гипотенузе AC, а вершины K и L — на катетах BC и AB. Известно, что точка M лежит между точками A и N, $AM = 4$, $NC = 1$ и площадь треугольника BLK равна площади прямоугольника $KLMN$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{6}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} = 2\sqrt{61}.$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 1. Точка K — середина ребра AD, а точка N — центр грани CDD_1C_1. Плоскость, проходящая через точки A_1, K и N, пересекает прямые B_1D_1 и AB в точках Q и S соответственно. Найти длину отрезка QS.

Вариант 2.1

1. Два насоса, работая одновременно, наполняют бассейн за 4 часа. Если 60 % объема заполнить с помощью первого насоса, а затем оставшуюся часть — с помощью второго, менее мощного, то на заполнение бассейна уйдет 11 часов. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить весь бассейн, используя только первый насос?

2. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 3x + 2) + \log_{1/2}(2x - 2) = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $AH = 16$, $HK = 3$ и $CH : HL = 3 : 1$. Найти BK.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 7x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 4. Точка M на ребре BC выбрана так, что $BM = 3$. Из точки A проведен перпендикуляр AH к плоскости C_1DM, где H — основание перпендикуляра. Найти MH.

Вариант 2.2

1. В первый день бригада выполнила задание за 8 часов, работая без прогульщика Василия. Во второй день бригада в полном составе выполнила $\frac{5}{6}$ такого же задания, а оставшуюся часть Василий доделывал в одиночку. Всего на выполнение задания во второй день ушло 9 часов. Сколько времени требуется бригаде, чтобы выполнить задание в полном составе?

2. Решить уравнение $\log_2(2x^2 + x - 3) + \log_{1/2}(3x + 1) = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 8$, $HL = 3$ и $AH : HK = 6 : 1$. Найти BL.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\cos x$, $\sin 3x$, $\cos 7x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 4. Точка M на ребре CD выбрана так, что $CM = 1$. Из точки B проведен перпендикуляр BH к плоскости AD_1M, где H — основание перпендикуляра. Найти MH.

Вариант 2.3

1. Теплоход проплыл первую четверть пути из пункта А в пункт Б с выключенным двигателем, двигаясь по течению реки. Весь путь из А в Б занял 13 часов. На обратный путь из Б в А теплоход затратил 5 часов. Сколько времени потребуется теплоходу на путь из А в Б, если двигатель не выключать на протяжении всего пути?

2. Решить уравнение $\log_3(x^2 + 2x - 9) + \log_{1/3}(x + 3) = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $AH = 9$, $HK = 2$ и $CH : HL = 2 : 1$. Найти AC.

4. Найти все значения x, для которых числа $-\cos 7x$, $\sin 4x$, $\cos x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 3. Точка M на ребре AD выбрана так, что $AM = 1$. Из точки D_1 проведен перпендикуляр D_1H к плоскости A_1BM, где H — основание перпендикуляра. Найти A_1H.

Вариант 2.4

1. Путь из пункта А в пункт Б катер проплыл за 10 часов, двигаясь против течения реки. На обратном пути из Б в А у катера сломался двигатель, поэтому последнюю треть пути он двигался со скоростью течения реки. Всего на обратный путь ушло 14 часов. Сколько времени потребовалось бы катеру на обратный путь, если бы двигатель не сломался?

2. Решить уравнение $\log_3(x^2 + 4x - 2) + \log_{1/3}(2x + 1) = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 9$, $HL = 4$ и $AH : HK = 4 : 1$. Найти AC.

4. Найти все значения x, для которых числа $\sin 7x$, $\sin 4x$, $\sin x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины ребер равны 3. Точка M на ребре AB выбрана так, что $AM = 2$. Из точки A_1 проведен перпендикуляр A_1H к плоскости B_1CM, где H — основание перпендикуляра. Найти CH.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Абитуриентам, поступавшим на физический факультет в 1975–1985 и 2000–2004 годах, предлагались для решения те же задачи, что и для механико-математического факультета.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение $2\cos 2x + 1 = 5\sin^2 x + 6\cos x$.

2. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ на отрезке $[1, 6]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 5 и 3 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 4$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C — середина лежащей в круге O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство

$$\log_{x+1} \frac{3x}{5x-8} > 1.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $AB = BC = 1$, длина боковых ребер равна 3. Точки K и L — середины ребер AC и BC, точки M и N выбраны соответственно на ребрах SA и SB так, что $SM = NB = 1$. Найти объем пирамиды $NMKL$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $12\sin x + 6 = 4\cos 2x + \cos^2 x$.

2. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ на отрезке $[-1,\ 4]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 3 и 4 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 2$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C — середина лежащей вне круга O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи CA и CB пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство

$$\log_x \frac{4x-10}{3x-3} < -1.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, длина боковых ребер равна 10. Точки K и L — середины ребер SB и SC, точки M и N выбраны соответственно на ребрах AD и AB так, что $MD = AN = 2$. Найти объем пирамиды $KLMN$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $4\cos 2x + 1 = \sin^2 x + 6\cos x$.

2. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 12x^2 + 27x + 2$ на отрезке $[2,\ 7]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 4 и 5 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 6$. Известно, что центр окружности O_2 лежит в круге O_1. Пусть C — середина лежащей в круге O_2 дуги AB окружности O_1. Лучи AC и BC пересекают окружность O_2 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство

$$\log_{x-1} \frac{3x-6}{2x-6} > 1.$$

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковые ребра имеют длину 2. Точки K и L — середины ребер AB и BC, точки M и N выбраны соответственно на ребрах AS и SC так, что $AM = SN = \frac{2}{3}$. Найти объем пирамиды $MNKL$.

Вариант 4

1. Решить уравнение $2\cos^2 x + \cos 2x = 6\sin x + 4$.

2. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x + 5$ на отрезке $[-5,\ -1\,]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 4 и 3 соответственно пересекаются в точках A и B, расстояние между их центрами равно 5. Точка C — середина лежащей вне круга O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи CA и CB пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство

$$\log_x \frac{3x-7}{3x-3} < -1.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 2$, $BC = 1$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания, $SC = 3$. Точки K и L — середины ребер SB и AB, точки M и N выбраны соответственно на ребрах BC и SC, причем $MC = 1/3$, $NC = 1$. Найти объем пирамиды $KLMN$.

1987

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения $\sin x + \cos 3x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} > 0$.

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_2(x^2 - x + 1)} + 1 \geqslant \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2 - x + 1)}.$$

3. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, которая пересекает окружности в точках C и D, причем точка B лежит между C и D; $CD = 8$. Найти площадь треугольника ACD.

4. Прямая касается параболы $y = -x^2 + 2x + 2$ в точке A, пересекает ось Ox в точке B, ось Oy в точке C. Известно, что точка A

лежит в первой четверти координатной плоскости и отрезок AC в два раза длиннее отрезка AB. Найти уравнение касательной.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC и BD взаимно перпендикулярны и имеют длину 2. Через точки M и N — середины ребер AC и BD соответственно — проведена плоскость, которая пересекает ребро AB и образует равные двугранные углы с плоскостями граней ABC и ABD. Найти величины этих углов.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения $\cos x + \sin 3x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} > 0$.

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_3(x^2 - 2/3)} + 1 \geqslant \frac{\log_3 x}{\log_3(x^2 - 2/3)}.$$

3. Две окружности радиусов 5 и 3, расстояние между центрами которых равно 4, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, причем точка B лежит между C и D. Известно, что отрезок AB является биссектрисой угла A треугольника ACD. Найти CD.

4. Прямая касается параболы $y = -x^2 + 4x + 8$ в точке A, пересекает ось Ox в точке B, ось Oy в точке C. Известно, что точка A лежит во второй четверти координатной плоскости и отрезок AC в два раза длиннее отрезка AB. Найти уравнение касательной.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 4, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\sqrt{3}$. Через точки M и N — середины ребер AC и A_1B_1 — проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая с плоскостями граней ABC и AA_1B_1B равные углы. Найти величины этих углов.

Вариант 3

1. Найти все решения уравнения $\sin x = \cos 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{2}{\log_2(x-1)} + 1 \leqslant \frac{\log_2(x^2 - x + 1)}{\log_2(x-1)}.$$

3. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, которая параллельна общей касательной двух данных окружностей и пересекает их кроме точки B в точках C и D. Найти площадь треугольника ACD.

4. Прямая касается параболы $y = 2x^2 + 4x - 4$ в точке A, пересекает ось Ox в точке B, ось Oy в точке C. Известно, что точка A лежит в третьей четверти координатной плоскости и отрезок AC в два раза длиннее отрезка AB. Найти уравнение касательной.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, ребро SB перпендикулярно основанию и равно 2. Через вершину D и середину M ребра AS проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней SAB и $ABCD$. Найти величины этих углов.

Вариант 4

1. Найти все решения уравнения $\cos x = \sin 3x$, удовлетворяющие неравенству $\sin\frac{x}{2} > \cos\frac{x}{2}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_3(x+3)} + 1 \leqslant \frac{\log_3(x^2+4x+5)}{\log_3(x+3)}.$$

3. Заданы две окружности O_1 и O_2 радиусов 5 и 2 соответственно, расстояние между центрами которых равно 6. Через точку A — одну из точек их пересечения — проведена прямая, которая пересекает O_1 в точке B, O_2 — в точке C. Известно, что точка A лежит между B и C; $AB = 2AC$. Найти длину BC.

4. Прямая касается параболы $y = x^2 + 2x - 2$ в точке A, пересекает ось Ox в точке B, ось Oy в точке C. Известно, что точка A лежит в четвертой четверти координатной плоскости и отрезок AC в два раза длиннее отрезка AB. Найти уравнение касательной.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны 1, $AB = 4$, $AD = 2$. Через точки M и N — середины ребер A_1B_1 и AD — проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней AA_1B_1B и $ABCD$. Найти величины этих углов.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg}^3 x + \frac{1}{27}\operatorname{ctg}^4 x = 0$.

2. Решить неравенство

$$(2^{x+1} - 3^{x+1}) \cdot \sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} \cdot 3^x + 11 \cdot 3^{2x}} \geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Известно, что биссектриса угла C параллелограмма делит треугольник AMD на две части равной площади. Найти длину стороны AD, если $CD = 4$.

4. Найти все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leqslant 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leqslant 0. \end{cases}$$

5. В основании четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю $AC = 8$. Сфера касается ребер AA_1, BB_1, DD_1 и плоскости $ABCD$ в точке C. Найти радиус сферы.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 x = 0$.

2. Решить неравенство

$$(5^x - 2^{x+1}) \cdot \sqrt{5^{2x} - 5^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x+2}} \geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Известно, что биссектриса угла C параллелограмма делит треугольник AMD на две части равной площади. Найти длину стороны BC, если $AB = 4$.

4. Найти все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 4 \leqslant 0, \\ y^2 - 4y - 4x \leqslant 0. \end{cases}$$

5. В основании четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, точка M — середина ребра BC. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и плоскости основания $ABCD$ в точке M. Найти радиус сферы.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\cos x + 3\cos^2 x + 9\cos^3 x + 27\cos^4 x = 0$.

2. Решить неравенство

$$(2^{x+1} - 5^{x+1}) \cdot \sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} \cdot 5^x + 14 \cdot 5^{2x}} \geqslant 0.$$

3. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Точка L лежит на отрезке AB, причем отрезок CL делит треугольник BMN на две части равной площади. Найти отношение длин отрезков AL и BL.

4. Найти все решения системы неравенств

$$\begin{cases} 1 - 2xy \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y \leqslant 0. \end{cases}$$

5. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC = 8$ и медианой $AM = 6$, точка P — середина медианы AM. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и плоскости основания ABC в точке P. Найти радиус сферы.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\sin x + 2\sin^2 x + 4\sin^3 x + 8\sin^4 x = 0$.

2. Решить неравенство

$$(3^x - 2^x) \cdot \sqrt{3^{2x} - 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{2x+1}} \geqslant 0.$$

3. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Точка L лежит на стороне AB, отрезок CL делит треугольник ABM на две части равной площади. Найти отношение длин отрезков AL и LB.

4. Найти все решения системы неравенств

$$\begin{cases} 2xy + 6x + 9 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 6y \leqslant 0. \end{cases}$$

5. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, точка M — середина ребра BC. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и плоскости основания ABC в точке M. Найти радиус сферы.

1989

Вариант 1

1. Найти все пятизначные числа вида $67m1n$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\,\sin x = \sqrt{5\cos x - 1}.$$

3. Один из углов треугольника равен 60°, радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \frac{2}{\log_5|\sin x|}.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Длина ребра куба равна 1. Точки M и N — середины ребер CD и CC' соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM.

Вариант 2

1. Найти все пятизначные числа вида $2m57n$ (m и n — цифры), которые делятся на 15.

2. Решить уравнение

$$2\cos x = \sqrt{9\sin x + 6}.$$

3. Один из углов треугольника равен 150°, радиус описанной около него окружности равен $6\sqrt{3}$, периметр треугольника равен 21. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

4. Решить неравенство

$$\log_{|\sin 2x|}(2x^2 - 7x + 21) > \frac{4}{\log_2|\sin 2x|}.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, все ребра пирамиды имеют длину 1. Точки M и N — середины ребер SD и CD соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM.

Вариант 3

1. Найти все пятизначные числа вида $517mn$ (m и n — цифры), которые делятся на 18.

2. Решить уравнение

$$2\sin x = \sqrt{11\cos x + 1}.$$

3. Один из углов треугольника равен 45°, радиус вписанной в него окружности равен 1, а площадь треугольника равна $18 + \sqrt{2}$. Найти радиус описанной около него окружности.

4. Решить неравенство

$$\log_{|\cos x|}(x^2 - 8x + 64) > \frac{2}{\log_7 |\cos x|}.$$

5. В основании прямой треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ее боковые ребра AA', BB', CC' равны 2. Точки K и L — середины ребер AB и CC' соответственно. Найти расстояние между прямыми KL и $A'C$.

Вариант 4

1. Найти все пятизначные числа вида $74m3n$ (m и n — цифры), которые делятся на 45.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,\cos x = \sqrt{5 - 7\sin x}.$$

3. Один из углов треугольника равен 135°, радиус вписанной в него окружности равен $\sqrt{2}$, периметр треугольника равен 40. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_{|\cos 2x|}(2x^2 - 5x + 29) > \frac{3}{\log_3 |\cos 2x|}.$$

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AD, BD и CD равны $\sqrt{3}$. Точки K и L — середины ребер AC и BD соответственно. Найти расстояние межу прямыми BK и AL.

1990

Вариант 1

1. Решить уравнение $1 - 8\cos^2 x = 9\sin 2x + 3\cos 2x$.

2. Решить неравенство $|x^2 + 2x - 24| > 6x + 8$.

3. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом $B = 30^\circ$ описана окружность S радиуса R, AD — ее диаметр, проведенный из точки A. Найти радиус окружности, касающейся стороны AC данного треугольника, диаметра AD и окружности S.

4. На координатной плоскости заданы парабола $y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{13}{2}$ и касательная к ней, параллельная прямой $y = 6x$. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина параболы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через вершину A и середину бокового ребра SC проведено сечение плоскостью, параллельной диагонали BD основания $ABCD$. Известно, что площадь сечения равна 9, а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол в 60°. Найти объем данной пирамиды.

Вариант 2

1. Решить уравнение $8\sin 2x + 6 = 4\sin^2 x + 3\cos 2x$.

2. Решить неравенство $|x^2 - 8x - 9| + 4x > 3$.

3. Сторона правильного треугольника ABC равна a, AD — его высота, опущенная из вершины A. Найти радиус окружности, которая касается стороны AC, высоты AD и описанной около треугольника ABC окружности.

4. На координатной плоскости заданы парабола $y = x^2 + 4x - 4$ и касательная к ней, параллельная прямой $y = 8x$. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина параболы.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ на ребре BC выбрана точка M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Через середины боковых ребер SA и SC и точку M проведено сечение плоскостью. Известно, что площадь сечения равна 30, а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол в 30°. Найти объем данной пирамиды.

Вариант 3

1. Решить уравнение $4\cos^2 x + 13\sin 2x + 5 = 3\cos 2x$.

2. Решить неравенство $|x^2 + 3x - 10| + 7 > 5x$.

3. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Найти радиус окружности, которая касается стороны AB, диагонали AC и окружности, описанной около квадрата $ABCD$.

4. На координатной плоскости заданы парабола $y = -\frac{x^2}{2} + 3x - 7$ и касательная к ней, параллельная прямой $y = 5x$. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина параболы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S через середины ребер AB и AD основания и бокового ребра SC проведено сечение плоскостью. Известно, что площадь сечения равна $2\sqrt{2}$, а плоскость сечения образует с плоскостью основания $ABCD$ угол в $45°$. Найти объем данной пирамиды.

Вариант 4

1. Решить уравнение $4\sin^2 x + 11\sin 2x = 5\cos 2x + 3$.

2. Решить неравенство $|x^2 - 6x - 16| + 2x > 5$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ стороны $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Найти радиус окружности, которая касается основания AD, диагонали AC и окружности, описанной около данной трапеции.

4. На координатной плоскости заданы парабола $y = -x^2 + 6x - 6$ и касательная к ней, параллельная прямой $y = 6x$. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина параболы.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S через ребро AB основания и середину высоты SH пирамиды проведено сечение плоскостью. Известно, что площадь сечения равна 11, а плоскость сечения образует с плоскостью основания $ABCDEF$ угол в $30°$. Найти объем данной пирамиды.

1991

Вариант 1

1. Какой наименьший угол могут образовывать векторы

$$(2;\ 5x+1;\ 1) \quad \text{и} \quad (4x+2;\ -1;\ 1-3x)?$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2\cos x - \tfrac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

3. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, окружность, проходящая через вершину C, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $BQ = 2$ и CL является биссектрисой угла C.

4. Решить уравнение

$$5\cdot 49^{|x-3|} + 2\cdot 25^{|x-3|} = 11\cdot 35^{|x-3|}.$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' длины ребер равны 5. Точки K и L расположены соответственно на ребрах $B'C'$ и CD так, что $B'K : KC' = DL : LC = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей $ABCD$ и $ABB'A'$, лежит на отрезке KL. Найти радиус шара.

Вариант 2

1. Какой наименьший угол могут образовывать векторы

$$(1-5x;\ 1;\ 3) \quad \text{и} \quad (-1;\ 1+4x;\ 3-3x)?$$

2. Решить уравнение

$$2\cos\left(\tfrac{5\pi}{3} - 4\sin x\right) = 1.$$

3. Окружность, проходящая через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $AL = 6$, $LB = 8$ и прямая PQ параллельна AB.

4. Решить уравнение

$$2\cdot 4^{|x+2|} + 3\cdot 9^{|x+2|} = 7\cdot 6^{|x+2|}.$$

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра равны 6. Точки P и Q расположены соответственно на ребрах BC и $A'C'$ так, что $BP : PC = A'Q : QC' = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей $ABB'A'$ и $ACC'A'$, лежит на отрезке PQ. Найти радиус шара.

Вариант 3

1. Какой наименьший угол могут образовывать векторы

$$(3x+2;\ -2;\ 4x+1) \ \text{ и } \ (2;\ 5x+2;\ 1)?$$

2. Решить уравнение

$$2\sin\!\left(3\cos x - \tfrac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

3. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке L, проходит через вершину C и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AB и AC, если известно, что $CQ = 9$, $QB = 3$, $AP = 4$ и CL является биссектрисой угла C.

4. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^{|x-2|} + 5 \cdot 49^{|x-2|} = 16 \cdot 14^{|x-2|}.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6, высота пирамиды равна 4. Точки K и L расположены соответственно на ребрах AD и SC так, что $AK : KD = SL : LC = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей ASB и CSD, лежит на отрезке KL. Найти радиус шара.

Вариант 4

1. Какой наименьший угол могут образовывать векторы

$$(1+3x;\ 3+4x;\ -3) \ \text{ и } \ (1;\ 3;\ 3+5x)?$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\,\cos\!\left(3\cos x + \tfrac{\pi}{4}\right) = 1.$$

3. Окружность, проходящая через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках

P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AB = 12$, $PQ = 9$, $AP = 4$ и прямая PQ параллельна AB.

4. Решить уравнение

$$7 \cdot 16^{|x+3|} + 3 \cdot 9^{|x+3|} = 22 \cdot 12^{|x+3|}.$$

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA', BB', CC' равны $\sqrt{3}$. Точки K и L — середины ребер $B'C'$ и AC соответственно. Центр шара, касающегося плоскостей ABC и $BB'C'C$, лежит на отрезке KL. Найти радиус шара.

1992

Вариант 1

1. Крестьянин решил скосить траву на трех одинаковых лугах. Первый луг он скосил на тракторе. Второй луг он косил на тракторе 3 минуты, после чего трактор сломался и крестьянин докашивал второй и третий луга вручную. Первый луг был скошен на 30 минут быстрее второго, а второй — на 30 минут быстрее третьего. За какое время были скошены все три луга?

2. Решить уравнение

$$\left|-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} + 1.$$

3. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH, продолжение которой пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 9$, $AD = 13$.

4. Решить уравнение

$$1 + 2\cos\frac{13\pi}{x^2+3} = 4\sin\frac{13\pi}{2x^2+6}.$$

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Прямая l проходит через точку A параллельно BC'. На прямой l выбрана точка P так, что P и A' лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти максимально возможный объем пирамиды $PABC$, если $PQ = \sqrt{3}$, а точка Q лежит на прямой BC.

Вариант 2

1. Автор отдал перепечатывать статью машинистке, печатающей со скоростью 8 страниц в час. Машинистка перепечатала треть статьи, после чего работала еще 1 час, а затем ушла. Остаток текста допечатывал сам автор. Известно, что первая треть статьи была перепечатана на 40 минут быстрее, чем вторая, а вторая — на 20 минут быстрее, чем третья. Сколько страниц в статье?

2. Решить уравнение

$$|2x+5\,| = \sqrt{x+3}+1.$$

3. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH, пересекающая описанную около треугольника окружность в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 18$, $DH = 7$.

4. Решить уравнение

$$\cos\frac{17\pi}{5x^2+3} = \sqrt{3}\,\cos\frac{17\pi}{10x^2+6} + 2.$$

5. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D — правильный треугольник со стороной 1. Ребро BD перпендикулярно плоскости ABC и равно 1. Точка K лежит на прямой, параллельной BC и проходящей через точку D, а точка S лежит на луче BA. Найти максимально возможный объем пирамиды $SBCD$, если $KS = 3$.

Вариант 3

1. Бассейн начали заполнять водой с помощью насоса. После того как бассейн заполнился на треть, насос проработал еще 1 минуту и сломался. Оставшаяся часть бассейна заполнялась с помощью запасного насоса, имеющего меньшую мощность. Известно, что первая треть бассейна была заполнена на 10 минут быстрее второй, а вторая — на 10 минут быстрее третьей. За какое время была заполнена первая треть бассейна?

2. Решить уравнение

$$\left|-\tfrac{x}{2}+2\,\right| = \sqrt{x-1}+\tfrac{7}{4}.$$

3. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH, продолжение которой пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 3$, $DH = 12$.

4. Решить уравнение

$$\cos\frac{13\pi}{5x^2+2} + \sqrt{2}\,\sin\frac{13\pi}{10x^2+4} + 1 = 0.$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка M лежит на прямой BC, а точка N — на луче AD'. Найти максимально возможный объем пирамиды $NABCD$, если $AB = 1$, $MN = \sqrt{5}$.

Вариант 4

1. Автобус, на котором турист выехал из пункта A в пункт B, сломался через 7 минут после того, как проехал треть пути. Далее турист пошел пешком. Известно, что расстояние от A до B равно 18 км. Первую треть пути от A до B он преодолел на 25 минут быстрее второй, а вторую — на 35 минут быстрее третьей. С какой скоростью турист шел пешком?

2. Решить уравнение

$$3 - \sqrt{x+1} = |2x-2\,|.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведен диаметр AD описанной около него окружности, который пересекает сторону BC в точке E. Найти боковую сторону треугольника ABC, если $AE = 25$, $ED = 7$.

4. Решить уравнение

$$\cos\frac{11\pi}{3x^2+2} = \sqrt{2}\,\cos\frac{11\pi}{6x^2+4} + 1.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1. Боковая грань ADS перпендикулярна основанию, $AS = SD = 1$. Точка R лежит на луче AS, точка T — на прямой BC, причем $RT = \sqrt{10}$. Найти максимально возможный объем пирамиды $RABCD$.

1993

Вариант 1

1. Решить уравнение $\sin(3x+1)+\sin(3-x)=\sin(x+2)$.

2. Из города в деревню вышел Иван. Одновременно из деревни в город вышла Марья. Расстояние 2 км между ними было дважды: первый раз, когда Иван прошел половину пути, второй раз, когда Марья прошла треть пути. Найти расстояние между городом и деревней.

3. Внутри ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в 60° выбрана точка M так, что площади треугольников ADM, ABM, BCM и CDM пропорциональны числам 1, 2, 4 и 3 соответственно. Найти расстояние от точки M до вершины A.

4. Решить неравенство

$$\log_2(x^2-5x+6)<\frac{1}{\log_{x-2}2\sqrt{2}}+\frac{1}{\log_{x-3}2}+\frac{1}{2}.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, AC, AS взаимно перпендикулярны и $AB=1$, $AC=2$, $AS=4$. Точки K и L — середины ребер BS и AC. Найти угол между прямой KL и плоскостью BSC.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\cos(x+5)+\cos(1-3x)=\cos(2x+2)$.

2. Имеются два бака равного объема, первый — полный воды, второй — заполненный водой на четверть. Из первого начали выпускать воду со скоростью 10 л/мин. Одновременно второй бак начали заполнять с постоянной скоростью. Разница объемов в баках дважды составляла 60 литров: сначала, когда первый бак опустел на 3/10 объема, и затем, когда второй бак заполнился на 3/5 объема. С какой скоростью заполняли второй бак?

3. Вне равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка M так, что отрезок AM пересекает сторону BC, а площади треугольников ABM, ACM и BCM пропорциональны числам 4, 1 и 2 соответственно. Найти длину отрезка AM.

4. Решить неравенство

$$\frac{5}{6}+\log_3(x^2+x-6)>\frac{1}{\log_{x-2}3}+\frac{2}{\log_{x+3}\sqrt{27}}.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, AC, AS взаимно перпендикулярны и $AB=3$, $AC=1$, $AS=\sqrt{3}$. Найти угол между медианой BK грани ASB и плоскостью BSC.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\cos(2x-1)-\cos(4x+3)=\sin(3x+1)$.

2. От двух причалов, расстояние между которыми равно 15 км, вниз по реке с разными скоростями одновременно отплыли две лодки. Оба раза, когда одна из лодок находилась в 20 км от своего причала, расстояния между лодками были равны. Найти это расстояние.

3. Вне ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в $60°$ выбрана точка M так, что отрезки AM и DM пересекают сторону BC, а площади треугольников ABM, BCM, CDM и ADM пропорциональны числам 1, 2, 3 и 6 соответственно. Найти длину отрезка AM.

4. Решить неравенство

$$4+\log_4(x^2+6x+8)>\frac{1}{\log_{x+2}4}+\frac{1}{\log_{x+4}\sqrt{2}}.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA, AB и BC взаимно перпендикулярны и $SA=4$, $AB=3$, $BC=2\sqrt{5}$. Точки K и L — середины ребер AC и SB. Найти угол между прямой KL и плоскостью BSC.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\sin(5x+2)-\sin(4-x)=\cos(2x+3)$.

2. По круговому маршруту длиной более 16 км из одного и того же места одновременно, но в разных направлениях выехали велосипедисты Коля и Петя. До момента их первой встречи расстояние в 5 км, измеряемое по меньшей из дуг маршрута, было между ними дважды: в первый раз, когда Коля проехал одну двенадцатую часть маршрута, и во второй раз, когда Петя проехал половину маршрута. Найти скорость Коли, если Петя ехал со скоростью 40 км/ч.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка M так, что площади треугольников ABM, ACM и BCM пропорциональны числам 1, 2 и 3 соответственно. Найти длину отрезка AM.

4. Решить неравенство

$$\log_2(x^2 - 7x + 12) < \frac{1}{\log_{3-x} 2} + \frac{1}{\log_{4-x} 8} + 1.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA, AB и BC взаимно перпендикулярны и $SA = 1$, $AB = 2$, $BC = 4$. Найти угол между медианой BK грани ABC и плоскостью BSC.

1994

Вариант 1

1. По кольцевому шоссе длиной 3 километра едут в одном направлении три велосипедиста со скоростями 13, 21 и 27 км/ч. В один момент все три велосипедиста поравнялись (оказались в одной точке шоссе). Через какое минимальное время велосипедисты снова поравняются?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{2x+2} - 6^{x+1} + a \cdot 4^x = 0$$

имеет единственное решение?

3. В прямоугольнике $ABCD$ радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равны 2. Расстояние между центрами окружностей равно 5. Найти стороны прямоугольника.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{6 \sin 2x} + 2 \cos x = 0.$$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра $AB = AC = BD = 5$, $AD = BC = \sqrt{10}$. Угол между гранями ABD и ABC равен 60°. Найти длину ребра CD.

Вариант 2

1. По кольцевому шоссе длиной 5 километров едут в одном направлении три велосипедиста со скоростями 21, 22 и 26 км/ч. В один из моментов первый велосипедист оказался в точке A, а второй и третий велосипедисты — в точке C, диаметрально противоположной точке A (AC — диаметр кольца). Через какое минимальное время после этого все три велосипедиста поравняются?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{2x} - 10^x + 4^{x-1} \cdot (a-2) = 0$$

имеет единственное решение?

3. В прямоугольнике $ABCD$ радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равны 2. Расстояние между точками касания этих окружностей с диагональю AC равно 7. Найти стороны прямоугольника.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 3x} - 2\cos x = 0.$$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра $AC = BD = 5$, $AD = BC = 4$, $AB = 3$, угол между гранями ABD и ABC равен 60°. Найти длину ребра DC.

Вариант 3

1. По кольцевому шоссе длиной 3 километра едут три велосипедиста со скоростями 33, 19 и 11 км/ч. На шоссе расположены три точки A, B, C, причем длины дуг AB, BC и CA равны 1 км. Движение велосипедистов происходит в одном направлении от A к B и далее к C. В один момент первый велосипедист находится в точке A, второй — в точке B, третий — в точке C. Через какое минимальное время после этого все три велосипедиста поравняются?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$7^{2x} - 2 \cdot 21^x + (2a-1) \cdot 9^x = 0$$

имеет единственное решение?

3. В прямоугольнике $ABCD$ радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равны 1. Прямая, проходящая через центры этих окружностей, образует с диагональю AC угол 45°. Найти стороны прямоугольника.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{6\sin 2x} + 2\sin x = 0.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра $AC = 5$, $AB = 2$, $AS = BS = \sqrt{17}$, высота CH треугольника ABC равна 4, угол между гранями SAB и ABC равен 60°. Найти длину ребра SC.

Вариант 4

1. По кольцевому шоссе длиной 5 километров едут три велосипедиста. Два из них едут в одном направлении со скоростями 11 и 17 км/ч, а третий — в противоположном направлении со скоростью 15 км/ч. В один из моментов времени все три велосипедиста поравнялись. Через какое минимальное время велосипедисты поравняются снова?

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$25^x - 2\cdot 10^x + (2a+3)\cdot 4^x = 0$$

имеет единственное решение?

3. В треугольники ABC и ACD прямоугольника $ABCD$ вписаны окружности. Расстояние между центрами окружностей равно 5, а расстояние между точками касания окружностей с диагональю AC равно $\sqrt{5}$. Найти стороны прямоугольника.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{2\cos 2x} + \cos x = 0.$$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB и DAC — прямые, $AD = BC = 2$, $AC = 1$, угол между гранями ACD и ABC равен 120°. Найти длину ребра BD.

1995

Начиная с 1995 года на физическом факультете проводились репетиционные экзамены, где предлагались те же самые задачи, что и на репетиционных экзаменах на механико-математическом факультете. Поэтому далее приводятся только варианты письменных работ по математике для абитуриентов физического факультета на общих вступительных экзаменах.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{x+3}(\sqrt{x+4}+2) \leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 + 2x + 2$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $2y - 2x = 1$.

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = 2.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Точка M лежит на ребре AB, причем $BM = \frac{1}{4}AB$. Точка N лежит на луче CD, причем $CN = 3CD$. Найти длину бокового ребра пирамиды, если известно, что $MN = 5$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+\tfrac{3}{2}\right) \leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 + x + 2$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $x + y = 2$.

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x + \frac{3}{\cos^2 x} = 5.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Точка M лежит на луче AB, причем $AM = 3AB$. Точка N лежит на ребре CD, причем $CN = 2ND$. Найти длину бокового ребра пирамиды, если $MN = 4$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_{5-x}(\sqrt{6-x}+2) \leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 - 2x + 3$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $x - y + 4 = 0$.

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x = \operatorname{ctg}^2 x - 2.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Точка M лежит на ребре AB, причем $AM = 2MB$. Точка N лежит на луче DC, причем $DN = 2DC$. Найти длину бокового ребра пирамиды, если $MN = 4$.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_{2-x}\Bigl(\sqrt{\tfrac{5}{2}-x}+\tfrac{3}{2}\Bigr) \leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 - x - 1$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $x - y = 3$.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 2\cos 2x + 3.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ с вершиной D боковые ребра равны 2. Точка M лежит на луче BA, причем $BM = 2BA$. Точка N лежит на луче CD, причем $CN = 2CD$. Найти длину ребра BC, если $MN = 5$.

1996

Вариант 1

1. Роман купил несколько бутылок «Мартовского» пива на некоторую сумму. Ровно на эту же сумму можно было купить «Жигулевского», причем на две бутылки больше, либо на одну меньше, но зато «Петровского». Если взять 7 бутылок «Жигулевского» пива и 11 бутылок «Петровского» то стоимость такого набора совпадет со стоимостью 18 бутылок «Мартовского» пива. Сколько бутылок пива купил Роман?

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $BD = 7$, $CD = 8$, $BC < 4$, $\angle BAD = 120°$. Определить угол CAD.

3. Найти все числа a и b такие, что парабола $y = ax^2 + bx + 1$ касается прямых $y = 2x + 10$ и $y = 2 - 2x$.

4. Решить неравенство

$$\log_x\Bigl(8x - \frac{31}{2}x^2\Bigr) \leqslant \log_{\sqrt{8-\frac{31}{2}x}}\Bigl(8x - \frac{31}{2}x^2\Bigr).$$

5. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой, являются правильными треугольниками, а их периметры относятся как 17 : 2. Сфера с центром, расположенным в плоскости большего основания, касается другого основания и всех остальных граней пирамиды. Найти углы, образованные боковыми ребрами пирамиды с бóльшим основанием, если известно, что все эти углы одинаковы.

Вариант 2

1. Посадил Буратино 1 сольдо на поле Чудес и выросло из него волшебное дерево, а на нем монеты созрели. Стал Буратино трясти дерево и за три попытки все монеты стряхнул. Во второй попытке упало на 80 монет меньше, чем в первой, но на 16 монет больше, чем в третьей. Определить, какой урожай дало дерево, если известно, что числа, обратные к количествам монет, упавших в каждой попытке, составляют арифметическую прогрессию.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 7$, $AC = 5$, $BC < 5$, $\angle ADC = 135°$. Определить угол ADB.

3. Найти все числа a и b такие, что парабола $y = ax^2 + bx + 2$ касается прямых $y = 3x - 6$ и $y = -3x$.

4. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 7\sqrt{x}\right) + \log_{6-7x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 7\sqrt{x}\right) \geqslant 0.$$

5. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой и являются правильными треугольниками. Меньшее из оснований лежит в диаметральной плоскости сферы, касающейся другого основания и продолжений всех остальных граней пирамиды. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостями оснований один и тот же угол, равный 60°. Найти отношение периметров оснований.

Вариант 3

1. Из дальнего монастыря в Москву добралась сестра с наказом пожертвовать золотые серьги на купол храма Христа Спасителя. Весь путь она преодолела автобусом, теплоходом и поездом, истратив на билеты некоторую сумму в пропорции $3 : 4 : 12$. При этом на теплоходе она проплыла на 278 км больше, чем проехала на автобусе, и на 2780 км меньше, чем на поезде. На всех видах транспорта плата за проезд взимается пропорционально расстоянию. Если проехать 20 км автобусом и еще 6 км поездом, то стоимость такой поездки будет совпадать со стоимостью 33 км пути на теплоходе. Какое расстояние проехала сестра поездом?

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AD = 7\sqrt{3}$, $BD = 8\sqrt{3}$, $AB > 7$, $\angle ACD = 60^\circ$. Определить угол BCD.

3. Найти все числа a и b такие, что парабола $y = ax^2 + bx + 3$ касается прямых $y = 2x - 6$ и $y = 2 - 2x$.

4. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{25}{6}x - \frac{25}{6}x^2\right) + \log_{\sqrt{\frac{25}{6x^2} - \frac{25}{6x}}}\left(\frac{25}{6}x - \frac{25}{6}x^2\right) \leqslant 0.$$

5. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой, являются правильными треугольниками, а их периметры относятся как $8 : 5$. Сфера с центром, расположенным в плоскости меньшего основания, касается другого основания и продолжений всех остальных граней пирамиды. Найти углы, образованные боковыми ребрами пирамиды с бо́льшим основанием, если известно, что все эти углы одинаковы.

Вариант 4

1. Размечтался Прокл. Взял он цену, по которой он своего Воронка еще при социализме купил, да помножил на число лошадей в колхозе «Рассвет» и в точности получилась его нынешняя пенсия. Стал он прикидывать, что бы вышло, если бы ему за эту же пенсию табун колхоза «Заря» или «Восход» уступили, и получилось, что в первом случае каждая лошадь обошлась бы ему дешевле Воронка ровно на столько, сколько ему сейчас Фрол должен, а во втором — на столько же дороже. Определить численность табунов, если известно, что в «Рассвете» лошадей было на 25 меньше, чем в «Заре», и на 15 больше, чем в «Восходе».

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $BC = 7$, $CD = 5$, $BD > 5$, $\angle CAD = 45^\circ$. Определить угол BAC.

3. Найти все числа a и b такие, что парабола $y = ax^2 + bx + 4$ касается прямых $y = x - 4$ и $y = 2 - x$.

4. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{5}{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}\right) \geqslant \log_{5x-6x^2}\left(\frac{5}{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}\right).$$

5. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой и являются правильными треугольниками. Большее из оснований лежит в диаметральной плоскости сферы, касающейся другого основания и всех остальных граней пирамиды. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостями оснований один и тот же угол, равный 30°. Найти отношение периметров оснований.

1997

Вариант 1

1. Отправились друг к другу одновременно в гости по одной и той же дороге Баба-Яга на мотоступе и Кащей Бессмертный —

пешком. Через некоторое время они встретились. Если бы Кащей двигался со скоростью мотоступы, то встреча произошла бы на 15 минут раньше, а если бы Баба-Яга шла пешком со скоростью Кащея — то на 1 час позже. Сколько времени прошло от начала движения персонажей до встречи?

2. Решить уравнение

$$64^{\cos 2x} \cdot 16^{2\sin x} = \tfrac{1}{4}.$$

3. Точки M и N — середины меньших дуг AB и BC окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Определить радиус этой окружности, если известно, что $AC = \sqrt{11}$, $MN = 3$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_4(x/25)}{\log_2(5x)} = \frac{\log_2(\sqrt[4]{5} \cdot x)}{\log_4(x/\sqrt{5})}.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{6}$. Через середину L ребра AB и вершину C проведена плоскость α, которая перпендикулярна грани SAD и пересекает ребро SD в точке M. Определить отношение $SM : MD$.

Вариант 2

1. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха — то сократился бы на 1 минуту. За какое время мед был полностью съеден?

2. Решить уравнение

$$729^{\cos 2x} \cdot 81^{3\cos x} = \tfrac{1}{27}.$$

3. Около треугольника ABC с тупым углом при вершине B описана окружность радиуса 5. Точки M и N — середины меньших дуг AB и BC этой окружности. Определить длину стороны AC, если известно, что $MN = \sqrt{10}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_9(x/8)}{\log_3(\sqrt{2}\cdot x)} = \frac{\log_3(\sqrt{8}\cdot x)}{\log_9(x/2)}.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 2. Через середину L ребра AD и вершину B проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SAD и пересекает ребро SA в точке M. Определить отношение $SM : MA$.

Вариант 3

1. Ехали медведи на велосипеде, а навстречу раки — на хромой собаке. Медведи выехали из пункта А, а раки из пункта Б одновременно с медведями. Через некоторое время медведи встретились с раками. Если бы собака бежала со скоростью велосипеда, то встреча произошла бы на 20 минут раньше, а если бы, наоборот, медведи ехали со скоростью собаки — то на час позже. Сколько времени прошло от начала движения до встречи?

2. Решить уравнение

$$125^{\cos 2x}\cdot 25^{3\sin x+1} = \frac{1}{5}.$$

3. Около треугольника ABC с тупым углом при вершине B описана окружность. Точки M и N — середины меньших дуг AB и BC этой окружности. Определить радиус описанной окружности, если известно, что $AC = 4$, $MN = \sqrt{5}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_4(x/9)}{\log_2(3x)} = \frac{\log_2(\sqrt{3}\cdot x)}{\log_4(x/3)}.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{5}$. Через середину L ребра AD и вершину C проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SBC и пересекает ребро SB в точке M. Определить отношение $SM : MB$.

Вариант 4

1. Жили-были дед да баба, ели кашу с молоком … из одной тарелки. Начали они есть кашу одновременно, на разговоры не отвлекались. Если бы дед ел со скоростью бабы, то кашу ели бы на 3 минуты дольше, а если бы, наоборот, баба ела со скоростью деда, то кашу съели бы на 2 минуты быстрее. Определить длительность трапезы деда и бабы.

2. Решить уравнение

$$512^{\cos 2x} \cdot 8^{4\cos x} = \tfrac{1}{2}.$$

3. Окружность радиуса 5/3 описана около остроугольного треугольника ABC. Точки M и N — середины меньших дуг AB и BC этой окружности. Определить длину стороны AC, если известно, что $MN = \sqrt{10}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_9(x/125)}{\log_3(5x)} = \frac{\log_3(\sqrt[4]{125} \cdot x)}{\log_9(x/5)}.$$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, высота пирамиды равна 1. Через середину L ребра BC и вершину A проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SAB и пересекает ребро SB в точке M. Определить отношение $SM : MB$.

1998

Вариант 1

1. Решить неравенство $2x - 6 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x + 6}$.

2. Решить уравнение $\log_{2/5} x + \log_5 x = \log_x (1/2)$.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, $AC = 5\sqrt{3}$. На стороне AB выбрана точка M так, что $BM = BC$. Радиус окружности, описанной около треугольника AMC, равен $2\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 7x$.

5. Ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равны 1, точка M — середина BC. Точка P на прямой $A'C'$ и точка Q на прямой $B'M$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA'B'B$. Найти длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

Вариант 2

1. Решить неравенство $2x - 8 \geqslant \sqrt{x^2 - 5x + 40}$.

2. Решить уравнение $\log_3 x + \log_x (1/2) = \log_6 x$.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, $AC = \sqrt{15}$. На продолжении стороны AB выбрана точка M так, что $BM = BC$ (точка B лежит между M и A). Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMC.

4. Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cos 9x$.

5. Ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равны 2, точка M — середина $A'D'$. Точка P на прямой $B'D$ и точка Q на прямой BM выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $CC'D'D$. Найти длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

Вариант 3

1. Решить неравенство $4 - 2x \leqslant \sqrt{x^2 + 5x + 16}$.

2. Решить уравнение $\log_7 x = \log_2 x + \log_x (2/7)$.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, $AC = 8\sqrt{2}$. На стороне AB выбрана точка M так, что $BM = BC$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMC.

4. Решить уравнение $\sqrt{3} \cos 3x - \sin 3x = 2 \sin 5x$.

5. Ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равны 1. Точка P на прямой AC и точка Q на прямой $B'D$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA'D'D$. Найти длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

Вариант 4

1. Решить неравенство $2 - 2x \geqslant \sqrt{x^2 - 5x + 40}$.

2. Решить уравнение $\log_3 x + \log_{1/2} x = \log_x (2/3)$.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, $AC = 2$. На продолжении стороны AB выбрана точка M так, что $BM =$

$= BC$ (точка B лежит между M и A). Радиус окружности, описанной около треугольника AMC, равен 3. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решить уравнение $\cos 8x - \sqrt{3}\sin 8x = 2\sin 3x$.

5. Ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равны 1, точка M — середина $A'D'$. Точка P на прямой $A'C$ и точка Q на прямой $B'M$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA'B'B$. Найти длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

1999

Вариант 1

1. Решить неравенство $|x^2 - 5x + 4| > x - 3$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1 + 2\cos 2x}{\cos x} = \frac{1 - 4\cos^2 x}{\cos 3x}.$$

3. Дан тупоугольный равнобедренный треугольник площади $3\sqrt{15}$. Медиана, проведенная к боковой стороне, равна 6. Найти стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2\lg x} = 5^{\lg y}, \\ 5^{\lg 5} \cdot y^{\lg 4} = 2^{4\lg 2} \cdot x^{\lg 5}. \end{cases}$$

5. Для данного тетраэдра $ABCD$ на лучах AC и BD выбраны соответственно точки E и F таким образом, что $AE : AC = 3 : 2$, $BF : BD = 4 : 3$. Через точки E, F и середину ребра AB проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро CD?

Вариант 2

1. Решить неравенство $|x^2 - 7x + 10| < 3 - x$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1 - 2\cos 2x}{\sin x} = \frac{3 - 4\cos^2 x}{\sin 3x}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник площади $9\sqrt{7}$. Медиана, проведенная к боковой стороне, равна основанию треугольника. Найти длину этой медианы.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{\lg x} = 1 : 4^{\lg y}, \\ 4^{\lg 4} \cdot y^{2\lg 3} = 9^{\lg 9} : x^{\lg 4}. \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка E делит ребро CD в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. Точка F выбрана на луче BS так, что $BF : BS = 6 : 5$. Через точки E, F и середину ребра AS проведена плоскость. В каком отношении она делит отрезок AC?

Вариант 3

1. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| > 2x - 2$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1 + 2\cos 2x}{\cos 3x} = \frac{4\cos^2 x - 1}{\cos x}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник периметра 16. Медиана, проведенная к боковой стороне, равна $\sqrt{17}$. Найти стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{2\lg x} = 7^{\lg y}, \\ 7^{\lg 7} \cdot y^{2\lg 3} = 3^{4\lg 3} \cdot x^{\lg 7}. \end{cases}$$

5. Для данного тетраэдра $ABCD$ на лучах AC и BD выбраны соответственно точки K и L таким образом, что $AK : AC = 7 : 5$, $BL : BD = 4 : 3$. Через точки K, L и середину ребра CD проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро AB?

Вариант 4

1. Решить неравенство $|x^2 - 4x - 5| < 4 - 2x$.

2. Решить уравнение

$$\frac{2\cos 2x - 1}{\sin 3x} = \frac{3 - 4\cos^2 x}{\sin x}.$$

3. Дан остроугольный равнобедренный треугольник. Медиана, проведенная к боковой стороне, образует с ней угол величиной $\arccos(13/20)$. Найти стороны треугольника, если длина медианы равна 6.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2\lg x} = 1 : 5^{\lg y}, \\ 5^{\lg 5} \cdot y^{\lg 4} = 4^{\lg 4} : x^{\lg 5}. \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка K делит ребро CD в отношении $3 : 1$, считая от вершины C. Точка L выбрана на луче AS так, что $AL : AS = 5 : 3$. Через K, L и точку пересечения диагоналей основания проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро BS?

Часть II. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ

1975

Решение варианта 1

1. Так как выражения под радикалами должны быть неотрицательными, то $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ и $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$. В силу первого из этих условий $x \in (\infty,\, 2\,] \cup [\,4,\, \infty)$, а в силу второго —

$$x \in (-\infty,\, 2\,] \cup [\,5,\, \infty). \tag{1}$$

Оба радикала одновременно имеют смысл тогда и только тогда, когда выполняется условие (1).

Перепишем теперь исходное неравенство в виде

$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} < 1 + \sqrt{x^2 - 7x + 10}.$$

При выполнении условия (1) левая и правая части этого соотношения неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат и получить равносильное неравенство

$$x - 3 < 2\sqrt{x^2 - 7x + 10}. \tag{2}$$

В случае $x \in (-\infty,\, 2\,]$ разность $x - 3$ отрицательна, а корень $\sqrt{x^2 - 7x + 10}$ неотрицательный. Значит, весь промежуток $(-\infty,\, 2\,]$ входит в множество решений исходной задачи.

Если же $x \in [\,5, \infty)$, то обе части неравенства (2) неотрицательны и его можно вновь возвести в квадрат:

$$3x^2 - 22x + 31 > 0. \tag{3}$$

Решением (3) является множество $\left(-\infty,\ \frac{11-\sqrt{28}}{3}\right) \cup \left(\frac{11+\sqrt{28}}{3},\ \infty\right)$, пересекая которое с промежутком $[\,5,\ \infty)$ и учитывая, что

$$\frac{11-\sqrt{28}}{3} < 5 < \frac{11+\sqrt{28}}{3},$$

получаем $x > \frac{11+\sqrt{28}}{3}$. *Ответ:* $(-\infty,\ 2\,] \cup \left(\frac{11+\sqrt{28}}{3},\ \infty\right)$.

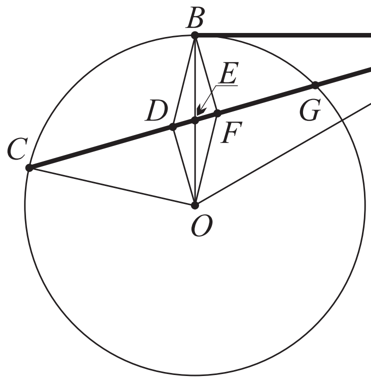

Рис. **1**

2. Пусть O – центр окружности, B – точка касания, CG – секущая, BF и OD перпендикулярны секущей, E – точка пересечения секущей с радиусом OB (рис. 1).

Отрезки OD и BF равны и параллельны, значит, $ODBF$ — параллелограмм и $OE = BE = \frac{r}{2}$. Обозначив через α угол DOE, получаем $OD = \frac{r}{2}\cos\alpha$, $CG = 2CD = 2\sqrt{OC^2 - OD^2} = r\sqrt{4-\cos^2\alpha}$. Стороны углов BAE и DOE попарно перпендикулярны, поэтому угол BAE также равен α. Из прямоугольного треугольника BAE находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{\sqrt{OA^2 - OB^2}} = \frac{r}{2\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{12}{13}, \quad CG = r\sqrt{4 - \frac{12}{13}} = 2r\sqrt{\frac{10}{13}}.$$

Ответ: $2r\sqrt{10/13}$.

3. Если возвести в квадрат обе части исходного равенства, то получим уравнение

$$\sin 3x + \sin x + 1 = (\sin x - \cos x)^2. \tag{4}$$

Решениями исходной задачи будут те и только те из корней этого уравнения, которые удовлетворяют неравенству

$$\sin x - \cos x \geqslant 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) легко приводится к виду $\sin 3x + \sin x = -\sin 2x$. Преобразуя сумму синусов в произведение, находим $2\sin 2x \cos x = -\sin 2x$. Следовательно, либо $\sin 2x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Осталось произвести отбор корней при помощи условия (5). Рассмотрим, например, множество решений $x = \frac{\pi l}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ и представим его в виде объединения четырех серий корней:

$$x = 2\pi l_1 \quad (l_1 \in \mathbb{Z}), \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l_2 \quad (l_2 \in \mathbb{Z}),$$
$$x = \pi + 2\pi l_3 \quad (l_3 \in \mathbb{Z}), \qquad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l_4 \quad (l_4 \in \mathbb{Z}).$$

Для первой и четвертой серий имеем $\sin x - \cos x = -1 < 0$, а для второй и третьей серий $\sin x - \cos x = 1 > 0$. Таким образом, решениями исходного уравнения будут две серии корней:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}), \quad x_2 = \pi + 2\pi m \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Аналогичное рассмотрение множества $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ дает еще одну серию: $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi(1 + 2m)$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(k, m, n \in \mathbb{Z})$.

4. Основание логарифмической функции должно быть положительно и отлично от единицы, а ее область определения состоит лишь из положительных чисел. Эти соображения сразу приводят к набору необходимых ограничений на x и y:

$$0 < x < y, \quad y \neq 1, \quad y - x \neq 1, \quad 29 - 2x - xy > 0. \tag{6}$$

Переходя теперь во всех логарифмах к основанию 10, приведем исходную систему к виду

$$\begin{cases} \lg y + \lg x + \lg(x + y) = 1 + \lg 18, \\ \lg(29 - 2x - xy) = \lg(y - x). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} xy(x + y) = 180, \\ x + y + xy = 29. \end{cases}$$

Положим $u = x + y$, $v = xy$, тогда $uv = 180$, $u + v = 29$ и по теореме Виета u, v будут корнями квадратного уравнения $z^2 - 29z + 180 = 0$. Решая последнее уравнение, получаем две возможности.

А. $u = 20$, $v = 9$. При этом $x + y = 20$, $xy = 9$. Еще раз воспользуемся теоремой Виета и сведем нахождение x и y к решению уравнения $t^2 - 20t + 9 = 0$. Отсюда следует, что либо $x = 10 + \sqrt{91}$, $y = 10 - \sqrt{91}$, либо $x = 10 - \sqrt{91}$, $y = 10 + \sqrt{91}$. Все условия (6) выполняются только в случае $x = 10 - \sqrt{91}$, $y = 10 + \sqrt{91}$.

Б. $u = 9$, $v = 20$. Действуя, как и выше, приходим к уравнению $t^2 - 9t + 20 = 0$. Откуда следует, что либо $x = 5$, $y = 4$, либо $x = 4$, $y = 5$. В обоих случаях нарушаются некоторые из условий (6).

Ответ: $(10 - \sqrt{91};\ 10 + \sqrt{91})$.

5. Через центр O вписанного шара проведем плоскость P, перпендикулярную боковым ребрам призмы. Буквами A'', B'' и C'' обозначим соответственно точки пересечения этой плоскости с ребрами AA', BB' и CC' или с их продолжениями. Любой из радиусов, соединяющих O с точками касания шара и боковых граней, перпендикулярен боковым ребрам призмы. Следовательно, все такие радиусы лежат в плоскости P, а возникающая в сечении шара плоскостью P окружность вписана в треугольник $A''B''C''$.

Итак, для вычисления радиуса вписанного шара достаточно найти радиус окружности, вписанной в треугольник $A''B''C''$. Понятно, что вместо этого треугольника можно взять любой другой, полученный в сечении призмы какой-нибудь плоскостью, параллельной плоскости P. Рассмотрим, например, плоскость CBE, проходящую через ребро BC и перпендикулярную AA' (рис. 2).

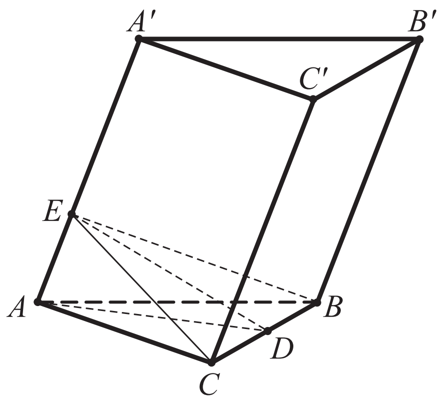

Рис. **2**

Обозначим через D середину ребра BC. Медиана AD правильного треугольника ABC будет перпендикулярна BC. Ребро AA' также перпендикулярно BC, поэтому плоскость ADE перпендикулярна ребру BC и, следовательно, плоскости ABC. Прямая AD является, таким образом, проекцией прямой AA' на плоскость ABC, а угол DAE равен $60°$. Теперь мы легко найдем элементы треугольника BCE:

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad ED = AD\sin 60^\circ = \frac{3a}{4},$$
$$CE = BE = \sqrt{ED^2 + \frac{1}{4}BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Вычислим площадь треугольника BCE. Если r — радиус вписанной в этот треугольник окружности, то $S_{BCE} = \frac{r}{2}(BC + CE + BE) = \frac{ar}{4}(2 + \sqrt{13})$. С другой стороны, $S_{BCE} = \frac{1}{2}BC \cdot ED = \frac{3}{8}a^2$. Приравнивая найденные значения площади, получаем $r = \frac{3a}{2(2+\sqrt{13})}$. Так как высота призмы равна $2r$, то искомый объем равняется

$$S_{ABC} \cdot 2r = BC \cdot AD \cdot r = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-2)a^3}{12}.$$

Замечание. В задаче возможен другой вариант чертежа, когда плоскость CBE пересекает не ребро AA', а его продолжение. В этом случае вместо плоскости CBE надо рассмотреть другую плоскость, проходящую через ребро $B'C'$ и перпендикулярную AA'.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-2)a^3}{12}$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** $\left[-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \cup (0, 3]$. **2.** $\frac{3a^2}{8}$. *Указание.* Пусть O — центр, а r — радиус окружности; угол ABC равен 2α. Тогда угол ACO равен α, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. **3.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi(2l+1)$; $\frac{\pi}{4} + \pi m$; $\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{12} + 2\pi p$ (k, l, m, n, $p \in \mathbb{Z}$). **4.** $(3;2)$; $(2;3)$. **5.** $\frac{7a}{18}$. *Указание.* Пусть r — радиус шара, а O — проекция его центра на плоскость $A'B'C'$. Нетрудно составить квадратное уравнение относительно r, если заметить, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна половине суммы $r \cdot C'A' + r \cdot A'B' + d \cdot B'C'$, где d — расстояние от точки O до стороны $B'C'$. Это квадратное уравнение имеет два корня, один из которых лишний: он соответствует шару, касающемуся не граней $AA'BB'$ и $AA'CC'$, а их продолжений.

Вариант 3. **1.** $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{28}}{3}\right) \cup [2, \infty)$. **2.** $3a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. *Указание.* Пусть O — центр, а r — радиус окружности. Заметим, что угол ACO равен 30°. Выразив теперь стороны треугольника ACO

через r и применив теорему косинусов, получим квадратное уравнение относительно r. Один из корней этого уравнения лишний: он соответствует окружности, касающейся не стороны BC, а ее продолжения. **3.** $\frac{11\pi}{12}+2\pi k$; $\frac{7\pi}{12}+2\pi n$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$. **4.** $(9;12)$. **5.** $\frac{a(3-\sqrt{3}\,)}{4}$. *Указание.* Через точки S и S' проведем плоскость, перпендикулярную ребру AB. Буквой E обозначим точку пересечения AB с этой плоскостью. Центр искомого шара лежит на отрезке SS' и равноудален от сторон SE и $S'E$ треугольника $SS'E$.

Вариант 4. **1.** $[-\sqrt{2/13},\ 0)\cup(0,\ 2\,]$. **2.** $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Пусть O — центр окружности, а D — второй конец диаметра, проведенного из точки A. Докажите, что BC — биссектриса угла OCD, и воспользуйтесь теоремой об отношении отрезков, на которые биссектриса делит сторону треугольника. **3.** $2\pi k$; $\frac{\pi}{8}+2\pi l$; $-\frac{3\pi}{8}+2\pi m$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$ $(k,\ l,\ m,\ n\in\mathbb{Z})$. **4.** $(16;4)$. **5.** $\frac{2a}{7}(3-\sqrt{2}\,)$. *Указание.* Пусть r — радиус шара; F — проекция его центра на плоскость ABC; D и E — точки касания шара с ребрами AS и CS соответственно. Тогда $SE=SD=a-r$ и $EC=SC-SE=a\sqrt{2}-a+r$. С другой стороны, $EC=FC$, причем точка F лежит на высоте AH треугольника ABC. Следовательно, $EC^2=FC^2=HC^2+FH^2=\frac{3a^2}{4}+\left(\frac{a}{2}-r\right)^2$. Приравнивая два полученных выражения для EC, придем к уравнению относительно r.

Вариант 5. **1.** $(-\infty,\ 1\,]\cup\left(\frac{8+2\sqrt{7}}{3},\ \infty\right)$. **2.** $\frac{r^2}{2}(1+\sqrt{3}\,)$. *Указание.* Обозначим через O центр окружности. Докажите, что OB — высота треугольника ABC. **3.** $2\pi k$; $\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ $(k,\ m,\ n\in\mathbb{Z})$. **4.** $(1;2)$. **5.** $\frac{3a^3}{32}$. *Указание.* Пусть D — середина BC, а E — основание высоты AE в треугольнике SAD. Докажите, что центр вписанного шара лежит на биссектрисе угла EAD, и найдите тангенс этого угла.

Вариант 6. **1.** $\left[-\frac{5}{\sqrt{17}},\ 0\right)\cup(0,\ 5\,]$. **2.** $\frac{a^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{5-4\cos\alpha}$. *Указание.* Пусть E — середина BC. Воспользуйтесь тем, что треугольник ABE подобен треугольнику CDE, а треугольник ACE — треугольнику BDE. **3.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ $(k,\ m,\ n\in\mathbb{Z})$. **4.** $(4;1)$. **5.** $\frac{8a^2\sqrt{3}}{11\sqrt{7}}$. *Указание.* Через точку пересечения медианы SE и высоты AF треугольника ASC проведем прямую l, параллельную BD. Искомая площадь равна половине произведения длины AF и длины отрезка прямой l, заключенного внутри пирамиды.

1976

Решение варианта 1

1. Если три числа образуют геометрическую прогрессию, то произведение первого и третьего чисел равно квадрату второго. Аналогично, если три числа образуют арифметическую прогрессию, то полусумма первого и третьего чисел равна второму числу. Следовательно, $a_1a_3 = a_2^2$, $a_1 + (a_3 + 7) = 2(a_2 + 4)$. Наконец, по условию задачи $a_1 + a_2 + a_3 = 19$. Получилась система из трех уравнений, которую нетрудно переписать в виде

$$\begin{cases} a_1a_3 = a_2^2, \\ a_1 - 2a_2 = 1 - a_3, \\ a_1 + a_2 = 19 - a_3. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений этой системы находим

$$a_1 = 13 - a_3, \quad a_2 = 6. \tag{1}$$

Подставив найденные значения в первое уравнение, получаем $(13 - a_3)a_3 = 36$, или $a_3^2 - 13a_3 + 36 = 0$. Корни этого квадратного уравнения равны 4 и 9. Отсюда и из формул (1) вытекает, что либо $a_1 = 9$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4$, либо $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$.

Ответ: (9; 6; 4) или (4; 6; 9).

2. Применяя формулы сложения синусов и косинусов, перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin 3x}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\cos 2x \neq 0, \quad \cos x \neq 0, \quad \sin 3x \neq 0. \tag{3}$$

При выполнении этих соотношений уравнение (2) равносильно следующему: $\sin 2x \sin 3x = 2\cos 2x \cos x$. Заметив, что $\sin 2x =$

$= 2\sin x \cos x$, и сократив на отличный от нуля сомножитель $2\cos x$, получаем $\sin x \sin 3x = \cos 2x$. Разложив произведение синусов в разность косинусов, окончательно придем к уравнению $\cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x$, или $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$. Корни этого квадратного уравнения относительно $\cos 2x$ равны -1 и $\frac{1}{2}$, поэтому имеются две возможности.

А. $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$; это решение не удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$.

Б. $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$; это решение удовлетворяет всем условиям (3). *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

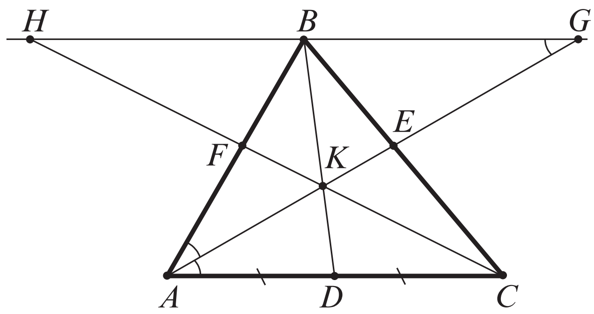

Рис. **3**

3. Через точку B проведем параллельную AC прямую и продолжим отрезки AE и CF до пересечения с этой прямой в точках G и H соответственно (рис. 3).

Нетрудно понять, что треугольник ADK подобен треугольнику BGK, а треугольник CDK — треугольнику HBK, поэтому

$$BG = \frac{AD \cdot BK}{KD} = \frac{CD \cdot BK}{KD} = BH.$$

С другой стороны, угол AGB равен углу BAG, следовательно, треугольник ABG равнобедренный и $AB = BG = BH = c$. Теперь из подобия треугольников AFC и FBH получаем: $BH \cdot AF = AC \cdot BF$, или $c \cdot AF = b \cdot BF$. Добавив к последнему соотношению очевидное равенство $AF + BF = c$, придем к системе линейных уравнений относительно AF и BF.

Ответ: $AF = \frac{bc}{b+c}$, $BF = \frac{c^2}{b+c}$.

4. Логарифмическая функция убывает, если ее основание меньше единицы, и возрастает, если ее основание больше единицы (равным единице основание быть не может). Таким образом, имеются две возможности.

А. $0 < x^2 + \frac{1}{4} < 1$, т. е. $|x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. В данном случае исходное неравенство равносильно соотношениям $0 < \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} \leqslant x^2 + \frac{1}{4}$. Решением этих квадратных неравенств является множество $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right] \cup$ $\cup [\,1,\ \infty)$. Вместе с условием $|x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right]$.

Б. $x^2 + \frac{1}{4} > 1$, т. е. $|x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом случае $\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} \geqslant x^2 + \frac{1}{4}$, или $x \in \left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$. С учетом условия $|x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ находим: $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$.

5. В плоскости $ABC'D'$ проведем прямую AF. Пусть M — точка пересечения этой прямой с отрезком $C'D'$ (рис. 4). Нетрудно видеть, что M — середина $C'D'$. В самом деле, $D'G$ — медиана треугольника $AC'D'$, а отрезок FG равен половине FD', поэтому AM также медиана треугольника $AC'D'$.

Теперь из рис. 5 ясно, как построить искомое сечение. Буквами P и N обозначены здесь точки пересечения прямой ME с продолжениями CD и DD' соответственно, Q — точка пересечения AP и BC, R — точка пересечения AN и $D'A'$. Объем одной из частей куба, на которые он разбит плоскостью $ARMEQ$, равен объему тетраэдра $APDN$ за вычетом объемов тетраэдров $MRD'N$ и $PQCE$.

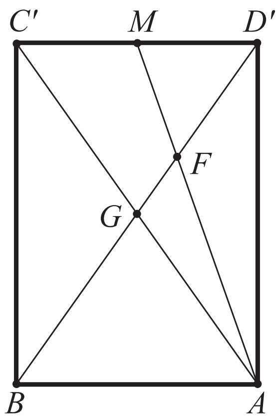

Рис. **4**

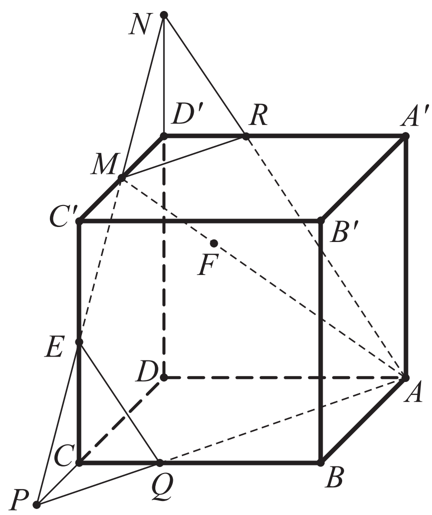

Рис. **5**

Приняв ребро куба за единицу и используя подобие треугольников, легко находим:

$$MD' = ND' = CE = PC = \frac{1}{2}, \quad CQ = RD' = \frac{1}{3},$$
$$V_{APDN} - V_{MRD'N} - V_{PQCE} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big(DP \cdot AD \cdot DN - MD' \cdot D'R \cdot ND' - PC \cdot CQ \cdot CE\Big) = \frac{25}{72}.$$

Объем оставшейся части куба равен $1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72}$, а искомое отношение есть $\frac{25}{47}$.

Ответ: $\frac{25}{47}$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** $\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{25}{3}\right)$ или $(1; -3; 9)$ **2.** $\frac{2\pi k}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$, k не кратно 5). **3.** $7:8$. *Указание.* Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения в точке F и воспользоваться тем, что BE будет высотой и биссектрисой в треугольнике ABF. **4.** $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup$ $\cup (3, 4)$. **5.** $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* Пусть в основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$, а AA' — боковое ребро. Построим сечение, проходящее через диагональ BD и образующее с диагональю AC угол в $30°$. Обозначим через Q проекцию точки A на это сечение, а через O — точку пересечения AC и BD. Тогда $AQ = AO \sin 30° =$ $= a/2$. С другой стороны, Q лежит в плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной BD. Эта плоскость совпадает с APA', где P — основание высоты AP треугольника ABD. Следовательно, для построения искомого сечения достаточно в плоскости APA' провести через точку P прямую, удаленную от A на расстояние $a/2$.

Вариант 3. **1.** $(2; 6; 18)$. **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. *Указание.* Данная прямая делит площадь треугольника в том же отношении, что и сторону AC, а это последнее отношение можно найти при помощи теоремы синусов. **4.** $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 2\right)$. **5.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. *Указание.* Искомая плоскость проходит через середины параллельных друг другу ребер, которые принадлежат разным основаниям и не пересекаются данной диагональю.

Вариант 4. **1.** $(3;\ 9;\ 27)$ или $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{5}{3};\ \frac{25}{3}\right)$. **2.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. **3.** $\frac{3ab}{4}$. *Указание.* Докажите, что $BF=DF$. Тогда AF будет не только биссектрисой, но также медианой и высотой в треугольнике ABD. Поэтому искомая площадь равна $AF\cdot BD$. **4.** $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6},\ 2\right)\cup$ $\cup\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)$. **5.** $7:17$. *Указание.* Расстояние от точки B до заданной в условии плоскости равно $BC\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$. Для построения нужного сечения достаточно провести высоту BE треугольника ABC, а затем в плоскости BEB' через точку E провести прямую, удаленную от B на расстояние $2\sqrt{2}$. Эта прямая вместе с AC лежит в искомой плоскости.

Вариант 5. **1.** $(3;\ 7;\ 11)$ или $(33;\ 7;\ -19)$. **2.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. **3.** $(a+b):b$. *Указание.* Используя свойство биссектрисы и теорему Фалеса, докажите, что $AC:CD=b:a$, следовательно, $CD=a$. Затем через точку C проведите параллельную AE прямую и снова воспользуйтесь теоремой Фалеса, чтобы найти отношение, в котором прямая AE делит сторону BC. **4.** $[-2,-\sqrt{2}\,)\cup\left(\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\right]$. **5.** $a^2(\sqrt{5}-1)$. *Указание.* Пусть $ABCD$ — основание куба, AA' — боковое ребро, CA' — главная диагональ. Построим плоскость, проходящую через CA' и образующую угол 60° с основанием $ABCD$. Если l — линия пересечения этой плоскости с основанием, то проекции точек A и A' на l совпадают, причем расстояния от A и A' до l равны соответственно $AA'\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{AA'}{\sin 60^\circ}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Теперь для построения искомого сечения достаточно провести через C прямую, лежащую в плоскости основания и удаленную от A на расстояние $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Вариант 6. **1.** $(2;\ 32)$ или $(-18;\ -288)$. *Указание.* Воспользоваться теоремой Виета. **2.** πk $(k\in\mathbb{Z})$. **3.** $54\sqrt{3}$. *Указание.* Точка O пересечения биссектрис равноудалена от боковых сторон и основания BC трапеции. Следовательно, равны друг другу высоты треугольника OCD, проведенные из вершин O и C. Поэтому $OD=CD=7$. Кроме того, треугольник AOB правильный, поскольку углы OAB и ABO равны 60°. С помощью этой информации легко найти все необходимые элементы трапеции. **4.** $\left(-1,\ \frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$. **5.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Заданная в условии плоскость параллельна BC, поэтому расстояния от нее до всех точек отрезка BC одинаковы, а расстояние от середины BC до этой плоскости вычисляется сравнительно просто.

1977

Решение варианта 1

1. Пусть u и v — скорости спортсменов, выбежавших соответственно из A и B, а $2l$ — длина всей дорожки. В момент первой встречи спортсмен B преодолел расстояние a, а спортсмен A — расстояние $l-a$, следовательно,

$$u=\frac{l-a}{t},\quad v=\frac{a}{t}. \tag{1}$$

Вторая встреча могла произойти в одной из следующих трех ситуаций.

А. Спортсмен A уже достиг пункта B или миновал его, а спортсмен B достиг пункта A или миновал его. При этом до момента второй встречи спортсмен A преодолел расстояние $2(l-a)$, а спортсмен B — расстояние $l+2a$. На преодоление указанных расстояний спортсмены затратили одно и то же время, поэтому $\frac{2(l-a)}{u}=\frac{l+2a}{v}$. Отсюда и из (1) вытекает, что $2a=l+2a$, т. е. $l=0$. Полученное значение l противоречит смыслу задачи.

Б. Спортсмен B еще не достиг пункта A. В этом случае он преодолел расстояние $l-2a$, а спортсмен A — расстояние $2(l+a)$. Таким образом, $\frac{l-2a}{v}=\frac{2(l+a)}{u}$. Отсюда с учетом (1) получаем $l=5a$, $u=\frac{4a}{t}$.

В. Спортсмен A еще не достиг пункта B. Действуя, как и выше, придем к уравнению $\frac{2a}{u}=\frac{3l-2a}{v}$. Откуда вытекает, что $l=\frac{5a}{3}$. Этого, однако, не может быть, так как по смыслу задачи $l\geqslant 2a$.

Ответ: $\frac{4a}{t}$, $\frac{a}{t}$ (м/с).

2. Запишем уравнение в виде

$$1-\operatorname{tg}^2 x-(1+\operatorname{tg}^2 x)\cos 6x=0$$

и воспользуемся формулами $1-\operatorname{tg}^2 x=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$ и $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, в силу которых $\frac{\cos 2x-\cos 6x}{\cos^2 x}=0$. Разность косинусов преобразуем в произведение и в итоге получим

$$\frac{2\sin 4x \sin 2x}{\cos^2 x} = 0. \tag{2}$$

Таким образом, имеются две возможности.

А. $\sin 4x = 0$, $x = \frac{\pi m}{4}$ $(m \in \mathbb{Z})$. Из этого множества решений необходимо исключить те значения x, для которых знаменатель дроби (2) обращается в нуль. В результате останутся две серии корней: $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x_2 = \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Б. $\sin 2x = 0$. Все решения этого уравнения удовлетворяют также уравнению $\sin 4x = 0$, значит, они уже были учтены в предыдущем случае.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; πn $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть BE — данная секущая, C и D — проекции на нее точек O_1 и O_2 соответственно (рис. 6). Из условия задачи следует, что $BC = 1$ см, $BD = 7$ см, $DE = 2$ см. Положим $BO_1 = x$, $AO_2 = y$, тогда $BO_2 = BA + AO_2 = 2x + y$. Из прямоугольных треугольников BO_2D и DO_2E имеем: $O_2B^2 - BD^2 = (2x+y)^2 - 49 = O_2D^2 = O_2E^2 - DE^2 = y^2 - 4$, или

$$(2x+y)^2 - 49 = y^2 - 4. \tag{3}$$

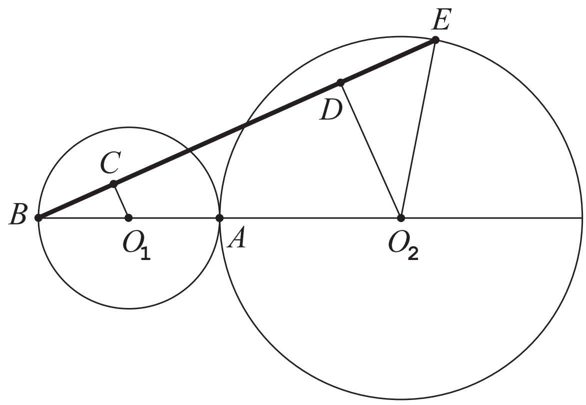

Рис. **6**

Из подобия треугольников O_1BC и O_2BD вытекает, что $\frac{2x+y}{x} = 7$, т. е. $y = 5x$. Подставив это значение y в уравнение (3), находим $x^2 = \frac{15}{8}$. Следовательно, $x = \frac{1}{4}\sqrt{30}$, $y = \frac{5}{4}\sqrt{30}$.

Ответ: $\frac{1}{4}\sqrt{30}$, $\frac{5}{4}\sqrt{30}$ см.

4. Сразу же заметим, что в случае $a = 0$ исходное уравнение не имеет решений, поэтому достаточно рассмотреть лишь отличные от нуля значения a.

В силу свойств логарифмической функции следствием исходного уравнения является равенство

$$ax + 1 = \sqrt{2x}. \qquad (4)$$

Обратно, если $a \neq 0$, то исходное уравнение само будет следствием (4). Действительно, любое решение (4) положительно и обладает тем свойством, что $ax + 1 > 0$. Кроме того, $2x \neq 1$ (иначе a должно равняться нулю), поэтому обе части (4) можно прологарифмировать по основанию $2x$ и прийти к исходному уравнению.

Итак, достаточно выяснить, при каких отличных от нуля значениях параметра a уравнение (4) имеет единственное решение. Иными словами, при каких $a \neq 0$ квадратное уравнение

$$ay^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0, \qquad (5)$$

где y обозначает $\sqrt{x}$, имеет единственный положительный корень?

При $a > \frac{1}{2}$ дискриминант уравнения (5) отрицателен и оно вообще не имеет действительных корней. В случае $a = \frac{1}{2}$ дискриминант равен нулю, а единственный корень $\sqrt{2}$ положителен. Значит, $a = \frac{1}{2}$ является одним из решений исходной задачи.

Пусть $a < \frac{1}{2}$. Тогда уравнение (5) имеет два различных корня $y_1 = \frac{1 - \sqrt{1-2a}}{a\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{1 + \sqrt{1-2a}}{a\sqrt{2}}$. Легко видеть, что если $a > 0$, то $y_2 > y_1 > 0$. Если же $a < 0$, то $y_2 < 0 < y_1$. Следовательно, все отрицательные значения a являются решениями исходной задачи.

Ответ: $a \in (-\infty, 0) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

5. Найдем высоту призмы, равную расстоянию от точки C' до плоскости ABC. По условию BC' и AB перпендикулярны AC, поэтому плоскость ABC' перпендикулярна ребру AC и плоскости ABC, а проекция D точки C' на плоскость ABC лежит на прямой AB (рис. 7).

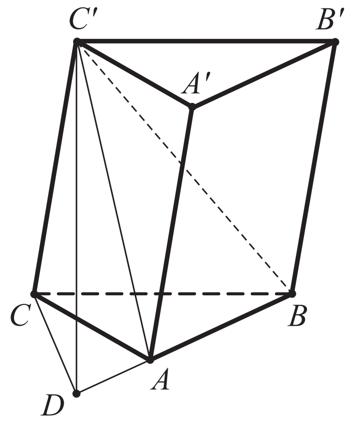

Рис. **7**

Обозначим через x длину отрезка BD. Тогда по теореме Пифагора $CD^2 = AC^2 + AD^2 = a^2 + (a-x)^2$. С другой стороны,

$CD = C'D \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = C'D/\sqrt{3}$, следовательно, $CD^2 = \frac{1}{3}C'D^2 = \frac{1}{3}(C'B^2 - BD^2) = \frac{1}{3}(6a^2 - x^2)$. Приравнивая полученные выражения для CD^2, находим $4x^2 - 6ax = 0$. Отсюда или $x_1 = 0$, т. е. $D = B$, или $x_2 = \frac{3a}{2}$, т. е. D лежит на продолжении отрезка AB за точку A. Высота призмы, совпадающая с длиной $C'D$, также может принимать два значения: $h_1 = a\sqrt{6}$ и $h_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{15}$, отвечающие найденным x_1 и x_2. Таким образом, искомый объем может равняться либо $\frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot h_1 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$, либо $\frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot h_2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ или $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** $\frac{1}{2n}\left(a + nc + \sqrt{(a+nc)^2 - 4nbc}\right)$. **2.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{4}{9}\sqrt{6}$ см. *Указание.* Пусть D — точка пересечения прямых BC и O_1O_2, а 2α — величина угла $O_1O_3O_2$. Покажите, что D лежит на окружности O_1, причем $\angle CDO_2 = \alpha$, $\angle AO_1C = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$. Вычислив $\sin\alpha$ из треугольника $O_1O_2O_3$, найдите отрезок AC (по теореме косинусов, примененной к $\triangle AO_1C$) и воспользуйтесь тем, что длина искомой хорды равна $2AC$. **4.** $a \in (-\infty,\ -1]$. **5.** $\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$. *Указание.* В плоскости SBD через точку пересечения AC и BD проведем прямую, параллельную SD. Пусть E — точка пересечения этой прямой с SB, а F — проекция E на BC. Тангенс искомого угла равен отношению длины EF к расстоянию от F до AC. Это отношение легко подсчитать, так как $BE = \frac{1}{3}SB$.

Вариант 3. **1.** $\frac{1}{2t}\left(tv + a + \sqrt{t^2v^2 + a^2}\right)$ (км/ч). **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{1}{16}(3\sqrt{3} - \sqrt{11})$; $\frac{1}{8}(3\sqrt{3} - \sqrt{11})$. *Указание.* Пусть P_1 и P_2 — периметры треугольников, в которые вписаны соответственно меньшая и большая из окружностей, а l — длина общей стороны этих треугольников. Если r — радиус меньшей окружности, то из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует $P_1 = 2l + 2r\sqrt{3}$, $P_2 = 2l + 4r\sqrt{3}$. Складывая эти равенства и замечая, что $P_1 + P_2 = 3 + 2l$, находим $2l = 3 - 6r\sqrt{3}$, $P_1 = 3 - 4r\sqrt{3}$, $P_2 = 3 - 2r\sqrt{3}$. Теперь легко выразить через r площадь всего данного треугольника, равную $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

В итоге придем к уравнению $\frac{1}{2}\,P_1 r + P_2 r = \frac{9}{2}\,r - 4r^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, откуда $r = \frac{1}{16}\,(3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}\,)$. Знак плюс не подходит, так как $2r < 1$. **4.** $a \in (-\infty,\,-1) \cup \left\{-\frac{3}{4}\right\}$. **5.** $1 : 1$. *Указание.* Пусть M, N, P — середины AB, AD и SC соответственно; K и L — точки пересечения прямой MN с продолжениями BC и CD, а Q и R — точки пересечения PK и PL соответственно с SB и SD. Тогда объем одной из искомых частей пирамиды равен объему тетраэдра $PCKL$ за вычетом суммы объемов тетраэдров $RDLN$ и $QBMK$, а каждый из объемов этих тетраэдров легко выражается через объем данной пирамиды $SABCD$.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{2T}\Big(TU + V + \sqrt{(TU+V)^2 - 4TV_1U}\Big)$ (л/мин). **2.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^n\,\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\,n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{14\sqrt{3}}{15}\,R$. *Указание.* Проведем радиус в точку касания и продолжим его до пересечения с секущей. Получится прямоугольный треугольник с острым углом 60°, все элементы которого легко определяются, после чего искомое расстояние можно найти по теореме Пифагора. **4.** $a \in (-\infty,\,-2) \cup \left\{-\frac{7}{4}\right\}$. **5.** $\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - 1\right)H$. *Указание.* Через середину M ребра AB проведем перпендикулярную AB плоскость; центр окружности, полученной в сечении конуса этой плоскостью, обозначим через O. Ребро CD является хордой окружности O. Если x — длина ребра тетраэдра, а N — середина CD, то в силу теоремы Пифагора $\frac{1}{4}\,x^2 + ON^2 = OC^2$, где $ON = MN - OM = \frac{x}{\sqrt{2}} - OM$. Отрезки OM и OC выражаются через x из подобия треугольников, возникающих в осевом сечении конуса плоскостью ABO: $OM = \frac{H - x}{\sqrt{3}}$, $OC = \frac{2H - x}{2\sqrt{3}}$. В итоге приходим к квадратному уравнению относительно x.

Вариант 5. **1.** $1 : 3$. **2.** $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{2a^2}{9}\,\sqrt{3}$. *Указание.* Приравнивая отрезки касательных, проведенных к окружностям из одной точки, находим: $AB + CD = BC + AD = 2BC$. С другой стороны, так как угол CBA равен 60°, то $AB - CD = BC$. Отсюда вытекает, что $2AB = 3BC$, или $BC = \frac{2}{3}\,a$. Таким образом, площадь трапеции равна $\frac{1}{2}\,(AB + CD)\cdot BC \cdot \sin 60^\circ = BC^2 \sin 60^\circ = \frac{2a^2}{9}\,\sqrt{3}$. **4.** $a \in (-\infty,\,5\,]$. **5.** $\frac{a^2}{16}\,(6 - \sqrt{3}\,)$. *Указание.* Задача сведется к планиметрической, если рассмотреть сечение пирамиды, проходящее через ее высоту и апофему той грани, через среднюю линию которой надо провести касательную плоскость. В сечении возникает равнобедренный треугольник. Через середину боковой стороны этого треугольника нужно провести касательную к вписанной окружности и найти длину отрезка касательной, заключенного внутри треугольника. Искомое сечение — трапеция с основаниями a и $a/2$, а указанный отрезок касательной — высота этой трапеции.

Вариант 6. **1.** 18 часов. **2.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{3ml}{4}$. *Указание.* Пусть F — точка пересечения CD и BE. Так как CF — высота и биссектриса в треугольнике BCE, то $BC = CE$. Следовательно, $BD : AD = BC : AC = 1 : 2$ и площадь треугольника BCD в три раза меньше площади ABC. Площадь же BCD равна $\frac{1}{2} CD \cdot BF = \frac{1}{4} CD \cdot BE = \frac{1}{4} ml$. **4.** $a \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$. **5.** $\frac{3a^3}{64}(8+\sqrt{3})$ либо $\frac{3a^3}{64}(8-\sqrt{3})$. *Указание.* Пусть D, E, F, K — точки касания шара и ребер BC, BB', $A'B'$, AA' соответственно, а x — длина ребра AA'. Плоскость $AA'D$ перпендикулярна BC, но таковой является и плоскость, проходящая через AA' и середину BC, поэтому D — середина BC. На основании равенства отрезков касательных, проведенных к шару из одной точки, заключаем: $BD = BE = \frac{a}{2}$, $B'E = B'F = x - \frac{a}{2}$, $A'F = A'K = \frac{3a}{2} - x$, $AK = AA' - A'K = 2x - \frac{3a}{2}$. Если теперь опустить перпендикуляр AL на плоскость $BB'C'C$, то получится прямоугольный треугольник ADL с углом DAL, равным $30°$, и катетом DL длины $|BE - AK|$ (знак модуля появился ввиду существования двух возможностей: $AK > BE$ и $AK < BE$). Таким образом, $2|BE - AK| = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Подставив в это соотношение найденные значения BE и AK, придем к уравнению относительно x, имеющему два решения: $x_1 = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ и $x_2 = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

1978

Решение варианта 1

1. Пусть t секунд — время разгона автомобиля, a (м/с^2) — его ускорение. Возможны два случая.

А. $t \leqslant 25$. Тогда за первые 25 секунд автомобиль преодолел расстояние $\frac{a}{2}t^2 + at(25-t)$, а за оставшиеся 15 секунд — расстояние $15at$. По условию задачи эти расстояния равны, следовательно, $\frac{a}{2}t^2 + at(25-t) = 15at$, или $t^2 = 20t$.

Полученное уравнение имеет корни $t = 0$ и $t = 20$, из которых лишь $t = 20$ соответствует смыслу задачи.

Б. $25 < t \leqslant 40$. При этом за первые 25 секунд автомобиль преодолел расстояние $\frac{625}{2}a$, а за все 40 секунд — расстояние $\frac{a}{2}t^2 + at(40-t)$. Следовательно,

$$2 \cdot \frac{625}{2}a = \frac{a}{2}t^2 + at(40-t), \quad t^2 - 80t + 1250 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $40 + 5\sqrt{14}$ и $40 - 5\sqrt{14}$. Первый из них больше 40, а второй меньше 25. Значит, оба они посторонние.

Ответ: 20 секунд.

2. Преобразовав суммы $\cos x + \cos 3x$ и $\sin x + \sin 3x$ в произведения, придем к уравнению

$$\frac{(2\cos x + \sqrt{2})\cos 2x}{(2\cos x + \sqrt{2})\sin 2x} = \sin 4x.$$

Знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому

$$\cos x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \neq \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

$$\sin 2x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi l}{2} \quad (l \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

Сократив теперь общий множитель $2\cos x + \sqrt{2}$ и умножив обе части уравнения на $\sin 2x$, получим $\cos 2x = \sin 4x \sin 2x = 2\sin^2 2x \times \cos 2x$. Таким образом, имеются две возможности.

А. $\cos 2x = 0$, т. е. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Но в силу (1) нечетные значения k следует исключить, значит, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$. Условие (2) для этих значений x выполняется.

Б. $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$, т. е. $\sin 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Этому уравнению удовлетворяют $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ $(n \in \mathbb{Z})$, для которых справедливы условия (1), (2).

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$.

3. Углы CDE и ABD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD. Значит, прямоугольные треугольники CDE и ABD подобны (рис. 8), поэтому $DE \cdot BD = CD \cdot AB = 15$. Отсюда и из равенства $BD = 3DE$ вытекает, что $BD = 3\sqrt{5}$, $AD^2 = BD^2 - AB^2 = 20$.

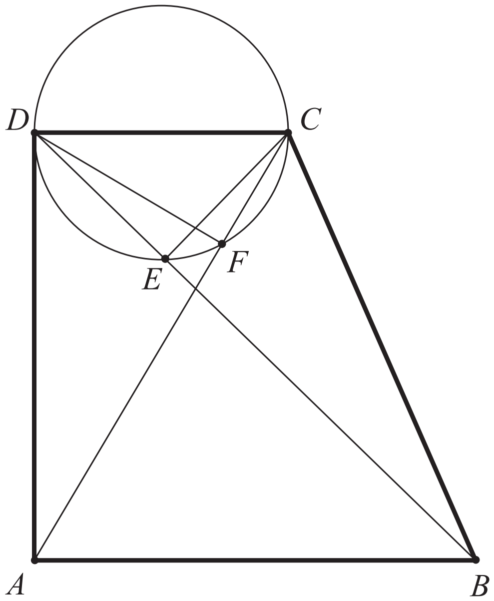

Рис. **8**

Пусть теперь $\angle CAD = \alpha$. Понятно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AD}$. С другой стороны, $AF = AD\cos\alpha$, $CF = CD\sin\alpha$. Таким образом, $\frac{CF}{AF} = \frac{CD}{AD}\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD^2}{AD^2} = \frac{9}{20}$.

Ответ: $9:20$.

4. Сначала найдем все решения логарифмического неравенства. Так как основание логарифма положительно и не равно единице, а область определения логарифмической функции состоит из положительных чисел, то

$$2 + \frac{x}{2} > 0, \quad 2 + \frac{x}{2} \neq 1, \quad \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 5 > 0.$$

Легко показать, что решением этой системы неравенств является множество $(-4, -2) \cup (5, \infty)$. Рассмотрим теперь два случая.

А. Пусть $x \in (-4, -2)$. Тогда $2 + \frac{x}{2} < 1$, а исходное логарифмическое неравенство равносильно квадратному $\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 5 \leqslant 2 + \frac{x}{2}$, выполненному при $x \in [2 - 3\sqrt{2}, 2 + 3\sqrt{2}]$. Учитывая условие $x \in (-4, -2)$, заключаем, что в данном случае $x \in [2 - 3\sqrt{2}, -2)$.

Б. Если $x \in (5, \infty)$, то $2 + \frac{x}{2} > 1$, и мы приходим к квадратному неравенству $\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 5 \geqslant 2 + \frac{x}{2}$. Решением этого неравенства, с учетом условия $x > 5$, будет множество $[2 + 3\sqrt{2}, \infty)$.

Итак, совокупность решений исходного логарифмического неравенства совпадает с объединением

$$[2 - 3\sqrt{2}, -2) \cup [2 + 3\sqrt{2}, \infty). \tag{3}$$

Остается найти те значения a, для которых все числа из множества (3) удовлетворяют соотношению

$$a^4x^2 - a^2x - 2 > 0. \qquad (4)$$

При $a = 0$ это соотношение не выполняется ни для каких x. Если же $a \neq 0$, то (4) превращается в обычное квадратное неравенство, множеством решений которого является $(-\infty,\ -a^{-2}) \cup (2a^{-2},\ \infty)$. Это множество содержит (3) лишь в случае, когда $-a^{-2} \geqslant -2$ и $2a^{-2} < 2 + 3\sqrt{2}$, что равносильно

$$a^2 \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad a^2 > \frac{2}{2 + 3\sqrt{2}}. \qquad (5)$$

Так как $3\sqrt{2} > 2$, то оба неравенства (5) имеют место одновременно тогда и только тогда, когда $a^2 \geqslant \frac{1}{2}$, т. е. $|a| \geqslant 1/\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty,\ -1/\sqrt{2}\,\right] \cup \left[\,1/\sqrt{2},\ \infty\right)$.

5. Через точку A и прямую LK проведем плоскость. Понятно, что это будет плоскость $ABKL$, так как LK параллельна AB. Затем через A и прямую MC проведем еще одну плоскость AMC. Линия пересечения двух построенных плоскостей будет, во-первых, проходить через точку A, а во-вторых, пересекаться как с прямой MC, так и с прямой LK. Таким образом, Q — точка пересечения BK и CM, т. е. центр треугольника SBC, а P — точка пересечения прямых AQ и LK (рис. 9).

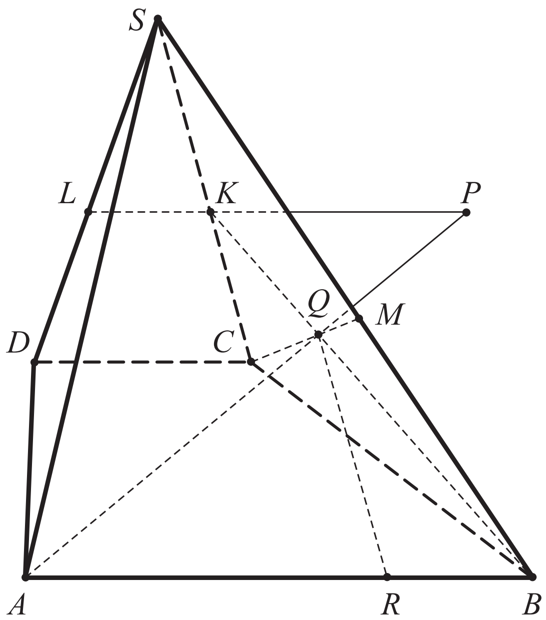

Рис. **9**

Заметим, что $AB = 2$, $LK = 1/2$, $AL = BK = \sqrt{3}$; BK и MC — медианы треугольника SBC, поэтому $2QK = BQ$. Теперь из подобия треугольников KPQ и ABQ легко получаем, что

$2PQ = AQ$, а длину AQ можно найти по теореме Пифагора, если опустить перпендикуляр QR на AB. В самом деле, $BR = \frac{1}{3}(AB - LK) = \frac{1}{2}$, $AR = AB - BR = \frac{3}{2}$, $BQ = \frac{2}{3}BK = 2/\sqrt{3}$, $QR^2 = BQ^2 - BR^2 = \frac{13}{12}$, $AQ^2 = QR^2 + AR^2 = \frac{10}{3}$. Итак, $PQ = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{6}\sqrt{30}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** 10 000. **2.** $\frac{\pi}{8} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{8} + 2\pi l$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi m$; $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi p$ (k, l, m, n, $p \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{12}{13}R^2\sqrt{3}$. *Указание.* Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобочная, а CDE — равнобедренный треугольник с углом $60°$, т. е. CDE — правильный треугольник. Таков же и треугольник ABE, причем его сторона в три раза больше CD. По теореме синусов $BC = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$. Пусть F — проекция C на AB. Положим $CD = x$, тогда $AB = 3x$, $BF = x$, $CF = 2x\sqrt{3}$. С другой стороны, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + BF^2$, откуда находим $x = R\sqrt{3/13}$. Искомая площадь равна, очевидно, $2x \cdot CF = 4x^2/\sqrt{3}$. **4.** $\left[-\frac{11}{14}, \frac{11}{14}\right]$. **5.** $\sqrt{57}/4$. *Указание.* Пусть O — центр треугольника ABC, а D — середина BC. Искомая прямая PQ есть линия пересечения плоскостей $AB'D$ и OMN, при этом Q — середина $B'D$, а P — точка пересечения прямой OQ с продолжением AB'. Используя теорему Фалеса, легко показать, что $PQ = 3OQ$. Вычисление OQ облегчается, если заметить, что AD перпендикулярна плоскости $BB'C'C$ и, значит, треугольник $AB'D$ прямоугольный. Следовательно, $OQ^2 = OD^2 + QD^2 = \frac{1}{9}AD^2 + \frac{1}{4}B'D^2 = \frac{19}{48}$.

Вариант 3. **1.** $-\frac{8}{7}$ м/с^2 или $-\frac{1}{2}$ м/с^2. **2.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **3.** $R\,\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$. *Указание.* Предположим, что треугольник остроугольный, и обозначим через O центр описанной, а через O_1 — центр искомой окружности. Пусть D и F — проекции на прямую AB точек O и O_1 соответственно, G — проекция O на O_1F. Положим, наконец, $O_1E = O_1F = x$. Нетрудно заметить, что $\angle EOB = \angle BOD = \alpha$, $\angle GOD = \frac{\pi}{2}$, $\angle O_1OG = \angle O_1OD - \angle GOD = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $O_1G = O_1O \cdot \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -O_1O \cdot \cos 2\alpha$. С другой стороны, $O_1G = x - R\cos\alpha$, $O_1O = x + R$. Таким образом, $x - R\cos\alpha = -(x+R)\cos 2\alpha$. В случае тупоугольного треугольника чертеж изменится, а ответ останется тем же. **4.** $(-\infty, -\sqrt{6}\,]\cup$ $\cup\bigl\{-\sqrt{2/3}\,\bigr\} \cup \bigl[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\bigr] \cup \bigl\{\sqrt{2/3}\,\bigr\} \cup [\,\sqrt{6}, \infty)$. **5.** $\sqrt{11}/3$. *Указание.* Прямая PQ является линией пересечения плоскостей ASN и MBD. Следовательно, Q — точка пересечения AN и BD, а P — точка пересечения прямой MQ с продолжением SN. Заметим, что $QN =$ $= AN/3$. Если провести через Q параллельную AS прямую и воспользоваться подобием треугольников, то легко показать, что $PQ =$ $= 2MQ$. Вычисление же MQ очень несложно, так как плоскость BMD вместе с прямой MQ перпендикулярны AS, поэтому $PQ^2 =$ $= 4MQ^2 = 4(AQ^2 - AM^2) = \frac{16}{9}\,AN^2 - AS^2 = \frac{11}{9}$.

Вариант 4. **1.** 20 м/с. **2.** $\frac{3\pi}{16} + 2\pi k$; $-\frac{5\pi}{16} + 2\pi l$; $\frac{15\pi}{16} + 2\pi m$; $-\frac{9\pi}{16} +$ $+ 2\pi n$ $(k, l, m, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $1 - 1/\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть O_1 — центр большей, а O_2 — центр меньшей окружности; A и B — точки касания l с окружностями O_1 и O_2 соответственно; C — ближайшая к l точка пересечения окружностей. Через D обозначим проекцию O_2 на прямую O_1A. По теореме Пифагора $AB = O_2D = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1D^2} = 2$. Но O_1D также равно 2, значит, $\angle DO_1O_2 = \angle O_1O_2D = 45°$. Так как $O_1O_2^2 + O_2C^2 = CO_1^2$, то угол CO_2O_1 — прямой. Но тогда $\angle CO_2D = 45°$. Теперь легко найти высоту CE треугольника ABC. Если продолжить эту высоту до пересечения с O_2D в некоторой точке F, то можно увидеть, что $FE = 1$, $FC = O_2C/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ и $CE = 1 - 1/\sqrt{2}$. **4.** $\bigl[-\sqrt{2/5}, \sqrt{2/5}\,\bigr]$. **5.** $3\sqrt{101}/5$. *Указание.* Через M и ребро AA' проведем плоскость. Линия пересечения этой плоскости с основанием параллельна $A'M$, следовательно, эта линия есть AN, где N — середина CD. Если провести плоскость также через M и BC, то линия пересечения этой плоскости с $AA'MN$ и будет искомой прямой PQ. При этом Q — точка пересечения прямых AN и BC, P — точка пересечения прямых QM и AA'. Для вычисления длины PQ опустим перпендикуляр PO на плоскость $ABCD$ и пусть R — проекция O на ребро BC. Из подобия треугольников ABQ и QNC, а также APQ и $A'PM$ следует, что $CQ = 3$, $NQ = AN$, $A'M = \frac{1}{3}\,AN = \frac{1}{6}\,AQ$, $A'P = \frac{1}{6}\,AP = \frac{3}{5}$. Далее стандартными способами находим $PO = \frac{6}{5}\sqrt{7}$, $AO = \frac{6}{5}\sqrt{2}$, $OC = \frac{9}{5}\sqrt{2}$, $OR = \frac{9}{5}$, $PQ^2 = OP^2 + OR^2 + RQ^2 = 909/25$.

Вариант 5. **1.** 12 м/с; 216 м. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{8}{9}R^2\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть F — основание проведенной из точки C высоты, r — радиус меньшей окружности, $ED = 2x$, $\angle ACB = 2\alpha$. По теореме Пифагора $OF^2 = R^2 - 4x^2$, $r^2 = OF^2 + x^2 = R^2 - 3x^2$. С другой стороны, $r^2 = R^2 - \frac{1}{4}BC^2$, поэтому $BC = x\sqrt{12}$, $\sin\alpha = \frac{2x}{BC} = 1/\sqrt{3}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{2}/3$. По теореме синусов получаем $AB = 2R\sin 2\alpha = \frac{4R}{3}\sqrt{2}$, $BC = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{2R}{3}\sqrt{6}$. Теперь искомая площадь вычисляется элементарно. **4.** $(-\infty, -2\,] \cup [\,2, \infty)$. **5.** $\sqrt{17}/4$. *Указание.* Прямая PQ есть линия пересечения плоскостей $MC'N$ и MAD'. При этом P — точка пересечения AD' с плоскостью $MC'N$, а Q — точка пересечения MP с $C'N$. Для отыскания точки P заметим, что $C'N$ параллельна $A'D'$, поэтому линия пересечения плоскостей $MC'N$ и $AA'D'D$, проходящая через точку P, также параллельна $A'D'$. Эту линию легко построить, продолжив MN до пересечения с прямой AA' в некоторой точке E, а затем проведя через E прямую, параллельную $A'D'$. Точка пересечения этой прямой с продолжением AD' и есть P. Из равенства треугольников $MB'N$ и $A'NE$ вытекает, что $A'E = 1/2$. Но P и E равноудалены от плоскости $ABCD$, и если PF — перпендикуляр к $ABCD$, то $PF = 3/2$; кроме того, M и P равноудалены от плоскости $A'B'C'D'$, следовательно, $PQ = \frac{1}{2}MP$. Величину MP найдем по теореме Пифагора $MP^2 = \frac{4}{9}PF^2 + BF^2$, где $BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AB\cdot AF\cos 60^\circ = \frac{13}{4}$.

Вариант 6. **1.** 140 м. **2.** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4} + 2\pi k$; $\pi(2m+1)$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ (k, m, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $100\sqrt{2}/9$. *Указание.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, E — точка пересечения ее диагоналей AC и BD, F — точка касания основания AB с меньшей окружностью, а G — середина CD. По теореме Пифагора имеем $AF^2 = AO^2 - OF^2 = 8$, $AE^2 = AF^2 + EF^2 = 12$, и если $\angle CAB = \alpha$, то $\sin\alpha = EF/AE = 1/\sqrt{3}$. По теореме синусов $BC = 2AO\sin\alpha = 6/\sqrt{3}$, а из подобия треугольников CGE и AEF следует, что $EG = CG/\sqrt{2}$. Вновь применяя теорему Пифагора, находим $12 = BC^2 = (2 + CG/\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - CG)^2$, т. е. $CG = 4\sqrt{2}/3$. Теперь искомую площадь легко подсчитать по формуле $S_{ABCD} = (AF + CG) \cdot FG$. **4.** $\bigl[-\sqrt{8/5},\, -1\bigr) \cup \bigl(1,\, \sqrt{8/5}\,\bigr]$. **5.** $\sqrt{21}/3$. *Указание.* Q — точка пересечения прямой AD с плоскостью MBD'. Для построения Q проведем прямую $D'M$ до пересечения с продолжением ребра CD в некоторой точке E, а затем проведем прямую BE, точка пересечения которой с продолжением ребра AD и есть Q. Соединив Q и M прямой, найдем P как точку пересечения MQ и BD'. Понятно, что $D'M = ME$, $BE = BQ$, поэтому MQ и $D'B$ — медианы в треугольнике $QD'E$. Следовательно, $PQ = 2MQ/3$. Длину отрезка MQ легко найти по теореме Пифагора: $MQ^2 = MC^2 + QD^2 + CD^2 = 21/4$.

1979

Решение варианта 1

1. Пусть расстояние от A до C равно x (км). Тогда, двигаясь от A до C со скоростью v_0 и от C до B со скоростью v_1 (км/ч), велосипедист затратит $\frac{x}{v_0} + \frac{100 - x}{v_1}$ часов. Аналогично, двигаясь от A до C со скоростью v_1 и от C до B — со скоростью v_0 (км/ч), велосипедист затратит $\frac{x}{v_1} + \frac{100 - x}{v_0}$ часов. По условию задачи имеем

$$\frac{x}{v_0} + \frac{100 - x}{v_1} = \frac{x}{v_1} + \frac{100 - x}{v_0}, \quad \text{или} \quad x\Bigl(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\Bigr) = (100 - x)\Bigl(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\Bigr).$$

Так как $v_0 \neq v_1$, то $x = 100 - x$ и, следовательно, $x = 50$.

Если теперь через t обозначить время, за которое велосипедист проезжает с ускорением участок от C до B, то получим $v_0 t + \frac{3}{4}\, v_0 t^2 = 50$. С другой стороны, участок от A до C велосипедист проезжает за $7 - t$ часов со скоростью v_0 (км/ч), поэтому $50 = v_0(7 - t)$. Таким образом, $v_0 t + \frac{3}{4}\, v_0 t^2 = v_0(7 - t)$ или $3t^2 + 8t - 28 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = -\frac{14}{3}$, $t_2 = 2$. Первый корень очевидно лишний. Значит, $v_0 = \frac{50}{7 - t_2} = 10$.

Ответ: $v_0 = 10$ км/ч.

2. В зависимости от величины основания логарифма возможны два случая.

А. Пусть $x^2 + 2x - 3 > 1$, т. е. $x \in (-\infty,\, -1 - \sqrt{5}) \cup (-1 + \sqrt{5},\, \infty)$, тогда исходное неравенство будет равносильно следующему:

$$\frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 1. \qquad (1)$$

Если $x \in (-\infty,\ -1-\sqrt{5})$, то $x-1<0$, и, умножая (1) на $x-1$, получаем $|x+4|-|x| < x-1$. Так как x отрицателен, то $|x| = -x$ и мы приходим к неравенству $|x+4| < -1$, не имеющему решений.

Если $x \in (-1+\sqrt{5},\ \infty)$, то $x-1>0$. Умножив (1) на $x-1$ с учетом того, что в данном случае $|x| = x$, $|x+4| = x+4$, получим неравенство $x+4-x > x-1$, т. е. $x < 5$. Значит, промежуток $(-1+\sqrt{5},\ 5)$ входит в множество решений исходной задачи.

Б. Пусть $0 < x^2+2x-3 < 1$, т. е. $x \in (-1-\sqrt{5},\ -3) \cup (1,\ -1+\sqrt{5})$, тогда логарифмическое неравенство сводится к следующему:

$$0 < \frac{|x+4|-|x|}{x-1} < 1. \qquad (2)$$

Действуя, как и выше, при $x \in (-1-\sqrt{5},\ -3)$ приходим к соотношению $0 > |x+4|+x > x-1$. Следовательно, весь промежуток $(-1-\sqrt{5},\ -3)$ входит в множество решений исходной задачи. Если же $x \in (1,\ -1+\sqrt{5})$, то (2) равносильно неравенствам $0 < x+4-x < x-1$, т. е. $x > 5$. Промежутки $(1,\ -1+\sqrt{5})$ и $(5,\ \infty)$ не пересекаются, значит, на интервале $(1,\ -1+\sqrt{5})$ решений нет.

Ответ: $(-1-\sqrt{5},\ -3) \cup (-1+\sqrt{5},\ 5)$.

3. Преобразуем выражение под знаком первого радикала в левой части данного уравнения

$$\sqrt{3}\,\cos x + \sin x - 2 = 2\Big(\cos\big(x-\tfrac{\pi}{6}\big) - 1\Big).$$

Эта величина неотрицательна только в случае $\cos\big(x-\frac{\pi}{6}\big) = 1$, т. е. при

$$x = \tfrac{\pi}{6} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \qquad (3)$$

Следовательно, только числа вида (3) могут быть решениями исходного уравнения.

Подставив (3) в исходное уравнение, получим

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\big(\tfrac{\pi}{2}+6\pi k\big) + \sin^2\big(\tfrac{\pi}{6}+2\pi k\big) - \tfrac{1}{4}} = \sin\big(\tfrac{\pi}{4}+3\pi k\big) + \tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

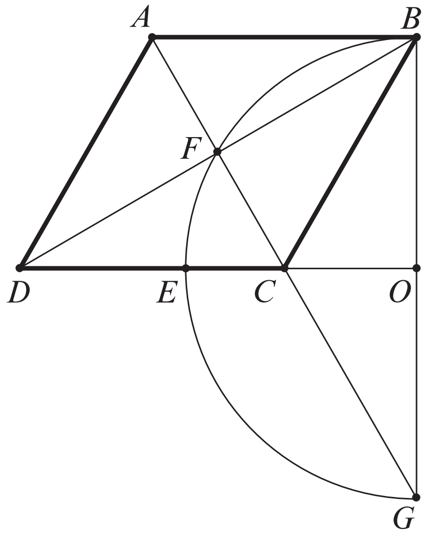

Рис. **10**

что равносильно соотношению

$$(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

выполненному при нечетных k, т. е. при $k = 2n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi\,(2n+1) \quad (n \in \mathbb{Z})$.

4. Пусть F — центр ромба. Продолжим FC до пересечения с данной окружностью в некоторой точке G (рис. 10). Так как угол BFG — прямой, то BG — диаметр. Следовательно, центр O данной окружности лежит на середине BG. Используя известные соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике ABG, легко подсчитать, что $AG = 2a$, $BG = 2BO = a\sqrt{3}$, $AC = a$. Значит, OC — средняя линия в треугольнике ABG, а точки O, C, E и D лежат на одной прямой. Таким образом, $CE = OE - OC = OB - \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$, $DE = CD - CE = \frac{a}{2}(3-\sqrt{3})$, откуда $DE:CE = \sqrt{3}:1$.

Ответ: $\sqrt{3}:1$.

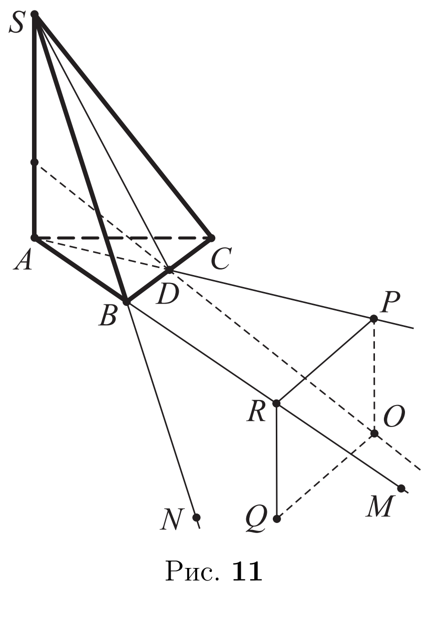

Рис. **11**

5. Если шар касается двух заданных пересекающихся плоскостей, то его центр лежит в плоскости, делящей пополам двугранный угол между этими плоскостями. Следовательно, центр искомого шара расположен в плоскости, которая делит пополам угол между плоскостями SAB и SAC, т. е. в плоскости ASD, где D — середина BC (рис. 11).

Кроме того, центр шара лежит также в плоскости, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями MBC и NBC. Эта плоскость проходит через прямую BC и биссектрису угла ADS. Таким образом, центр искомого шара лежит на пересечении биссекторных плоскостей, совпадающем с биссектрисой угла ADS (точнее, на продолжении этой биссектрисы за вершину D).

Пусть O — центр шара, P и Q — проекции точки O на плоскости MBC и MBN соответственно. Понятно, что прямая OP параллельна SA и, следовательно, плоскости MBN. Прямая OQ перпендикулярна SA, значит, OQ и плоскость MBC параллельны. Через R обозначим точку пересечения плоскости OPQ с прямой MB. В силу сказанного выше прямая OQ параллельна PR, а прямая OP параллельна QR. Таким образом, $OPRQ$ — квадрат, длина стороны которого равна искомому радиусу.

По теореме Пифагора легко подсчитать, что $SD = 2\sqrt{3}$, $AD = \sqrt{3}$, следовательно, угол ADS равен $60°$, а угол PDO равен $30°$. Если обозначить длину OP через x, то $DP = OP \operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$. С другой стороны, $DP = AP - AD = PR/\sin 30° - AD = 2x - \sqrt{3}$. Приравняв найденные значения DP, получим $x = \sqrt{3}/(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$.

Ответ: $\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** $v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 50$ км/ч, $v_3 = 60$ км/ч. **2.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}-4}{5}\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\,\right)$. **3.** πk; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **4.** $\frac{a}{3}\,(\sqrt{7}-1)$ или $\frac{a}{3}\,(\sqrt{7}+1)$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, x и y — их радиусы, A — одна из точек пересечения окружностей. Тогда AO_1O_2 — прямоугольный треугольник с катетами x, y и гипотенузой $2|x-y|$. Высота треугольника AO_1O_2, опущенная на гипотенузу, равна $a/2$. По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 4(x-y)^2$. Площадь же треугольника, с одной стороны, равна $\frac{a}{2}\,|x-y|$, а с другой — $\frac{1}{2}\,xy$, поэтому $a\,|x-y| = xy$. Решая полученную систему уравнений, найдем x и y. **5.** $1 + 1/\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть E — середина SB. Плоскость ADE делит пополам двугранный угол между гранями SAD и $ABCD$, значит, центр O искомого шара лежит в этой плоскости. Прямая AE перпендикулярна грани SBC, поэтому перпендикуляр, опущенный из O на грань SBC, параллелен AE и, следовательно, лежит в плоскости ADE. Обозначим через P и H точки пересечения этого перпендикуляра с прямой AD и гранью SBC соответственно. Точка H лежит на биссектрисе угла BSC, откуда вытекает, что $OH^2 = OE^2 - HE^2 = r^2 - 1/6$, где r — искомый радиус. Кроме того, $OP = OH + HP = OH + 1/\sqrt{2}$. Подставив сюда найденное выше значение OH и заметив, что $OP = r\sqrt{2}$, придем к уравнению относительно r.

Вариант 3. **1.** $v_0 = 50$ км/ч, $v_1 = 52$ км/ч. **2.** $\left(\frac{\sqrt{6}-6}{3}, -1\right)$. **3.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{10} + \pi n$; $(-1)^{m+1}\frac{3\pi}{10} + \pi m$ $(k, n, m \in \mathbb{Z})$. **4.** $\sqrt{7/3}$ или $\sqrt{5}/2$. *Указание.* Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, причем $AB = 1$. Возможны два случая. В первом $AD = BC = 2$, $CD = 3$, а четырехугольник — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD. Радиус описанной около нее окружности равен $\sqrt{7/3}$. Во втором случае $AD = BC = 2$, $CD = 1$, и четырехугольник является прямоугольником. Радиус описанной около него окружности равен $\sqrt{5}/2$. **5.** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/2$. *Указание.* Пусть L — середина AS. Продолжим KL до пересечения с плоскостью ABC в некоторой точке N. Понятно, что N, A и M лежат на одной прямой, кроме того, $AL = \sqrt{3}/2$, $AN = 1/2$. Следовательно, угол KNM равен $\operatorname{arctg}(AL/AN) = \pi/3$. Центр O искомого шара лежит в плоскости, делящей пополам двугранный угол между гранями SAC и SAB, т. е. в плоскости SAM. С другой стороны, точка O равноудалена от прямых KN и MN. Значит, центр шара лежит на биссектрисе угла KNM. Если r — искомый радиус, P — проекция точки O на NM, а Q — проекция P на AC, то $OP = PQ = r$. Выразим теперь отрезок AP двумя разными способами через r. Из треугольника NOP находим $AP = NP - AN = OP\operatorname{ctg}30^\circ - AN = r\sqrt{3} - 1/2$, а из треугольника APQ имеем $AP = r\sqrt{2}$. Приравняв найденные значения AP, придем к уравнению относительно r.

Вариант 4. **1.** $v_2 = 30$ км/ч. **2.** $(-2, -1) \cup (0, 1)$ **3.** $a \leqslant -3$, $a \geqslant 1$. *Указание.* Привести исходное уравнение к квадратному относительно $\sin x$. **4.** 90°. *Указание.* Пусть O_1 и r — центр и радиус меньшей, а O_2 и R — центр и радиус большей окружности; A — точка пересечения окружностей. Так как O_1 и O_2 лежат на биссектрисе прямого угла, то $O_1O_2 = (R-r)\sqrt{2}$. Если φ — искомый угол, то угол O_1AO_2 равен $\pi - \varphi$, а площадь треугольника O_1AO_2 равна $\frac{1}{2}\,AO_1 \cdot AO_2 \cdot \sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}\,Rr\sin\varphi$. С другой стороны, высота треугольника O_1AO_2, опущенная из точки A, равна $\frac{1}{4}\,O_1O_2$, поэтому та же площадь есть $\frac{1}{8}\,O_1O_2^2 = \frac{1}{4}\,(R-r)^2$. Итак, $(R-r)^2 = 2Rr\sin\varphi$. По теореме косинусов $O_1O_2^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\pi-\varphi)$, откуда следует, что $(R-r)^2 = 2Rr(1+\cos\varphi)$. Сопоставив это равенство с полученным выше, придем к уравнению $\sin\varphi = 1 + \cos\varphi$. **5.** $1 + \sqrt{2/3}$. *Указание.* Через ребро AB и биссектрису угла CBC_1 проведем плоскость α, делящую пополам двугранный угол между гранями $ABCD$ и ABC_1D_1. В этой плоскости лежит центр O искомого шара. Заметим, что плоскость α перпендикулярна прямым CC_1 и DD_1, которые, в свою очередь, параллельны линии пересечения плоскостей ADD_1 и BCC_1. Если E — точка пересечения α с этой линией, то угол BEA будет равен $60°$, причем точка O окажется на биссектрисе угла BEA. Обозначим через P проекцию O на прямую BE, а через Q — проекцию P на BC. Понятно, что $OP = PQ = r$, где r — искомый радиус. Выразим BP через r из треугольника OBE: $BP = PE - BE = OP\operatorname{ctg}30° - AB\operatorname{ctg}60° = r\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}$. С другой стороны, из треугольника PBQ находим $BP = r\sqrt{2}$. Следовательно, $r\sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = r\sqrt{2}$.

Вариант 5. **1.** $v_1 = 10$ км/ч. **2.** $(-1,\,2-\sqrt{7}) \cup (1,\,2)$. **3.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ $(n \in \mathbb{Z})$. **4.** $2r\sqrt{7}/3$. *Указание.* Если φ — острый угол трапеции, а 2φ — тупой, то $\varphi + 2\varphi = 180°$. Следовательно, $\varphi = 60°$. Теперь легко выразить через r все элементы трапеции, а затем радиус описанной около нее окружности. **5.** $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{7})/4$. *Указание.* Центр O искомого шара равноудален от прямых AD и AB, поэтому он лежит в плоскости ASC. Поскольку точка O равноудалена также от прямых MN и NK, то она лежит на биссектрисе угла MNK. Понятно, что этот угол прямой, его биссектриса составляет с MN и NK углы в $45°$, а расстояния от O до MN и NK равны радиусу r шара. Пусть P — проекция O на AC, Q — проекция P на AD. Треугольник OPQ — прямоугольный, а его гипотенуза OQ равна r. Рассмотрим далее два случая, когда точка O лежит вне или внутри пирамиды. В первом случае $r > KN = \sqrt{2}/4$,

$AP = AC - PK - KC = \sqrt{2} - r - \sqrt{2}/4$, $PQ = \frac{1}{\sqrt{2}} AP = \frac{3}{4} - \frac{r}{\sqrt{2}}$, $OP = r - KN = r - \frac{\sqrt{2}}{4}$. По теореме Пифагора $OQ^2 = PQ^2 + OP^2$. Подставив сюда вместо сторон треугольника OPQ их выражения через r, получим квадратное уравнение $8r^2 - 20\sqrt{2}\,r + 11 = 0$. Из двух корней выбираем тот, который больше $\sqrt{2}/4$ и при котором точка P оказывается между A и C, т.е. $r = (5\sqrt{2} - 2\sqrt{7})/4$. Аналогичное рассмотрение второго случая показывает, что этот случай не реализуется.

Вариант 6. **1.** $v_2 = 3$ км/ч. **2.** $\left(\frac{\sqrt{6}-6}{3}, -1\right) \cup (2, \sqrt{10})$. **3.** При всех a и b имеется серия корней $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. При $a = b \neq 0$ возникает дополнительная серия $\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, а при $a = -b \neq 0$ — серия $-\frac{\pi}{4} + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$. В случае $a = b = 0$ решениями будут любые значения x, кроме $\frac{\pi l}{3}$ $(l \in \mathbb{Z})$. *Указание.* После сокращения общего множителя $\cos 3x$ уравнение приводится к виду $2ab\sin 2x = a^2 + b^2$. **4.** $a\sqrt{5}/4$. *Указание.* Пусть ABC — данный треугольник, O_1 — центр вписанной окружности, а O_2 — центр окружности, проходящей через O_1 и касающейся AC в точке A. Заметим, что угол O_2AO_1 равен $60°$, значит, AO_2O_1 — правильный треугольник, причем его высота равна $AB/2$. **5.** $\sqrt{2} - \sqrt{2/3}$. *Указание.* Центр O искомого шара лежит на высоте тетраэдра, опущенной из вершины S. С другой стороны, центр O должен лежать на биссектрисе угла, образованного прямыми l и SB. Точка пересечения этой биссектрисы с высотой и есть O. Нужное расстояние легко вычисляется теперь с помощью теоремы о том, в каком отношении биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону.

1980

Решение варианта 1

1. Если $\cos\alpha = \sin\beta$, то либо $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, либо $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Соответственно рассмотрим два случая.

А. $\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x + 2\cos x + \frac{\sqrt{5}-4}{2}\sin x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Группируя подобные члены, приведем это равенство к виду

$$3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sin x + \frac{2}{3}\cos x\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \tag{1}$$

Положим $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, тогда $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{2}{3}$, а уравнение (1) можно переписать так:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}. \tag{2}$$

При $k \geqslant 1$ правая часть уравнения (2) больше единицы, следовательно, для этих k решений нет. Если $k \leqslant -1$, то $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} < -1$ и уравнение (2) снова не имеет корней. Остается возможность $k = 0$, при этом $\sin(x+\varphi) = \frac{\pi}{6}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} - \varphi + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Б. $\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x + 2\cos x - \frac{\sqrt{5}-4}{2}\sin x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Действуя, как и выше, придем к уравнению

$$\sin(x+\psi) = \frac{3\pi}{4\sqrt{5}} + \frac{\pi k}{\sqrt{5}}, \tag{3}$$

где $\psi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. Уравнение (3) имеет решения лишь для $k = -1$, при этом $\sin(x+\psi) = -\frac{\pi}{4\sqrt{5}}$, $x = (-1)^{m+1}\arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{5}} - \psi + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$; $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi m$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$.

2. Обозначим через α угол ACB (рис. 12). Заметим, что α — острый угол, поскольку угол AMC — тупой. Так как $AB = R$, то по теореме синусов $R/\sin\alpha = 2R$, откуда получаем $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, или $\alpha = 30°$. Угол AMC, равный углу BMD, составляет $120°$, но тогда $\angle CAM = 30°$. Итак, в треугольнике AMC углы ACM и CAM равны. Если длину BM обозначить через $2x$, то $AM = MC = 3x$. Применив теперь к треугольнику AMB теорему косинусов, получим $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM\cos 60°$, т. е. $R^2 = 9x^2 + 4x^2 - 6x^2$, $x = \frac{1}{\sqrt{7}}R$, $BC = 5x = \frac{5}{\sqrt{7}}R$.

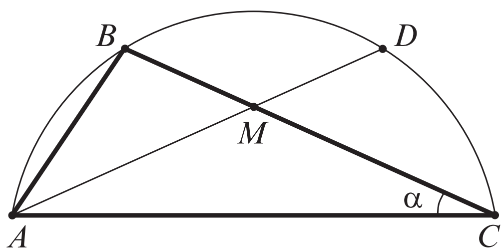

Рис. **12**

Ответ: $5R/\sqrt{7}$.

3. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда полусумма первого и третьего равна второму, поэтому

$$25^x + 25^{-x} + 5^{1+x} + 5^{1-x} = a. \tag{4}$$

Положив $y = 5^x + 5^{-x}$ и заметив, что $y \geqslant 2$, $y^2 = 25^x + 25^{-x} + 2$, придем к квадратному уравнению

$$y^2 + 5y - 2 = a. \tag{5}$$

Существование решений у уравнения (4) равносильно тому, что уравнение (5) имеет хотя бы один корень, не меньший 2.

График квадратного трехчлена $f(y) = y^2 + 5y - 2$ — парабола с вершиной в точке $y = -5/2$. Следовательно, при $y > -5/2$ функция $f(y)$ монотонно возрастает, а при $y \geqslant 2$ все ее значения не меньше $f(2) = 12$. Таким образом, для всякого $a \geqslant 12$ уравнение (5) имеет решение, не меньшее 2.

Ответ: $a \geqslant 12$.

4. Геометрическое место точек, равноудаленных от ребер AB, AS и AC, совпадает с прямой AN, перпендикулярной грани SBC. Значит, центр шара O лежит на этой прямой (рис. 13). Расстояния от точки O до ребра AC и середины M ребра BC должны совпадать с радиусом шара. Обозначим через x длину отрезка AO и выразим радиус через x.

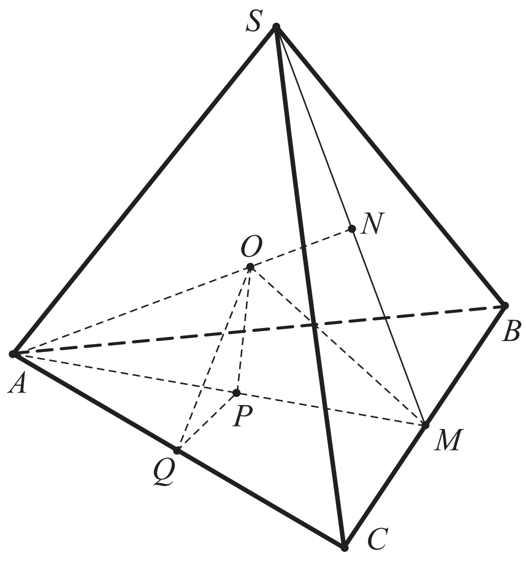

Рис. **13**

Пусть P — проекция O на AM, а Q — проекция P на AC. Тогда OQ — радиус шара. Из подобия треугольников ANM и AOP находим

$$\frac{x}{OP} = \frac{AM}{MN} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/6} = 3,$$

значит, $OP = x/3$. Из треугольника APQ вычисляем
$$PQ = \frac{1}{2}\,AP = \frac{1}{2}\sqrt{AO^2 - OP^2} = \frac{x\sqrt{2}}{3}.$$

По теореме Пифагора $OQ^2 = OP^2 + PQ^2 = \frac{1}{3}\,x^2$. С другой стороны, $OQ^2 = OM^2 = OP^2 + PM^2 = OP^2 + (AM - AP)^2 = \frac{x^2}{9} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2x\sqrt{2}}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{3}\,x\sqrt{6} + \frac{3}{4}$.

Приравнивая найденные значения OQ^2, приходим к уравнению $8x^2 - 8\sqrt{6}\,x + 9 = 0$ с корнями $x_1 = \sqrt{6}/4$ и $x_2 = 3\sqrt{6}/4$. Второй из этих корней лишний, так как $x_2 > AN = \sqrt{3}/2$ и центр O оказывается вне тетраэдра. Таким образом, $x = \sqrt{6}/4$ и $OQ = x/\sqrt{3} = \sqrt{2}/4$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. В случае $b^2 \neq 1$ определитель системы отличен от нуля и система имеет единственное решение при всех a и c.

Пусть $b = 1$. Тогда система имеет решения (причем их бесконечно много) лишь в случае $ac^2 = ac + 1$. Получилось уравнение относительно c, которое имеет корни при $a^2 + 4a \geqslant 0$, $a \neq 0$, т. е. при $a \in (-\infty,\, -4\,] \cup (\,0,\, \infty)$.

Если $b = -1$, то исходная система будет иметь решения лишь в случае $ac^2 = -ac - 1$. Это уравнение относительно c имеет корни при $a \in (-\infty,\, 0\,) \cup [\,4,\, \infty)$.

Пересечение множеств, найденных во всех трех случаях, как раз и есть то множество значений a, для которых при всех b найдутся такие c, что исходная система будет иметь решения.

Ответ: $(-\infty,\, -4\,] \cup [\,4,\, \infty)$.

Ответы и указания к вариантам 2–6

Вариант 2. **1.** $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \pi k$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $4R\sqrt{3/43}$. *Указание.* Углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу, поэтому они оба равны 30°. Угол CAK равен 60°. Но тогда угол AKC — прямой, а $BD = 2BK$. Положив $BC = x$, будем иметь $BD = 6x$. Длину отрезка CD найдем по теореме синусов: $CD = 2R\sin 120^\circ = R\sqrt{3}$. Применив теорему косинусов к треугольнику CBD, получим уравнение относительно x. **3.** $a \geqslant 4$. **4.** $\sqrt{7}$. *Указание.* Отметим, что угол ABC равен 60°, точка

M лежит на биссектрисе этого угла. Опустим из M перпендикуляр MC на прямую CD и перпендикуляр MP на BC. По отношению к плоскости BCD отрезок MP — перпендикуляр, а MC — наклонная. Их длины совпадают лишь в случае $P = C$, при этом $MC = BC \operatorname{tg} 30^\circ = 1$. Аналогично, N лежит на биссектрисе угла BCD, перпендикуляр NQ к прямой BC будет перпендикулярен плоскости ABC, а перпендикуляр NR к прямой AB — наклонная по отношению к той же плоскости. Их длины равны лишь в случае $Q = R = B$, при этом $NC = \sqrt{6}$. Теперь расстояние MN легко найти по теореме Пифагора. **5.** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

Вариант 3. **1.** $(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{8\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi k$; $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n$; $(-1)^{m+1} \arcsin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi m$ $(k, n, m \in \mathbb{Z})$. **2.** $11R/7$. *Указание.* Так как углы CAD и CBD опираются на одну и ту же дугу, то оба они равны 120°. Но тогда угол BCL равен 30° и треугольник BCL равнобедренный. По аналогичным причинам ADL — также равнобедренный треугольник, следовательно, зная BL и DL, мы легко подсчитаем AL, CL и, значит, AC. Для подсчета BL и CL положим $BL = 3x$, $DL = 2x$. Тогда $BC = 3x$ и по теореме косинусов, примененной к треугольнику BCD, можно составить уравнение относительно x: $CD^2 = 25x^2 + 9x^2 - 30x^2 \cos 120^\circ$. Остается выразить CD через R по теореме синусов, а затем найти x. **3.** $a \geqslant 48$. **4.** $\sqrt{11}/2$. *Указание.* Точка O лежит на продолжении высоты тетраэдра, опущенной из вершины A, на расстоянии $\sqrt{2}$ от любой из прямых AS, AB или AC. Синус угла α между этой высотой и каждой из перечисленных прямых равен $1/\sqrt{3}$, поэтому $AO = 2/\sin\alpha = \sqrt{6}$. Теперь OK легко подсчитать, применив теорему косинусов к треугольнику AOK. **5.** $[-1, 0)$.

Вариант 4. **1.** $(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi k$; $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{8} - \arcsin \frac{3}{4} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $2\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть угол BMC равен α. Тогда по теореме синусов $BC/\sin\alpha = 2\sqrt{3}$, т. е. $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$. При этом возможны случаи: либо $\alpha = 60^\circ$, либо $\alpha = 120^\circ$. В первом случае угол MAC, как и угол MCA, равен 30°, значит, $AM = MC$. Если положить $MB = x$, то $MC = 2x$ и, применив теорему косинусов к треугольнику MBC, получим уравнение относительно x. Случай $\alpha = 120^\circ$ не реализуется: угол MCA должен быть прямым, а отрезок

MN — диаметром, по одну сторону от которого лежат точки B и C, но тогда лучи BM и CN нигде не пересекаются. **3.** $a \geqslant 36$. **4.** $\sqrt{2}/12$. *Указание.* Пусть P — середина AD, Q — середина BC. Понятно, что M лежит на отрезке PQ. Обозначим через x расстояние от M до основания O высоты SO пирамиды. Тогда $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 1/2 + x^2$, $CM^2 = (OQ \pm OM)^2 + CQ^2 = (1/2 \pm x)^2 + 1/4$. Приравняв эти величины, находим $x = 0$, следовательно, точка M совпадает с O. Так же можно показать, что N совпадает с центром грани SBC. Теперь искомую площадь легко подсчитать. **5.** $[-9/16,\ 0)$.

Вариант 5. **1.** $(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **2.** $R/\sqrt{11 - 2\sqrt{3}}$. *Указание.* Пусть α — общая величина равных углов ADB и ACB, а β — углов CAD и CBD. По теореме синусов $R/\sin\alpha = 2R$, $R\sqrt{2}/\sin\beta = 2R$. Значит, угол α равен $30°$ или $150°$, а β равен $45°$ или $135°$. Так как центр окружности лежит внутри четырехугольника, то углы α и β острые, поэтому $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$. Положим $BM = x$ и, применив теорему синусов к треугольнику BMC, получим $MC = x\sin 45°/\sin 30° = x\sqrt{2}$, $AM = 2MC = 2x\sqrt{2}$. Воспользовавшись теперь теоремой косинусов для треугольника ABM, придем к уравнению относительно x. **3.** $a \geqslant 26$. **4.** $1 + \sqrt{5}/4$. *Указание.* Пусть P — середина MN, Q — основание высоты тетраэдра, опущенной из точки A. Центр шара O лежит на продолжении высоты AQ и, так как синус угла BAQ равен $1/\sqrt{3}$, то $AO = r\sqrt{3}$, где r — радиус шара. С другой стороны, отрезок OP также равен r, поэтому $AO = AQ + OQ = 2/\sqrt{3} + \sqrt{OP^2 - PQ^2} = 2/\sqrt{3} + \sqrt{r^2 - 1/24}$. Приравняв найденные значения AO, придем к уравнению относительно r. **5.** $(-\infty,\ -2\,] \cup \{0\} \cup [\,4, \infty)$.

Вариант 6. **1.** $(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{8} - \arcsin \frac{3}{4} + \pi k$; $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** $8\sqrt{3/7}$. *Указание.* Обозначим через α величину равных углов ACB и ADB, а через β — величину углов CAD и CBD. По теореме синусов $2/\sin\alpha = 4$ и $2\sqrt{3}/\sin\beta = 4$, т. е. $\sin\alpha = 1/2$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$. Так как центр окружности лежит внутри четырехугольника, то углы α и β острые, значит, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. Но тогда угол CLD равен $30°$, а $BL = BD$. Положим $BC = x$, $BL = BD = 3x$ и применим теорему косинусов к треугольнику CBD.

В результате получится уравнение относительно x. **3.** $a \geqslant 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}$. **4.** $\sqrt{3}/9$. *Указание.* Геометрическое место точек, равноудаленных от прямых AS, BS, BC, есть прямая MN, где M — середина AB, N — середина SC. Легко подсчитать, что синус угла NMC равен $1/\sqrt{3}$. Если x — искомое расстояние, то $OM = x\sqrt{3}$ и $OA^2 = OM^2 + AM^2$, иными словами, $13/36 = 3x^2 + 1/4$. Отсюда находим x. **5.** $(-\infty, -8] \cup \cup \{0\} \cup [4, \infty)$.

1981

Решение варианта 1

1. Положим $u = 2^x$, $v = 3^y$, тогда исходная система уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 + v^2 = 4uv - 11. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения $v = 5 - u$ и подставляя во второе, после элементарных преобразований получим квадратное уравнение $u^2 - 5u + 6 = 0$ для определения u. Решая его, находим две пары значений u и v: $u_1 = 2$, $v_1 = 3$, $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Учитывая, что все эти решения оказались положительными, логарифмированием приходим к решениям исходной системы: $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = \log_2 3$, $y_2 = \log_3 2$.

Ответ: $(1; 1)$, $(\log_2 3; \log_3 2)$.

2. Подставляя в исходное уравнение выражения $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, приведем его к виду $2\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$. Полученное квадратное уравнение относительно $\sin x$ имеет два корня: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$, то возможно только соотношение $\sin x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть высота CK, диагональ BD и биссектриса угла A пересекаются в точке M. Проведем дополнительно высоту DL и положим $CD = x$. Поскольку трапеция равнобедренная, то очевидно, что

$AL = KB$ (рис. 14). Кроме того, $KL = x$, $BK = (AB - LK)/2 = 1 - x/2$, $AK = AB - BK = 1 + x/2$. Угол KBC в прямоугольном треугольнике CKB равен $60°$, поэтому $CK = BK \cdot \operatorname{tg} 60° = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{3}$.

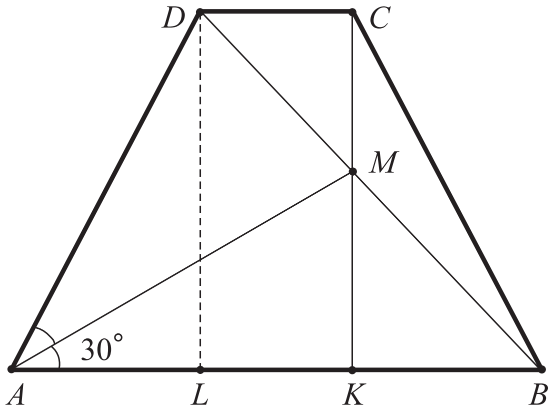

Рис. **14**

Так как AM — биссектриса угла A, то угол MAK в прямоугольном треугольнике AMK равен $30°$, откуда $MK = AK \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ и $CM = CK - MK = \frac{2}{\sqrt{3}}(1 - x)$. Из подобия треугольников CMD и MKB вытекает, что

$$\frac{CD}{KB} = \frac{CM}{MK}.$$

Подставляя в эту пропорцию длины отрезков, выраженные через x, получаем квадратное уравнение $x^2 - 8x + 4 = 0$, корнями которого являются числа $x_1 = 4 - 2\sqrt{3}$, $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$. По условию задачи трапеция имеет острые углы при основании AB, поэтому $CD < AB$, т. е. $x < 2$. Следовательно, $x_2 = 4 + 2\sqrt{3}$ — посторонний корень и $CD = 4 - 2\sqrt{3}$.

Ответ: $4 - 2\sqrt{3}$.

4. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки касания, α — угол, который образует касательная с осью Ox. Поскольку координаты точек A и B, вообще говоря, могут быть любого знака, то из условий задачи следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \pm BO/AO = \pm 2$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0)$, где $y'(x_0)$ — значение производной данной функции $y = -x^2 + 4x - 2$ при $x = x_0$. Рассмотрим два возможных случая.

А. $\operatorname{tg}\alpha = 2$, т. е. $y'(x_0) = -2x_0 + 4 = 2$. Отсюда $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = 1$ и уравнение касательной имеет вид $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 2x - 1$. Точки пересечения касательной с осями Ox и Oy имеют координаты $A\left(\frac{1}{2};\, 0\right)$, $B\,(0;\, -1)$. Следовательно, $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Б. $\operatorname{tg}\alpha = -2$, т.е. $y'(x_0) = -2x_0 + 4 = -2$. Отсюда $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, а уравнение касательной принимает вид $y = -2x + 7$. Точки ее пересечения с осями Ox и Oy имеют координаты $A\left(\frac{7}{2};\, 0\right)$, $B\,(0;\, 7)$. Расстояние между A и B равно $\frac{7}{2}\sqrt{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{7}{2}\sqrt{5}$.

4C. Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, поэтому должны выполняться неравенства $x(x-4) > 0$ и $\frac{x-2}{x-4} > 0$. Решение первого неравенства состоит из полупрямых $x < 0$ и $x > 4$; решение второго — из лучей $x < 2$ и $x > 4$. Таким образом, оба неравенства одновременно выполняются для $x < 0$ или $x > 4$. В указанной области исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_8 x(x-2) \geqslant a$, которое, в свою очередь, приводится к виду

$$x(x-2) \geqslant 8^a. \qquad (1)$$

Корнями уравнения $x^2 - 2x - 8^a = 0$ являются числа $x_1 = 1 - \sqrt{1+8^a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1+8^a}$, а множество решений неравенства (1) состоит из двух промежутков: $(-\infty,\, 1-\sqrt{1+8^a}\,]$ и $[\,1+\sqrt{1+8^a},\, \infty)$. Среди этих значений необходимо выделить те, которые удовлетворяют неравенствам $x < 0$ или $x > 4$.

Рассмотрим первый промежуток. Учитывая, что $1-\sqrt{1+8^a} < 0$ для всех значений a, делаем вывод, что первый промежуток при всех a принадлежит области определения исходного неравенства и входит в множество решений.

Решив неравенство $1 + \sqrt{1+8^a} > 4$, легко убедиться, что оно справедливо при $a > 1$. Следовательно, при $a > 1$ весь второй промежуток $[\,1+\sqrt{1+8^a},\, \infty)$ входит в область определения исходного неравенства (и тем самым в множество решений), в то время как при $a \leqslant 1$ решениями исходного неравенства из этого промежутка будут только числа $x > 4$. Объединив найденные промежутки, приходим к ответу на вопрос задачи.

Ответ: $(-\infty,\, 1-\sqrt{1+8^a}\,] \cup (4,\, \infty)$ при $a \leqslant 1$; $(-\infty,\, 1-\sqrt{1+8^a}\,] \cup [\,1+\sqrt{1+8^a},\, \infty)$ при $a > 1$.

5. Проведем плоскость α через прямую SB, тогда линия ее пересечения с плоскостью основания ABC параллельна прямой AC.

Аналогично, проведем плоскость β через прямую SC; линия ее пересечения с плоскостью ABC параллельна ребру AB. Если через точку A провести прямую, параллельную BC, то три построенных прямых попарно пересекутся в точках A_1, B_1, C_1, причем $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$, треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный, а его сторона равна 2 (рис. 15). Искомый двугранный угол — это угол между гранями SA_1C_1 и SA_1B_1 пирамиды $SA_1B_1C_1$.

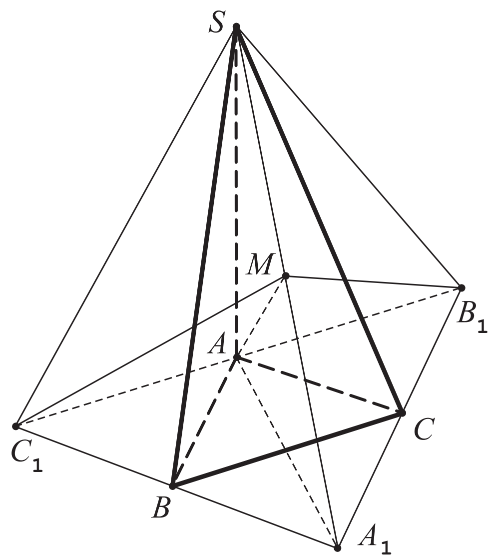

Рис. **15**

Рассмотрим $\triangle SAA_1$. Так как AA_1 — высота правильного треугольника $A_1B_1C_1$, то $AA_1 = \sqrt{3}$. В то же время ребро SA по условию перпендикулярно плоскости ABC, $SA = \sqrt{3}$. Следовательно, SAA_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник. Опустив высоту AM на гипотенузу SA_1, заметим, что $AM = SA\sin 45^\circ = \sqrt{3/2}$.

Прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости SAA_1, так как она перпендикулярна прямым SA и AA_1 этой плоскости. Отсюда следует, что AM является проекцией B_1M на плоскость SAA_1, и поскольку $AM \perp SA_1$, то $B_1M \perp SA_1$. Аналогично, $C_1M \perp SA_1$ и, значит, угол C_1MB_1 — искомый. Обозначим его через φ. Учитывая, что прямоугольные треугольники C_1AM и B_1AM равны, получим $\varphi = 2\angle AMB_1$. В треугольнике B_1AM: $AM = \sqrt{3/2}$, $AB_1 = 1$. Отсюда $\operatorname{tg}\angle AMB_1 = AB_1/AM = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Следовательно, $\angle AMB_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$, а искомый угол $\varphi = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{6}/3)$.

Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, можно найти $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{6}$ и $\cos\varphi = \frac{1}{5}$. При некоторых других способах рассуждений ответ получается в виде $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{6})$ или $\varphi = \arccos\frac{1}{5}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(= \operatorname{arctg} 2\sqrt{6} = \arccos\frac{1}{5})$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(2;\ \frac{1}{2})$; $(\log_3 2;\ \log_2 3)$. **2.** $\pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $40\sqrt{3}/81$. *Указание.* Пусть O — точка пересечения биссектрис AO, DO и высоты CM. Поскольку AO и DO — биссектрисы углов, прилегающих к боковой стороне AD, то треугольник AOD — прямоугольный. **4.** $\frac{50}{3}$; $\frac{1}{6}$. **4C.** $\left[\,\left(3-\sqrt{1+4\cdot 2^a}\,\right)/2,\ 1\right)$ при $a \leqslant 1$; $\left[\,\left(3-\sqrt{1+4\cdot 2^a}\,\right)/2,\ 1\right) \cup \left(3,\ \left(3+\sqrt{1+4\cdot 2^a}\,\right)/2\,\right]$ при $a > 1$. **5.** $\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$ $\left(= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$. *Указание.* Достроим треугольник ABC до ромба $ABDC$ так, чтобы вершина D была противоположной A. Пусть O — точка пересечения диагоналей AD и BC этого ромба. Плоскость AC_1D удовлетворяет условиям задачи, а угол BC_1O в плоскости грани BB_1C_1C является искомым.

Вариант 3. **1.** $(1;\ 1)$; $(\log_7 2;\ \log_2 7)$. **2.** $(-1)^n \arcsin\dfrac{5-\sqrt{5}}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $(10+2\sqrt{3})/11$. **4.** $4\sqrt{10}/3$; $7\sqrt{10}/3$. **4C.** $(-\infty,\ -1)\cup$ $\cup\left[\,2+\sqrt{1+2^a},\ \infty\right)$ при $a \leqslant 3$; $\left(-\infty,\ 2-\sqrt{1+2^a}\,\right] \cup \left[\,2+\sqrt{1+2^a},\ \infty\right)$ при $a > 3$. **5.** $\arccos\frac{1}{17}$ $\left(= 2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \operatorname{arctg}(12\sqrt{2})\right)$. *Указание.* Пусть плоскость α проведена через прямую SB, плоскость β — через SC, прямая l — через точку O пересечения диагоналей основания $ABCD$ параллельно BC. Тогда точки пересечения прямой l с прямыми, получившимися в пересечении α и β с плоскостью $ABCD$, и этих двух прямых являются вершинами треугольника, стороны которого параллельны сторонам BOC. Далее рассуждения проводятся так же, как и в задаче 5 варианта 1.

Вариант 4. **1.** $(1;\ 1)$; $(\log_5 3;\ \log_3 5)$. **2.** $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{5}-2}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{3}{2}(3-\sqrt{5})$. *Указание.* Пусть N — точка пересечения биссектрисы угла D с основанием AB. Тогда треугольник ADN — равносторонний, а MNB — равнобедренный с углом при основании BM, равным 30°. **4.** $\frac{25}{16}$; $\frac{169}{16}$. **4C.** $\left(2,\ 1+\sqrt{1+8^a}\,\right]$ при $a \leqslant 1$; $\left[\,1-\sqrt{1+8^a},\ -2\right) \cup \left(2;\ 1+\sqrt{1+8^a}\,\right]$ при $a > 1$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* Пусть плоскость α проходит через прямую SC, тогда α пересечет в плоскости ABC прямую AK в точке D, причем $ABDC$ —

ромб со стороной 2. Перпендикуляры, опущенные из точек S и A на прямую CD, пересекутся в одной точке N. Пусть AM — высота треугольника SAN. Треугольник AMD — прямоугольный, а угол ADM — искомый.

1982

Решение варианта 1

1. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $x < 7$, тогда $|x-7| = 7-x$ и уравнение приобретает вид $14x - 2x^2 = 7 - x$. Из двух его корней $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 7$ ограничению $x < 7$ удовлетворяет только x_1.

Б. Пусть $x \geqslant 7$, тогда $|x-7| = x-7$, уравнение приводится к виду $14x - 2x^2 = x - 7$. Среди его корней $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 7$ условию $x \geqslant 7$ удовлетворяет только x_2.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 7.

2. Используя тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, заменим 4 в исходном уравнении на $4(\sin^2 x + \cos^2 x)$, а также воспользуемся формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. В итоге уравнение преобразуется к виду $2\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Заметим, что значения x, для которых $\cos x = 0$, не являются решениями, и разделим уравнение на $\cos^2 x$. Корнями получившегося квадратного уравнения $2\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 3 = 0$ относительно $\operatorname{tg} x$ являются числа $\frac{1}{2}$ и 3. Отсюда $\operatorname{tg} x_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$; $\operatorname{tg} x_2 = 3$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Поскольку справедливы неравенства $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат три из найденных корней: $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$; отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi$.

3. Центры O_1 описанной и O_2 вписанной окружностей лежат на диагонали AC ромба. Отсюда следует, что AO_2 — диаметр окружности O_1 и $\angle ADO_2 = 90^\circ$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

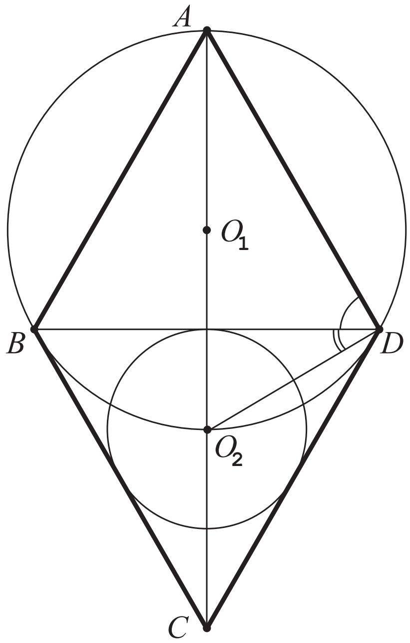

Рис. **16**

Пусть $\angle ADB = \alpha$ (рис. 16). Тогда из равенства треугольников ABD и BDC следует, что $\angle BDC = \alpha$. Учитывая, что DO_2 биссектриса, имеем $\angle BDO_2 = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90°$ и, значит, $\alpha = 60°$.

Таким образом, окружность O_1 радиуса R описана около правильного треугольника ABD. Его сторона $AB = R\sqrt{3}$, а площадь ромба равна $AB^2 \sin 60° = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$.

4. Дискриминант D данного квадратного уравнения равен $4a^2 - 20a$. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $D = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = 5$. Тогда уравнение имеет единственный корень. При $a = 0$ этот корень равен $x_1 = 1 > -1$, а при $a = 5$ он равен $x_2 = -4 < -1$. Условию задачи удовлетворяет число $a = 5$.

Б. Пусть $D > 0$, т.е. $a < 0$ или $a > 5$. Тогда данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1 - a + \sqrt{a^2 - 5a}$, $x_2 = 1 - a - \sqrt{a^2 - 5a}$ ($x_2 < x_1$). Для выполнения условий задачи должны быть справедливы неравенства $x_2 < -1$, $x_1 \geqslant -1$. Прямой путь их исследования заключается в подстановке явных выражений для x_1, x_2 и непосредственном решении возникающей при этом системы неравенств. Однако можно поступить проще.

Заметим, что старший коэффициент квадратного трехчлена $x^2 + 2(a-1)x + 3a + 1$ положителен, ветви его графика (параболы) направлены вверх и поэтому, если при $x = -1$ он принимает отрицательное значение, то для корней x_1 и x_2 выполняется $x_2 < -1 < x_1$. Обратно, из неравенств $x_2 < -1 < x_1$ следует, что квадратный трехчлен при $x = -1$ отрицателен. Подставляя $x = -1$, мы получаем неравенство $1 + 2(1 - a) + 3a + 1 < 0$, т.е. $a < -4$, которое дает значения a, удовлетворяющие условию задачи.

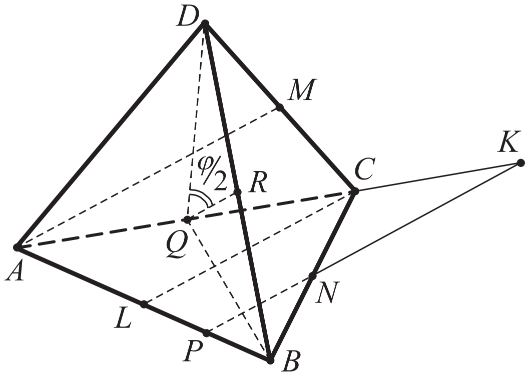

Рис. **17**

Остается выяснить, возможен ли единственный не охваченный нашим рассмотрением случай, когда $x_2 < -1$, $x_1 = -1$. Если один из корней уравнения равен -1, то $a = -4$, но тогда второй корень равен 11 и значение $a = -4$ не подходит.

Ответ: $a < -4$, $a = 5$.

5. Найдем точку пересечения K прямых NP и AC. Пусть CL — высота треугольника ABC, тогда $AL = BL = \frac{1}{2}$, и поскольку $BP = \frac{1}{4}$, то $BP = \frac{1}{2}BL$ (рис. 17). Но $BN = \frac{1}{2}CB$, поэтому $NP \parallel CL$ и, значит, $AK = AC\,\frac{AP}{AL} = \frac{3}{2}$, $\angle AKP = 30°$. Заметим, что $\angle MAC = 30°$, т. е. $\angle MAC = \angle AKP$.

Найдем двугранный угол φ между плоскостями ADC и ABC. Пусть R — середина BD, а Q — середина AC. Так как DQ и BQ перпендикулярны AC, то угол DQB равен φ. Из очевидного равенства прямоугольных треугольников DQR и BQR следует, что $\angle DQR = \frac{\varphi}{2}$. Учитывая, что $DR = 1/2$, $DQ = \sqrt{3}/2$, получаем $\sin\frac{\varphi}{2} = 1/\sqrt{3}$ и, значит, $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2/3}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 1/\sqrt{2}$.

Пусть теперь O — центр данной сферы, E и F — точки ее касания с плоскостями ADC и ABC соответственно. Прямая AC делит плоскость ABC на две полуплоскости. Рассмотрим случай, когда F лежит в той же из них, где и точка B. Проведем через точки O, F и E плоскость β (рис. 18). Радиусы OE и OF перпендикулярны плоскостям ADC и ABC, поэтому прямая AK перпендикулярна каждой из прямых OE и OF плоскости β, т. е. AK перпендикулярна β.

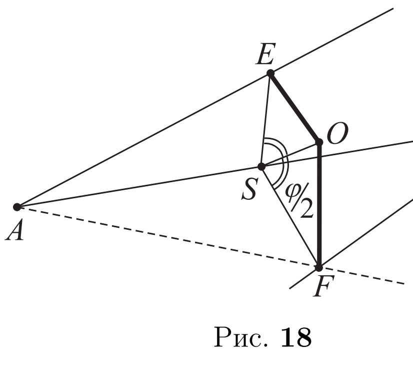

Рис. **18**

Пусть S — точка пересечения β и прямой AK. Тогда $\angle ESF$ — плоский угол двугранного угла, $\angle OSF$ — его половина и, значит, $\angle OSF = \frac{\varphi}{2}$. Проведем прямую AF. Прямоугольные треугольники AES и AFS равны, так как AS — общий катет и $ES = FS$. По условию точка E принадлежит прямой AM, поэтому $\angle EAS = \angle FAS = 30^\circ$. Точка F лежит на прямой KP, следовательно, $\angle FKA = 30^\circ$ и треугольник KAF — равнобедренный. Значит, S — середина отрезка AK, $SK = 3/4$. $SF = SK\operatorname{tg}30^\circ = \sqrt{3}/4$. Наконец, находим радиус сферы: $OF = SF\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Однако для полного исследования задачи необходимо рассмотреть еще один случай, когда точка F принадлежит той полуплоскости в плоскости ABC, которая не содержит B. Аналогичные рассуждения показывают, что и в этом случае луч AF образует с лучом AK угол в 30°. Но тогда прямая AF оказывается параллельной прямой KP и точка F не может принадлежать KP. Это означает, что сферы, удовлетворяющей условиям задачи, в данном случае не существует.

Заметим также, что если бы заданные прямые образовывали неравные углы с линией пересечения плоскостей, то существовали бы две сферы, удовлетворяющие условиям задачи.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $-\frac{1}{3}$; 5. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$; $-\operatorname{arctg}2 + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. Отрезку $\left[-\frac{\pi}{4},\, \pi\right]$ принадлежат корни $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\pi - \operatorname{arctg}2$. **3.** $3\sqrt{3}/4$. *Указание.* $DMBC$ — параллелограмм, углы при основании AB трапеции равны углам CDM и MCD равнобедренного треугольника CMD. Учитывая, что DO — диаметр окружности, описанной около треугольника CDM (точка O — центр вписанной в треугольник CBM окружности), MO и BO — биссектрисы, получаем, что угол при основании равен 60°. **4.** $a = 0$, $a > 1$. **5.** $3\sqrt{3}/2$. *Указание.* Пусть P, Q и R — проекции центра сферы на плоскости $ABCD$, AA_1D_1D и прямую AD соответственно. Используя равенство треугольников APR и AQR, покажите, что $P = B$.

Вариант 3. **1.** 2; 4. **2.** $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. Отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\pi + \operatorname{arctg} 2$. **3.** $(4 + 3\sqrt{2})R^2$. *Указание.* Треугольник ABD равнобедренный, $\angle B = 45°$. **4.** $a < -\frac{1}{2}$, $a = 4$. **5.** $\frac{3}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. *Указание.* Точка P касания сферы с плоскостью основания $ABCD$ получается в результате пересечения прямой DN и луча с вершиной A, проведенного под углом в $30°$ к прямой AB в плоскости $ABCD$.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{2}$; -3. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi k$ $(n,\, k \in \mathbb{Z})$. Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ принадлежат корни $-\operatorname{arctg} 4$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\pi - \operatorname{arctg} 4$. **3.** $\sqrt{7/3}$. *Указание.* Пусть O — центр вписанной в треугольник ABD окружности. Тогда $\angle AOB = 120°$, BO и AO — биссектрисы и, учитывая, что $\angle ABD = 90°$, можно показать, что $\angle BAD = 30°$. **4.** $a \leqslant -1$, $a = 0$. **5.** $5\sqrt{3}/6$. *Указание.* В отличие от вариантов 1–3 центр сферы лежит вне двугранного угла призмы с ребром AA_1, а точка касания с плоскостью AA_1C_1C находится в той полуплоскости относительно прямой AA_1, которая не содержит C.

1983

Решение варианта 1

1. Воспользуемся формулой $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$. В результате уравнение преобразуется к виду $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2. Левая часть данного неравенства определена для тех значений x, которые удовлетворяют каждому из трех неравенств:

$$x - 100 > 0, \qquad \frac{|x - 101|}{105 - x} > 0, \qquad \frac{|x - 103|(105 - x)}{x - 100} > 0.$$

Решая их, находим $100 < x < 105$, $x \neq 101$, $x \neq 103$. Таким образом, всего два целых числа $x_1 = 102$ и $x_2 = 104$ входят в область определения.

При $x = 102$ левая часть неравенства принимает значение $\log_2 2 - \log_{1/2}\frac{1}{3} + \log_2\frac{3}{2} = 0$, а при $x = 104$ — значение $\log_2 4 - \log_{1/2} 3 +$

$+\ \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 3$. Так как $\log_2 3 > 0$, то для того, чтобы среди решений данного неравенства нашлось ровно одно целое число (и тогда это будет $x = 104$), должно быть $a < \log_2 3$ и $a \geqslant 0$.

Ответ: $0 \leqslant a < \log_2 3$.

3. Пусть O_1 — центр первой окружности, M — точка ее касания с данной хордой AB, тогда $O_1M \perp AB$. Из центра O_2 второй окружности проведем $O_2K \perp AB$, точка K — середина AB. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1L на прямую O_2K и рассмотрим различные случаи взаимного расположения хорды и центров O_1 и O_2.

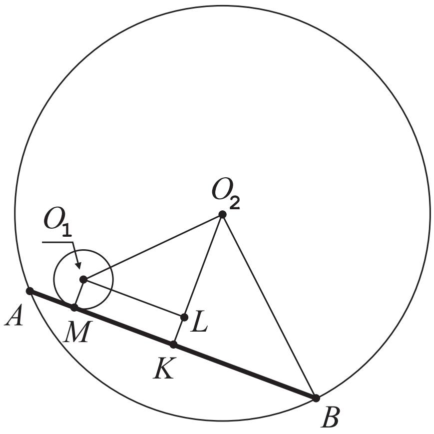

Рис. **19**

А. Пусть O_1, O_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, $O_2K \geqslant r$ (рис. 19). Так как $KL = O_1M = r$, то L лежит на отрезке O_2K. Положим $AM = x$. По условию $AB = 7x$, $BK = 7x/2$, $MK = O_1L = 5x/2$. Из прямоугольного треугольника O_2KB находим $O_2K = \frac{7}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2L: $O_1O_2 = 5r$, $O_1L = \frac{5x}{2}$, откуда $O_2L = \frac{5}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$. Учитывая, что $O_2L + KL = O_2K$, получаем уравнение $r = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Решая его, находим $x = r\sqrt{3}$, $AB = 7r\sqrt{3}$. Для этих значений выполняются все условия пункта «А».

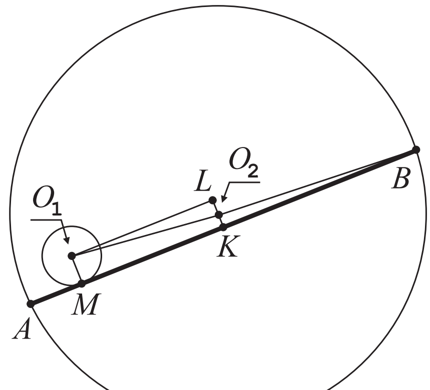

Рис. **20**

Б. Пусть по-прежнему O_1 и O_2 лежат в одной полуплоскости, но, в отличие от пункта «А», $O_2K < r$ (в частности, может быть $O_2 = K$, т. е. хорда AB является диаметром). При этих условиях точка L лежит на продолжении отрезка O_2K, причем $KO_2 + O_2L = KL$ (рис. 20). Выражения для KO_2, O_2L и KL через r и x сохраняются, а уравнение для определения x приобретает вид $6\sqrt{4r^2 - x^2} = r$. Отсюда $x = r\,\frac{\sqrt{143}}{6}$, $AB = 7r\,\frac{\sqrt{143}}{6}$. Проверкой найденного значения AB убеждаемся, что $O_2K < r$ и условия пункта «Б» выполнены.

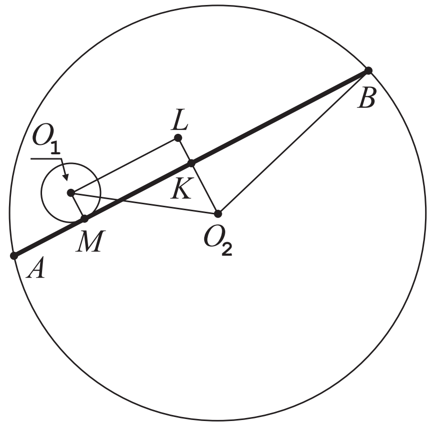

Рис. **21**

В. Пусть O_1, O_2 лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 21). Тогда точка L оказывается на продолжении отрезка O_2K. Отрезки O_2K, O_2L и KL выражаются через r и x так же, как и в пункте «А», но так как $O_2K + LK = O_2L$, то уравнение приобретает вид $r + \sqrt{4r^2 - x^2} = 0$ и решений не имеет.

Ответ: $7r\sqrt{3}$ или $\frac{7r}{6}\sqrt{143}$.

4. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l и образуют двугранный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$, точка M принадлежит плоскости β и не лежит на l, MK — перпендикуляр, опущенный из M на плоскость α, ML — перпендикуляр к l (рис. 22). При этих условиях $\angle MLK$ — плоский угол двугранного угла, $\angle MLK = \varphi$, $\sin\varphi = \frac{MK}{ML}$. Если S — произвольно выбранная на l точка, то ввиду неравенства $SM \geqslant LM$ имеем $\sin\angle MSK = \frac{MK}{SM} \leqslant \frac{MK}{ML} = \sin\varphi$. Следовательно, $\angle MSK \leqslant \varphi$.

Вернемся к исходной задаче и проведем плоскости α и β через точку D_1. Пусть ребро куба равно 1 и O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Прямая A_1C_1 перпендикулярна диагонали B_1D_1 и ребру DD_1, поэтому плоскость BB_1D_1D перпендикулярна A_1C_1, т. е. совпадает с α. Плоскость β проходит через прямую D_1C, следовательно, D_1 ле-

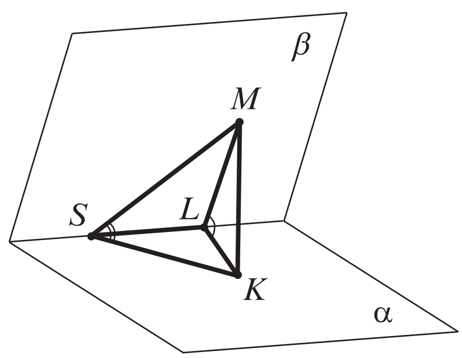

Рис. **22**

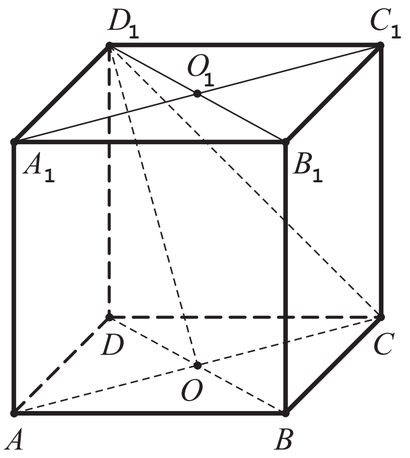

Рис. **23**

жит на ребре двугранного угла, образованного α и β. Так как AC и A_1C_1 параллельны, то CO — перпендикуляр к плоскости α (рис. 23).

Заметим, что $CO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $CD_1 = \sqrt{2}$, $\sin\angle OD_1C = \frac{1}{2}$, т.е. $\angle O_1DC = \frac{\pi}{6}$. Как было показано ранее, если φ — угол между плоскостями α и β, то $\varphi \geqslant \angle OD_1C = \frac{\pi}{6}$. Покажем, что угол φ может быть равным $\frac{\pi}{6}$. В плоскости BB_1D_1D через точку D_1 проведем прямую m, перпендикулярную D_1O, а затем плоскость β через m и прямую D_1C. Тогда m будет ребром получившегося двугранного угла, а CD_1O — его плоским углом. Значит, угол между α и β равен $\frac{\pi}{6}$.

Наметим кратко второй путь решения. Известно, что угол между плоскостями α и β равен наименьшему из двух углов, образованных прямыми, перпендикулярными соответственно α и β. Прямая, перпендикулярная к α, задана: это прямая A_1C_1. Если вторая плоскость параллельна D_1C, то проведем перпендикулярную к ней прямую через точку S — середину отрезка D_1C. Все такие прямые образуют плоскость, перпендикулярную D_1C и проходящую через S (понятно, что это будет плоскость AB_1C_1D).

Наименьший угол, который может образовать A_1C_1 с прямыми, принадлежащими AB_1C_1D, — это угол между прямой A_1C_1 и ее проекцией. Если S_1 — центр грани AA_1B_1B, то A_1S_1 — перпендикуляр к плоскости AB_1C_1D, а C_1S_1 — проекция A_1C_1. Угол $A_1C_1S_1$, равный $\frac{\pi}{6}$, — наименьший возможный угол между A_1C_1 и прямыми плоскости AB_1C_1D. Следовательно, угол между данными плоскостями не может быть меньше $\frac{\pi}{6}$. Если в качестве α взять плоскость BB_1D_1D, провести β через D_1C перпендикулярно C_1S_1, то угол между ними составит ровно $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

5. Заметим, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A, а это противоречит правилам десятичной записи: первая цифра натурального числа обязательно является значащей. В разложении 18 на простые множители присутствуют только числа 2 и 3, поэтому число B будет взаимно простым с 18 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b — последняя цифра числа B, то число A выражается через B с помощью формулы $A = 10^8 \cdot b + \frac{1}{10}(B - b)$ (ясно, что $B - b$ делится на 10). Если заданы числа B и B' и для их последних цифр b и b' выполнено неравенство $b < b'$, то $b' \geqslant b + 1$ (цифры различаются не меньше чем на 1). Для соответствующих чисел A и A' имеем:

$$A' = b' \cdot 10^8 + \frac{1}{10}(B' - b') > b' \cdot 10^8 \geqslant (b+1) \cdot 10^8 = \\ = b \cdot 10^8 + 10^8 > b \cdot 10^8 + \frac{1}{10}(B - b) = A,$$

так как $B < 10^9$ и $\frac{1}{10}(B - b) < 10^8$.

Таким образом, если последняя цифра числа B' больше, чем у B, то $A' > A$ независимо от остальных цифр этих чисел. Для того чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т. е. $b = 9$. Если теперь B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то, учитывая неравенство $\frac{1}{10}(B' - 9) > \frac{1}{10}(B - 9)$, приходим к соотношению

$$A' = 9 \cdot 10^8 + \frac{1}{10}(B' - 9) > 9 \cdot 10^8 + \frac{1}{10}(B - 9) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (подчеркнем еще раз, что это справедливо для чисел B, оканчивающихся девяткой). Наибольшее возможное значение B вообще равно 999 999 999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим $B = 999\,999\,989$. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 18 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{\max} = 999\,999\,998$.

Для определения наименьшего числа A проводятся аналогичные рассуждения. Первая цифра A (т. е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому $b = 1$. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра — единица, то самое маленькое число, которое удовлетворяет неравенству $B \geqslant 222\,222\,222$, — это $222\,222\,231$. Но сумма цифр такого числа равна 18 и оно делится на 3 (и на 9). Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число $B = 222\,222\,241$, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 18 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min} = 122\,222\,224$.

Ответ: $A_{\min} = 122\,222\,224$, $A_{\max} = 999\,999\,998$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** πk; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $-\log_2 6 < a \leqslant -1$. **3.** $2r\sqrt{21}$ или $6r$. *Указание.* Возможны два случая расположения хорды и окружностей: в первом точка касания с окружностью O_2 лежит вне круга O_1; во втором — внутри круга O_1, и хорда AB перпендикулярна линии центров O_1O_2. **4.** $\pi/6$. *Указание.* Треугольник ASC — прямоугольный. Пусть плоскость α проходит через точку S, тогда прямая SC принадлежит α. Если провести плоскость β через прямую CD и считать, что ребра равны 1, то длина перпендикуляра, опущенного из D на α, равна $\frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}$. CD — отрезок, соединяющий D и ребро двугранного угла, $CD = 1$. Если φ — угол между α и β, то $\sin\varphi \geqslant 1/2$. **5.** $A_{\min} = 14\,444\,446$, $A_{\max} = 99\,999\,998$.

Вариант 3. **1.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** $0 < a \leqslant 1$. **3.** $5r\sqrt{3}$ или $5r\sqrt{143}/6$. *Указание.* Необходимо рассмотреть те же возможные случаи взаимного расположения прямой и центров окружностей, что и в решении задачи 3 варианта 1. **4.** $\pi/6$. *Указание.* Пусть K — середина стороны AB. В качестве α можно взять плоскость A_1KD, которая перпендикулярна AB. Если считать, что β проходит через прямую AA_1 и ребра равны 1, то AK — перпендикуляр, опущенный из A на плоскость α, $AK = 1/2$, в то время как AA_1 — отрезок, соединяющий точку A с ребром двугранного угла, $AA_1 = 1$. Если φ — угол между α и β, то $\sin\varphi \geqslant 1/2$ и $\varphi \geqslant \pi/6$. **5.** $A_{\min} = 166\,666\,667$, $A_{\max} = 999\,999\,998$.

Вариант 4. **1.** πk; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $0 \leqslant a < 1$. **3.** $r\sqrt{15}/2$ или $r\sqrt{3}$. *Указание.* Необходимо рассмотреть два случая, когда центры O_1 и O_2 окружностей лежат по одну сторону от прямой AB и по разные стороны от нее. **4.** $\pi/4$. *Указание.* Пусть плоскость α проходит через точку A и ребра равны 1. Тогда перпендикуляр A_1K, опущенный из A_1 на α, параллелен BC_1, а его длина равна $1/\sqrt{2}$. Если считать, что β проходит через прямую AA_1, то A принадлежит ребру двугранного угла, $AA_1 = 1$. Для угла φ между плоскостями α и β выполняется $\sin\varphi \geqslant A_1K/AA_1 = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi \geqslant \pi/4$. **5.** $A_{\min} = 17\,777\,779$, $A_{\max} = 99\,999\,998$.

1984

Решение варианта 1

1. Левая часть уравнения определена при всех x, для которых $0 < \cos x < \frac{9}{14}$. Из данного уравнения следует квадратное $8\cos^2 x + 14\cos x - 9 = 0$ относительно $\cos x$. Его корни равны $\frac{1}{2}$ и $-\frac{9}{4}$. Второй корень — посторонний, поэтому $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $a = 0$. Тогда знаменатель дроби постоянен, заданная функция тоже является постоянной и, следовательно, определена для всех x.

Если $a \neq 0$, то квадратный трехчлен в знаменателе не обращается в нуль в том и только том случае, когда его дискриминант отрицателен, т.е. $16a^2 - 28a < 0$. Отсюда $0 < a < \frac{7}{4}$. Объединяя оба случая, получим ответ на вопрос задачи.

Ответ: $0 \leqslant a < \frac{7}{4}$.

3. Пусть S — точка пересечения прямых AD и BC; K, L и M — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AB, AD и CD соответственно, O — ее центр. Тогда OK и OM перпендикулярны основаниям AB и CD как радиусы, проведенные в точки касания, и поскольку AB и CD параллельны, точки K, O и M лежат на одной прямой, т.е. KM — диаметр. Условию задачи

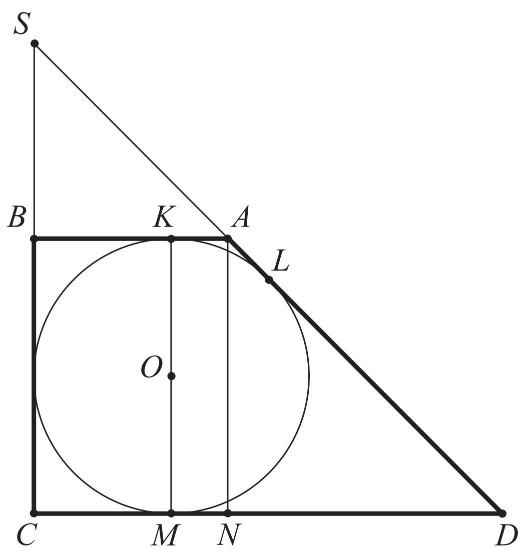

Рис. **24**

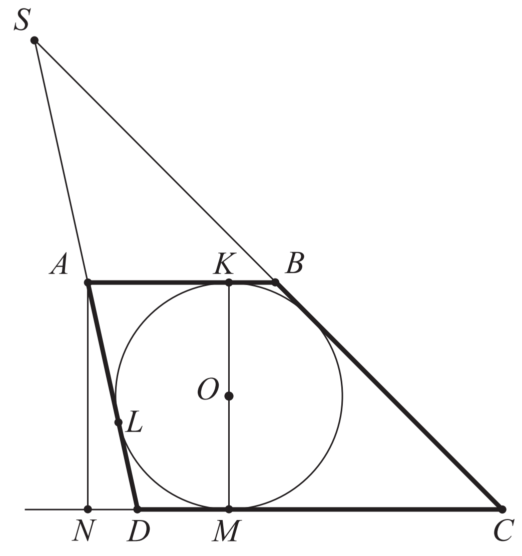

Рис. **25**

отвечают два возможных случая расположения точки L на стороне AD.

В первом случае $AL = 1$, $DL = 4$ (рис. 24). Тогда $AK = AL = 1$, $DM = DL = 4$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из точек A и D. Опустим перпендикуляр AN из точки A на прямую CD. Учитывая, что $AN \parallel KM$, получаем $NM = 1$, $DN = 3$. В прямоугольном треугольнике ADN гипотенуза $AD = 5$, катет $DN = 3$, следовательно, $AN = 4$ и $\frac{4}{5} = \cos\angle DAN$. По условию задачи косинус угла DSC тоже равен $\frac{4}{5}$, поэтому углы DAN и DSC равны, а прямая SC параллельна прямой AN. Значит, угол C трапеции прямой, и мы заключаем, что $BC = 4$, $AN = 4$.

Рассмотрим случай, когда $DL = 1$, $AL = 4$ (рис. 25). Как и раньше, длина перпендикуляра AN равна 4, $DN = 3$, $\cos\angle ADN = \frac{3}{5}$, $\sin\angle ADN = \frac{4}{5}$. Острый угол ADN является внешним для трапеции и треугольника DSC, поэтому $\angle ADN = \angle C + \angle S$. Учитывая, что $\cos\angle S = \frac{4}{5}$, находим $\sin\angle S = \frac{3}{5}$, $\sin\angle C =$

$= \sin(\angle ADN - \angle S) = \frac{7}{25}$. Остается заметить, что $AN = BC \sin \angle C$, следовательно, $BC = 100/7$.

Ответ: 4 или $\frac{100}{7}$.

4. Пусть расстояние между A и B равно S км, а скорость поезда равна v км/ч. Тогда поезд проходит расстояние от A до B по расписанию за время S/v, при движении с увеличенной скоростью — за время $\frac{S}{v+8}$, а с уменьшенной — за $\frac{S}{v-3}$. Из условий задачи вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v} = \dfrac{S}{v+8} + 2, \\ \dfrac{S}{v} = \dfrac{S}{v-3} - 1, \end{cases}$$

следствием которой является система

$$\begin{cases} 4S = v^2 + 8v, \\ 3S = v^2 - 3v. \end{cases}$$

Исключая S, приходим к квадратному уравнению $v^2 - 36v = 0$, в силу которого $v = 36$ км/ч, $S = 396$ км. Второй корень $v = 0$ противоречит смыслу исходной задачи.

Ответ: 36 км/ч, 396 км.

5. Пусть m — произвольное число из множества M. По условию $m = n^2$, где n — натуральное число. Предположим, что a — последняя цифра числа n, тогда $n = 10k + a$, k — целое. Следовательно, $m = n^2 = 100k^2 + 20ak + a^2$. Сумма $100k^2 + 20ak$ оканчивается цифрой 0 и имеет четное число десятков. Для того чтобы в числе m цифрой десятков была 1, обязательно должна быть нечетной цифра десятков числа a^2. Проверяя все значения $0 \leqslant a \leqslant 9$, убеждаемся, что это возможно только при $a = 4$ и $a = 6$. Значит, число n четное. Четным будет также и число $m = n^2$.

Оценим теперь в каждой сотне последовательно стоящих натуральных чисел количество таких чисел n, для которых $m = n^2$ имеет цифру 1 в разряде десятков. Каждое число n можно записать в виде $n = 50k + b$, где $-25 < b < 25$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Возводя в квадрат, имеем

$$m = n^2 = 2500k^2 + 100kb + b^2.$$

Сумма $2500k^2+100kb$ оканчивается двумя нулями, поэтому цифра в разряде десятков числа m совпадает с соответствующей цифрой слагаемого b^2. Из предыдущих рассуждений вытекает, что последней цифрой числа b является 4 или 6, поэтому все значения b, которые могут удовлетворять условию задачи, исчерпываются числами ± 4, ± 6, ± 14, ± 16, ± 24. Рассматривая их квадраты, убеждаемся, что цифра 1 в разряде десятков получается только для $b=\pm 4$. Следовательно, множество M содержит числа вида $m=n^2$, где $n=50k\pm 4$, k — целое.

В каждой последовательной сотне натуральных чисел (т. е. множестве натуральных чисел x, удовлетворяющих условию $100l < x \leqslant 100(l+1)$, $l=0, 1, 2, \ldots$) есть четыре числа, квадраты которых имеют цифру 1 в разряде десятков, — это $100l+4$, $100l+46$, $100l+54$ и $100l+96$. По условию задачи $10^{15} \leqslant n^2 < 10^{16}$ или $10^7 \cdot \sqrt{10} < n < 10^8$. Заметим, что $10^7 \cdot \sqrt{10} < 4 \cdot 10^7$. В промежутке между числами $4 \cdot 10^7$ и 10^8 существует $\frac{1}{100}(10^8 - 4 \cdot 10^7) = 6 \cdot 10^5$ последовательных сотен натуральных чисел. В каждой из них можно выбрать четыре числа, квадраты которых принадлежат M. Поэтому количество элементов в множестве M не меньше, чем $4 \cdot 6 \cdot 10^5 = 24 \cdot 10^5$, а это число очевидно больше 10^6.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** $-1/\sqrt{2} < a < 1/\sqrt{2}$. **3.** 40 или 40/7. **4.** 3600 шт., по 80 шт. в день. **5.** *Указание.* В каждой последовательной сотне натуральных чисел существуют четыре числа, квадраты которых имеют цифру 3 в разряде десятков. Это числа вида $100k+6$, $100k+44$, $100k+56$ и $100k+94$, где $k=0, 1, 2, \ldots$.

Вариант 3. **1.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** $a < -2/\sqrt{3}$, $a > 2/\sqrt{3}$. **3.** 6 или 12. **4.** 12 000 л, 120 мин. **5.** *Указание.* В каждой последовательной сотне натуральных чисел существуют четыре числа, квадраты которых имеют цифру 9 в разряде десятков. Это числа вида $100k+14$, $100k+36$, $100k+64$ и $100k+86$, где $k=0, 1, 2, \ldots$.

Вариант 4. **1.** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** $a < -2/\sqrt{3}$, $a > 2/\sqrt{3}$. **3.** 21/2. **4.** 12 000 м^3, 400 м^3/ч. **5.** *Указание.* В каждой последовательной сотне натуральных чисел существуют четыре числа, квадраты которых имеют цифру 5 в разряде десятков. Это числа вида $100k+16$, $100k+34$, $100k+66$ и $100k+84$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

1985

Решение варианта 1.

1. По теореме Виета имеем $x_1+x_2=5x_2=a+3$, $x_1x_2=4x_2^2=$ $=2a$. Выражая из первого уравнения $x_2=(a+3)/5$ и подставляя во второе, получаем $2a^2-13a+18=0$. Отсюда $a_1=2$, $a_2=9/2$. Как показывает проверка, оба значения удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $2;\ 9/2$.

2. Заметим, что

$$1-2\cos^2\left(5x+\tfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(10x+\tfrac{\pi}{2}\right)=\sin 10x.$$

Поэтому исходное уравнение приводится к виду $\cos 6x=\sin 10x-$ $-\sin 2x$. Преобразуя разность синусов в произведение, получаем $\cos 6x=2\sin 4x\cos 6x$, или $\cos 6x(2\sin 4x-1)=0$. Отсюда либо $\cos 6x=0$, $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$ $(k\in\mathbb{Z})$, либо $\sin 4x=\frac{1}{2}$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{24}+$ $+\frac{\pi n}{4}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Остается объединить обе серии корней.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6};\ (-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$.

3. Пусть прямые AM и BC пересекаются в точке K (рис. 26). Так как AM — биссектриса угла A и углы BKA и KAD равны, то $\angle BAK=\angle BKA$. Следовательно, треугольник ABK равнобедренный и $BK=AB$. В то же время равны треугольники CMK и AMD, поскольку равны их стороны CM и MD и прилегающие к ним углы. Поэтому $AM=MK$, BM — медиана треугольника ABK и, значит, одновременно является его высотой. Из прямоугольного треугольника ABM находим $BM^2=AB^2-AM^2=9$.

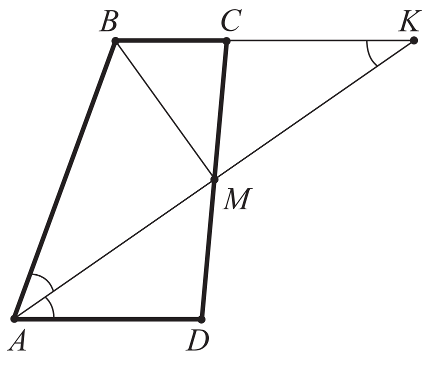

Рис. **26**

Ответ: 3.

4. Положим $z = 5^x$ и перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{9-25z}{3z^2-10z+3} \leqslant 4. \qquad (1)$$

Возможны два различных случая.

А. Пусть $3z^2-10z+3 < 0$, т. е. $1/3 < z < 3$. В данном промежутке изменения z неравенство (1) равносильно $9-25z \geqslant 4(3z^2-10z+3)$, или $4z^2-5z+1 \leqslant 0$. Решая это неравенство, находим $1/4 \leqslant z \leqslant 1$. С учетом исходного ограничения получаем промежуток $1/3 < z \leqslant 1$.

Б. Пусть теперь $3z^2-10z+3 > 0$, т. е. $z < 1/3$ или $z > 3$. Тогда неравенство (1) приводится к виду $4z^2-5z+1 \geqslant 0$. Следовательно, $z \leqslant 1/4$ или $z > 1$. С учетом ограничений пункта «Б» получаем еще два промежутка $z \leqslant 1/4$ и $z > 3$, для которых справедливо (1).

Таким образом, исходное неравенство справедливо при тех x, для которых $5^x \leqslant 1/4$, $1/3 < 5^x \leqslant 1$ или $5^x > 3$. Логарифмируя по основанию 5, заключаем, что должно выполняться одно из соотношений $x \leqslant -2\log_5 2$, $-\log_5 3 < x \leqslant 0$ или $x > \log_5 3$.

Ответ: $(-\infty,\ -2\log_5 2\,] \cup (-\log_5 3,\ 0\,] \cup (\log_5 3,\ \infty)$.

5. Пусть M и N — точки пересечения плоскости β с ребрами BD и BC тетраэдра, K — середина ребра CD, AO — высота пирамиды, опущенная из вершины A на грань BCD (рис. 27). Из условия задачи следует, что прямые MN и CD параллельны. Высота AO является общей для двух пирамид $ABMN$ и $AMNCD$, объемы которых равны по условию. Следовательно, равны площади их оснований и площадь S_1 треугольника BMN составляет половину площади S_2 основания BDC, т. е. $S_2 = 2S_1$.

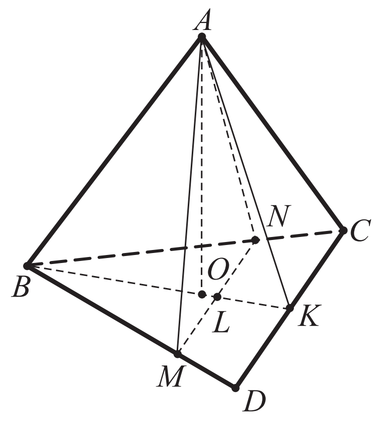

Рис. **27**

Треугольники BMN и BDC подобны. Положим $BD = x \cdot BM$, тогда $S_2 = x^2 \cdot S_1$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$. Если L — точка пересечения отрезков MN и BK, то $BL = \frac{1}{x}\,BK = \frac{1}{2}\sqrt{3/2}$. Точка O — центр треугольника BCD, поэтому $OK = \frac{1}{3} \times BK = \sqrt{3}/6$. Из прямоугольного треугольника AOK находим $AO = \sqrt{2/3}$.

Изобразим сечение пирамиды плоскостью ABK (рис. 28). AK и BK — высоты треугольников BDC и ADC, поэтому плоскость ABK перпендикулярна прямым CD и MN. Опустим перпендикуляр BP на прямую AL и заметим, что прямая BP перпендикулярна к прямым AL и MN, лежащим в плоскости β. Следовательно, BP — перпендикуляр к плоскости β, а его длина дает искомое расстояние.

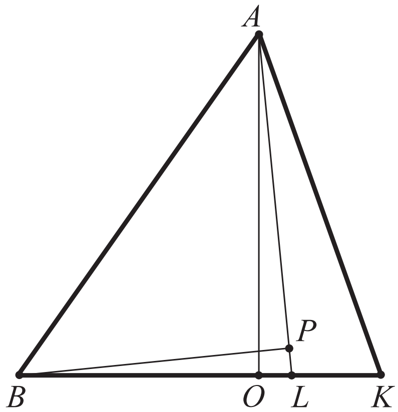

Рис. **28**

Пусть $\angle ABO = \varphi$, тогда $\sin\varphi = \frac{AO}{AB} = \sqrt{2/3}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов из треугольника ABL получаем

$$AL = \sqrt{AB^2 + BL^2 - 2AB \cdot BL\cos\varphi} = \sqrt{\frac{11}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Вычислим двумя разными способами площадь S треугольника ABL. Так как BP и AO — его высоты, то $2S = AL \cdot BP = AO \cdot BL$. Поэтому

$$BP = \frac{AO \cdot BL}{AL} = \sqrt{\frac{2}{11 - 4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(11 + 4\sqrt{2})}{89}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2(11 + 4\sqrt{2})}{89}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 3; 25/3. **2.** $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** 13/2. *Указание.* Пусть прямая, проведенная параллельно DN через точку M, пересекает прямую AD в точке L. Угол M треугольника AML прямой, отрезок AB равен половине отрезка AL. **4.** $(-\infty,\ 1 - \log_2 3\,] \cup (0,\ 1\,] \cup (\log_2 5,\ \infty)$. **5.** $\sqrt{6/5}$. *Указание.* Пусть K — точка пересечения плоскости β с ребром AA_1. Тогда $3A_1K = AA_1$, а расстояние от точки A до плоскости β равняется длине высоты AL, опущенной из вершины A на гипотенузу CK прямоугольного треугольника AKC.

Вариант 3. **1.** 1 и 4. **2.** $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** 6. *Указание.* Проведем через вершину B прямую, параллельную CD; она пересечет AM и AD в точках L и K соответственно. Треугольник ABK — равнобедренный, AL — его биссектриса и высота, следовательно, $AM \perp CD$. **4.** $(-\infty,\, -2\log_7 2\,] \cup (-\log_7 2,\, \log_7(3/2)\,] \cup$ $\cup (\log_7 3,\, \infty)$. **5.** $12/\sqrt{43}$. *Указание.* Пусть K — середина ребра B_1C_1, а плоскость β пересекает прямую BB_1 в точке M и прямую A_1K в точке S. Тогда $4B_1M = BB_1$, а расстояние от точки A_1 до плоскости β равняется длине высоты A_1P, опущенной из вершины A_1 на гипотенузу AS в прямоугольном треугольнике AA_1S.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{5}$; 5. **2.** $\frac{\pi k}{7}$; $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** 12. *Указание.* Пусть K — точка пересечения прямых AM и BC. Тогда треугольник ABK — равнобедренный, $AB = BK = 10$, а высота $BL = 2CM = 6$. **4.** $(-\infty,\, -\log_3 2\,] \cup (1 - \log_3 2,\, \log_3(5/2)\,] \cup (1,\, \infty)$. **5.** $\sqrt{2/(5 - 2\sqrt{2})}$. *Указание.* Пусть K — точка пересечения плоскости β с диагональю AC основания. Тогда $AK = 1$, и расстояние от вершины A до β равняется длине высоты AL, опущенной в треугольнике ASK из вершины A на сторону SK.

1986

Решение варианта 1

1. Используя формулы для тригонометрических функций двойного аргумента, приведем данное уравнение к виду

$$4\sin^2 x - 8\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$$

Как показывает проверка, те значения x, для которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения. Разделив его на $\cos^2 x$, приходим к квадратному уравнению $4\,\mathrm{tg}^2 x - 8\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$ относительно $\mathrm{tg}\, x$. Его корнями являются числа $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Отсюда $\mathrm{tg}\, x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$, т. е. $x_1 = \mathrm{arctg}(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}) + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\mathrm{tg}\, x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$, т. е. $x_2 = \mathrm{arctg}(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\mathrm{arctg}(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}) + \pi k$; $\mathrm{arctg}(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}) + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

2. Положим $z = 3^x$. Если три числа образуют арифметическую прогрессию, то полусумма первого и третьего равна второму из них, следовательно,

$$\log_2(z-1) + \log_2(3-z) = 2\log_4(9 + z^2 - 7z). \qquad (1)$$

Левая часть уравнения (1) определена, если $z-1 > 0$ и $3-z > 0$, т. е. $1 < z < 3$. Правая часть определена, если $z^2 - 7z + 9 > 0$; это неравенство выполняется в том случае, когда $z < \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13})$ или $z > \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13})$. Учитывая, что $1 < \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13}) < 3$, приходим к выводу: областью определения уравнения (1) является промежуток $1 < z < \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13})$.

Уравнение (1) легко приводится к виду

$$\log_2(z-1)(3-z) = \log_2(z^2 - 7z + 9).$$

Отсюда следует, что $(z-1)(3-z) = z^2 - 7z + 9$, т. е. $2z^2 - 11z + 12 = 0$. Из двух корней $z_1 = 4$ и $z_2 = \frac{3}{2}$ полученного квадратного уравнения первый не принадлежит найденной ранее области определения уравнения (1). Поэтому $z = 3^x = \frac{3}{2}$, откуда $x = 1 - \log_3 2$.

Ответ: $1 - \log_3 2$.

3. Проведем через точку C прямую, параллельную BD. Она пересечет прямую AD в точке K (рис. 29). Пусть $\angle BDA = \alpha$, тогда $\angle CKA = \alpha$, $\angle CAD = 2\alpha$. $BCKD$ — параллелограмм, поэтому $CK = BD = 4$. В треугольнике ACK $AC = 3$, $CK = 4$, а по теореме синусов $AC \sin 2\alpha = CK \sin \alpha$. Отсюда следует, что $3 \sin\alpha \cos\alpha = 2 \sin\alpha$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

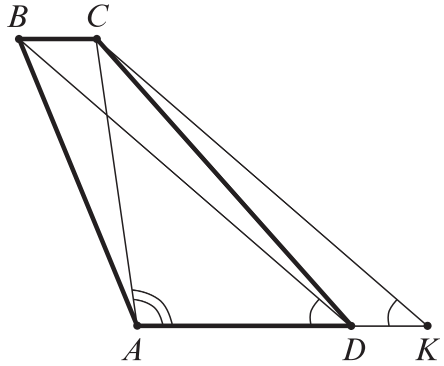

Рис. **29**

Заметим, что $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$, т. е. угол CAK — тупой, как изображено на рис. 29. Поэтому основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую AD (и тем более из вершины B), лежит вне отрезка AD. Для дальнейших рассуждений это не имеет принципиального значения, однако при других подходах к решению использование неправильного чертежа ведет к искажению окончательного результата.

Вычислим теперь $\sin\angle ACK$. Поскольку $\angle ACK = \pi - 3\alpha$, получаем $\sin\angle ACK = \sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 7\sqrt{5}/27$. Площади треугольников ABC и CDK равны, так как равны их стороны BC и DK и высоты, проведенные к этим сторонам. Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ совпадает с площадью треугольника ACK, которая равна $\frac{1}{2}\,AC\cdot CK\sin\angle ACK = 6\sin 3\alpha = \frac{14\sqrt{5}}{9}$.

Ответ: $\frac{14\sqrt{5}}{9}$.

4. Каждое из уравнений системы задает на плоскости x, y прямую линию. Если прямые пересекаются, то координаты точки пересечения определяют решение системы, поэтому для того, чтобы решений не существовало, прямые должны быть параллельны.

Известно, что прямые параллельны или совпадают, если коэффициенты при x и y одного уравнения пропорциональны соответствующим коэффициентам второго, или, другими словами, определитель системы равен нулю. Для данной системы уравнений это означает, что $\Delta = a(a+8) - 3(3a+14) = 0$, т. е. $a^2 - a - 42 = 0$. Отсюда $a_1 = -6$, $a_2 = 7$. Проверка показывает, что при $a = -6$ действительно получается система, которая не имеет решений. При $a = 7$ прямые, заданные двумя уравнениями, совпадают, и решений у системы бесконечно много. Таким образом, условию задачи удовлетворяет только значение $a = -6$.

Ответ: $a = -6$.

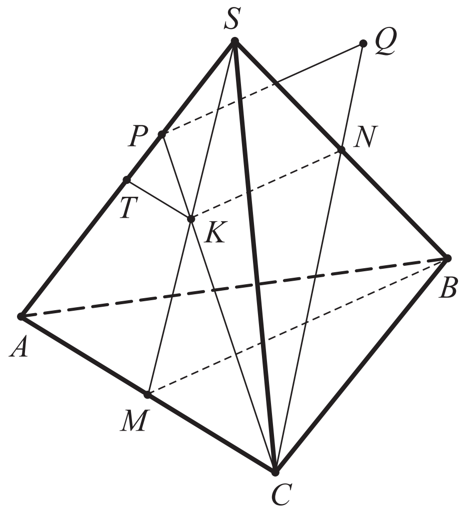

Рис. **30**

5. Проведем через прямые CN и CP плоскость α. Она пересечет ребро BS в точке N (рис. 30). По условию прямая PQ параллельна BM, поэтому BM параллельна плоскости α. Рассмотрим плоскость SMB. Так как она содержит прямую BM, то линия пересечения ее с плоскостью α параллельна BM. Пусть K — точка пересечения прямой SM и плоскости α. Тогда, поскольку $NK \parallel BM$, NK будет средней линией треугольника SMB и $NK = \frac{MB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Прямая, проведенная через K параллельно AC, пересечет ребро AS в некоторой точке T, при этом TK — средняя линия в треугольнике ASM, $TK = \frac{1}{2}\,AM = \frac{1}{4}\,AC$. Рассматривая подобные треугольники PTK и PAC, находим $PK = \frac{1}{4}\,PC$ и, значит, $PC = \frac{4}{3}\,KC$.

Заметим теперь, что прямые KN и PQ параллельны, поэтому треугольники PQC и KNC подобны. Отсюда $PQ = KN \cdot \frac{PC}{KC} = \frac{4}{3}\,KN = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\operatorname{arctg}\bigl(\frac{\sqrt{22}-5}{3}\bigr)+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\bigl(\frac{\sqrt{22}+5}{3}\bigr)+\pi k$ ($n,\, k \in \mathbb{Z}$). **2.** $\log_2 5 - 1$. **3.** $\sqrt{15}/4$. *Указание.* Если $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 2\alpha$, и тогда $\angle C = \pi - 3\alpha$. Теорема синусов, примененная к сторонам AB и BC, дает уравнение для определения α. Оказывается, что $\cos\alpha = \sqrt{3/8}$. **4.** $a = 1$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Указание.* Пусть плоскость α проведена через прямые AC и PQ, O — середина диагонали AC. Тогда α пересекает ребро DD_1 в его середине K и $PQ = \frac{2}{3}\,KO$.

Вариант 3. **1.** $\operatorname{arctg}\bigl(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\bigr)+\pi n$; $\operatorname{arctg}\bigl(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\bigr)+\pi k$ ($n,\, k \in \mathbb{Z}$). **2.** $\log_5 2$. **3.** $2\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ACD = 2\alpha$. Углы BCA и CAD треугольников ABC и ACD равны. Записывая теорему синусов для каждого из треугольников и учитывая равенство сторон AB и CD, получаем уравнение, связывающее $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$, откуда находим $\cos\alpha = \frac{5}{6}$. Если точка K лежит на AD и CK параллельна AB, то в равнобедренном треугольнике CKD $\angle KCD = \alpha$. **4.** $a = 5$. **5.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. *Указание.* Пусть плоскость α проходит через прямые BN и PQ, K — точка пересечения α с прямой SM. Тогда KN — средняя линия треугольника SMC, $PQ = \frac{4}{3}\,KN$.

Вариант 4. **1.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)+\pi n$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k$ $(n,\,k\in\mathbb{Z})$. **2.** $\log_2 3$. **3.** $\frac{15\sqrt{7}}{16}$. *Указание.* Пусть $\angle CBM=\alpha$, тогда $\angle ABM=2\alpha$. Записывая теорему синусов для треугольников ABM и MBC и учитывая, что синусы углов AMB и BMC равны, получим уравнение, связывающее $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$, из которого $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. **4.** $a=4$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. *Указание.* Проведем плоскость α через прямые A_1B и PQ, она пересечет прямую CC_1 в точке L. Тогда $CL=2CC_1=2$ и $PQ=\frac{1}{3}A_1L$.

1987

Решение варианта 1

1. Областью определения функции $y=\arcsin t$ является отрезок $-1\leqslant t\leqslant 1$, множество ее значений — промежуток $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, должно выполняться ограничение $\left|x-\frac{\pi}{3}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$. Вычисляя синусы левой и правой частей, приходим к уравнению

$$\frac{3-5\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-6\cos 2x}{5}=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right). \qquad (1)$$

Непосредственно из вида этого уравнения вытекает, что для любого его корня x левая часть не превосходит единицы по абсолютной величине, поэтому x будет принадлежать области определения левой части исходного уравнения. Учитывая, что

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=\sin x,$$

и полагая $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, преобразуем (1) к виду $12\sin^2 x-5\sin x-3=0$. Корнями этого квадратного уравнения относительно $\sin x$ являются числа $\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{3}$, поэтому (1) имеет две серии корней $x_1=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ и $x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Из этих корней нужно выбрать те, которые принадлежат промежутку $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$. Учитывая неравенства $0<\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}<\arcsin\frac{3}{4}<\frac{\pi}{2}$, получаем, что указанному промежутку принадлежат корни $\arcsin\frac{3}{4}$, $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$, $-\arcsin\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{4}$; $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$; $-\arcsin\frac{1}{3}$.

2. Положим $y = \log_2 \frac{x}{2}$, тогда $\log_2 \frac{4}{x} = 1 - y$ и данное неравенство можно записать в виде
$$\frac{1}{|1 - y\,| - 3} > \frac{1}{|y| - 1}. \qquad (2)$$

Рассмотрим различные возможные случаи.

А. Пусть $y \leqslant 0$, тогда $|y| = -y$, $|1 - y\,| = 1 - y$ и неравенство (2) запишется в виде $\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} > 0$, т. е. должно быть $\frac{1}{(y+1)(y+2)} > 0$. Это справедливо для $y < -2$ и $y > -1$. С учетом ограничения $y \leqslant 0$ получаем для случая «А» в качестве решения луч $y < -2$ и промежуток $-1 < y \leqslant 0$.

Б. Пусть $0 < y < 1$, тогда $|y| = y$, $|1 - y| = 1 - y$ и неравенство (2) приобретает вид $\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y+2} > 0$, т. е. $\frac{2y+1}{(1-y)(y+2)} > 0$. Числитель и знаменатель дроби на выделенном интервале положительны, поэтому неравенству (2) удовлетворяют все значения $0 < y < 1$.

В. Рассмотрим, наконец, случай $y \geqslant 1$. Тогда $|y| = y$, $|1 - y| = y - 1$ и (2) запишется в виде $\frac{1}{y-4} > \frac{1}{y-1}$, т. е. $\frac{3}{(y-4)(y-1)} > 0$. Откуда получаем $y < 1$ или $y > 4$, а с учетом исходного ограничения $y \geqslant 1$ остается луч $y > 4$.

Объединяя все полученные результаты, заключаем, что решением неравенства (2) является множество $y < -2$, $-1 < y < 1$, $y > 4$. Вспоминая, что $y = \log_2 \frac{x}{2}$, находим промежутки изменения x, которые образуют решения исходного неравенства.

Ответ: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup (1,\ 4) \cup (32,\ \infty)$.

3. Пусть O — центр окружности (рис. 31). Радиус OM и касательная AM перпендикулярны, $\angle AMK = \frac{\pi}{3}$ по условию, поэтому угол KMO при основании равнобедренного треугольника OMK равен 30° и $MK = R\sqrt{3}$.

Треугольники MAL и MAK подобны, поскольку угол A у них общий, а углы AML и MKA равны, так как и тот и другой измеряются

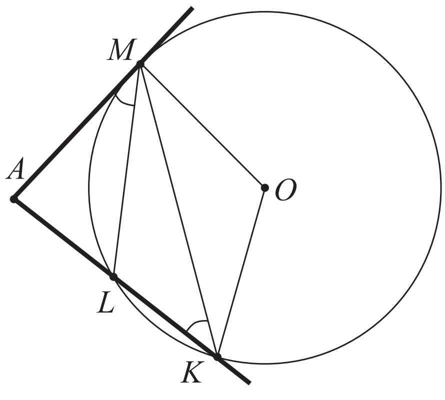

Рис. **31**

половиной дуги ML окружности. Поэтому $\frac{AM}{AL} = \frac{AK}{AM}$, т. е. $AM^2 = AL \cdot AK$ (мы повторили доказательство теоремы о касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки).

Пусть $AM = x$. Учитывая, что $AL = \frac{1}{2}AK$, находим $AK^2 = 2AM^2 = 2x^2$. По теореме косинусов для треугольника AMK имеем $AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2MK \cdot AM \cos 60^\circ$, отсюда получается уравнение $x^2 + R\sqrt{3}\,x - 3R^2 = 0$ для определения x. Решая его и учитывая, что по смыслу задачи $x > 0$, находим $AM = (\sqrt{15} - \sqrt{3})R/2$. Следовательно, площадь треугольника AMK равна $\frac{1}{2}AM \cdot AK \times \sin 30^\circ = \frac{3}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3})R^2$.

Ответ: $\frac{3}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3})R^2$.

4. Стандартный путь решения — подставить в данную систему $y = 0$, найти решения каждого неравенства и их общую часть, а потом определить, для каких a она содержит промежуток $[-2, -1]$. Мы поступим иначе, рассмотрев отдельно каждое из неравенств системы.

Первому неравенству удовлетворяют те точки плоскости, которые лежат выше параболы $y = x^2 + (a + 4)x + 4a$ или на ней, второму — точки, лежащие ниже прямой $y = -3x + 2a + 4$ или на ней. Пересечение этих двух множеств дает множество M (рис. 32).

Если концы отрезка $[-2, -1]$ оси Ox, т. е. точки с координатами $(-2; 0)$ и $(-1; 0)$, принадлежат M, то весь отрезок принадлежит этому множеству. Подставив координаты этих точек в систему, получаем, что должны выполняться четыре неравенства: $1 - (a + 4) + 4a \leqslant 0$, $-3 - (2a + 4) \leqslant 0$, $4 - 2(a + 4) + 4a \leqslant 0$ и $-6 - (2a + 4) \leqslant 0$. Решая каждое из них, находим, что все вместе они справедливы для промежутка $-7/2 \leqslant a \leqslant 1$, что и дает решение задачи.

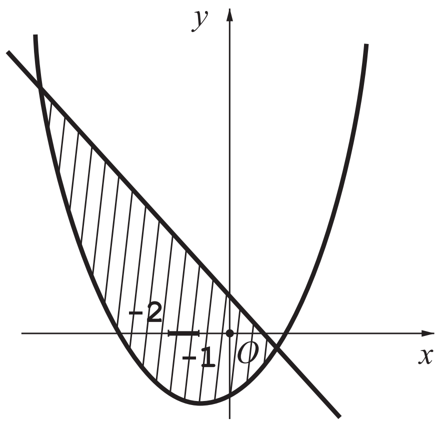

Рис. **32**

Ответ: $[-7/2, 1]$.

5. *Первое решение.* В сечении куба плоскостью ADC_1B_1 получается прямоугольник со сторонами $AD = 1$, $AB_1 = \sqrt{2}$. Центр куба O — это точка пересечения диагоналей AC_1 и DB_1. Перпендикуляр OK, опущенный из точки O на плоскость α, параллелен MB_1, поэтому точка K лежит в плоскости ADC_1B_1. Пересечение α и плоскости ADC_1B_1 — прямая, перпендикулярная B_1M и проходящая через N (рис. 33).

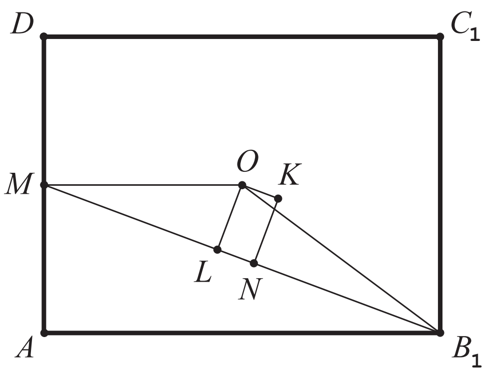

Рис. **33**

Опустим перпендикуляр OL на прямую MB_1. Тогда $NLOK$ будет прямоугольником, а длина отрезка NL — искомым расстоянием. В треугольнике MB_1O: $MB_1^2 = AB_1^2 + AM^2 = \frac{9}{4}$, $MO = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $OB_1 = \frac{1}{2}DB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $ML = x$, тогда $B_1L = \frac{3}{2} - x$. В прямоугольных треугольниках MOL и B_1OL выполняются равенства $OL^2 = MO^2 - ML^2$ и $OL^2 = OB_1^2 - B_1L^2$, отсюда $\frac{1}{2} - x^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{2} - x\right)^2$, т. е. $x = \frac{2}{3}$. Точка N — середина MB_1, поэтому $MN = \frac{3}{4}$ и $NL = MN - ML = \frac{1}{12}$.

Второе решение. Введем систему координат, выбрав в качестве начала точку A и направив оси x, y и z вдоль лучей AB, AD и AA_1. Тогда точки, заданные в условии, имеют координаты $M(0;\ 1/2;\ 0)$, $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $N(1/2;\ 1/4;\ 1/2)$, а центр куба — $O(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$. Определив координаты вектора $MB_1 = (1;\ -1/2;\ 1)$, запишем уравнение плоскости α, проходящей через точку N перпендикулярно MB_1:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(y - \tfrac{1}{4}\right) + \left(z - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

или $2x - y + 2z - 7/4 = 0$. Расстояние h от точки с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по формуле

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

В данном случае величина h равна $\frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi}{3}$; $\arccos\frac{2}{3}$. **2.** $\left(\frac{1}{8},\, \frac{1}{2}\right) \cup [\,1,\, 2) \cup (2,\, \infty)$. **3.** $\frac{R^2}{2}\times$ $\times(1+\sqrt{3})$. *Указание.* Пусть O — центр окружности, тогда $\angle BOC =$ $= 90^\circ$ и $BC = R\sqrt{2}$. Далее, используя соотношение $AB^2 = AC \cdot AD$ для касательной и отрезков секущей и теорему косинусов, находим $AB = R\,(1+\sqrt{3})$. **4.** $[\,0,\, 3\,]$. **5.** $\sqrt{2}/4$.

Вариант 3. **1.** $-\arccos\frac{7}{8}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\arccos\frac{7}{8}$. **2.** $\left(0,\, \frac{1}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(2,\, 4)$. **3.** $(\sqrt{3}-1)R^2/2$. **4.** $[-2,\, -1\,]$. **5.** $4/\sqrt{10}$.

Вариант 4. **1.** $-\frac{\pi}{6}$; $-\arcsin\frac{3}{4}$; $\arcsin\frac{3}{4}-\pi$. **2.** $\left(\frac{1}{16},\, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\,\frac{1}{2},\, 1\right)\cup$ $\cup(1,\, \infty)$. **3.** $3(\sqrt{15}+\sqrt{3}\,)R^2/8$. *Указание.* Если O — центр окружности, то $\angle BOC = 120^\circ$, поэтому $BC = R\sqrt{3}$. Используя теорему косинусов и соотношение $AB^2 = AD \cdot AC$ для касательной и отрезков секущей, находим $AB = (\sqrt{15}+\sqrt{3}\,)R/2$. **4.** $[-2,\, 1/2\,]$. **5.** $\sqrt{6}/4$.

1988

Решение варианта 1.1

1. Проведем через точку $M(2;\, 4)$ прямую, перпендикулярную прямой $2x+y=3$. Вектор $\mathbf{n} = (2; 1)$ перпендикулярен этой прямой, а $\mathbf{m} = (1;\, -2)$ — параллелен, так как $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$. Уравнение прямой, проведенной через точку M перпендикулярно $\mathbf{m}$, имеет вид $(x-2)-2(y-4) = 0$, т. е. $2y - x = 6$. Объединяя исходное и полученное уравнения в систему, находим точку $N(0;\, 3)$ пересечения прямых. Если точки K и M симметричны, то $KN = -MN$. Значит, K имеет координаты $(-2;\, 2)$.

Ответ: $(-2;\, 2)$.

2. Левая часть уравнения определена, когда $x+2 > 0$ (и тогда $x+3 > 1$), $x+2 \neq 1$ и все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны. Логарифм по основанию 2 равен 1, отсюда логарифм по основанию $x+3$ равен 2, поэтому из исходного уравнения получаем

$$11x^2 + 46x + 48 = (x+3)^2. \qquad (1)$$

Для любого корня x уравнения (1), удовлетворяющего условиям $x > -2$ и $x \neq -1$, выражение $11x^2 + 46x + 48$ положительно. Значит, x будет принадлежать области определения исходного уравнения. Корнями (1) являются $-2 + \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $-2 - \frac{1}{\sqrt{10}}$. Условиям $x > -2$, $x \neq -1$ удовлетворяет только первый из них.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}} - 2$.

3. Из условия задачи следует, что угол ABC тупой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, L и K — соответственно точки их касания с прямой AB (рис. 34). Прямые O_1L и O_2K перпендикулярны AB. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1M на прямую KO_2. В прямоугольном треугольнике O_2MO_1: $O_1O_2 = 4$, $O_2M = 2$, поэтому $KL = O_1M = 2\sqrt{3}$.

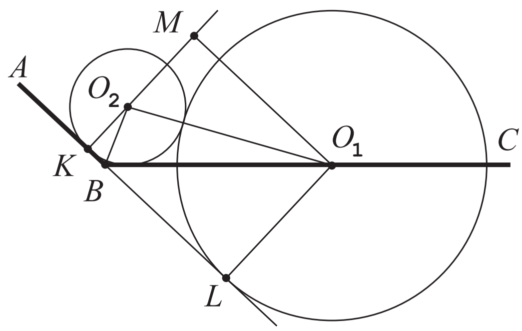

Рис. **34**

Положим $\angle KBO_2 = \alpha$. Так как BO_2 — биссектриса угла ABC, то $\angle ABC$ равен 2α, а $\angle O_1BL$ равен $\pi - 2\alpha$. Заметим, что $BK = O_2K \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$, $BL = O_1L \operatorname{ctg}(\pi - 2\alpha) = -3\operatorname{ctg}2\alpha$. Учитывая, что $KL = BK + BL$, получаем уравнение $\operatorname{ctg}\alpha - 3\operatorname{ctg}2\alpha = 2\sqrt{3}$. Выражая в нем $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, приходим к квадратному уравнению $3\operatorname{tg}^2\alpha - 4\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$ относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Из двух его корней выбираем положительный, поскольку $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и получаем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}(\sqrt{15} + 2\sqrt{3})$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$, $\angle ABC = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Для того, чтобы уравнение имело смысл, должны выполняться условия $\left|\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cos x\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x\right| \leqslant 1$. Запишем данное уравнение в виде

$$\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cos x\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x\right) \qquad (1)$$

и заметим, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos(\arccos a) = a$, $\sin(\arcsin b) = b$. Воспользуемся этими соотношениями и, вычислив синус от левой и правой частей (1), получим $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cos x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x$, т. е. $\cos x = \sin x$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Проверим найденные значения. Если $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, то $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x_1 = (2 + \pi\sqrt{2})/4 > 1$, следовательно, эта часть найденных корней не входит в область определения исходного уравнения. Для серии $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ выполнены неравенства $-1 < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x_2 = (2 - \pi\sqrt{2})/4 < 0$, поэтому x_2 входит в область определения и является решением задачи.

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5. Опустим из точки S перпендикуляры: SK — на ребро AB и SL — на плоскость основания $ABCD$ (рис. 35). Все стороны треугольника SAB известны, поэтому длина SK определяется однозначно и не зависит от выбора x и y. Основание пирамиды фиксировано, поэтому объем достигает наибольшего значения, если максимальна высота SL пирамиды. Но если точки L и K не совпадают, то в прямоугольном треугольнике SLK катет SL меньше гипотенузы SK. Следовательно, объем пирамиды будет наибольшим, если SK — высота пирамиды, т. е. если грани ASB и $ABCD$ перпендикулярны (рис. 36).

Треугольник ABS прямоугольный, так как $AB^2 = AS^2 + BS^2$. После элементарных вычислений получаем $SK = 12/5$, $AK = 9/5$, $BK = 16/5$. Пусть SK — высота пирамиды. Тогда из прямоугольных треугольников BCK и SCK, ADK и SKD находим $x^2 = SC^2 =$

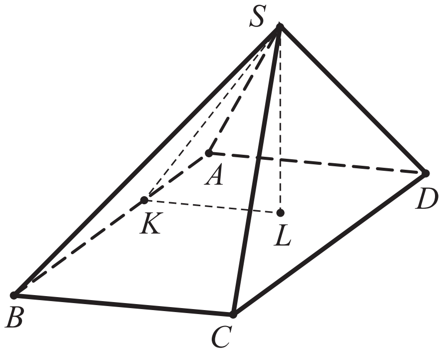

Рис. **35**

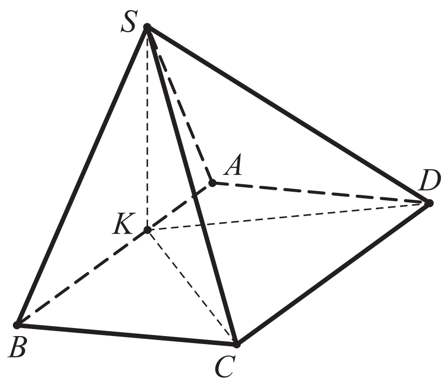

Рис. **36**

$= SK^2 + BK^2 + BC^2 = 20$, $y^2 = SD^2 = SK^2 + AK^2 + AD^2 = 13$. Площадь основания равна 10, высота 12/5, поэтому наибольший возможный объем $V_{\max}$ пирамиды равен 8.

Ответ: $x = 2\sqrt{5}$, $y = \sqrt{13}$, $V_{\max} = 8$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** (2; −1) **2.** $\dfrac{\sqrt{35}-5}{10}$. **3.** $\pi + \arcsin\frac{3}{7} - \arcsin\frac{5}{7}$ $(= 2\operatorname{arctg}(\sqrt{10}+\sqrt{6}))$. *Указание.* Пусть M — точка касания окружности O_2 с прямой AB, O_1L — перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на прямую MO_2. Угол BO_1L прямоугольной трапеции MBO_1L равен разности углов BO_1O_2 и LO_1O_2. **4.** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **5.** $x = \sqrt{46}$, $y = 3\sqrt{2}$, $V_{\max} = 4\sqrt{5}$. *Указание.* Объем пирамиды максимален, если высота SK треугольника SAB перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.

Вариант 1.3. **1.** (−1; −2) **2.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{10})$. **3.** $\arcsin\dfrac{6\sqrt{6}+4}{25}$ $(= 2\operatorname{arctg}(\sqrt{6}-2))$. *Указание.* Пусть M и N — точки касания окружностей O_1 и O_2 с прямой AB. Тогда $MN = 2\sqrt{6}$ и, выражая MN как разность катетов BN и BM прямоугольных треугольников BMO_1 и BNO_2, получим уравнение, связывающее $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle ABC$. **4.** $-\operatorname{arctg}\frac{6}{\pi} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **5.** $x = \sqrt{113}/3$, $V_{\max} = 16/9$.

Вариант 1.4. **1.** (2; −3). **2.** $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-5)$. *Указание.* Исходное уравнение приводится к кубическому, один из корней которого равен −3. **3.** $\arcsin\dfrac{6\sqrt{6}-4}{25}$ $\left(= 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$. *Указание.* Пусть N — точка касания окружности O_1 с прямой AB. Тогда угол BO_1N находится как сумма углов $\alpha = \angle BO_1O_2$ и $\beta = \angle O_2O_1N$, причем $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. **4.** $2\pi n - \arccos\frac{1}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. **5.** $x = \sqrt{66}/4$, $V_{\max} = 5/16$.

Решение варианта 2.1

1. Положим $z = 7^x$, $t = 4^y$, тогда система уравнений запишется в виде

$$z^2 + 4t^2 = 85, \quad z + t = 5.$$

Выражая из второго уравнения $z = 5 - t$ и подставляя в первое, находим $t_1 = 1 + \sqrt{13}$, $t_2 = 1 - \sqrt{13}$. Второй корень посторонний, так как должно быть $t = 4^y > 0$. Отсюда $z = 4 - \sqrt{13}$ и, следовательно, $x = \log_7(4 - \sqrt{13}\,)$, $y = \log_4(1 + \sqrt{13}\,)$.

Ответ: $(\log_7(4 - \sqrt{13}\,); \log_4(1 + \sqrt{13}\,))$.

2. Левая часть уравнения определена, если $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, т. е. $x \neq 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Умножая уравнение на $\sin\frac{x}{2}$ и используя формулу синуса двойного аргумента, приводим его к виду

$$2\sin x\cos x - \frac{4}{5}\cos x = \frac{5}{2}\sin x - 1.$$

Отсюда $\left(\sin x - \frac{2}{5}\right)\left(\cos x - \frac{5}{4}\right) = 0$. Второй сомножитель не может быть равным 0, так как $|\cos x| \leqslant 1$. Следовательно, $\sin x = \frac{2}{5}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{5} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. В силу неравенств $0 < \arcsin\frac{2}{5} < \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ заданному промежутку $\left[\,\frac{5\pi}{6}, 2\pi\,\right]$ принадлежит единственный корень $x = \pi - \arcsin\frac{2}{5}$ полученной серии.

Ответ: $\pi - \arcsin\frac{2}{5}$.

3. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника (рис. 37). Она делит медианы в отношении $2:1$, считая от вершин A и C, поэтому $CO = \frac{2}{3}CM$, $AO = \frac{2}{3}AN$ и $AO - CO = 2$. Если $CO = x$, то $AO = x + 2$. По условию задачи один из двух углов, CON или COA, равен $\arccos\frac{2}{3}$. В любом случае $\sin\angle CON = \sin\angle COA = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}AO\cdot CO\sin\angle COA$, т. е. $\frac{\sqrt{5}}{6}(x+2)x$. С другой стороны, она составляет $1/3$ площади всего данного треугольника ABC, т. е. $8\sqrt{5}$. Отсюда следует уравнение $x^2+2x-48 = 0$ для определения x. Учитывая, что по смыслу задачи $x > 0$, находим $CO = x = 6$, тогда $AO = 8$, $ON = 4$, $OM = 3$.

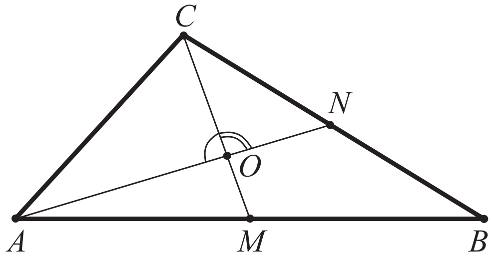

Рис. **37**

Рассмотрим теперь два возможных случая. Пусть в первом из них $\angle CON = \arccos\frac{2}{3}$, тогда $\cos\angle CON = \cos\angle AOM = \frac{2}{3}$, $\cos\angle AOC = -\frac{2}{3}$. По теореме косинусов из треугольников AOC, CON и AOM находим $AC = 2\sqrt{41}$, $AB = 2AM = 2\sqrt{41}$, $BC = 2CN = 4\sqrt{5}$.

Получившийся равнобедренный треугольник является остроугольным, так как $AC^2 + AB^2 > BC^2$, и поэтому не удовлетворяет условиям задачи.

Во втором случае предположим, что $\angle AOC = \arccos\frac{2}{3}$, тогда $\cos\angle AOC = \frac{2}{3}$, $\cos\angle CON = \cos\angle AOM = -\frac{2}{3}$. Аналогичным образом находим $AC = 6$, $AB = 2\sqrt{105}$, $BC = 4\sqrt{21}$. Получившийся треугольник является тупоугольным, так как $AB^2 > BC^2 + AC^2$, и поэтому дает решение задачи.

Ответ: $AC = 6$, $AB = 2\sqrt{105}$, $BC = 4\sqrt{21}$.

4. Если $a = 0$, то уравнение приобретает вид $3x - 3 = 0$. Его единственный корень $x = 1$ является целым, поэтому $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \neq 0$. Запишем данное квадратное уравнение в виде $x^2 + \frac{3}{a}x + \left(2a - \frac{3}{a}\right) = 0$. Если все корни уравнения целые, то из теоремы Виета следует, что будут целыми коэффициенты $\frac{3}{a}$, $\left(2a - \frac{3}{a}\right)$, а значит, и их сумма $2a$. Таким образом, $a = \frac{m}{2}$, где m — целое число.

Поскольку $\frac{3}{a} = \frac{6}{m}$ — целое, то число m обязано быть делителем 6. Отсюда следует, что m может принимать значения только из множества ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Проверяя все эти значения, находим, что только при $m = -1$ и $m = 3$ все корни квадратного уравнения действительно будут целыми. Следовательно, значения $a = -\frac{1}{2}$ и $a = \frac{3}{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 0; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$.

5. Пусть плоскость α проходит через прямую MN, параллельная ей плоскость β — через прямую KL. Рассмотрим плоскость MNK (рис. 38). Плоскость α пересекает ее по прямой MN, β — по прямой l, проходящей через точку K и параллельной MN. Если точка T — середина отрезка A_1C_1, то l пере-

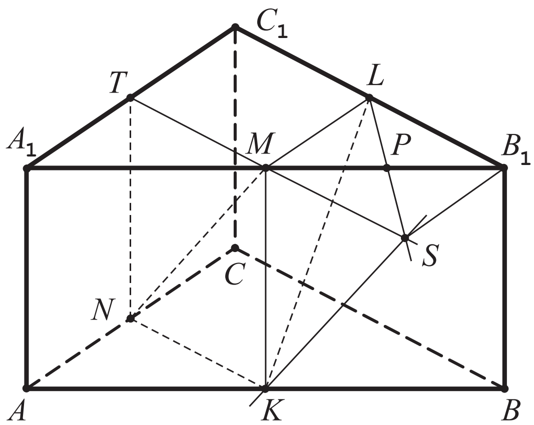

Рис. **38**

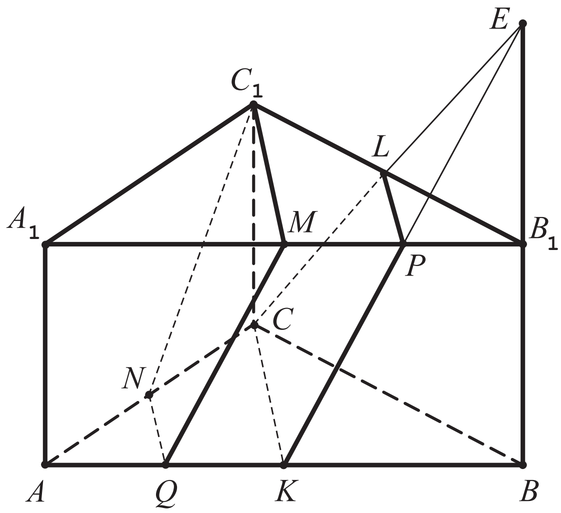

Рис. **39**

секает прямую TM в точке S такой, что $SM = NK = TM = 1$. Точка S лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, прямая ST параллельна B_1C_1, все стороны четырехугольника $SMLB_1$ равны 1, поэтому он является ромбом. Отсюда следует, что его диагонали LS и B_1M пересекаются в точке P — середине отрезка B_1M.

Плоскость β пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой SL, поэтому она пересекает ребро A_1B_1 в точке P. Тогда α проходит через прямую C_1M, параллельную LP. Нижнее основание ABC пересекается с β по прямой KC, а с α — по прямой NQ, где Q — середина отрезка AK (рис. 39).

Часть данной призмы, заключенная между α и β, получается, если отделить от нее две равных усеченных пирамиды $CKBLPB_1$ и A_1C_1MANQ. Поскольку $B_1P = BK/2$, то прямые KP и BB_1 пересекаются в точке E такой, что $BE = 2BB_1 = 2$. Объем усеченной пирамиды $CKBLPB_1$ можно вычислить как разность объемов пирамид $ECKB$ и $ELPB_1$. Высота первой $BE = 2$, площадь ее основания CKB составляет $\sqrt{3}/2$, поэтому объем $ECKB$ равен $\sqrt{3}/3$. Объем второй пирамиды $ELPB_1$ в 8 раз меньше. Отсюда следует, что объем каждой из двух усеченных пирамид равен $7\sqrt{3}/24$. Учитывая, что объем всей призмы $\sqrt{3}$, получим, что объем части, заключенной между плоскостями α и β, составляет $\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $5\sqrt{3}/12$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $(\log_5(\sqrt{6}+3); \log_3(\sqrt{6}-1))$. **2.** $\pi - \arcsin\frac{7}{10}$. **3.** $AB = 2\sqrt{58}$, $BC = 2\sqrt{43}$, $AC = 4$. **4.** 0; 1; $-\frac{3}{2}$; -3. **5.** $5/12$.

Указание. Данные плоскости проходят через диагонали B_1D_1 и BD куба.

Вариант 2.3. **1.** $(\log_3(5-\sqrt{21}\,);\ \log_5(3+\sqrt{21}\,))$. **2.** $\pi - \arcsin\frac{4}{5}$. **3.** $AB = 8\sqrt{2}$, $AC = BC = 2\sqrt{17}$ или $BC = 8\sqrt{2}$; $AC = AB = 2\sqrt{17}$ **4.** $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$. **5.** $\sqrt{14}/18$. *Указание.* Пусть P и Q выбраны на ребре AB так, что $AP = PQ = QB$. Заданные в условии плоскости — это SKP и CLQ, они перпендикулярны основанию ABC, так как SK — высота пирамиды.

Вариант 2.4. **1.** $\left(\log_3\frac{4-\sqrt{13}}{3};\ \log_2\frac{1+2\sqrt{13}}{6}\right)$. **2.** $2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **3.** $AB = AC = 2\sqrt{10}$, $BC = 4$. *Указание.* Медианы AN и CM пересекаются под углом 45°. **4.** $1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}$. **5.** $26\sqrt{2}/81$. *Указание.* Заданные в условии плоскости параллельны прямым AB и CD.

1989

Решение варианта 1

1. Пусть скорый поезд находился в пути t_1 часов, а товарный — t_2 часов. Если через S обозначить расстояние между А и Б, то скорости поездов будут равны S/t_1 и S/t_2 соответственно. Поскольку они встретились через $\frac{16}{3}$ часа, то $(S/t_1 + S/t_2)\,\frac{16}{3} = S$. Сокращая на S, получаем $t_1t_2 = \frac{16}{3}\,(t_1 + t_2)$. Добавив к этому уравнению очевидное соотношение $t_2 = t_1 + 8$, получим систему, которая легко сводится к квадратному уравнению $3t_1^2 - 8t_1 - 128 = 0$ с корнями 8 и $-\frac{16}{3}$. Отрицательный корень противоречит смыслу задачи, поэтому $t_1 = 8$, $t_2 = 16$.

Ответ: 8 часов и 16 часов.

2. Преобразуем данное уравнение по формулам тангенса разности и тангенса двойного аргумента к следующему виду:

$$2^{\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}} = \frac{6\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + 5. \qquad (1)$$

Полученное уравнение, вообще говоря, не равносильно исходному: при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ уравнение (1) не имеет смысла, а исходное — имеет. Тем не менее, легко проверяется, что эти значения не являются корнями исходного уравнения, следовательно, переход к (1) не приведет к потере решений.

Умножим теперь (1) на $1-\operatorname{tg}^2 x$. В результате придем к квадратному уравнению $7\operatorname{tg}^2 x - 10\operatorname{tg} x - 3 = 0$, в силу которого $\operatorname{tg} x$ равен либо $\frac{5+\sqrt{46}}{7}$, либо $\frac{5-\sqrt{46}}{7}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5+\sqrt{46}}{7} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{5-\sqrt{46}}{7} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

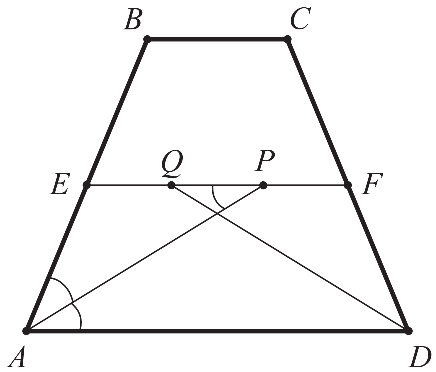

Рис. **40**

3. Так как EF — средняя линия трапеции (рис. 40), то $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = 6$, $EQ = PQ = PF = 2$. Углы APE и PAD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD, EF и секущей AP. Но тогда равны углы APE и PAE, следовательно, треугольник APE равнобедренный и $AE = PE = 4$. Аналогично $DF = FQ = 4$. Таким образом, исходная трапеция является равнобочной, а квадрат ее высоты по теореме Пифагора равен $AB^2 - \frac{1}{4}(AD - BC)^2 = 55$. Искомая площадь есть $EF \cdot \sqrt{55} = 6\sqrt{55}$.

Ответ: $6\sqrt{55}$.

4. Перепишем исходное уравнение в виде $|a-2x| - |x+3| = -1$ и рассмотрим функцию $f(x) = |a-2x| - |x+3|$. Нетрудно понять, что график этой функции — трехзвенная ломаная с вершинами в точках $(-3;\ |a+6|)$ и $(a/2;\ -|3+a/2\,|)$. Минимальное значение, равное $-|3+a/2\,|$, функция принимает в точке $x = a/2$; на множестве $(-\infty,\ a/2)$ функция $f(x)$ монотонно убывает, а на множестве $(a/2,\ \infty)$ — монотонно возрастает. Следовательно, ее график имеет единственную общую точку с прямой $y = -1$ тогда и только тогда, когда $|3+a/2\,| = 1$. Решая полученное уравнение относительно параметра a, находим два возможных значения $a_1 = -4$ и $a_2 = -8$.

Ответ: $a_1 = -4$, $a_2 = -8$.

5. Пусть для определенности длина ребра куба равна 1. Обозначим через E и F точки пересечения данной плоскости с прямыми AB и $A'B$ соответственно. Опустим перпендикуляр BO на плоскость $CB'E$ и через G обозначим пересечение плоскости BOB' с линией CE. Понятно, что OF — проекция прямой $A'B$ на плоскость $CB'E$, поэтому угол OFB равен $60°$ (рис. 41).

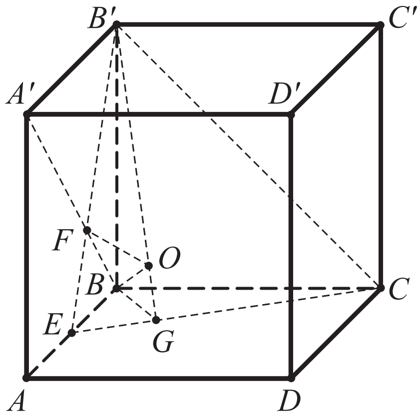

Рис. **41**

Положим теперь $BE = x$ и выразим через x длину отрезка OB. В силу подобия треугольников FBE и $A'B'F$ имеем

$$x = \frac{BE}{A'B'} = \frac{BF}{A'F} = \frac{BF}{\sqrt{2} - BF},$$

следовательно, $BF = \frac{x\sqrt{2}}{x+1}$ и $OB = BF \sin 60° = \frac{x\sqrt{6}}{2(x+1)}$. С другой стороны, BG — высота в прямоугольном треугольнике CBE, поэтому

$$BG = \frac{BE \cdot BC}{CE} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Аналогично, OB — высота в треугольнике $BB'G$, значит

$$OB = \frac{BB' \cdot BG}{B'G} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Приравнивая найденные значения OB, получаем уравнение

$$\frac{x\sqrt{6}}{2(x+1)} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

которое легко приводится к квадратному: $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Единственным корнем этого уравнения является $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1 : 1.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 20 часов и 30 часов. **2.** $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) + \pi k$; $\operatorname{arctg}(3 - 2\sqrt{2}) + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** 24. *Указание.* Нетрудно показать, что $PD = \frac{8}{10}CD$. Опустим перпендикуляр CQ на AD. Так как трапеция равнобочная, то $QD = 2$, а из подобия треугольников APD и CQD следует, что $AD : PD = CD : QD$. Подставив сюда уже известные значения AD, QD и выразив PD через CD, найдем CD. **4.** $a_1 = 2$, $a_2 = -4$. **5.** $1 : 1$. *Указание.* Достроим пирамиду до куба с основанием $ABCD$. С точностью до обозначений получится задача из варианта 1.

Вариант 3. **1.** 3 часа. **2.** $\operatorname{arctg} \frac{8+\sqrt{43}}{7} + \pi k$; $\operatorname{arctg} \frac{8-\sqrt{43}}{7} + \pi n$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $3\sqrt{7}$. *Указание.* Так как углы EAP и EPA равны, то треугольник APE равнобедренный, поэтому $EP = AE = 2$. Аналогично, $FC = FQ$. Но $EP = FQ$, следовательно, $AE = FC$ и $BC = AB = 4$. Теперь легко найти площадь треугольника ABC. **4.** $a_1 = 4$ и $a_2 = -12$. **5.** $1 : 2$. *Указание.* Достроим призму до куба с основанием $ABB'A'$. В результате получится модификация задачи из варианта 1.

Вариант 4. **1.** 24 минуты. **2.** $\operatorname{arctg} \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \pi k$; $\operatorname{arctg} \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi n$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $12\sqrt{15}$. *Указание.* Легко показать, что $CH = \frac{3}{4} BC$. Пусть D — проекция B на AC. В силу подобия треугольников ACH и BCD имеем $AC : CH = BC : CD$. Подставляя сюда известные значения AC и CD, а также выражая CH через BC, получим равенство $BC^2 = 96$. Теперь легко найти искомую площадь. **4.** $a_1 = 3/2$, $a_2 = -9/2$. **5.** $1 : 2$. *Указание.* Достроим треугольник ABC до квадрата $ABCD$, а затем рассмотрим куб с основанием $ABCD$ и одной из вершин, равной S. В результате получится одна из модификаций соответствующей задачи из варианта 1.

1990

Решение варианта 1

1. Логарифмируя первое уравнение по основанию 2 и учитывая, что $112 = 2^4 \cdot 7$, приведем систему к виду

$$\begin{cases} x + y\log_2 7 = 4 + \log_2 7, \\ 2x - 7y = 1. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая второе, получим

$$y(2\log_2 7 + 7) = 2\log_2 7 + 7,$$

откуда $y = 1$ и, следовательно, $x = 4$.

Ответ: $(4; 1)$.

2. Используя тождества $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, приведем данное уравнение к квадратному относительно $\cos x$: $12\cos^2 x - 13\cos x - 4 = 0$. Его корнями являются числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{1}{4}$. Очевидно, что имеет смысл рассматривать только второй корень, поэтому $\cos x = -\frac{1}{4}$, $x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Поскольку выполняются неравенства $0 < \arccos(-\frac{1}{4}) < \pi$, а все остальные значения x лежат вне промежутка $(0, \pi)$, то число $\arccos(-\frac{1}{4})$ является наименьшим положительным корнем исходного уравнения.

Ответ: $\arccos(-\frac{1}{4})$.

3. Найдем отрезки AH и BH. Пусть $AH = x$, тогда $BH = 14 - x$. По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников ACH и BCH (рис. 42) имеем: $AC^2 - AH^2 = CH^2 = BC^2 - BH^2$, т. е. $15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$. Отсюда $x = 9$ и, значит, $AH = 9$, $BH = 5$.

Рассматривая подобные треугольники HBM и ABC $(HM \parallel AC)$, определим $BM = BC \cdot \frac{BH}{AB} = \frac{65}{14}$. Четырехугольник $CNHM$ является параллелограммом, поэтому $NH = CM = CB - MB = \frac{117}{14}$. Рассмотрим еще одну пару подобных треугольников BDM и HDN. Пусть $BD = y$, тогда $HD = 5 + y$. Учитывая, что $\frac{BD}{HD} = \frac{BM}{HN}$, получаем уравнение $117y = 65(y + 5)$ относительно y. Отсюда легко найти искомую длину отрезка BD.

Ответ: $\frac{25}{4}$.

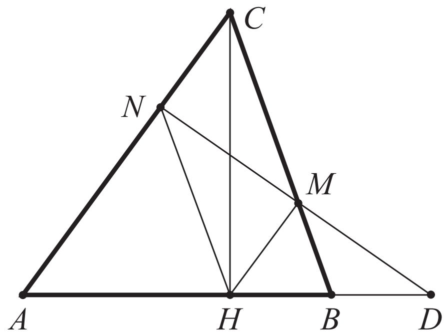

Рис. **42**

4. Заметим, что $x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ при всех значениях x. Далее рассмотрим два случая.

А. Пусть $\log_3\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) > 0$, т. е. $x^2 + x + \frac{1}{2} > 1$, и, значит, $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$.

Для таких значений x исходное неравенство справедливо, если $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, иными словами, $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$. Учитывая, что $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < 1$, находим пересечение двух получившихся множеств: $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup [1, \infty)$.

Б. Пусть $\log_3\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) < 0$, т.е. $x^2 + x + \frac{1}{2} < 1$, и, значит, $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. В этом случае исходное неравенство справедливо, если $\frac{x-1}{x+1} \leqslant 0$, или при $x \in (-1, 1]$, а общей частью найденных множеств является промежуток $\left(-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Объединяя решения, найденные в каждом из случаев, получаем окончательный результат.

Ответ: $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup [1, \infty)$.

5. Рассмотрим проекции P' и O' точек P и O на плоскость

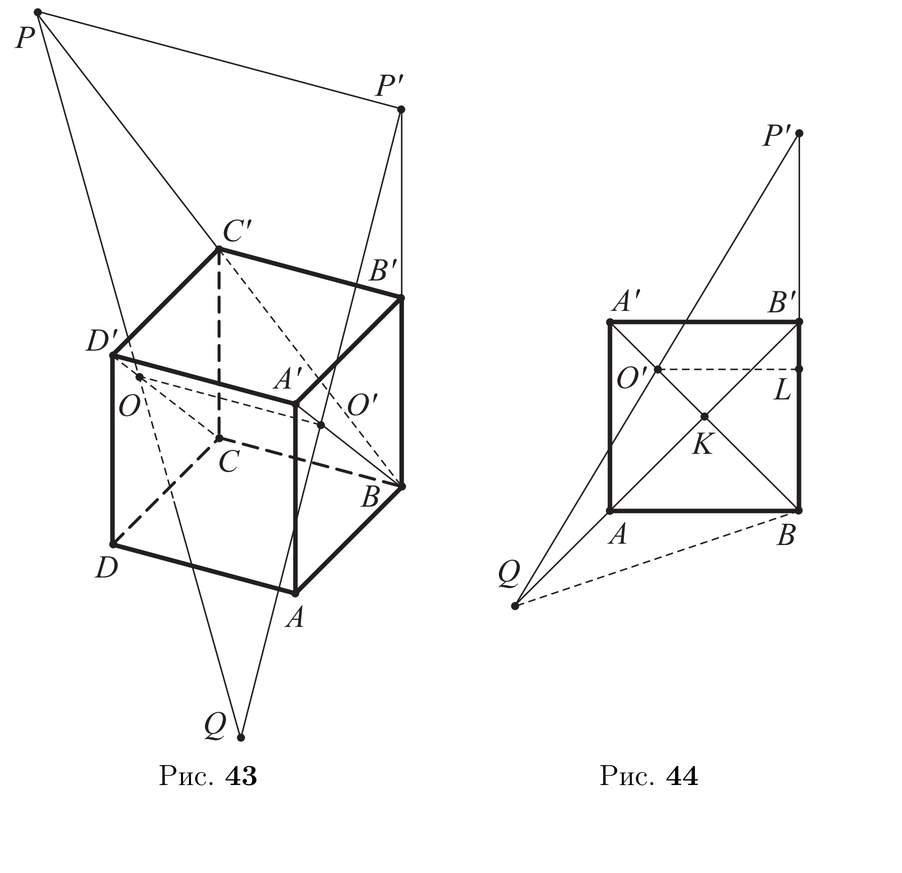

Рис. **43** Рис. **44**

$AA'B'B$ (рис. 43). Так как плоскость $BCC'B'$ перпендикулярна плоскости $ABB'A'$, а прямые PP' и $B'C'$ параллельны, то точка P' лежит на прямой BB'. В то же время проекцией прямой CD' на плоскость $ABB'A'$ является прямая BA', поэтому точка O' лежит на BA'. Длина отрезка OO' равна ребру куба, т. е. $2a$. Учитывая, что OO' — средняя линия треугольника QPP', получаем $PP' = 4a$. Рассматривая подобные треугольники $BB'C'$ и $BP'P$, находим $BP' = 4a$, $B'P' = 2a$.

Пусть K — точка пересечения диагоналей BA' и AB'. Рассмотрим треугольник QBP' в плоскости $ABB'A'$ (рис. 44). Заметим, что $BB' = B'P'$, $QO' = O'P'$, следовательно, QB' и BO' — медианы, которые пересекаются в точке K. По свойству медиан $KO' = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{4}BA'$, откуда $BO' = \frac{3}{4}BA' = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$, $LB' = \frac{a}{2}$, $LP' = LB' + B'P' = 5a/2$, $O'L = BL = 3a/2$. Окончательно, рассматривая прямоугольный треугольник $LO'P'$, находим

$$P'O' = \sqrt{O'L^2 + P'L^2} = \frac{a\sqrt{34}}{2}.$$

Тогда $QP' = 2P'O' = a\sqrt{34}$ и, наконец, $PQ^2 = P'Q^2 + P'P^2 = 50a^2$, $PQ = 5a\sqrt{2}$.

Ответ: $5a\sqrt{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(1;3)$. **2.** $\pi + \arcsin\frac{1}{5}$. **3.** $2/\sqrt{5}$. *Указание.* Проведем через M прямую, параллельную CD, пусть R — точка ее пересечения с прямой BD. Тогда BMR — равнобедренный прямоугольный треугольник. Если x — сторона квадрата, а угол DAN равен α, то $DN = x\operatorname{tg}\alpha$, $RM = BM = x\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда, используя подобие треугольников KDN и KRM, легко получить уравнение для определения $\operatorname{tg}\alpha$. **4.** $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, 3\right] \cup \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$. **5.** $2a\sqrt{14}$. *Указание.* Пусть L — середина ребра SA, тогда плоскость LMN параллельна плоскости основания ABC. Рассматривая треугольники PLO и QAO, нетрудно убедиться, что O — середина отрезка AL. Плоскость OMN пересекает основание по прямой, параллельной BC, проходит через Q и пересекает прямую AB в такой точке R, что $RA = AK$. Отсюда легко найти отрезок QA.

Вариант 3. **1.** $(3;1)$ **2.** $\arccos(-2/3)$. **3.** $350/11$. *Указание.* Пусть K — середина AC, L — точка пересечения KE и AD. Нетрудно показать, что ABC — равнобедренный треугольник, поэтому KE проходит через вершину B, а четырехугольник $ABCL$ — ромб. Зная сторону AB и диагональ AC ромба, легко определить его острый угол A, после чего найдем отрезок LD. **4.** $(-\infty,\ -2\,]\cup\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\cup\cup\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$. **5.** $a\sqrt{29}/2$. *Указание.* Проведем через Q прямую, параллельную $B'C'$, и пусть R — точка ее пересечения с прямой $A'C'$. Тогда точки P, C, R лежат на одной прямой, CO — средняя линия треугольника PRQ, $AP = AA' = a$, $CO = \frac{a}{4}$.

Вариант 4. **1.** $(1;2)$ **2.** $\pi + \arcsin\frac{1}{3}$. **3.** 8. *Указание.* Рассмотреть пары подобных треугольников DCQ и PBQ, ADR и CQR. **4.** $\left(-\infty,\ \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(-2,\ \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\cup[\,1,\ \infty)$. **5.** $a\sqrt{19}$. *Указание.* Проведем через MN плоскость, параллельную основанию $ABCD$, она пересечет ребро SD в его середине L. Рассматривая теперь плоскость, проходящую через прямые PQ и SD, нетрудно убедиться, что равны принадлежащие ей треугольники PDO и OQL. Отсюда $DO = \frac{1}{2}\,DL = \frac{1}{4}\,DS$. Далее, проектируя точки S, M, Q, O на плоскость основания $ABCD$ (S', M', Q', O' — их проекции) и опуская перпендикуляры $O'R$ и $M'T$ на AB, находим $PR = \frac{5}{4}\,a$, $O'R = \frac{7}{4}\,a$, следовательно, $PQ' = 2PO' = \frac{\sqrt{74}}{2}\,a$, $PQ^2 = PQ'^2 + Q'Q^2 = 19a^2$.

1991

Решение варианта 1

1. Пусть x и y — соответственно скорости скутера и теплохода в стоячей воде, z — скорость течения (единица скорости не имеет принципиального значения). Из условия задачи следует, что выполняется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x - z = 2(y + z), \\ x + z = 4(y - z). \end{cases}$$

Первое уравнение приводится к виду $x = 2y + 3z$, второе — к виду $x = 4y - 5z$. Умножая первое равенство на 5, второе — на 3 и складывая их, приходим к соотношению $8x = 22y$, или $x = \frac{11}{4}\,y$. Заметим, что при этом из первого уравнения $z = \frac{1}{4}\,y$, поэтому при положительном (по смыслу задачи) значении y величи́ны x и z тоже положительны, т. е. полученный ответ имеет смысл.

Ответ: $\frac{11}{4}$.

2. Заметим, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$, поэтому данный треугольник является прямоугольным, угол C — прямой. Следовательно, площадь ABC равна $\frac{1}{2}\,AC \cdot BC = 9$. Проведем через H прямую, параллельную AC, и пусть M — точка ее пересечения с катетом BC (рис. 45). По свойству биссектрисы $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BC}$, отсюда $AH = \frac{2}{3}\,AB = 2\sqrt{5}$, $BH = \sqrt{5}$, $BM = 1$, $HM = 2$. Теперь легко определить площади треугольников AHC и CHM: $S_{AHC} = 6$ и $S_{CHM} = 2$.

Обозначим через x отношение длин отрезков HP и HA. По смыслу задачи выполняются неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$. Учитывая, что $PQ \parallel AC$, имеем $HQ = x \cdot HC$, следовательно, площадь треугольника PHQ выражается через x по формуле: $S_{PHQ} = x^2 \cdot S_{AHC} = 6x^2$. Рассуждая аналогичным образом и рассматривая пару подобных треугольников CHM и CQR, имеем: $CQ = (1-x)\,CH$, $CR = (1-x)\,CM$, тогда $S_{CQR} = (1-x)^2 S_{CHM} = 2(1-x)^2$. Отсюда следует, что сумма $S(x)$ площадей заданных в условии задачи треугольников зависит от x следующим образом:

$$S(x) = 6x^2 + 2(1-x)^2 = 8\bigl(x - \tfrac{1}{4}\bigr)^2 + \tfrac{3}{2}.$$

Очевидно, что $S(x)$ принимает минимальное значение $\frac{3}{2}$ при $x = \frac{1}{4}$. Так как указанное значение x принадлежит отрезку $[\,0,\,1\,]$, то оно и дает решение задачи. Заметим, что для $x = \frac{1}{4}$ точка Q — середина отрезка PR, т. е. $PQ = QR = \frac{3}{2}$.

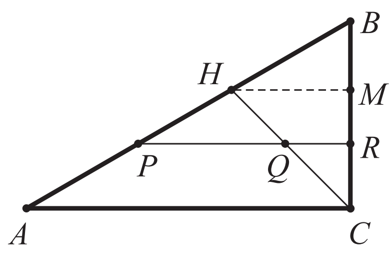

Рис. **45**

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3. Выражение под знаком логарифма в правой части неравенства положительно, если $(x+9)(x^2-4x+3) = (x+9)(x-1)(x-3) > 0$, т. е. $x \in \in (-9,\, 1) \cup (3,\, \infty)$. Очевидно, что для таких значений x выполняется $(x+9)^2 > 0$. Переходя к основанию $(3-\sqrt{5})$, получаем

$$\log_{3-\sqrt{5}}(x+9)^2 \leqslant \log_{3-\sqrt{5}}(x+9)(x^2-4x+3).$$

Учитывая, что $3-\sqrt{5} < 1$, приведем неравенство к эквивалентному (в области определения) виду

$$(x+9)^2 \geqslant (x+9)(x^2-4x+3). \tag{1}$$

Для рассматриваемой области изменения x выполнено условие $x + + 9 > 0$, поэтому (1) равносильно $x+9 \geqslant x^2-4x+3$, т. е. $x^2-5x-6 \leqslant \leqslant 0$. Решения последнего неравенства образуют отрезок $[-1,\, 6\,]$. Пересекая его с областью определения, получим решение задачи.

Ответ: $[-1,\, 1) \cup (3,\, 6\,]$.

4. Основание $(1-a)$ логарифма должно быть положительным и не может быть равно 1, поэтому $a \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, 1)$. Для таких значений a перепишем исходное уравнение в виде $2 - \cos x + \sin\frac{x}{2} = = (1-a)^2$. Заменяя $\cos x$ на $1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ и полагая $y = \sin\frac{x}{2}$, получим квадратное уравнение относительно y:

$$2y^2 + y + 2a - a^2 = 0. \tag{2}$$

Оно имеет решение, когда дискриминант $D(a)$ неотрицателен, т. е. $D(a) = 8a^2 - 16a + 1 \geqslant 0$. Это справедливо, если $a \geqslant 1 + \frac{\sqrt{14}}{4}$ или $a \leqslant 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}$. Так как $\frac{\sqrt{14}}{4} < 1$, то с учетом исходных ограничений получаем

$$a \in (-\infty,\, 0) \cup \Big(0,\, 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}\,\Big]. \tag{3}$$

Однако решение задачи еще не закончено. Следует учесть, что исходное уравнение имеет решения в том и только том случае, когда среди корней уравнения (2) есть такие, для которых выполняется условие $|y| \leqslant 1$. Один из возможных дальнейших путей решения — выразить корни y_1 и y_2 уравнения (2) через a, решить относительно a неравенства $|y_1| \leqslant 1$, $|y_2| \leqslant 1$ и взять объединение получившихся множеств. Этот путь представляется очень громоздким, и мы поступим по-другому.

Рассмотрим функцию $f(y) = 2y^2 + y + 2a - a^2 = 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + 2a - a^2 - \frac{1}{8}$. Заметим, что $y = -\frac{1}{4}$ — точка минимума для $f(y)$, причем значение $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ неположительно в точности тогда, когда $D(a) \geqslant 0$, т. е. выполняется (3). Корни y_1 и y_2 ($y_1 \leqslant y_2$) уравнения (2) симметричны относительно точки $y = -\frac{1}{4}$. Если y_1 лежит в промежутке $[-1,\, 1]$, то y_2 — и подавно. Таким образом, достаточно выяснить, при каких a выполняется условие $y_2 \in \left[-\frac{1}{4},\, 1\right]$.

Поскольку $f\left(-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0$ для всех a, удовлетворяющих (3), а $f(y)$ строго возрастает при $y > -\frac{1}{4}$, то $y_2 \in \left[-\frac{1}{4},\, 1\right]$ в том и только том случае, когда $f(1) \geqslant 0$. Вычисляя значение $f(1)$, получаем неравенство $3 + 2a - a^2 \geqslant 0$, которое справедливо для $a \in [-1,\, 3]$. Пересечение этого множества с (3) дает решение задачи.

Ответ: $[-1,\, 0) \cup \left(0,\, 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}\right]$.

5. Проведем в плоскости SAC через точку P прямую, параллельную AC. Пусть R — точка ее пересечения с ребром SC. Очевидно, что R — середина SC, треугольник PRQ — правильный, а его сторона равна 1. Возьмем на продолжении отрезка RP точку T так, чтобы $PT = AC = 2$ (рис. 46). В силу построения четырехугольник $ATPC$ — параллелограмм, поэтому $AT \parallel CP$, $AT = CP$. По условию $\angle TAQ = 90^\circ$. Поскольку AQ и CP — медианы равных равнобедренных треугольников, имеем $AQ = CP$. Следовательно, TAQ —

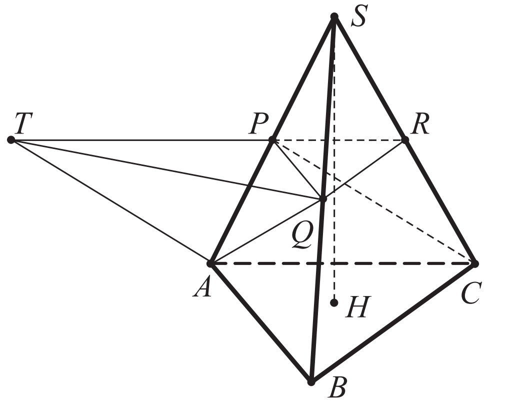

Рис. **46**

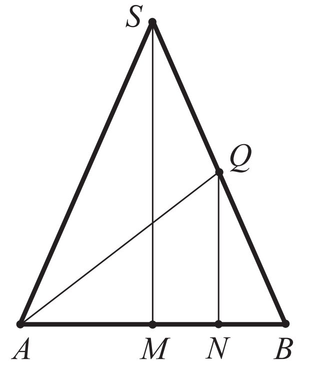

Рис. **47**

равнобедренный прямоугольный треугольник. Угол TPQ равен 120° как внешний для правильного треугольника PQR. Учитывая, что $PQ = 1$, $PT = 2$, по теореме косинусов находим $TQ = \sqrt{7}$, откуда $AQ = TQ \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{7/2}$.

Рассмотрим теперь одну из боковых граней пирамиды, к примеру, SAB (рис. 47). Пусть $SM = h$ — ее высота, QN — перпендикуляр, опущенный из точки Q на AB. Тогда $AN = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{2}$, $QN = \frac{h}{2}$, и по теореме Пифагора в треугольнике AQN имеем $AQ^2 = AN^2 + QN^2$, т. е. $\frac{h^2}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2}$. Отсюда $h = \sqrt{5}$. Зная h и радиус $r = 1/\sqrt{3}$ вписанного в основание ABC круга, легко найти высоту пирамиды $SH = \sqrt{14/3}$. Учитывая, что площадь основания ABC равна $\sqrt{3}$, определяем искомый объем пирамиды $V = \sqrt{14}/3$.

Другой возможный путь решения задачи опирается на координатный метод. Удобно ввести прямоугольную систему координат, взяв в качестве ее начала основание H высоты SH и направив ось z вдоль луча HS, а одну из оставшихся осей — вдоль луча HA. Задавая координаты $(0;\, 0;\, h)$ точки S, выражая через h координаты векторов $\vec{CP}$, $\vec{AQ}$ и приравнивая нулю их скалярное произведение, нетрудно получить уравнение для определения h.

Ответ: $\sqrt{14}/3$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 2. **2.** 4. *Указание.* Треугольник ABC — прямоугольный. Пусть N — середина катета BC, тогда площади треугольников AMC и CMN равны соответственно 12 и 6. Если обозначить через x отношение отрезков MP и MA, то сумма $S(x)$ площадей треугольников PMQ и CQR равна $12x^2 + 6(1-x)^2$. **3.** $(-1,\, 2\,] \cup [\,3,\, 5)$. **4.** $\left[\,\frac{5}{2},\, 3\right) \cup \left(3,\, 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}\,\right]$. **5.** $8\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть M — такая точка на луче BA, что $MA = BA = 4$. Тогда треугольник $MA'C$ — равнобедренный прямоугольный, его гипотенузу MC легко определить из треугольника MAC.

Вариант 3. **1.** 5. **2.** 2/3. *Указание.* Треугольник ABC — прямоугольный, $BH = 1$, $AH = 4$. Если обозначить через x отношение отрезков HM и AH, то сумма $S(x)$ площадей треугольников MHN

и CNK равна $4x^2 + \frac{4}{5}(1-x)^2$. **3.** $[-4,\,-2)\cup(4,\,7\,]$. **4.** $\bigl[3+\frac{\sqrt{2}}{2},\,4\bigr)\cup$ $\cup\,(4,\,3+\sqrt{14}\,]$. **5.** 72. *Указание.* Пусть Q — середина ребра BC, тогда треугольник APQ — прямоугольный. Выражая AP и PQ через длину x бокового ребра пирамиды и учитывая, что $AQ=\sqrt{45}$, легко получить уравнение для определения x.

Вариант 4. **1.** 5/2. **2.** $\sqrt{3}/6$. *Указание.* Если x — отношение отрезков HM и AH, то сумма $S(x)$ площадей треугольников MNH и BNK равна $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$. **3.** $[-1,\,2)\cup(4,\,8\,]$. **4.** $\bigl[-\frac{1}{2},\,0\bigr)\cup$ $\cup\bigl(0,\,\frac{\sqrt[3]{37}}{2}-1\,\bigr]$. **5.** $\frac{4}{3}\sqrt{10}$. *Указание.* Пусть H — точка пересечения диагоналей AC и BD основания. Проведем в плоскости $ABCD$ через точки B и C прямые, параллельные соответственно AC и BD, и обозначим точку их пересечения буквой R. Треугольник APR — прямоугольный равнобедренный, его гипотенузу AR легко найти из треугольника ARC.

1992

Решение варианта 1

1. Пусть n — число работ в пачке, а m — число отличных работ среди трех верхних. По условию задачи

$$\frac{50}{100}\,n - m = \frac{48}{100}\,(n-3),$$

следовательно, $\dfrac{n+72}{50} = m$. Величина m может равняться одному из четырех чисел: 0, 1, 2 и 3. При положительных n значения 0 и 1 получиться не могут. Значение 2 получается при $n=28$, а 3 — при $n=78$. Так как всего работ было не более 75, то остается единственная возможность: $m=2$, $n=28$.

Ответ: 28.

2. В силу известных ограничений на область определения логарифмической функции имеем:

$$3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x > 0, \quad \operatorname{ctg} x > 0, \quad \operatorname{ctg} x \neq 1. \tag{1}$$

При этих условиях исходное уравнение равносильно уравнению

$$3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x = 1, \tag{2}$$

или $2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$. Решения последнего уравнения: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). Остается проверить условия (1). Первое из них выполнено автоматически ввиду (2), а второму и третьему удовлетворяют лишь корни $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

3. Пусть M — середина AB, N — точка пересечения BC с прямой l, K — основание перпендикуляра, опущенного из M на l, α — угол ADM (рис. 48).

Прямоугольные треугольники AMD и MDK равны (гипотенуза MD — общая, $AM = MK = 2$). Следовательно, $\angle ADM = \angle MDK = \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}$. Теперь длины отрезков NC и BN легко находятся: $NC = CD \cdot \operatorname{tg}\angle NDC = 4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 4\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg}\alpha} = 3$, $BN = BC - NC = 1$.

Ответ: $1 : 3$.

4. Изобразим на плоскости графики функций $y = |x - 2\alpha + 2\,|$ и $x = |y - \alpha + 2\,|$ (рис. 49). Исходная система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда графики имеют общий прямолинейный участок. Последнее возможно, если прямая, соединяющая

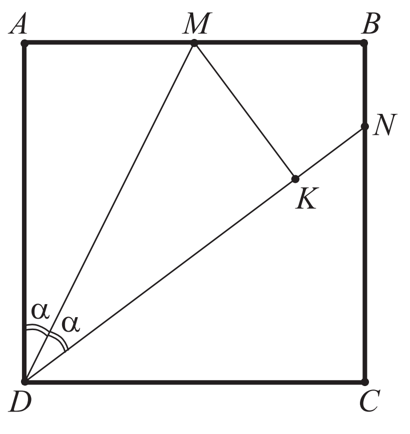

Рис. **48**

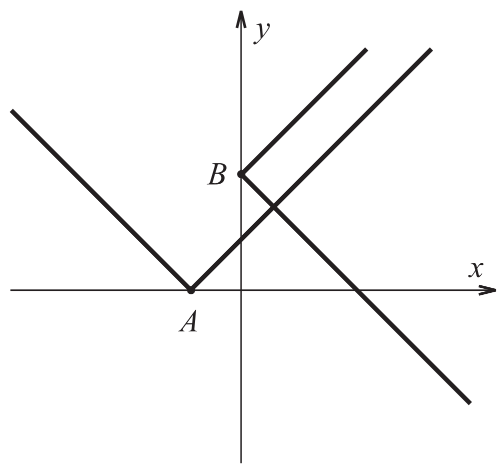

Рис. **49**

вершины $A\,(2\alpha - 2;\ 0)$ и $B\,(0;\ \alpha - 2)$ этих графиков, параллельна одной из их ветвей, т. е. когда $2\alpha - 2 = \alpha - 2$ или $2\alpha - 2 = 2 - \alpha$.

В первом из этих случаев $\alpha = 0$, а графики вообще не имеют общих точек. Во втором случае $\alpha = 4/3$, а вся «правая» ветвь графика функции $y = |x - 2\alpha + 2\,|$ лежит на «верхней» ветви графика функции $x = |y - \alpha + 2\,|$. (Проверьте!)

Ответ: $4/3$.

5. Пусть E — точка пересечения l с продолжением ребра AD. Проведем через l плоскость П, параллельную ребру AB (рис. 50). Плоскости граней ABD и ABC образуют вместе с П «бесконечную призму», ребра которой параллельны прямой AB. Рассмотрим шар, касающийся всех трех граней этой призмы. Перемещая центр шара параллельно AB, можно добиться того, чтобы точка касания шара и плоскости П оказалась на прямой l. Очевидно, что при этом шар будет касаться также и прямой l. Любой шар меньшего радиуса, касающийся плоскостей ABD и ABC, вообще не пересекается с плоскостью П и, следовательно, не может касаться l. Таким образом, радиус данного шара — искомый.

Для вычисления радиуса шара проведем через его центр плоскость, перпендикулярную AB. В сечении призмы этой плоскостью получится треугольник, а сечение шара будет вписанной в этот треугольник окружностью. Не уменьшая общности, предположим, что сечение проходит через точку E, так как все сечения призмы перпендикулярными к AB плоскостями одинаковы.

Треугольники ACE и ABE равны (они имеют равные стороны AB и AC, общую сторону AE и равные 60° углы BAE и EAC). Следовательно, треугольник ABE прямоугольный, BE и AB перпендикулярны, $AE = 2$, $BE = \sqrt{3}$.

В плоскости ABC через точку B проведем перпендикуляр к AB и отложим на нем отрезок BF,

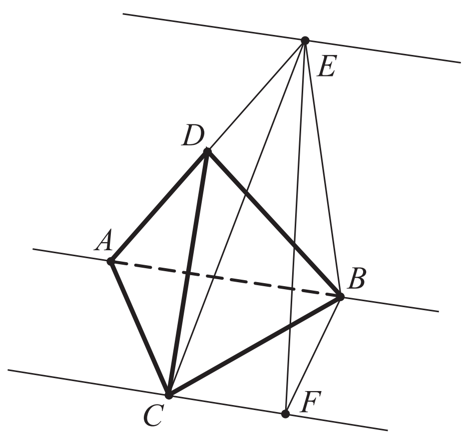

Рис. **50**

равный высоте треугольника ABC ($BF = \sqrt{3}/2$). Понятно, что BEF — искомое сечение призмы, причем $FC \parallel AB$, $FC = 1/2$, $EF \perp FC$. Применив теорему Пифагора к треугольнику CEF, получаем $EF^2 = EC^2 - FC^2 = 11/4$.

Зная все стороны треугольника BEF, легко вычислить радиус r вписанной в него окружности. Можно, например, использовать известную формулу $r = S/p$, где S — площадь, а p — полупериметр.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{11}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 25. **2.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$). **3.** 2 : 1. *Указание.* Пусть M — середина AD, N — точка пересечения l и CD, K — основание перпендикуляра, опущенного из M на l. Примените теорему синусов к треугольнику BNC, в котором сторона BC известна, угол BCN равен 60°, а угол NBC равен $120^\circ - \angle ABM - \angle MBK = 90^\circ - \angle MBK$. Синус угла MBK находится из прямоугольного треугольника BMK. **4.** $\frac{4}{7}$. **5.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$. *Указание.* Искомый радиус совпадает с радиусом шара, касающегося плоскостей граней $AA'B'B$, ABC и плоскости, проходящей через прямую MN параллельно ребру AB.

Вариант 3. **1.** 25. **2.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **3.** 3 : 2. *Указание.* Пусть O — центр треугольника ABC, M — середина AB, N — точка пересечения l и BC, K — основание перпендикуляра, опущенного из M на l. Примените теорему синусов к треугольнику OCN, в котором сторона OC равна $\frac{2}{3}CM$, угол NCO равен 30°, а синус угла CON (и равного ему угла KOM) находится из прямоугольного треугольника MKO. **4.** $-\frac{4}{7}$. **5.** $\dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$. *Указание.* Искомый радиус совпадает с радиусом шара, касающегося плоскостей граней SAD и $ABCD$, а также плоскости, проходящей через прямую MN параллельно AD.

Вариант 4. **1.** 75. **2.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **3.** 1 : 4 *Указание.* Пусть M — середина AC, L — середина BC, N — точка пересечения l и AB, K — основание перпендикуляра, опущенного из M на l. Примените теорему синусов к треугольнику ANL, в котором $AL = 14\sqrt{3}$, угол

NAL равен 30°, а угол NLA равен $\angle KLM - \angle ALM = \angle KLM - 30^\circ$. Синус угла KLM находится из прямоугольного треугольника MKL. **4.** $-\frac{3}{2}$. **5.** $\frac{3(3-\sqrt{5})}{8}$. *Указание.* Искомый радиус совпадает с радиусом шара, касающегося плоскостей граней ACD и ABC, а также плоскости, проходящей через прямую MN параллельно AC.

1993

Решение варианта 1

1. Воспользуемся формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и перепишем исходное равенство в виде $2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения относительно $\sin x$ являются числа $-\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ и $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. Первое из них меньше минус единицы и значением синуса быть не может. Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $\cos 2x = \sin x - 1 = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}-5}{4}$.

2. Эту задачу полезно рассмотреть в общем виде, так как ее различные модификации повторяются во всех вариантах 1993 года.

Пусть задана квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, имеющая два действительных корня $x_1 < x_2$. Тогда дискриминант $D = b^2 - 4ac$ положителен, а из теоремы Виета и формул для корней квадратного уравнения вытекает

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{|a|}. \qquad (1)$$

Абсцисса и ордината точки C (вершины параболы) соответственно равны $-\frac{b}{2a}$ и $f(-\frac{b}{2a}) = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{D}{4a}$.

Основание AB треугольника ABC имеет длину $x_2 - x_1$, а его высота h равняется модулю ординаты точки C, поэтому площадь треугольника ABC вычисляется по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,AB \cdot h = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_1) \cdot \left|f(-\tfrac{b}{2a})\right| = \frac{D\sqrt{D}}{8a^2}. \qquad (2)$$

Обозначим через k_1 и k_2 угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $A\,(x_1;\,0)$ и $B\,(x_2;\,0)$. Известно, что $k_1 = f'(x_1) =$

$= 2ax_1 + b$, $k_2 = f'(x_2) = 2ax_2 + b$. В силу (1) имеем

$$k_1k_2 = 4a^2x_1x_2 + 2ab(x_1 + x_2) + b^2 = -b^2 + 4ac = -D, \qquad (3)$$

$$k_1 - k_2 = 2a(x_1 - x_2) = -\tfrac{2a}{|a|}\sqrt{D}. \qquad (4)$$

Наконец, напомним, что угловой коэффициент k прямой, задаваемой уравнением $y = kx + d$, равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Теперь вернемся к варианту 1 и обозначим через α_1 и α_2 углы, отвечающие касательным к параболе в точках A и B. Тогда $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Если касательные перпендикулярны, то $\alpha_1 = \alpha_2 + \pi/2$. Отсюда по формулам приведения получаем $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(\alpha_2 + \pi/2) = -\operatorname{ctg}\alpha_2 = -1/k_2$, т. е. $k_1k_2 = -1$. Принимая во внимание (3), (2) и учитывая, что в нашем случае $a = 1$, заключаем: $D = -k_1k_2 = 1$, $S_{ABC} = D\sqrt{D}/8 = 1/8$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3. Сумма противоположных углов B и D во вписанном четырехугольнике $ABCD$ равна π, поэтому если один из них острый, то второй — обязательно тупой. Пусть угол B будет острым (рис. 51).

Обозначим через CP и CQ высоты треугольников ABC и ACD соответственно. Точка C равноудалена от сторон угла BAD, значит, $CP = CQ$. Равные углы BAC и CAD опираются на равные дуги, поэтому равны и соответствующие им хорды BC и CD. Таким образом, равны прямоугольные треугольники BPC и CQD (по катету и гипотенузе). По тем же причинам равны прямоугольные треугольники APC и AQC. Отсюда получаем, что, с одной стороны,

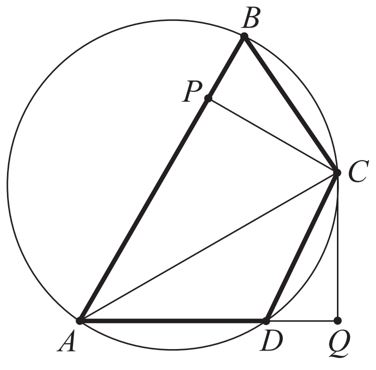

Рис. **51**

$$AB + AD = AP + BP + AD = \\ = AP + DQ + AD = AP + AQ = 2AP,$$

а с другой стороны,

$$1 = S_{ABCD} = S_{APC} + S_{BPC} + S_{ACD} = \\ = S_{APC} + S_{CQD} + S_{ACD} = S_{APC} + S_{AQC} = \\ = 2S_{APC} = AP \cdot PC = AP^2 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AP^2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $AP = \sqrt[4]{3}$, $AB + AD = 2AP = 2\sqrt[4]{3}$.

Ответ: $2\sqrt[4]{3}$.

4. Положим $y = \sqrt{x+4}$. Так как арифметический корень отрицательным быть не может, то исходное неравенство эквивалентно системе

$$\log_{\sqrt{2}+1}(2y^2 + y - 1) + \log_{\sqrt{2}-1}(y^2 + 2y + 2) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant y.$$

Заметим, что $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2 - 1 = 1$. Значит, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ и, переходя к логарифмам по основанию $\sqrt{2}+1$, получаем

$$\log_{\sqrt{2}+1}(2y^2 + y - 1) \leqslant \log_{\sqrt{2}+1}(y^2 + 2y + 2), \quad 0 \leqslant y.$$

Основание логарифмов больше единицы, поэтому полученная система равносильна следующей:

$$2y^2 + y - 1 \leqslant y^2 + 2y + 2, \quad 0 \leqslant y, \quad 0 < 2y^2 + y - 1. \tag{5}$$

Последнее соотношение появилось ввиду того, что область определения логарифмической функции состоит лишь из положительных чисел.

Решение стандартной системы (5) — пересечение множеств

$$M_1 = \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right], \quad M_2 = [0, \infty), \quad M_3 = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right),$$

т. е. промежуток $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. Чтобы вернуться к переменной x, достаточно решить систему $\frac{1}{2} < \sqrt{x+4} \leqslant \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Входящие сюда величины неотрицательны, значит, их можно возвести в квадрат: $\frac{1}{4} < x + 4 \leqslant \frac{7+\sqrt{13}}{2}$, откуда $-\frac{15}{4} < x \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$.

5. Центр O данного шара лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку AN и проходящей через его середину M. С другой стороны, центр O лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через биссектрису BL угла CBA. Следовательно, проекция O' центра O на плоскость ABC совпадает с пересечением серединного перпендикуляра к отрезку AN и биссектрисы BL (рис. 52).

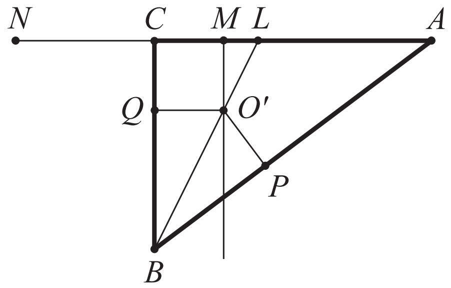

Рис. **52**

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 25$, а по известному свойству биссектрисы угла треугольника $AL : CL = AB : BC = 5 : 3$. Значит, $CL = \frac{3}{2}$, $ML = \frac{1}{2}$.

Пусть P и Q — проекции точки O' на AB и BC соответственно. Понятно, что P и Q — точки касания шара с лучами BA и BC. Кроме того, $O'P = O'Q = MC = 1$, $BP = O'P \cdot \operatorname{ctg} \angle O'BP = \operatorname{ctg} \angle LBC = \frac{BC}{LC} = 2$, $AP = AB - BP = 3$. Согласно теореме о трех перпендикулярах, треугольник OAP — прямоугольный, поэтому $OA^2 = OP^2 + AP^2 = 16 + 9 = 25$.

Ответ: 5.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{3-\sqrt{13}}{4}$. **2.** $90°$. *Указание.* Из формулы (2) вытекает, что $D\sqrt{D} = 2S_{ABC} = 1$, но тогда из (3) следует, что $k_1k_2 = -1$ и касательные перпендикулярны. **3.** $60°$. **4.** $\left(-2, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right]$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$. **5.** 6. *Указание.* Проекция центра шара на плоскость ABC совпадает с пересечением биссектрисы угла ACB и серединного перпендикуляра к отрезку BM.

Вариант 3. **1.** $\frac{6\sqrt{2}-7}{4}$. **2.** $\frac{1}{16}$. *Указание.* Из формулы (3) получаем, что $D = 1$, а затем из (2) находим, что $a^2 = 1/256$. **3.** $\sqrt{3}$. *Указание.* См. решение задачи 3 из варианта 1. **4.** $\left(\frac{2\sqrt{13}-4}{9}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. **5.** 13. *Указание.* Проекция центра шара на плоскость ABC совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MC и биссектрисы угла, образованного лучом BC и продолжением отрезка AB за точку B.

Вариант 4. **1.** $2 - \sqrt{5}$. **2.** $60°$. *Указание.* Пусть α_1, α_2 — углы наклона, а k_1, k_2 — угловые коэффициенты касательных. Тангенс искомого угла $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ равен $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$. Значения $k_1 - k_2$ и

k_1k_2 определяются из соотношений (3) и (4). **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$. **5.** 10. *Указание.* Проекция центра шара на плоскость ABC совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC и биссектрисы угла, образованного лучом BA и продолжением отрезка CB за точку B.

1994

Решение варианта 1

1. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, числитель дроби — равным нулю, а знаменатель — отличен от нуля. Следовательно, данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 3\sin^2 x + 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0, \\ \pi x + x^2 < 0. \end{cases} \tag{1}$$

С помощью тождества $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1 = \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x = -2\sin x\cos x$ первое из соотношений (1) приводится к виду $\sin x \times (3\sin x - 2\cos x) = 0$, откуда получаем две серии корней: $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $x_2 = \pi n$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). Решением неравенства, входящего в систему (1), является интервал $(-\pi, 0)$. Из найденных корней только $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi$ принадлежит этому интервалу.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi$.

2. Пусть d — разность данной арифметической прогрессии. Тогда $x_1 = y_1 + d$, $y_2 = y_1 + 2d$, $x_2 = y_1 + 3d$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4$, $y_1 + y_2 = -8$. Подставляя сюда найденные выше выражения для x_1, y_2 и x_2, приходим к системе

$$\begin{cases} y_1 + 2d = -2, \\ y_1 + d = -4, \end{cases}$$

в силу которой $y_1 = -6$, $d = 2$, $x_1 = -4$, $y_2 = -2$, $x_2 = 0$. Вновь обращаясь к теореме Виета, находим $a = x_1x_2 = 0$ и $b = y_1y_2 = 12$.

Ответ: $a = 0$, $b = 12$.

3. Пусть O — точка пересечения высот AP и CQ. Из прямоугольных треугольников APB и CQB находим $\angle PAB = \pi/2 - \angle CBQ$,

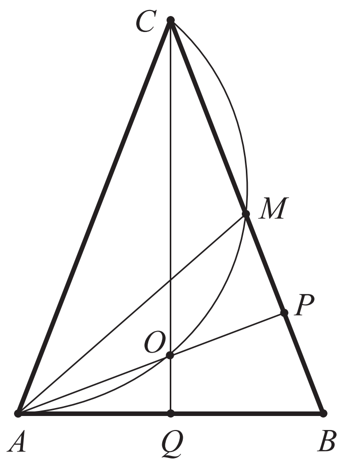

Рис. **53**

$\angle QCB = \pi/2 - \angle CBQ$, значит, $\angle PAB = \angle QCB$. С другой стороны, вписанные в окружность углы MAP и QCB опираются на одну и ту же дугу OM, поэтому они тоже равны (рис. 53).

Итак, $\angle BAM = \angle BAP + \angle MAP = 2\angle QCB = \angle ACB$. Следовательно, треугольники ABC и MBA подобны (по двум углам). Отсюда вытекает, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{MB} = \frac{2AB}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теперь углы треугольника ABC находятся элементарно: $\cos\angle A = \frac{AQ}{AC} = \frac{AB}{2AC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle A = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle C = \pi - 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\angle A = \angle B = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle C = \pi - 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

4. Переходя к логарифмам по основанию 2, перепишем задачу в виде $\log_2(\sqrt{a+2} - x) - \log_2(x - a - 1) = \log_2 3$. При условии $x > a+1$ это уравнение равносильно линейному $\sqrt{a+2} - x = 3(x - a - 1)$. Выразив отсюда x и подставив в неравенство $x > a+1$, приходим к соотношению

$$a + 1 < \sqrt{a+2}, \tag{2}$$

которое и будет условием существования решений у исходного уравнения.

Итак, осталось решить неравенство (2), имеющее смысл только при $a \geqslant -2$. Если $-2 \leqslant a < -1$, то левая часть (2) отрицательна, а правая — нет. Значит, весь промежуток $[-2,\ -1)$ входит в множество решений.

В случае $a \geqslant -1$ обе части неравенства (2) неотрицательны. Возведем его в квадрат и получим стандартную задачу $a^2 + a - 1 < 0$, решением которой с учетом условия $a \geqslant -1$ является множество $\left[-1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Объединяя оба случая, находим общее решение.

Ответ: $\left[-2,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

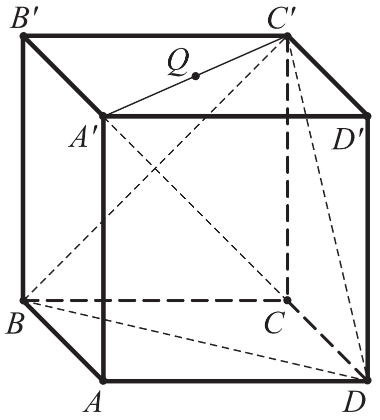

Рис. **54**

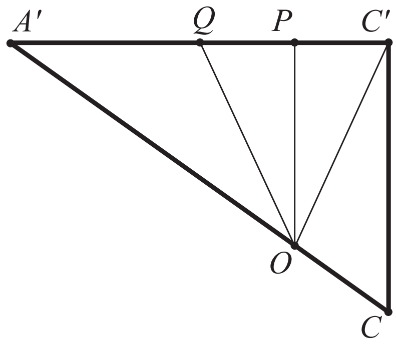

Рис. **55**

5. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин B, C' и D, есть прямая $A'C$ (рис. 54). Значит, центр O сферы лежит на этой прямой. Чтобы построить O, достаточно указать на прямой $A'C$ точку, равноудаленную от C' и Q. Рассмотрим для этого плоскость $A'CC'$ (рис. 55). Если O — искомая точка, то треугольник $QC'O$ — равнобедренный. Следовательно, основание P его высоты OP совпадает с серединой отрезка $C'Q$. Учитывая, что Q — середина $A'C'$, находим: $C'P = \frac{1}{4}\,A'C' = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $OP = \frac{3}{4}\,CC' = \frac{3}{4}$, $OC' = \sqrt{OP^2 + C'P^2} = \sqrt{11}/4$.

Ответ: $\sqrt{11}/4$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi}{2}$, $\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$. **2.** $a = -21$, $b = 5$. **3.** $432/25$. *Указание.* Рассмотрим случай тупоугольного треугольника. Пусть AP и CQ — высоты, N — точка их пересечения, а O — центр окружности. Тогда углы ANQ и ABP равны как дополнения к углу BAN до 90°. Углы CAQ и ABP при основании равнобедренного треугольника ABC также равны. Значит, $\angle ANQ = \angle CAQ$ и угол CAQ вместе со вписанным углом ANQ измеряются половиной дуги AC. Отсюда следует, что AB — касательная к данной окружности. Радиус OA параллелен высоте CQ, а внутренние накрест лежащие углы OAC и ACQ равны. Используя условие задачи, легко найти $\sin\angle OAC = \sin\angle ACQ$, после чего площадь вычисляется элементарно. Случай остроугольного треугольника фактически не реализуется, но аналогичные формальные рассуждения на неправильном чертеже все-таки могут привести к правильному ответу. **4.** $\left[-4, \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{257}}{8}$. *Указание.* Центр сферы лежит на пересечении плоскостей, одна из которых перпендикулярна отрезку AK и делит его пополам, а вторая перпендикулярна отрезку MN и тоже делит его пополам. Это пересечение — прямая, параллельная AA' и проходящая через середину AK.

Вариант 3. **1.** $\operatorname{arctg}(1/2)$. **2.** $|a| = 5/2$, $|b| = 5$. Знаки a и b произвольны. **3.** 6. *Указание.* Как и в задаче 3 варианта 1, воспользуйтесь подобием треугольников ABC и AMB. **4.** $\left[-3, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$. **5.** 9/8. *Указание.* Центр сферы лежит на прямой, параллельной ребру AA' и проходящей через середину отрезка AM.

Вариант 4. **1.** Нет решений. **2.** $a = -3$, $b = 12$ или $a = 3$, $b = -12$. **3.** $\angle A = \angle B = \arccos(1/\sqrt{5})$, $\angle C = \pi - 2\arccos(1/\sqrt{5})$. *Указание.* Как и в задаче 3 варианта 1, воспользуйтесь подобием треугольников ABC и AMB. **4.** $\left[-6, \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. *Указание.* Центр сферы лежит на прямой, параллельной ребру BB' и проходящей через середину отрезка BP.

1995

Решение варианта 1.1

1. Умножив данное уравнение на $x+1$, получим

$$x^2 - 1 + (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 6. \qquad (1)$$

Лишних корней при этом не появилось и уравнение (1) осталось равносильным исходному. Далее рассмотрим два случая.

А. Пусть $x \geqslant -1$, тогда $x+1 = \sqrt{(x+1)^2}$ и равенство (1) можно записать в виде $x^2 - 1 + \sqrt{x^2-1} = 6$. Полагая $y = \sqrt{x^2-1}$, придем к квадратному уравнению $y^2 + y - 6 = 0$ с корнями 2 и -3. Отрицательный корень не подходит, так как $y \geqslant 0$. Значит, $\sqrt{x^2-1} = 2$.

Возводя в квадрат, последовательно находим: $x^2 - 1 = 4$, $x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$. Условию $x \geqslant -1$ удовлетворяет только значение $x = \sqrt{5}$.

Б. Пусть теперь $x < -1$ и $x+1 = -\sqrt{(x+1)^2}$. Перепишем равенство (1) в виде $x^2 - 1 - \sqrt{x^2-1} = 6$ и снова положим $y = \sqrt{x^2-1}$. Повторяя рассуждения пункта «А», получим квадратное уравнение $y^2 - y - 6 = 0$, откуда $y = 3$, $x^2 = 10$, $x = \pm\sqrt{10}$. Согласно условию $x < -1$ оставляем только значение $x = -\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{10}$.

2. Преобразуем подкоренное выражение следующим образом:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 1 + \cos 2x = 2(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) = 2\sin^2 x\Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big) = \frac{2\sin^4 x}{\cos^2 x}.$$

Теперь квадратный корень легко извлекается, а уравнение приводится к виду

$$\frac{\sin^2 x}{|\cos x|} + \frac{2\sin^3 x}{\cos x} = 0.$$

Сразу же отмечаем серию корней $\sin x = 0$, $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, после чего можем сократить на $\sin^2 x$:

$$\frac{1}{|\cos x|} + \frac{2\sin x}{\cos x} = 0. \tag{2}$$

В зависимости от знака $\cos x$ возможны два случая.

А. $\cos x > 0$. При этом $|\cos x| = \cos x$ и уравнение (2) принимает вид $1 + 2\sin x = 0$. Отсюда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$. В силу условия $\cos x > 0$ подходят только четные значения $m = 2l$, т. е. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$.

Б. $\cos x < 0$. В этом случае $|\cos x| = -\cos x$ и вместо (2) получается $2\sin x - 1 = 0$. Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$, но теперь оставляем только нечетные значения $m = 2l+1$, т. е. $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

Остается заметить, что обе найденные в пунктах «А» и «Б» серии корней можно объединить в одну: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $k\pi$, $-\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

3. Из второго уравнения данной системы находим $y = (1-ax)/2$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем

$$(a^2 + 2a - 8)x = a - 2, \quad \text{т. е.} \quad x(a-2)(a+4) = a - 2. \tag{3}$$

При $a = -4$ уравнение (3) вообще не имеет корней.

В случае $a = 2$ любое значение x удовлетворяет уравнению (3). Соответствующие значения y вычисляются по формуле $y = \frac{1}{2} - x$. Среди них всегда найдутся такие, что $x < -1$, $y > -4$. Например, $x = -2$, $y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Значит, $a = 2$ является одним из решений исходной задачи.

Пусть теперь $a \neq -4$ и $a \neq 2$. Тогда решением (3) будет $x = \dfrac{1}{a+4}$, а соответствующее y равняется $\dfrac{2}{a+4}$. Запишем для них условия $x < -1$, $y > -4$ и придем к системе неравенств

$$\frac{1}{a+4} < -1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+4} > -2. \tag{4}$$

Всякое решение этой системы будет одновременно решением исходной задачи.

При $a > -4$ левая часть первого из неравенств (4) положительна, значит, это неравенство ложно. Остается случай $a < -4$. Умножая систему (4) на отрицательное число $a + 4$, получаем новую пару неравенств $-1 < a + 4$ и $2(a + 4) < -1$, откуда $a \in (-5, -9/2)$.

Ответ: $a \in (-5, -9/2) \cup \{2\}$.

4. Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α (рис. 56). Тогда синус угла между прямой AB и плоскостью α равен отношению суммы расстояний от точек A и B до плоскости α к длине отрезка AB. Действительно, обозначим через P и Q проекции точек A и B на данную плоскость, а через φ — искомый угол. Понятно, что $AP = AM \sin\varphi$, $BQ = BM \sin\varphi$, откуда

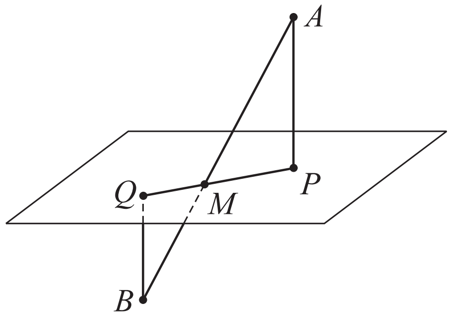

Рис. **56**

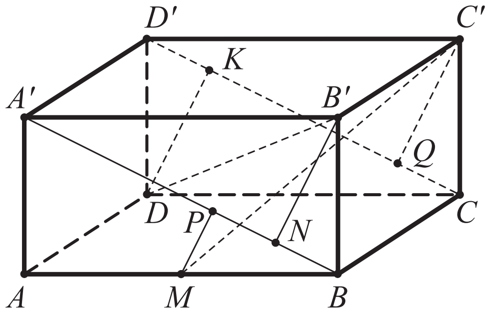

Рис. **57**

$$\frac{AP+BQ}{AB} = \frac{AM\sin\varphi + BM\sin\varphi}{AM+BM} = \sin\varphi.$$

Заметим, что если точки A и B лежат по одну сторону от α, то вместо суммы расстояний надо взять разность.

Вернемся к нашей задаче. Обозначим через x высоту параллелепипеда, а через P, Q, N и K — проекции точек M, C', B' и D на плоскость $A'BCD'$ (рис. 57). По теореме Пифагора имеем

$$MC' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 1^2 + x^2} = \sqrt{\frac{11}{4} + x^2},$$

$$B'D = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 1^2 + x^2} = \sqrt{8 + x^2}.$$

Отрезки DK, $B'N$ и $C'Q$ равны друг другу, а $MP = \frac{1}{2}\,C'Q$. Согласно доказанному вспомогательному утверждению

$$\frac{MP + C'Q}{MC'} = \frac{DK + B'N}{B'D}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{3}{2}\,C'Q : \sqrt{\frac{11}{4} + x^2} = 2C'Q : \sqrt{8+x^2}.$$

Сократив на $C'Q$ и возведя в квадрат, получим $\frac{9}{4}\,(8+x^2) = 11+4x^2$, откуда $x^2 = 4$ и $x = 2$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** -4, $\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$. **2.** $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $-\frac{\pi}{6} + \pi m$ (k, n, $m \in \mathbb{Z}$). **3.** $\left(1,\ \frac{3}{2}\right) \cup \{-1\}$. **4.** $3\sqrt{2}$. *Указание.* См. задачу 4 из варианта 1.1.

Вариант 1.3. **1.** $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-3+\sqrt{65}}{2}$. **2.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $\left(2,\ \frac{5}{2}\right) \cup \{-2\}$. **4.** 10. *Указание.* См. задачу 4 из варианта 1.1.

Вариант 1.4. **1.** 4, $\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right) \cup \{2\}$. **4.** $\frac{7}{2}$. *Указание.* См. задачу 4 из варианта 1.1.

Решение варианта 2.1

1. Основание логарифмической функции должно быть положительным и отличным от единицы, поэтому:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 2. \tag{1}$$

Заметим теперь, что исходное уравнение можно записать в виде

$$\log_{2x+1}\bigl[(5-2x)(2x+1)\bigr]+\log_{5-2x}(2x+1)^2=4.$$

При выполнении условий (1) это уравнение эквивалентно такому:

$$\log_{2x+1}(5-2x)+\frac{2}{\log_{2x+1}(5-2x)}-3=0.$$

Полагая $y=\log_{2x+1}(5-2x)$, приходим к квадратному уравнению $y^2-3y+2=0$ с корнями 2 и 1.

В случае $y=2$ получаем $5-2x=(2x+1)^2$, т. е. $4x^2+6x-4=0$. Корни этого уравнения -2 и $\frac{1}{2}$. Значение $\frac{1}{2}$ удовлетворяет условиям (1), а значение -2 — нет. Следовательно, $x=\frac{1}{2}$.

При $y=1$ для x получается линейное уравнение $5-2x=2x+1$, единственный корень $x=1$ которого удовлетворяет условиям (1).

Ответ: $\frac{1}{2}$, 1.

2. Воспользуемся тождеством $\cos\bigl(\frac{9\pi}{2}-x\bigr)=\sin x$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$\cos 3x+\tfrac{1}{2}\sin x-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0.$$

Заметим, что $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$. Применяя формулу косинуса суммы, а затем преобразуя разность косинусов в произведение синусов, последовательно получаем

$$\cos 3x-\cos\bigl(x+\tfrac{\pi}{6}\bigr)=0,\quad -2\sin\bigl(2x+\tfrac{\pi}{12}\bigr)\sin\bigl(x-\tfrac{\pi}{12}\bigr)=0.$$

Отсюда легко находятся две серии корней:

$$\sin\bigl(2x+\tfrac{\pi}{12}\bigr)=0,\quad 2x+\tfrac{\pi}{12}=\pi k,\quad x=-\tfrac{\pi}{24}+\tfrac{\pi k}{2}\quad (k\in\mathbb{Z});$$
$$\sin\bigl(x-\tfrac{\pi}{12}\bigr)=0,\quad x-\tfrac{\pi}{12}=\pi n,\quad x=\tfrac{\pi}{12}+\pi n\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{12}+\pi n$ (k, $n\in\mathbb{Z}$).

3. Левый конец интервала должен быть меньше правого, поэтому $7t<3t-4$, или $t<-1$.

Если длина интервала больше единицы, то он заведомо содержит целое число. Значит, множество решений неравенства $3t-4-7t>1$, т. е. луч $\bigl(-\infty,\,-\frac{5}{4}\bigr)$, входит в совокупность решений данной задачи.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{5}{4},\ -1\right)$, который дополняет луч $t < -\frac{5}{4}$ до всего множества допустимых значений параметра t. Если t принадлежит этому промежутку, то $-9 < 7t < 3t - 4 < -7$. Следовательно, единственным целым числом, которое может попасть в заданный интервал, будет -8. Число -8 действительно окажется в заданном интервале при выполнении неравенств $7t < -8$ и $-8 < 3t - 4$, откуда $t \in \left(-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{7}\right)$. Пересекая это множество с промежутком $\left[-\frac{5}{4},\ -1\right)$, находим $y \in \left[-\frac{5}{4},\ -\frac{8}{7}\right)$.

Объединяя оба рассмотренных случая, приходим к ответу на вопрос задачи.

Ответ: $\left(-\infty,\ -\frac{8}{7}\right)$.

4. Центр шара лежит в плоскости, перпендикулярной прямой AD и проходящей через точку M. Найдем пересечение этой плоскости с прямой CN. В плоскости ACD восстановим перпендикуляр к прямой AD в точке M и продолжим его до пересечения с прямой AC в некоторой точке P (рис. 58). Затем через P проведем прямую, параллельную BC, до пересечения с прямой CN в точке O. Плоскость OMP и будет искомой, а точка O должна быть центром шара.

Остается найти радиус OM шара. Заметим, что AMP — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому $MP = AM = \frac{3}{4}AD = 3\sqrt{2}$. Треугольник OPC также прямоугольный и равнобедренный, значит, $OP = PC = AP - AC = 6 - 4 = 2$. По теореме Пифагора $OM^2 = MP^2 + OP^2 = 22$.

Ответ: $\sqrt{22}$.

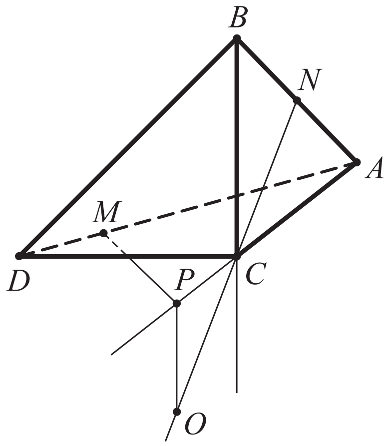

Рис. **58**

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $-1,\ \frac{\sqrt{17}-15}{8}$. **2.** $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2},\ -\frac{11}{8}\right)$. **4.** 3. *Указание.* Центр шара совпадает с пересечением прямой AC и плоскости, проведенной через точку M перпендикулярно BD.

Вариант 2.3. **1.** $\frac{7}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **2.** $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\left(-\frac{4}{5},\,\infty\right)$. **4.** $\sqrt{30}$. *Указание.* Центр шара совпадает с пересечением прямой AB и плоскости, проведенной через точку M перпендикулярно ребру CD.

Вариант 2.4. **1.** $\frac{2}{3}$, $4-2\sqrt{2}$. **2.** $\frac{3\pi}{8}+\pi k$; $\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\left(\frac{1}{2},\,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\,\infty\right)$. **4.** $3\sqrt{2}$. *Указание.* Центр шара лежит на пересечении прямой AB с плоскостью, проведенной через точку M перпендикулярно ребру SC.

1996

Решение варианта 1.1

1. Рассмотрим множество зачисленных абитуриентов, не решивших третью задачу. Таких было $100-80=20$ человек, причем все они решили четвертую и пятую задачи, иначе не смогли бы получить оценку «хорошо». Аналогично 30 зачисленных абитуриентов не решили четвертую задачу, но справились с третьей и пятой. Точно так же 40 зачисленных абитуриентов не решили только пятую задачу. Всего не решивших одну задачу было $20+30+40=90$ человек. По условию все они получили оценку «хорошо».

Ответ: 90 человек.

2. Преобразуя уравнение по формуле синуса суммы, получаем $\cos 3x-\cos x=\sqrt{3}\,\sin x$. Отсюда, «сворачивая» разность косинусов в произведение, находим $2\sin 2x\sin x+\sqrt{3}\,\sin x=0$. Таким образом, имеется две серии корней:

$$\begin{aligned} &\sin x=0, && x=\pi k && (k\in\mathbb{Z}); \\ &\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, && x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2} && (n\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ответ: πk; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$.

3. Пусть K, L и M — точки касания окружности со сторонами BC, CA и AB соответственно, $\angle C=\alpha$. Из прямоугольного треугольника OLC (рис. 59) находим $LC^2 = OC^2 - OL^2 = 20$, $\cos\frac{\alpha}{2} = LC : OC = 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 3/5$. Положив $AC = x$, $BC = y$ и воспользовавшись равенством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим $4\sqrt{5} = AB = AM + MB = AL + BK = x - 2\sqrt{5} + y - 2\sqrt{5}$, т. е. $x + y = 8\sqrt{5}$. С другой стороны, по теореме косинусов имеем

$$x^2 + y^2 - 2xy\,\frac{3}{5} = (4\sqrt{5})^2.$$

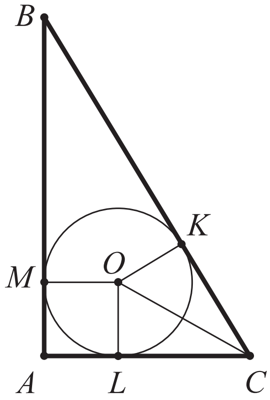

Рис. **59**

Получилась стандартная система из линейного и квадратного уравнений. Ее решениями являются $(3\sqrt{5};\, 5\sqrt{5})$ и $(5\sqrt{5};\, 3\sqrt{5})$. Эти решения соответствуют двум равным треугольникам, отличающимся только обозначениями вершин A и B.

Ответ: $3\sqrt{5},\ 5\sqrt{5}$.

4. Заметим, что $p \neq 1$, иначе уравнение превратится в линейное, имеющее всего лишь один корень. Кроме того, дискриминант $D = 4p^2 + 4(1-p)(p+2) = 4(2-p)$ должен быть положительным, откуда $p < 2$. Пусть теперь x_1 и x_2 — положительные корни данного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{p-1} > 0, \qquad x_1x_2 = \frac{p+2}{p-1} > 0. \tag{1}$$

Обратно, если выполнены неравенства (1), то $x_1x_2 > 0$, т. е. корни одного знака. Так как $x_1 + x_2$ тоже больше нуля, то оба корня имеют знак плюс.

Остается решить систему (1) при условиях $p \neq 1$, $p < 2$. В случае $p \in (1,\, 2)$ знаменатель $p - 1$ положителен и (1) сводится к системе $2p > 0$, $p + 2 > 0$, которой удовлетворяют все точки промежутка $(1,\, 2)$. Если же $p < 1$, то знаменатель $p - 1$ отрицателен и (1) превращается в систему $2p < 0$, $p + 2 < 0$, которой удовлетворяют все точки луча $(-\infty,\, -2)$. Объединяя оба случая вместе, получим ответ на вопрос задачи.

Ответ: $(-\infty,\, -2) \cup (1,\, 2)$.

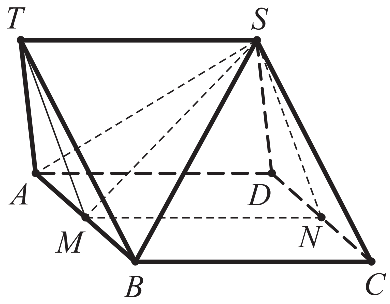

Рис. **60**

5. Чтобы найти расстояние между двумя прямыми, достаточно через одну из них провести плоскость, параллельную второй, а затем измерить расстояние от любой из точек этой второй прямой до проведенной плоскости.

Покажем, что плоскость ATB параллельна SC (рис. 60). Из условия задачи следует, что $AT = BT = 5$, $TS = 6$. Пусть M и N — середины AB и CD соответственно. Понятно что, TM и MN перпендикулярны ребру AB, поэтому плоскость TMN также перпендикулярна AB и, следовательно, проходит через вершину S. Значит, $TMNS$ — плоский четырехугольник. Противоположные стороны этого четырехугольника попарно равны, поэтому $TMNS$ — параллелограмм. Отсюда $TM \parallel SN$ и, так как $AB \parallel CD$, то плоскость ATB параллельна плоскости SDC. Прямая SC лежит в плоскости SDC, значит, SC параллельна плоскости ATB.

Заметим, что плоскость $STMN$ перпендикулярна также плоскости ATB. Следовательно, расстояние от вершины S (и от прямой SC) до плоскости ATB равно высоте параллелограмма $STMN$, опущенной из точки S на прямую TM. Эта высота равна частному от деления площади параллелограмма на длину стороны TM. В свою очередь, площадь $STMN$ равна удвоенной площади равнобедренного треугольника STM. Таким образом, искомое расстояние есть

$$\frac{ST\sqrt{TM^2 - \frac{1}{4}ST^2}}{TM} = \frac{ST\sqrt{AT^2 - AM^2 - \frac{1}{4}ST^2}}{\sqrt{AT^2 - AM^2}} =$$

$$= \frac{6\sqrt{25 - 9 - \frac{1}{4}36}}{\sqrt{25-9}} = \frac{6\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** 20 человек. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}$. *Указание.* См. задачу 3 из варианта 1.1.

4. $(-1,\,0)\cup(3,\,\infty)$. **5.** $4\sqrt{11}/3$. *Указание.* Пусть N — середина AB, O — центр треугольника ABC. Используя подобие треугольников SON и TOC, нетрудно доказать, что $SN \parallel CT$. Значит, плоскость SAB также параллельна CT и содержит AM. Поэтому искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки C на грань ASB.

Вариант 1.3. **1.** 40 участников. **2.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\in\mathbb{Z})$. **3.** 3, 4, 5. *Указание.* См. задачу 3 из варианта 1.1. **4.** $(-\infty,\,1)\cup\cup(4,\,5)$. **5.** $4/\sqrt{5}$. *Указание.* См. задачу 5 из варианта 1.1.

Вариант 1.4. **1.** 15%. **2.** πk; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. *Указание.* См. задачу 3 из варианта 1.1. **4.** $(-2,\,-1)\cup\cup(2,\,\infty)$. **5.** $3\sqrt{39}/4$. *Указание.* Пусть O — центр треугольника ABC, N — середина BC. Покажите, что треугольники AOT и SON подобны. Тогда $SN \parallel AT$, а искомое расстояние совпадает с высотой пирамиды $SABC$, опущенной из точки A.

Решение варианта 2.1

1. Обозначим через x и y количества раков, купленных соответственно вчера и сегодня, а через z — сумму переплаты, тогда $510x+990y+z=25\,200$. Это уравнение нужно решить в натуральных числах, причем z должно удовлетворять неравенствам $160\leqslant\leqslant z\leqslant 200$. Разделив уравнение на 30, получим

$$17x+33y+\frac{z}{30}=840.$$

Следовательно, z делится на 30. Из условия $160\leqslant z\leqslant 200$ вытекает, что $z=180$, и уравнение приобретает вид $17x+33y=840-6=834$, откуда

$$x=\frac{850-16-34y+y}{17}=50-2y+\frac{y-16}{17}.$$

Число $\frac{y-16}{17}$ может быть целым при $y=16,\,33,\,\ldots$. Если $y\geqslant 33$, то $x=(834-33y)/17<0$, значит, $y=16$ и $x=50-2\cdot 16=18$.

Ответ: 18 и 16.

2. После возведения в квадрат уравнение приобретает вид

$$12\cos^2\frac{x}{2}=1+8\sin x. \qquad (1)$$

Это уравнение равносильно исходному при условии $\cos\frac{x}{2} \geqslant 0$. Заметим, что в данном случае нет необходимости проверять неравенство $1 + 8\sin x \geqslant 0$, поскольку оно автоматически выполняется для всех решений (1).

Применяя формулу косинуса половинного аргумента, получаем

$$6(1 + \cos x) = 1 + 8\sin x, \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует угол $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такой, что $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Иными словами, $\varphi = \arccos\frac{3}{5} = \arcsin\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$. С помощью угла φ наше уравнение можно переписать в виде $\cos(x + \varphi) = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} - \varphi + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Осталось проверить условие $\cos\frac{x}{2} \geqslant 0$.

Если $x = \frac{2\pi}{3} - \varphi + 2\pi k$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{2} + \pi k$. Так как $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\cos\frac{x}{2} > 0$ при четных k и $\cos\frac{x}{2} < 0$ при нечетных k. Значит, из данной серии подойдут только корни $x = \frac{2\pi}{3} - \varphi + 4\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

В случае $x = -\frac{2\pi}{3} - \varphi + 2\pi k$ имеем $\frac{x}{2} = -\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{2}\right) + \pi k$. Так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5} = \sin\varphi$ и $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\varphi < \frac{\pi}{3}$ и $0 < \frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Поэтому снова $\cos\frac{x}{2} > 0$ при четных k и $\cos\frac{x}{2} < 0$ при нечетных k. Таким образом, из второй серии выбираем $x = -\frac{2\pi}{3} - \varphi + 4\pi n$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} - \arccos\frac{3}{5} + 4\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Понятно, что вписанная окружность касается основания AB равнобедренного треугольника в его середине D (рис. 61). Положим $AP = x$, тогда по теореме о касательной и секущей $6^2 = AD^2 = AP \times AQ = x(x + 5)$. Решая полученное квадратное уравнение $x^2 + 5x - 36 = 0$, находим корни 4 и -9. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Значит, $AP = 4$ и $AQ = 9$.

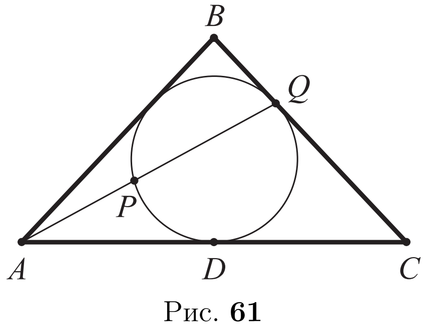

Рис. **61**

Применим теперь теорему косинусов к треугольнику AQC, в котором $QC = CD = 6$, $AC = 12$, $AQ = 9$.

Получим $81 = 36 + 144 - 144\cos\angle C$, откуда $\cos\angle C = 11/16$, $\operatorname{tg}\angle C = 3\sqrt{15}/11$, $S_{ABC} = BD\cdot CD = CD^2\operatorname{tg}\angle C = 108\sqrt{15}/11$.

Ответ: $\frac{108\sqrt{15}}{11}$.

4. Так как x является одновременно аргументом логарифма и основанием степени, то $x > 0$. При этом выполнены неравенства $3x+3 > 0$ и $3x+3 \neq 1$, поэтому весь луч $(0, \infty)$ попадет в область определения исходного выражения. Заметим, что равенство $x = 1$ вполне допустимо. При $x = 1$ значение $x^{\log_2 x}$ определено и равно 1.

Переходя к логарифмам и степеням с основанием 2, запишем исходное неравенство в виде

$$\left(2^2 - 2^{\log_2^2 x}\right)\left(\log_2(3x+3) + \frac{4}{\log_2(3x+3)} - 4\right) \geqslant 0.$$

Тождественными преобразованиями получаем

$$\frac{\left(2^2 - 2^{\log_2^2 x}\right)(\log_2(3x+3)-2)^2}{\log_2(3x+3)} \geqslant 0. \tag{2}$$

В области $x > 0$ выражение $\log_2(3x+3)$ положительно, поэтому знаменатель в (2) можно отбросить:

$$\left(2^2 - 2^{\log_2^2 x}\right)(\log_2(3x+3)-2)^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Если $\log_2(3x+3) = 2$, т. е. $x = \frac{1}{3}$, то левая часть (3) обращается в нуль. Значит, $x = \frac{1}{3}$ — решение исходного неравенства.

В случае $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ можно сократить положительный множитель $(\log_2(3x+3)-2)^2$ и перейти к более простому неравенству

$$2^2 - 2^{\log_2^2 x} \geqslant 0.$$

Отсюда последовательно находим: $\log_2^2 x \leqslant 2$, $-\sqrt{2} \leqslant \log_2 x \leqslant \sqrt{2}$, $2^{-\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 2^{\sqrt{2}}$. Поскольку $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{-1{,}5} < 2^{-\sqrt{2}}$, то весь найденный промежуток попадает в область $x > \frac{1}{3}$ и, следовательно, в множество решений исходной задачи.

Наименьшим решением очевидно является $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{2}}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{3}$.

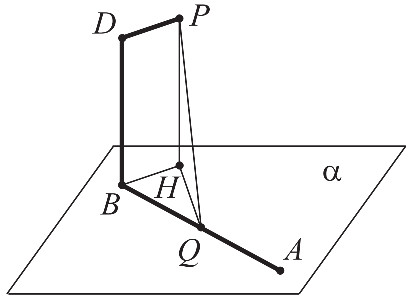

Рис. **62**

5. Через ребро AB проведем плоскость α, перпендикулярную отрезку BD. Понятно, что α параллельна CD (рис. 62). Опустим на α перпендикуляр PH. Искомый угол равен $\varphi = \angle HBQ$, если φ — острый, или $\pi - \varphi$, если φ — тупой. Выберем в качестве единицы длины $CD/4$. Тогда $CD = 4$, $BH = DP = 2$, $BQ = 3$, $PH = BD = 3$, $PQ = 5$. По теореме Пифагора $HQ^2 = PQ^2 - PH^2 = 16$. Наконец, по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{BH^2 + BQ^2 - HQ^2}{2BH \cdot BQ} = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\cos(\pi - \varphi) = \frac{1}{4}$, а искомый угол равен $\arccos\frac{1}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 44. **2.** $(-1)^k\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{14}$. **4.** $[3^{-\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{2}}] \cup \{6\}$, $x_{\max} = 6$. **5.** $\arccos\frac{11}{16}$. *Указание.* Пусть K — такая точка на ребре BD, что $PK \parallel AB$. Докажите, что $KQ \parallel CD$. Тогда искомый угол — это угол PKQ, который можно найти по теореме косинусов для треугольника PKQ.

Вариант 2.3. **1.** 65. **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 4\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{3}{4}\sqrt{11}$. **4.** $\left\{\frac{1}{8}\right\} \cup [4^{-\sqrt{2}}, 4^{\sqrt{2}}]$, $x_{\min} = \frac{1}{8}$. **5.** $\arccos\frac{13}{20}$. *Указание.* Через точку D проведем плоскость перпендикулярно AD и пусть Q — проекция точки B на эту плоскость. Искомый угол равен углу CDQ.

Вариант 2.4. **1.** 34. **2.** $(-1)^k\frac{4\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $10\sqrt{\frac{21}{11}}$. **4.** $[5^{-\sqrt{2}}, 5^{\sqrt{2}}] \cup \{12\}$, $x_{\max} = 12$. **5.** $\arccos\frac{47}{81}$. *Указание.* Пусть Q — такая точка на ребре AD, что $AQ : QD = 1 : 3$. Искомый угол равен углу MQN, который можно найти по теореме косинусов, примененной к треугольнику MNQ.

1997

Решение варианта 1.1

1. Пусть букварь стоит x сольдо. Тогда Пьеро имеет $x-10$ сольдо, а Мальвина $x-7$ сольдо. Вместе у них $2x-17$ сольдо. Они смогут купить букварь, если выполняется неравенство $2x-17 \geqslant x$, т. е. $x \geqslant 17$. Но из условия задачи следует, что $x \geqslant 18$ (так как Буратино не хватает на покупку 18 сольдо), поэтому покупка может состояться.

Ответ: Смогут.

2. Выражения, стоящие под знаками радикалов, определены и неотрицательны, если $x \geqslant 1$. Домножим уравнение на $\sqrt{x}+1$ и возведем в квадрат обе его части. Получим новое уравнение

$$128(\sqrt{x}-1)^7 = 2(\sqrt{x}+1)^2(x-1),$$

эквивалентное исходному при условии $x \geqslant 1$.

Разложим на множители $(x-1) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ и обозначим $y = \sqrt{x}$, тогда $64(y-1)^7 = (y+1)^3(y-1)$. Видно, что $y = 1$ — один из корней данного уравнения. Сокращая на $(y-1)$, извлекаем кубические корни из левой и правой частей: $4(y-1)^2 = y+1$. Отсюда $4y^2-9y+3=0$, $y_1 = \frac{9+\sqrt{33}}{8}$, $y_2 = \frac{9-\sqrt{33}}{8}$. Второй корень — посторонний, поскольку $y_2 < 1$, а должно быть $y = \sqrt{x} \geqslant 1$. Для y_1 условие $y \geqslant 1$ выполняется, поэтому $x = \left(\frac{9+\sqrt{33}}{8}\right)^2 = \frac{57+9\sqrt{33}}{32}$.

Ответ: 1, $\frac{57+9\sqrt{33}}{32}$.

3. Рассмотрим треугольник ABM (рис. 63). Его угол BMA равен углу MAD (как внутренние накрест лежащие при секущей AM). В свою очередь, $\angle MAD = \angle BAM$, поскольку по условию AM — биссектриса угла A. Следовательно, треугольник ABM — равнобедренный, $BM = AB = 15$. Аналогично, равнобедренным является треугольник DCK, $KC = CD = 15$. Пусть длина стороны BC равна x. Тогда

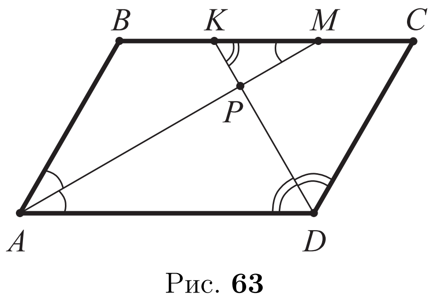

Рис. **63**

$AD = x$, $BK = MC = x - 15$, $KM = BC - (BK + MC) = 30 - x$. Треугольники KPM и APD подобны, отсюда

$$\frac{KM}{AD} = \frac{PM}{AP} = \frac{2}{3}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{30 - x}{x} = \frac{2}{3}, \quad x = 18.$$

Ответ: 18.

4. Левая и правая части уравнения определены, если выполняются следующие условия:

$$\cos 2x \neq \tfrac{1}{2}, \qquad \sin 2x \neq \tfrac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Умножая уравнение на знаменатели дробей, получаем эквивалентное исходному (в области определения) уравнение

$$\sqrt{3}\,\sin 4x - 2\sin 2x \sin 4x = \cos 4x - 2\cos 2x \cos 4x.$$

Используем формулу косинуса суммы двух аргументов, а затем преобразуем разность косинусов в произведение:

$$\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x = \tfrac{1}{2}\,\cos 4x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\sin 4x,$$
$$\cos 6x = \cos\bigl(4x + \tfrac{\pi}{3}\bigr), \qquad \sin\bigl(5x + \tfrac{\pi}{6}\bigr)\,\sin\bigl(x - \tfrac{\pi}{6}\bigr) = 0.$$

Далее рассмотрим два случая.

А. $\sin\bigl(x - \frac{\pi}{6}\bigr) = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Проверим условие (1). Так как $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, то $\cos 2x = \frac{1}{2}$ для всех целых значений k. Таким образом, ни один из корней найденной серии не принадлежит области определения исходного уравнения.

Б. $\sin\bigl(5x + \frac{\pi}{6}\bigr) = 0$, т. е. $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Заметим, что любое целое число n можно записать в виде $n = 5m + l$, где $m \in \mathbb{Z}$, а l принимает одно из значений 0, 1, 2, 3, 4. Если $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{(5m + l)\pi}{5}$, то $2x = -\frac{\pi}{15} + 2m\pi + \frac{2l\pi}{5}$, $\cos 2x = \cos\bigl(\frac{2l\pi}{5} - \frac{\pi}{15}\bigr)$, $\sin 2x = \sin\bigl(\frac{2l\pi}{5} - \frac{\pi}{15}\bigr)$. Полагая последовательно $l = 0, 1, 2, 3, 4$, нетрудно убедиться, что при $l = 1$ получается $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (и одновременно $\cos 2x = \frac{1}{2}$), а для остальных значений l условия (1) выполняются. Следовательно, корнями исходного уравнения являются все числа $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, кроме тех, для которых $n - 1$ делится на 5.

Ответ: $-\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$ $(n \neq 5m + 1;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$.

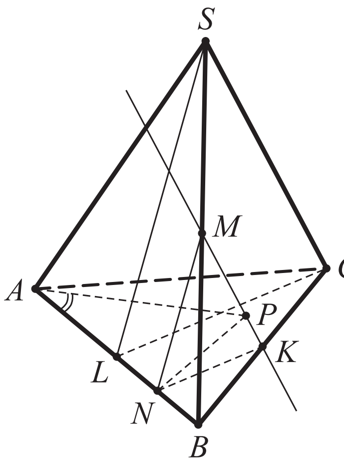

Рис. **64**

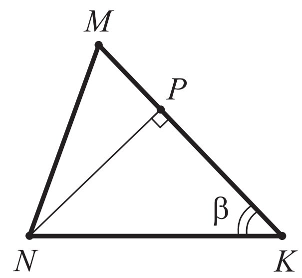

Рис. **65**

5. Опустим перпендикуляр MN из точки M на ребро AB и пусть L — середина AB (рис. 64). Тогда SL — высота равнобедренного треугольника ASB, $MN \parallel SL$. Так как M — середина SB, то $NB = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}AB$, поэтому $AN = \frac{3}{4}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что KN — средняя линия в треугольнике CLB, а CL — его высота, отсюда $KN \perp AB$. Таким образом, каждая из прямых MN и NK, лежащих в плоскости NKM, перпендикулярна прямой AB. Значит, AB перпендикулярна указанной плоскости. Отсюда вытекает, что для любой точки P, выбранной на прямой MK, треугольник ANP — прямоугольный, а для искомого угла PAB (обозначим его через α) имеем: $\operatorname{tg}\alpha = PN/AN$. Минимальным угол α будет в том случае, когда значение $\operatorname{tg}\alpha$ наименьшее. Знаменатель AN дроби PN/AN постоянен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha$ будет наименьшим, когда $NP \perp MK$, т. е. NP — высота треугольника MNK.

Найдем стороны треугольника MNK (рис. 65):

$$MN = \frac{1}{2}SL = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 - AL^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad MK = 2, \quad NK = \frac{1}{2}CL = \frac{3}{2}.$$

Пусть $\angle NKM = \beta$. По теореме косинусов $NM^2 = NK^2 + MK^2 - 2NK \cdot MK\cos\beta$. Отсюда $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $NP = NK\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, минимальное значение $\operatorname{tg}\alpha = NP/AN = 1/2$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** Смогут. **2.** $\frac{21+5\sqrt{17}}{8}$. **3.** 30. **4.** $\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$ $(n \neq 5m+4;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. *Указание.* Пусть N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на диагональ BD основания. Плоскость MNK перпендикулярна прямой BD. Угол PBD будет наименьшим, если NP — высота в треугольнике MNK.

Вариант 1.3. **1.** Не хватит. **2.** $\frac{1}{4}$, $\frac{21+5\sqrt{17}}{32}$. **3.** 15. **4.** $-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$ $(n \neq 5m+1;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. *Указание.* Перпендикуляры, опущенные из точек K и M на ребро AB, имеют общее основание N. Угол PAB будет наименьшим, если NP — высота в треугольнике MNK.

Вариант 1.4. **1.** Смогут. **2.** $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{8}\right)^2$. **3.** 32. **4.** $\frac{\pi}{42}+\frac{2\pi n}{7}$ $(n \neq 7m+4;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. *Указание.* Пусть точка N выбрана на ребре AB так, что $AN=3$. Плоскость KMN перпендикулярна прямой AB. Угол PAB будет наименьшим, если $NP \perp MK$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть в городе x мальчиков и y девочек, тогда $x+y$ — общее число детей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	капуста	аист	не знают
$x+y$	47,7%	15,1%	37,2%
x	33%	20%	47%
y	63%	?	?

Используя данные второго столбца этой таблицы, запишем соотношение «по капусте»:

$$0{,}477(x+y)=0{,}33\,x+0{,}63\,y.$$

Отсюда $0{,}147\,x=0{,}153\,y$, или $49\,x=51\,y$. Положим $m=\frac{x}{51}=\frac{y}{49}$. Тогда $x=51\,m$, $y=49\,m$, а разность $0{,}151(x+y)-0{,}2\,x=15{,}1\,m-10{,}2\,m=4{,}9\,m$ дает число девочек, которые считают, что их принес аист. Разделив эту разность на y и умножив на 100%, получим искомый результат: $\frac{4{,}9\,m}{49\,m} \cdot 100\% = 10\%$.

Ответ: 10%.

2. Сначала решим первое уравнение. При помощи формулы $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ это уравнение легко сводится к квадратному $10\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$, откуда получаем две серии корней:

$$\begin{aligned} &\sin x = \tfrac{1}{2}, && x_1 = (-1)^n \tfrac{\pi}{6} + \pi n && (n \in \mathbb{Z}); \\ &\sin x = -\tfrac{3}{5}, && x_2 = (-1)^{m+1} \arcsin \tfrac{3}{5} + \pi m && (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Далее возможны разные пути решения. Один из самых коротких — отбор корней прямой подстановкой во второе уравнение. Обозначим через $f(x)$ выражение в левой части второго уравнения и заметим, что $f(x) = 2\sin^2 x - 14\sin x \cos x + 6$.

Для корней первой серии имеем $\sin x_1 = \frac{1}{2}$, $\cos x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(x_1) = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}\sqrt{3} + 6 \neq 0$. Следовательно, в первой серии нет корней второго уравнения.

Возьмем теперь $x_2 = (-1)^{m+1} \arcsin\frac{3}{5} + \pi m$. Тогда $\sin x_2 = -\frac{3}{5}$, а для $\cos x_2$ получается две возможности:

$$\cos x_2 = \begin{cases} +4/5 & \text{при} \quad m = 2k, \\ -4/5 & \text{при} \quad m = 2k+1. \end{cases}$$

Используя эти соотношения, легко подсчитать, что $f(x_2) = 336/25$ для $m = 2k$ и $f(x_2) = 0$ для $m = 2k+1$. Таким образом, общим будет корень x_2 при нечетных m.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5} + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть $AD = 4x$, $BD = 5x$, $BC = y$, $AC = z$. Из подобия треугольников ABC и ADC следует $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ или $\frac{y}{10} = \frac{9x}{z} = \frac{z}{4x}$, откуда $36x^2 = z^2$, $z = 6x$, $BC = 10 \cdot \frac{9x}{6x} = 15$. Значение x найдем по теореме косинусов: $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos\angle ABC$, т. е. $x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

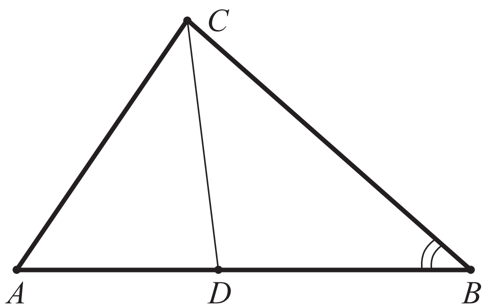

Рис. **66**

Рассмотрим каждый из найденных корней. Если $x = 2$, то $AB = 18$, $AC = 12$, $AC^2 + BC^2 = 144 + 225 > 324 = AB^2$. Значит, треугольник ABC остроугольный и корень $x = 2$ не противоречит условию задачи. В случае $x = \frac{5}{2}$ имеем $AB = 3 \cdot 7{,}5$, $AC = BC = 2 \cdot 7{,}5$, $AC^2 + BC^2 = 8 \cdot (7{,}5)^2 < 9 \cdot (7{,}5)^2 = AB^2$. Значит, треугольник тупоугольный и корень $x = \frac{5}{2}$ посторонний.

Теперь радиус описанной окружности легко найти по теореме синусов:

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{24}{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $24/\sqrt{7}$.

4. Обе части неравенства определены при $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{7}{9}$. Перейдем к логарифмам по основанию 3, соберем полученные дроби в одной части неравенства и приведем к общему знаменателю. В итоге придем к выражению

$$\frac{\log_3\left(x + \frac{2}{9}\right) - \log_3 \sqrt{x}}{\log_3 \sqrt{x}\, \log_3\left(x + \frac{2}{9}\right)} \geqslant 0. \tag{1}$$

Выясним, для каких значений x числитель данной дроби будет неотрицательным. В области определения исходного выражения неравенство $\log_3\left(x + \frac{2}{9}\right) - \log_3 \sqrt{x} \geqslant 0$ равносильно $x + \frac{2}{9} \geqslant \sqrt{x}$. Полагая $t = \sqrt{x}$, придем к обычному квадратному неравенству $t^2 - t + \frac{2}{9} \geqslant 0$, справедливому при $t \in \left(-\infty,\, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\, \infty\right)$. Отсюда с учетом области допустимых значений x получаем

$$x \in \left(0,\, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{4}{9},\, \tfrac{7}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9},\, 1\right) \cup (1,\, \infty). \tag{2}$$

Знак знаменателя дроби (1) определяется еще проще: он положителен при $x \in \left(0,\, \frac{7}{9}\right) \cup (1,\, \infty)$ и отрицателен при $x \in \left(\frac{7}{9},\, 1\right)$. Сопоставляя эти интервалы с множеством (2), замечаем, что числитель и знаменатель дроби (1) одновременно не могут быть отрицательными. Значит, решение исходной задачи получается из множества (2) удалением интервала $\left(\frac{7}{9},\, 1\right)$, на котором знаменатель отрицателен.

Ответ: $\left(0,\, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9},\, \frac{7}{9}\right) \cup (1,\, \infty)$.

5. Введем систему координат с началом в точке A, направив оси x, y и z вдоль лучей AB, AD и AA' соответственно (рис. 67).

По условию задачи имеем: $P = (1;\ 0;\ 4)$, $Q = (2;\ 3;\ 2)$ и, если y — ордината точки M, то $M = (2;\ y;\ 4)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $AP = AQ = \sqrt{17}$. Расстояния от точек P и Q до прямой AM равны соответственно $AP \sin\angle PAM$ и $AQ \sin\angle QAM$. Так как эти расстояния одинаковы, то $\sin\angle PAM = \sin\angle QAM$. Следовательно, углы $\angle PAM$ и $\angle QAM$ либо равны, либо составляют в сумме $180°$. Но тогда скалярные произведения $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AM}$ либо равны, либо отличаются знаком. Иными словами,

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot y + 4 \cdot 4 = \pm(2 \cdot 2 + 3 \cdot y + 2 \cdot 4),$$

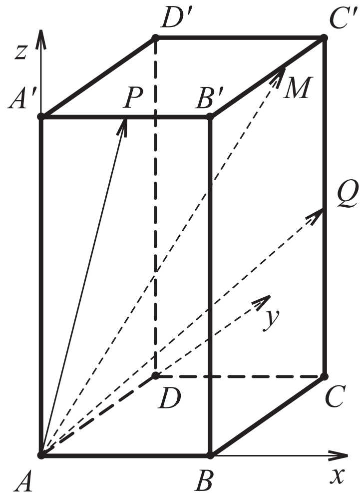

Рис. **67**

или $18 = \pm(3y+12)$. Отсюда следуют две возможности: $y=2$ и $y=-10$. Оба результата имеют геометрический смысл. В первом случае проекции точек P и Q на прямую AM лежат по одну сторону от точки A, а во втором — по разные стороны.

Ответ: 2 или 10.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 10,05%. **2.** $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** 3. **4.** $\left(0,\ \frac{9}{49}\right] \cup \left[\frac{16}{49},\ \frac{37}{49}\right) \cup (1,\ \infty)$. **5.** 2 или 10. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат.

Вариант 2.3. **1.** 79,5%. **2.** $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $8/\sqrt{5}$. **4.** $\left(0,\ \frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{9}{16},\ \frac{13}{16}\right) \cup (1,\ \infty)$. **5.** 1 или 16. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат.

Вариант 2.4. **1.** 25,6%. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $27\sqrt{3}$. *Указание.* Для установления соответствия вершин при подобии заметьте, что углом $60°$ в треугольнике ACD может быть только угол ACD. **4.** $\left(0,\ \frac{4}{25}\right] \cup \left[\frac{9}{25},\ \frac{19}{25}\right) \cup (1,\ \infty)$. **5.** 3. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат. В отличие от остальных вариантов этого года здесь реализуется только одно возможное положение точки M.

1998

Решение варианта 1.1

1. Пусть x — абсцисса общей точки графиков двух данных функций, тогда значения этих функций должны быть равны: $x^2+ax+a = (1-a)x^2-x$, т. е. x является корнем уравнения $ax^2+(a+1)x+a=0$. Условие задачи выполняется, если полученное уравнение имеет ровно один корень или вообще не имеет корней. Рассмотрим два случая.

Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным. Оно имеет не более одного корня тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен: $D = (a+1)^2 - 4a^2 = (1-a)(1+3a) \leqslant 0$, отсюда $a \leqslant -\frac{1}{3}$ или $a \geqslant 1$.

Если $a = 0$, то уравнение превращается в линейное $x = 0$, имеющее один корень. Следовательно, значение $a = 0$ тоже удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$.

2. Область определения левой и правой частей уравнения включает только те значения x, для которых одновременно выполнены неравенства $x^2+7x+2>0$ и $x+2>0$. Пусть

$$y = \frac{\sqrt{x^2+7x+2}}{\sqrt{x+2}},$$

тогда исходное уравнение запишется в виде $2+y = \frac{3}{y}$, или $y^2 + 2y - 3 = 0$. Решая получившееся квадратное уравнение, находим $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Значение y не может быть отрицательным, поэтому y_1 — посторонний корень. Полагая $y = 1$ и возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x^2+7x+2} = \sqrt{x+2}$. Возводя обе части в квадрат, имеем $x^2+7x+2 = x+2$, $x_1 = 0$, $x_2 = -6$. Корень $x_2 = -6$ является посторонним, так как $x_2 + 2 < 0$.

Ответ: 0.

3. Рассмотрим несколько возможных случаев взаимного расположения окружностей. Предположим, что искомая окружность касается заданных внешним образом. Пусть O — центр искомой окружности, K, L и M — точки ее касания с данными окружностями и стороной AB, G — середина отрезка BC (рис. 68). Обозначим неизвестный радиус через x и проведем через точку O прямую, параллельную AB. Пусть она пересечет стороны AD и BC в точках E и F соответственно, тогда $AE = BF = x$. В прямоугольном треугольнике DOE имеем: $DO = DK + KO = 2 + x$, $DE = AD - AE = 2 - x$, следовательно, $OE^2 = DO^2 - DE^2 = (2+x)^2 - (2-x)^2 = 8x$. Точно так же из прямоугольного треугольника OGF находим: $OG = 1 + x$, $GF = 1 - x$, $OF^2 = GO^2 - GF^2 = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 4x$. Замечая, что $OE + OF = AB = 2$, получаем уравнение $2\sqrt{x}\,(\sqrt{2}+1) = 2$, из которого $\sqrt{x} = 1/(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}-1$, $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

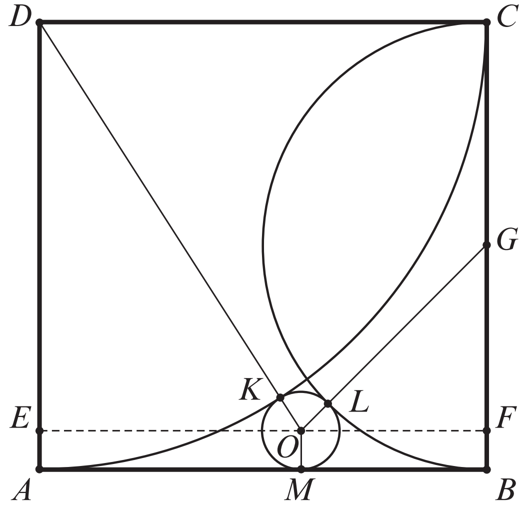

Рис. **68**

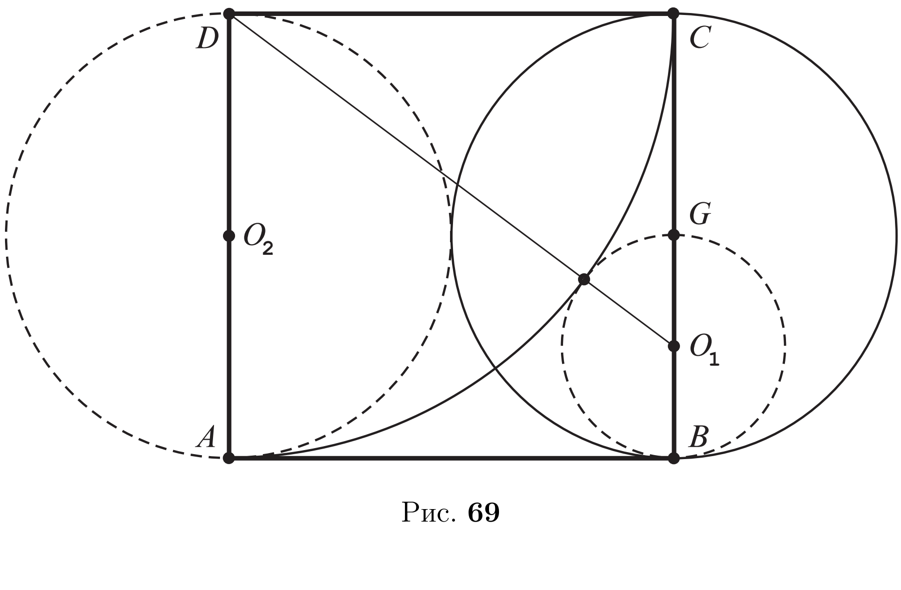

Рис. **69**

Рассмотрим теперь те случаи, когда искомая окружность касается одной из данных окружностей внутренним образом. Пусть это будет, например, та окружность, центр которой совпадает с серединой G стороны BC (рис. 69).

Поскольку и заданная, и искомая окружности касаются прямой AB, их точки касания с прямой должны совпадать, т. е. искомая окружность касается прямой AB в точке B, а ее центр O_1 лежит на стороне BC. Обозначим через r радиус окружности O_1. Как и ранее, из прямоугольного треугольника O_1DC находим: $CO_1 = 2-r$, $DO_1 = 2 + r$, $CD^2 = O_1D^2 - O_1C^2 = 8r$. Учитывая, что $CD^2 = 4$, получаем $r = 1/2$.

Еще один возможный случай — когда искомая окружность касается внутренним образом другой данной, центром которой является вершина D (рис. 69). Рассуждая аналогично, убеждаемся, что искомая окружность касается прямой AB в точке A, ее центр O_2 лежит на стороне AD квадрата, а радиус равен 1.

Ответ: $3 - 2\sqrt{2}$, $1/2$ и 1.

4. Положим $y = 2^{x-1}$, тогда $2^x = 2y$ и данное уравнение можно переписать в виде $3\cos 2y = 1 + 4\sin y$. Ясно, что должно выполняться условие $y > 0$. Используя формулу $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, легко преобразовать получившееся уравнение в квадратное $3\sin^2 y + 2\sin y - 1 = 0$ относительно $\sin y$. Его корнями являются числа -1 и $1/3$. Следовательно, возможны следующие случаи.

А. $\sin y = -1$, откуда $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Условие $y > 0$ выполняется только для целых $k \geqslant 1$. Полагая $2^{x-1} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и логарифмируя по основанию 2, находим первую серию корней исходного уравнения

$$x = 1 + \log_2\bigl(-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\bigr), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 1.$$

Б. $\sin y = 1/3$, т. е. $y = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Заметим, что $0 < \arcsin\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$, поэтому условие $y > 0$ выполняется при всех целых $n \geqslant 0$. Подставляя $y = 2^{x-1}$ и логарифмируя, находим еще одну серию корней:

$$x = 1 + \log_2\bigl((-1)^n \arcsin\tfrac{1}{3} + n\pi\bigr), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 0.$$

Ответ: $1+\log_2\big((-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+n\pi\big)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$; $1+\log_2\big(-\frac{\pi}{2}+$ $+\,2k\pi\big)$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\geqslant 1$.

5. Так как точка M равноудалена от вершин C и D, то она лежит в плоскости α, перпендикулярной прямой CD и проходящей через середину N отрезка CD. В этой же плоскости α находятся вершина S пирамиды и середина L стороны AB, поскольку они тоже равноудалены от точек C и D (рис. 70).

В то же время плоскость α параллельна прямой AD, поэтому плоскости α и SAD пересекаются по прямой l, параллельной AD (и, значит, плоскости основания $ABCD$). Точка M лежит на прямой l. Опустим перпендикуляр MO на плоскость SCD. По условию $SM=CM=DM$, поэтому, рассматривая равные прямоугольные треугольники SMO, DMO и CMO, нетрудно убедиться, что O — центр окружности, описанной около правильного треугольника SCD. Отсюда $SN=\sqrt{3}/2$, $SO=\sqrt{3}/3$.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью α (рис. 71) и опустим высоту SP в равнобедренном треугольнике SLN. Пусть $\angle SNP=\beta$, тогда $\cos\beta = PN : SN = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $\angle MSO =$ $=\angle SNP=\beta$, из прямоугольного треугольника SOM находим $SM = SO/\cos\beta = 1$.

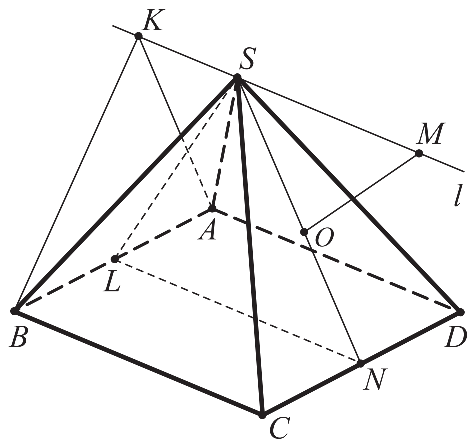

Рис. **70**

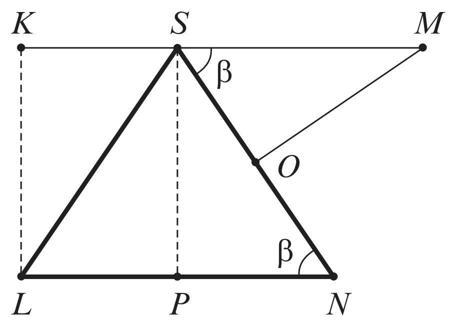

Рис. **71**

Для вычисления объема пирамиды $SMAB$ опустим из точки L перпендикуляр LK на прямую SM (рис. 71) и проведем плоскость ABK (рис. 70). Замечая, что прямые AB и LK перпендикулярны прямой SM, получаем, что MK — перпендикуляр к плоскости ABK. Равнобедренные треугольники SLN и KAB равны, поскольку равны их основания $AB = LN = 1$ и высоты

$$SP = LK = \sqrt{SN^2 - PN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак, площадь S_{ABK} треугольника ABK равна $\frac{1}{2}AB \cdot LK = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Искомый объем пирамиды $SMAB$ легко вычислить, рассматривая разность объемов пирамид $MKAB$ и $SKAB$:

$$V_{SMAB} = V_{MKAB} - V_{SKAB} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABK} \cdot (MK - SK) = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \{0\} \cup [2, \infty)$. **2.** 2. **3.** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, 1 и $\frac{1}{3}$. *Указание.* Искомая окружность может касаться обеих заданных внешним образом, либо одной из них — внешним, а другой — внутренним образом. **4.** $\log_2(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$; $\log_2\left(\pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ и $\log_2 \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **5.** 2. *Указание.* Точка M лежит на линии пересечения плоскости AKD с плоскостью, перпендикулярной отрезку CD и проходящей через его середину. Эта линия — прямая, соединяющая середины отрезков $A'B'$ и $C'D'$.

Вариант 1.3. **1.** $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$. **2.** 9. **3.** $4(5 - 2\sqrt{6})$, 2 и $\frac{4}{3}$. *Указание.* Искомая окружность может касаться обеих заданных внешним образом, либо одной из них — внешним, а другой — внутренним образом. **4.** $\log_2\left((-1)^{n+1} \arcsin\frac{3}{4} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$; $\log_2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$. **5.** $5\sqrt{3}/6$. *Указание.* Точка M лежит на линии пересечения плоскости $AA'C'C$ с плоскостью, перпендикулярной отрезку $B'C'$ и проходящей через его середину. Эта линия — прямая AA'.

Вариант 1.4. **1.** $\left(-\infty,\,-2\right] \cup \{0\} \cup \left[\,\frac{2}{3},\,\infty\right)$. **2.** 4. **3.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$. *Указание.* Искомая окружность может касаться обеих заданных внешним образом, либо одной из них — внешним, а другой — внутренним образом. **4.** $1+\log_2(2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, $k>0$; $1+\log_2\left(\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2n\pi\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n>0$ и $1+\log_2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. **5.** 4. *Указание.* Точка M лежит на линии пересечения плоскости $AB'C'D$ с плоскостью, перпендикулярной отрезку $C'D'$ и проходящей через его середину. Эта линия — прямая, соединяющая центры граней $AA'B'B$ и $DD'C'C$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x и y — количества акций, проданных соответственно в первый день и через неделю, a — начальная стоимость каждой акции, k — коэффициент, который показывает, как изменилась стоимость одной акции за неделю, z — общая сумма, вырученная Биллом за две продажи. Общее число акций равно $x+y$. Если бы они все были проданы в первый день, то выручка составила бы $a(x+y)$, а если бы все они были проданы через неделю — то выручка была бы равна $ka(x+y)$. Из условия задачи вытекает, что

$$\begin{cases} a(x+y)=1{,}25\,z, \\ 1{,}6\,ka(x+y)=z. \end{cases}$$

Подставляя выражение для $a(x+y)$ из первого уравнения во второе и сокращая на z ($z\neq 0$ по смыслу задачи), находим $k=0{,}5$. Значит, стоимость каждой акции уменьшилась за неделю в 2 раза.

Ответ: В 2 раза.

2. В зависимости от знаков величин x и $y-2$ возможны четыре случая преобразования выражений $|x|$ и $|y-2\,|$.

А. Пусть $x\geqslant 0$, $y\geqslant 2$. Тогда $|x|=x$, $|y-2\,|=y-2$ и данная в условии система уравнений приводится к виду:

$$\begin{cases} 2x+5y=21, \\ x+2y=5. \end{cases}$$

Ее решениями будут $x=-17$, $y=11$. Но $x=-17<0$, поэтому найденное решение не удовлетворяет исходной системе уравнений.

Б. Пусть теперь $x \geqslant 0$, $y < 2$. Тогда $|x| = x$, $|y-2| = 2-y$ и приходим к системе

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Решая ее, находим $x = 3$, $y = 1$. Условия $x \geqslant 0$, $y < 2$ выполнены.

В. Для случая $x < 0$, $y \geqslant 2$ имеем $|x| = -x$, $|y-2| = y-2$. Получается система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 21, \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$$

Ее корнями являются $x = 17/9$, $y = 31/9$. Для исходной системы эти корни посторонние, поскольку $x = 17/9 > 0$.

Г. Наконец, в случае $x < 0$, $y < 2$ заданная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$$

Ее корни $x = -27$, $y = -11$ удовлетворяют исходной системе.

Итак, задача имеет два решения, найденные в пунктах Б и Г.

Ответ: (3; 1), (−27; −11).

3. Пусть $r_1 = 12$, $r_2 = 9$ и r — радиусы окружностей, вписанных соответственно в прямоугольные треугольники ABM, AKM

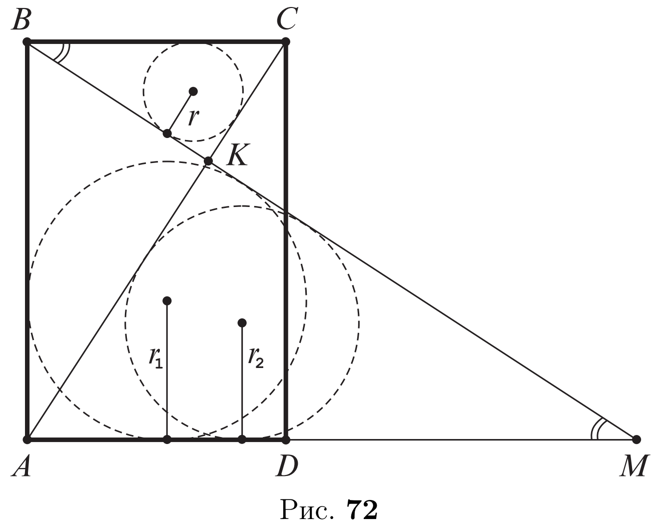

Рис. **72**

и BKC. Заметим, что все три указанных треугольника подобны, поскольку острый угол AMB является общим для первых двух треугольников и равен углу KBC третьего из них (рис. 72).

Воспользуемся тем, что для любой пары подобных треугольников отношение радиусов вписанных в них окружностей равно отношению соответственных сторон, то есть коэффициенту подобия (докажите самостоятельно это простое утверждение). Используя данное свойство, из подобных треугольников AMB и AMK находим

$$\frac{BM}{AM} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}.$$

Положим $AM = 3x$, тогда $BM = 4x$. Из подобия вытекает также соотношение $KM : AM = AM : BM$. Следовательно,

$$KM = \frac{AM^2}{BM} = \frac{9x}{4}, \quad BK = BM - KM = \frac{7x}{4}.$$

Рассмотрим теперь подобные треугольники AKM и BKC. Как и ранее,

$$\frac{r}{r_1} = \frac{BK}{MK} = \frac{7x}{4} : \frac{9x}{4} = \frac{7}{9},$$

поэтому искомый радиус $r = \dfrac{7r_1}{9} = 7$.

Ответ: 7.

4. Заметим, что левая часть уравнения определена только для значений x, удовлетворяющих условию $\cos 2x \neq 0$. Домножим левую и правую части на $\cos 2x$ и воспользуемся формулами $\cos 2x - \cos 6x = 2\sin 4x \sin 2x = 4\cos 2x \sin^2 2x$. После элементарных преобразований исходное уравнение приводится к виду

$$2\cos 2x \sin^2 2x + \cos 2x \sin 2x = 0.$$

Вынося за скобки общие множители, получаем уравнение

$$\cos 2x \sin 2x (2\sin 2x + 1) = 0.$$

С учетом ограничения $\cos 2x \neq 0$ возможны два случая.

А. $\sin 2x = 0$, т. е. $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Для всех корней полученной серии выполняется условие $\cos x = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$.

Б. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, тогда $2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. И в этом случае условие $\cos 2x \neq 0$ выполняется для всех корней, поскольку если $\sin 2x = -1/2$, то $\cos 2x$ может принимать одно из двух возможных значений: $\sqrt{3}/2$ или $-\sqrt{3}/2$.

Ответ: $\frac{k\pi}{2}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

5. Проведем в треугольнике SMN высоту SK. Покажем, что прямая MN касается окружности, вписанной в основание ABC данной пирамиды, в точке K.

Пусть O — центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$. Пирамида правильная, поэтому O лежит на высоте SH, причем H — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Опустим в треугольнике SKH перпендикуляр OE из точки O на прямую SK (рис. 73). Заметим, что $HK \perp MN$, так как HK — проекция наклонной SK на плоскость основания, а по построению $SK \perp MN$. Следовательно, по признаку перпендикулярности ($MN \perp SK$, $MN \perp HK$), прямая MN перпендикулярна плоскости SKH и, в частности, $MN \perp OE$. Поскольку OE — перпендикуляр к плоскости SMN, опущенный из центра сферы O, то OE — радиус сферы, E — точка ее касания с плоскостью SMN.

Опустим перпендикуляр OF на боковую грань SBC. Его основание F (точка касания сферы с гранью) лежит на апофеме ST (докажите!). Отсюда вытекает равенство прямоугольных треугольников SFO и SEO: у них общая гипотенуза SO и равные катеты — радиусы вписанной сферы OF и OE. Значит, равны их острые углы FSO и ESO.

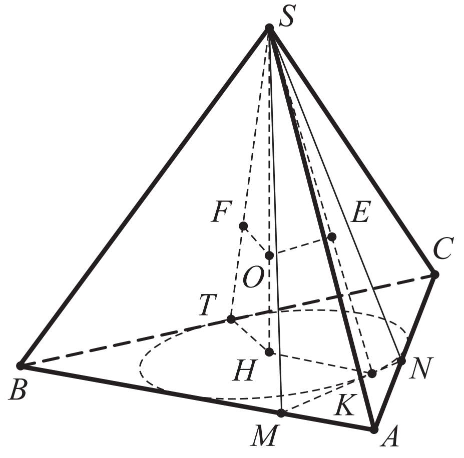

Рис. **73**

Возьмем теперь прямоугольные треугольники STH и SKH. У них общий катет SH и равны острые углы при вершине S, поэтому $HT = HK$. Но точка T — середина стороны BC правильного треугольника ABC и одновременно точка касания окружности, вписанной в $\triangle ABC$, со стороной BC. Следовательно, HK и HT равны $1/\sqrt{3}$ — радиусу R вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Мы уже установили, что $HK \perp MN$, поэтому прямая MN касается указанной окружности в точке K. По теореме Пифагора

$$SK^2 = HK^2 + SH^2 = \frac{1}{3} + \frac{22}{9} = \frac{25}{9},$$

а площадь треугольника SMN по условию

$$S_{SMN} = \frac{1}{2}\,SK \cdot MN = \frac{7}{12}.$$

Отсюда легко находим ответ на первый вопрос задачи: $MN = \frac{7}{10}$.

Для определения объема пирамиды $SMNA$ найдем площадь треугольника AMN. Пусть P и Q — соответственно точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC, тогда $AQ = AP = \frac{1}{2}\,AB = 1$ (рис. 74).

Заметим, что $MP = MK$ и $NQ = NK$ как отрезки касательных к окружности, проведенные соответственно из точек M и N, поэтому $PM + QN = MK + KN = MN$.

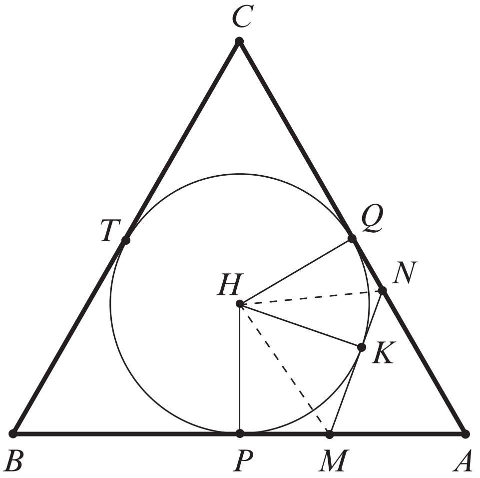

Рис. **74**

Легко убедиться, что площадь четырехугольника $PHQA$ составляет $\frac{1}{3}$ площади основания ABC, равной $\frac{1}{2}\,AB \cdot AC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. Учитывая, что $HP = HK = HQ = 1/\sqrt{3}$, находим

$$\begin{gathered} S_{AMN} = S_{PHQA} - S_{HMN} - S_{HPM} - S_{HQN} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\,(HP \cdot PM + HK \cdot MN + HQ \cdot QN) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\,R \cdot (PM + QH + MN) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{\sqrt{3}}{10}. \end{gathered}$$

Следовательно, объем V пирамиды $SAMN$ равен

$$V = \frac{1}{3}\,SH \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{22}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{66}}{90}.$$

Замечание. Площадь треугольника AMN можно найти другим способом. Положим $AM = x$, $AN = y$. Тогда по теореме косинусов

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60°$, т. е.

$$x^2 + y^2 - xy = \frac{49}{100}.$$

С другой стороны, $MP = 1-x$, $NQ = 1-y$, и поскольку $QN+PM = MN$, составляем второе уравнение:

$$x + y = \frac{13}{10}.$$

Решая полученную систему, находим $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{1}{2}$ (или $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{5}$). Таким образом, $S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{10}$.

Ответ: а) $\frac{7}{10}$; б) $\frac{\sqrt{66}}{90}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 1000. **2.** (5; 6). **3.** 12. *Указание.* Отношение радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники, равно коэффициенту подобия. **4.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **5.** а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{9}$. *Указание.* Покажите, что отрезок MN касается окружности, вписанной в основание пирамиды.

Вариант 2.3. **1.** В 16 раз. **2.** (3; 6). **3.** 5. *Указание.* Отношение радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники, равно коэффициенту подобия. **4.** $k\pi$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **5.** а) $\frac{13}{15}$; б) $\frac{4\sqrt{6}}{45}$. *Указание.* Покажите, что отрезок MN касается окружности, вписанной в основание пирамиды.

Вариант 2.4. **1.** В 1,8 раза. **2.** (4; −1), (0; −3). **3.** 10. *Указание.* Отношение радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники, равно коэффициенту подобия. **4.** $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **5.** а) $\frac{7}{18}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{81}$. *Указание.* Покажите, что отрезок MN касается окружности, вписанной в основание пирамиды.

1999

Решение варианта 1.1

1. Подкоренные выражения должны быть неотрицательны, поэтому $1 \leqslant x \leqslant 3$. Учитывая, что для найденного множества значений x обе части данного неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат и приходим к равносильному неравенству $5x - 3 + 2\sqrt{4x^2 - 4} \leqslant 3 - x$, которое приводим к виду $\sqrt{4x^2 - 4} \leqslant 3 - 3x$. Правая часть не может быть отрицательной, поэтому $x \leqslant 1$. Сравнивая с найденным выше промежутком допустимых значений x, получаем единственное возможное значение $x = 1$. Проверка показывает, что это действительно решение неравенства.

Ответ: 1.

2. Отметим, что $x \neq 0$. Преобразуя сумму синусов в правой части уравнения в удвоенное произведение синуса полусуммы и косинуса полуразности аргументов, а левую часть — по формуле синуса двойного угла, получаем

$$2\sin\left(2x + \tfrac{3}{2x}\right)\,\cos\left(2x + \tfrac{3}{2x}\right) = 2\sin\left(2x + \tfrac{3}{2x}\right)\,\cos\left(2x - \tfrac{3}{2x}\right).$$

Первую серию решений находим, приравнивая нулю общий множитель $\sin\left(2x + \frac{3}{2x}\right) = 0$, $2x + \frac{3}{2x} = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Квадратное уравнение $4x^2 - 2k\pi x + 3 = 0$ имеет корни только для тех значений k, при которых его дискриминант неотрицателен. С учетом этого ограничения получаем

$$x = \tfrac{1}{4}\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 12}\right) \quad (k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ \pm 1).$$

Сократив теперь общий множитель, приходим к уравнению

$$\cos\left(2x + \tfrac{3}{2x}\right) = \cos\left(2x - \tfrac{3}{2x}\right).$$

Преобразуя разность косинусов в произведение и приравнивая сомножители нулю, получим еще две серии решений: $x = \frac{n\pi}{2}$ или $x = \frac{3}{2m\pi}$. В обеих сериях m, n — целые числа, и $m \neq 0$, $n \neq 0$, так как $x \neq 0$.

Ответ: $\frac{1}{4}\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 12}\right)$ $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \pm 1)$; $\frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$; $\frac{3}{2m\pi}$ $(m \in \mathbb{Z}, m \neq 0)$.

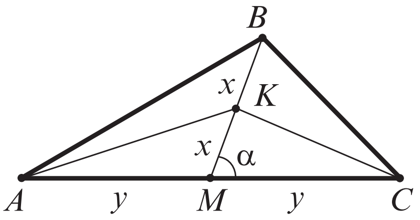

Рис. **75**

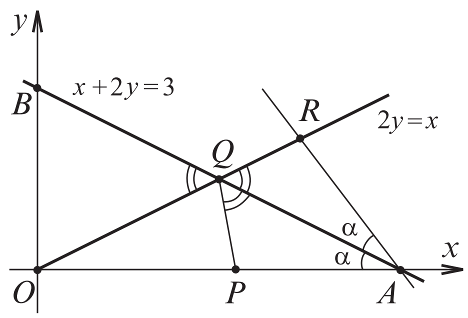

Рис. **76**

3. Пусть $BK = KM = x$, $AM = MC = y$, $\angle BMC = \alpha$ (рис. 75). Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, воспользуемся теоремой косинусов для четырех треугольников ABM, BCM, AKM, KCM и запишем следующую систему равенств:

$$AB^2 = 4x^2 + y^2 + 4xy\cos\alpha, \quad BC^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy\cos\alpha,$$
$$AK^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha, \quad CK^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha.$$

Из первых двух соотношений следует, что $AB^2 - BC^2 = 8xy\cos\alpha$, а из следующих двух получаем $AK^2 - CK^2 = 4xy\cos\alpha$. Значит, $AB^2 - BC^2 = 2\left(AK^2 - CK^2\right)$. Длины трех отрезков в этом равенстве заданы в условии задачи, поэтому

$$CK^2 = \frac{2AK^2 - AB^2 + BC^2}{2} = 24.$$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

4. Прямая $x + 2y = 3$ пересекает оси координат в точках $A(3;\ 0)$ и $B\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. Луч, проходящий через начало координат и точку $(2;\ 1)$, задается уравнением $2y = x$. Легко определить, что он пересекает заданную прямую в точке $Q\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{4}\right)$. Пусть отраженный луч пересечет ось x в точке P. Отложим на луче OQ отрезок QR, равный QP (рис. 76).

Заметим, что по закону отражения $\angle PQA = \angle OQB$, а углы $\angle RQA$ и $\angle OQB$ равны как вертикальные. Следовательно, $\angle RQA = \angle PQA$ и треугольники RQA и PQA равны по двум сторонам и углу между ними. Пусть $\angle PAQ = \angle RAQ = \alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника OAB определяем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Найдем уравнение прямой AR. Ее угловой коэффициент равен

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = -\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Точка $A(3;\,0)$ принадлежит прямой AR, поэтому уравнение AR имеет вид $y = -\frac{4}{3}x+4$. Прямая OQ задается, как уже отмечалось выше, уравнением $2y = x$. Точка R принадлежит обеим прямым, решая соответствующую систему уравнений, находим координаты $R\left(\frac{24}{11};\,\frac{12}{11}\right)$. Таким образом,

$$AP = AR = \sqrt{\left(3-\frac{24}{11}\right)^2+\left(\frac{12}{11}\right)^2} = \frac{15}{11}.$$

Поэтому $OP = OA - AP = 3 - \frac{15}{11} = \frac{18}{11}$.

Ответ: $\left(\frac{18}{11};\,0\right)$.

5. Докажем сначала одно простое вспомогательное утверждение. Пусть задана некоторая плоскость α и две точки, P и Q, не принадлежащие ей. Опустим из точек перпендикуляры PM и QN на плоскость α и проведем к ней произвольным образом две наклонных PR и QS так, чтобы прямые PR и QS были параллельны (рис. 77). Легко заметить, что прямоугольные треугольники PMR и QNS подобны, поскольку их острые углы MPR и NQS равны как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно,

$$\frac{PM}{QN} = \frac{PR}{QS}. \qquad (1)$$

Вернемся теперь к исходной задаче. Пусть точки D, E, P и Q — соответственно середины ребер AA_1, AC, AB и CC_1 данной призмы. Обозначим через S точку пересечения заданной в условии плоскости α с прямой CC_1 (рис. 78). Проведем через точку P прямую, параллельную боковым ребрам призмы. Ясно, что эта прямая лежит в плоскости AA_1B_1B и пересекает отрезок B_1D в некоторой точке R. Таким образом, к плоскости α проведены наклонные PR и QS.

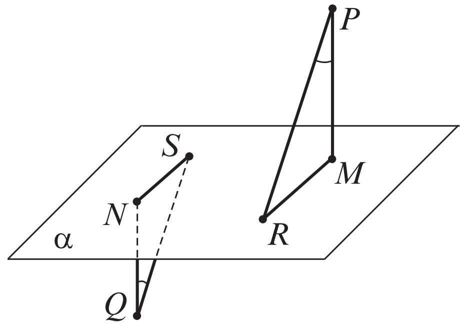

Рис. **77**

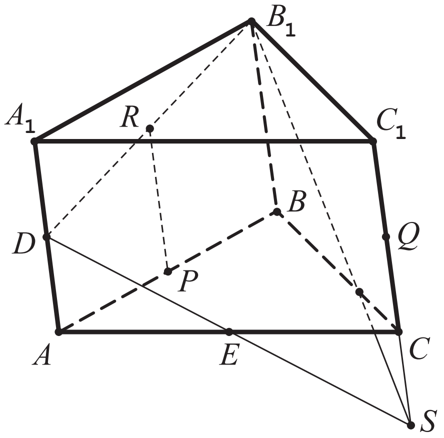

Рис. **78**

Пусть a — длина боковых ребер призмы. Тогда $PR = 3a/4$ как средняя линия трапеции ADB_1B. Из очевидного равенства треугольников ADE и CSE вытекает, что $CS = a/2$, отсюда $QS = a$. Обозначим через h_P неизвестное расстояние от точки P до плоскости α, $h_Q = 9$ — заданное расстояние от точки Q. Тогда из (1) следует, что

$$\frac{h_P}{h_Q} = \frac{PR}{QS} = \frac{3}{4}, \quad h_P = \frac{3}{4}h_Q = \frac{27}{4}.$$

Ответ: $27/4$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** 3. **2.** $\frac{1}{6}\big((2k+1)\pi \pm \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 12}\big)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, -1$); $\frac{2n\pi}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$); $\frac{1}{2m\pi}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$). **3.** $2\sqrt{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольников ABM, BMC, KMC и AMK и получите соотношение, которое связывает длины отрезков AB, BC, CK и AK. **4.** $\big(\frac{42}{19}; 0\big)$. **5.** 10. *Указание.* Пусть P — середина ребра B_1C_1. Проведем из точки P наклонную PR к заданной плоскости α так, чтобы прямая PR была параллельна боковым ребрам призмы. Отношение расстояний от точек P и A_1 до плоскости α равно отношению длин наклонной PR и ребра AA_1.

Вариант 1.3. **1.** 1. **2.** $\frac{1}{2}\big((2k+1)\pi \pm \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 10}\big)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, -1$); $\frac{(4n+1)\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$); $\frac{5}{(4m+1)\pi}$ ($m \in \mathbb{Z}$). **3.** $3\sqrt{2}$. *Указание.* Получите соотношение, которое связывает длины отрезков AB, BC, CK и AK. **4.** $\big(\frac{30}{23}; 0\big)$. **5.** 9. *Указание.* Пусть P и Q — середины ребер B_1C_1 и AA_1 соответственно. Проведем наклонные PR и QS к заданной плоскости α так, чтобы прямые PR и QS были параллельны прямой A_1C_1. Отношение расстояний от точек P и Q до плоскости α равно отношению длин наклонных PR и QS.

Вариант 1.4. **1.** 2. **2.** $\frac{1}{2}\bigl(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 10}\,\bigr)$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0,\ \pm 1)$; $\frac{(4n+1)\pi}{4}$ $(n \in \mathbb{Z})$; $\frac{10}{(4m+1)\pi}$ $(m \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{6}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольников ABM, BMC, KMC и AMK и получите соотношение, которое связывает длины отрезков AB, BC, CK и AK. **4.** $\bigl(\frac{84}{41};\ 0\bigr)$. **5.** 5. *Указание.* Пусть P — середина ребра CC_1, R — точка пересечения заданной плоскости α с прямой CC_1. Отношение расстояний от точек P и B_1 до плоскости α равно отношению длин отрезка PR и ребра BB_1.

Решение варианта 2.1

1. Подкоренное выражение не может быть отрицательным, поэтому множеством допустимых значений для x является $(-\infty,\ 0\,] \cup [\,1,\ \infty)$. Положим $t = \sqrt{x^2 - x}$. Тогда исходное неравенство можно записать в виде $t^2 - 2t - 15 < 0$. Отсюда $-3 < t < 5$. Но $t \geqslant 0$, поэтому $0 \leqslant t < 5$. Возводя в квадрат неравенство $t < 5$, получаем $x^2 - x < 25$. Решая последнее квадратное неравенство и учитывая ограничения для допустимых значений x, находим окончательное решение задачи.

Ответ: $\bigl(\frac{1-\sqrt{101}}{2},\ 0\,\bigr] \cup \bigl[\,1,\ \frac{1+\sqrt{101}}{2}\,\bigr)$.

2. Заметим, что должно выполняться условие $\cos\frac{x}{4} \neq 0$. Отсюда следует, что $\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x \neq (4n+2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Для остальных значений x исходное уравнение равносильно уравнению $\sin\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{4}$. С помощью формул приведения и преобразования разности синусов в произведение последовательно получаем

$$\sin\frac{x}{3} - \sin\Bigl(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\Bigr) = 0, \quad 2\cos\Bigl(\frac{x}{24} + \frac{\pi}{4}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{7x}{24} - \frac{\pi}{4}\Bigr) = 0.$$

Приравнивая сомножители нулю, рассмотрим два случая.

А. Пусть $\cos\bigl(\frac{x}{24} + \frac{\pi}{4}\bigr) = 0$, тогда $\frac{x}{24} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Вычисляя значение $\frac{x}{4}$, находим $\frac{x}{4} = \frac{3\pi}{2} + 6k\pi$. Значит, $\cos\frac{x}{4} = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}$ и все корни найденной серии являются посторонними.

Б. Пусть теперь $\sin\bigl(\frac{7x}{24} - \frac{\pi}{4}\bigr) = 0$. Тогда $\frac{7x}{24} - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = \frac{(24k+6)\pi}{7}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Посторонними в найденной серии будут значения x для тех k, для которых при некотором $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\frac{(24k+6)\pi}{7} = (4n+2)\pi$, или, после элементарных преобразований, $6k = 7n + 2$. Каждое целое число k можно представить в виде $k = 7m + r$, где m — целое, а r — остаток от деления k на 7, который может принимать только одно из значений $0, 1, \ldots, 6$. Рассматривая все возможные значения остатка r, при $r = 5$ находим, что $6(7m+5) = 7(6m+4) + 2$. Следовательно, если $k = 7m + 5$, то соответствующий этому значению k корень серии является посторонним для исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{7}(6 + 24k)\pi$ $(k \neq 7m + 5;\ k,\ m \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть $AB = 8$, $BC = 6$, O — центр описанной около прямоугольника окружности. Ее диаметр равен 10. Будем считать для определенности, что точка M лежит на дуге AB (рис. 79). Так как треугольники OMP и OMQ прямоугольные, то точки O, P, M, Q лежат на окружности с диаметром $OM = 5$ и радиусом $r = 5/2$.

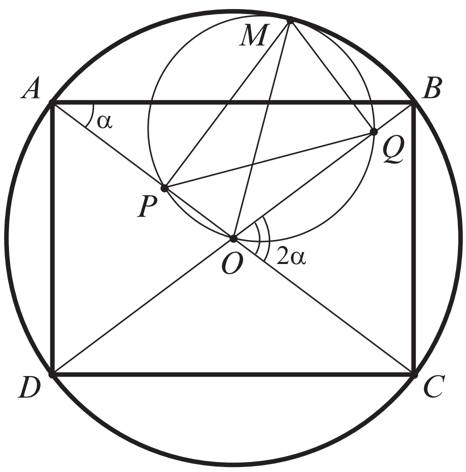

Рис. **79**

Положим $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Легко заметить, что $\angle COB = 2\alpha$, $\angle QOP = \pi - 2\alpha$. Треугольник POQ вписан в окружность радиуса r, поэтому

$$PQ = 2r\sin(\pi - 2\alpha) = 2r\sin 2\alpha = 4r\sin\alpha\cos\alpha = 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}.$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда точка M расположена на других дугах окружности O или совпадает с одной из вершин прямоугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{24}{5}$.

4. Выражения, стоящие под знаком логарифма, должны быть положительными, отсюда $\log_3 x > 0$, т. е. $x \in (1, \infty)$. Ясно, что для таких значений x определен и тоже является положительным $\log_x 3$. Воспользуемся равенством $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, а также формулой перехода к новому основанию (равному 3), и проделаем следующие равносильные преобразования исходного неравенства:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\log_3\log_x 3+\log_x\log_3 x\leqslant 0,\quad -\frac{\log_3\log_3 x}{\sqrt{3}}+\frac{\log_3\log_3 x}{\log_3 x}\leqslant 0,$$

$$\frac{(\sqrt{3}-\log_3 x)\log_3\log_3 x}{\sqrt{3}\,\log_3 x}\leqslant 0.$$

Знаменатель последней дроби положителен для всех $x>1$, поэтому далее рассмотрим два возможных случая.

А. $\log_3\log_3 x\geqslant 0$ и $\sqrt{3}-\log_3 x\leqslant 0$. Первое неравенство выполняется, если выполнено второе, т. е. $\log_3 x\geqslant\sqrt{3}$. Значит, решения этой системы неравенств образуют множество $[\,3^{\sqrt{3}},\,\infty)$.

Б. $\log_3\log_3 x\leqslant 0$ и $\sqrt{3}-\log_3 x\geqslant 0$. Из первого неравенства вытекает, что $\log_3 x\leqslant 1$. С учетом области допустимых значений $x\in(1,\,3\,]$. Второе неравенство для таких x верно.

Объединив найденные множества, получим решение исходной задачи.

Ответ: $(1,\,3\,]\cup[\,3^{\sqrt{3}},\,\infty)$.

5. Пусть P, Q — точки пересечения прямых AB и KN, AD и KN соответственно, точка F выбрана на ребре AB так, что $AF:FB=1:2$. Проведем через точку F плоскость, параллельную плоскости SQP. Она пересечет прямые SA и AD в некоторых точках H и G (рис. 80). Тогда FGH — искомое сечение.

Сравним длины сторон KN и FG треугольников SKN и HFG, а также высоты, проведенные к этим сторонам. Нетрудно заметить, что по построению $FH\parallel PS$, $FG\parallel PQ$ и $GH\parallel SQ$. Отсюда вытекает, что треугольники SPQ и HFG подобны.

Чтобы найти коэффициент подобия, рассмотрим трапецию

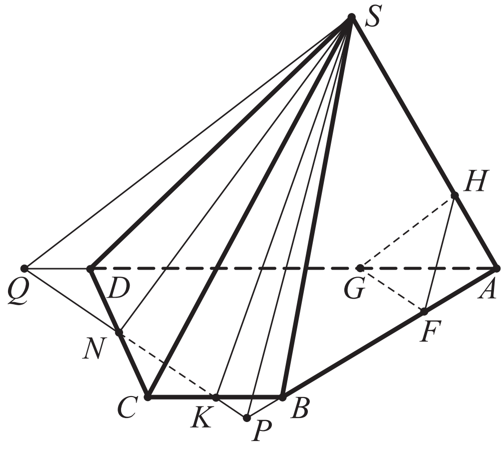

Рис. **80**

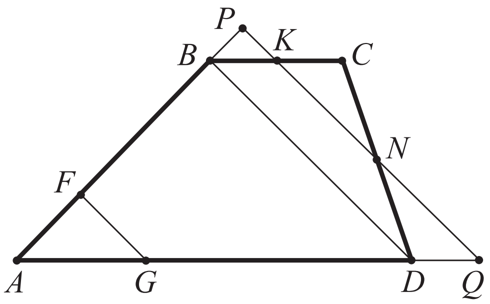

Рис. **81**

$ABCD$ и подобные треугольники AFG и APQ (рис. 81). Найдем отношение $AG : AQ$. Треугольники KCN и QDN равны, поскольку равны их стороны CN и ND и прилежащие к ним углы. Положим $BC = a$, тогда $KC = \frac{a}{2}$, $AQ = AD + DQ = 3 \cdot BC + KC = \frac{7}{2}\,a$, в то время как $AG = \frac{1}{3}\,AD = a$. Отсюда $AG : AQ = FG : PQ = 2 : 7$.

Пусть высота треугольника SPQ, проведенная из вершины S и совпадающая с высотой треугольника SKN, равна h. Отношение соответствующих высот в подобных треугольниках равно коэффициенту подобия, поэтому высота h_1 треугольника HFG, проведенная из вершины H, равна $\frac{2}{7}\,h$. Если $KN = b$, то $BD = 2b$ и $FG = \frac{1}{3}\,BD = \frac{2}{3}\,b$. Площадь треугольника SKN по условию равна 21, т. е. $bh = 42$. Теперь легко определить площадь треугольника HFG, которая равна $\frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\,h \cdot \frac{2}{3}\,b = \frac{2}{21} \cdot hb = 4$.

Ответ: 4.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $\left(1 - \sqrt{17},\, 0\right] \cup \left[2,\, 1 + \sqrt{17}\,\right)$. **2.** $\frac{1}{9}\,(30 + 40k)\pi$ $(k \neq 9m + 6;\ k, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $2\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть O — точка пересечения заданных прямых. Точки P и Q лежат на окружности, диаметром которой является отрезок OM. Один из двух углов, POQ или PMQ, равен 60°, и так как они опираются на хорду заданной длины в окружности, то ее диаметр OM — постоянный. **4.** $\left(0,\, 2^{-\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{2},\, 1\right)$. **5.** 42. *Указание.* Пусть P, Q — точки пересечения прямых AB и LN, BC и LN соответственно, HFG — треугольник, получившийся в сечении, FG — его сторона, лежащая в плоскости основания $ABCD$. Найдите отношение сторон LN и FG

треугольников SLN и HFG, а также отношение высот, проведенных к этим сторонам, используя подобие треугольников SPQ и HFG.

Вариант 2.3. **1.** $\left(-\frac{1+\sqrt{65}}{2},\ -1\right]\cup\left[0,\ \frac{\sqrt{65}-1}{2}\right)$. **2.** $\frac{1}{11}(15+60k)\pi$ $(k\neq 11m+8;\ k,\ m\in\mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. *Указание.* Пусть O — центр заданной окружности. Точки P и Q лежат на окружности, диаметром которой является отрезок OM. Зная длины отрезков PQ и OM, находим угол между диагоналями прямоугольника (равный 45°), а затем и его стороны. **4.** $(1,\ 2]\cup\left[2^{\sqrt{2}},\ \infty\right)$. **5.** 12. *Указание.* Пусть P, Q — точки пересечения прямых AB и MK, BC и MK соответственно, HFG — треугольник, получившийся в сечении, FG — его сторона, лежащая в плоскости основания $ABCD$. Найдите отношение сторон MK и FG треугольников SMK и HFG, а также отношение высот, проведенных к этим сторонам, используя подобие треугольников SPQ и HFG.

Вариант 2.4. **1.** $(-1-\sqrt{26},\ -2]\cup[0,\ -1+\sqrt{26})$. **2.** $\frac{1}{13}(63+84k)\pi$ $(k\neq 13m+9;\ k,\ m\in\mathbb{Z})$. **3.** 100/7. *Указание.* Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника, а угол между его диагоналями равен α. Точки P и Q лежат на окружности, диаметром которой является отрезок OM. Угол POQ равен α или $\pi-\alpha$, и так как он опирается на хорду PQ заданной длины в окружности, то ее диаметр OM — постоянный. Отсюда следует, что все точки M лежат на окружности с центром в точке O и радиусом $R=\frac{7}{\sin\alpha}$. Диагональ прямоугольника по условию равна $3R$, тогда его площадь $\frac{9}{2}R^2\sin\alpha=450$. Исключая из полученных соотношений $\sin\alpha$, находим R. **4.** $\left(0,\ 3^{-\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\ 1\right)$. **5.** 16. *Указание.* Пусть P, Q — точки пересечения прямых AB и LM, AD и LM соответственно, HFG — треугольник, получившийся в сечении, FG — его сторона, лежащая в плоскости основания $ABCD$. Найдите отношение сторон LM и FG треугольников SLM и HFG, а также отношение высот, проведенных к этим сторонам, используя подобие треугольников SPQ и HFG.

2000

Решение варианта 1.1

1. Запишем числитель дроби в виде $x^2+x-16=(x-1)(x+2)-14$. Разделив на $x-1$, получаем $f(x)=x+2-\dfrac{14}{x-1}$. Следовательно, для целых x значение $f(x)$ будет целым в том и только том случае, когда $x-1$ является одним из делителей числа 14, то есть принимает значения ± 1, ± 2, ± 7, ± 14. Составим таблицу значений функции:

$x-1$	-14	-7	-2	-1	1	2	7	14
x	$\mathbf{-13}$	-6	-1	0	$\mathbf{2}$	3	8	15
$f(x)$	$\mathbf{-10}$	-2	8	9	$\mathbf{-10}$	-2	8	9

Наименьшее целое значение -10 функция $f(x)$ принимает при целых $x=-13$ и $x=2$.

Ответ: $\min f(x)=-10$ при $x=-13$ и $x=2$.

2. Отметим, что должны выполняться следующие ограничения:

$$\cos x\neq 0,\quad \cos 2x\neq 0,\quad \cos 3x\neq 0,\quad \cos 4x\neq 0. \tag{1}$$

Преобразуем знаменатели левой и правой частей уравнения:

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}=\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}3x=\frac{\sin 4x\cos 3x-\cos 4x\sin 3x}{\cos 4x\cos 3x}=\frac{\sin x}{\cos 4x\cos 3x}. \tag{3}$$

Таким образом, знаменатель каждой из дробей обращается в 0, если $\sin x=0$, и поэтому дополнительно к (1) для корней уравнения должно выполняться условие $\sin x\neq 0$.

С учетом указанных ограничений и формул (2)–(3) приведем уравнение к виду

$$\sin 2x\sin x=\sin 4x\sin 3x.$$

Преобразуя произведения синусов в разности косинусов, а затем разность косинусов — в произведение, получаем:

$$\cos x-\cos 3x=\cos x-\cos 7x,$$

$$\cos 7x - \cos 3x = 0, \qquad \sin 5x \sin 2x = 0.$$

Отсюда или $\sin 2x = 0$, или $\sin 5x = 0$. В первом случае $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, но для этой серии значений x обязательно или $\sin x = 0$ (для четных k), или $\cos x = 0$ (для нечетных k). Таким образом, корнями исходного уравнения найденные числа не являются. Во втором случае $x = \frac{n\pi}{5}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Если $n = 5m$ $(m \in \mathbb{Z})$, то $x = m\pi$, $\sin x = 0$. Такие значения x являются посторонними. Легко проверяется, что все условия (1) для остальных корней выполнены.

Ответ: $\frac{n\pi}{5}$ $(n \neq 5m;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$.

3. Проведем через точку N прямую, параллельную BC, пусть она пересечет AM в точке L (рис. 82). Из подобия треугольников NLK и BMK следует, что

$$\frac{NL}{BM} = \frac{NK}{KB} = \frac{2}{3}, \quad NL = \frac{2}{3}\,BM = \frac{2}{3}\,CM.$$

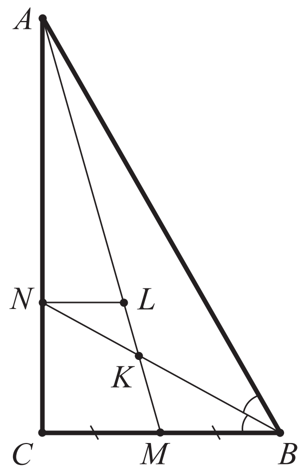

Рис. **82**

Из подобия треугольников ANL и ACM вытекает $AN = \frac{2}{3}\,AC$, или $AN : NC = 2 : 1$. Положим $BC = x$. По свойству биссектрисы имеем $AB : BC = AN : NC = 2 : 1$, отсюда $AB = 2x$, $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 3x^2$, $NC = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. По теореме Пифагора для треугольника BNC получаем $BN^2 = NC^2 + BC^2$, то есть $25 = \frac{x^2}{3} + x^2$. Значит, $BC = x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{15}{2}$, $AB = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{15}{2}$, $AB = 5\sqrt{3}$.

4. Заметим, что при $p = 6$ уравнение перестает быть квадратным и не может иметь двух различных корней. Если $p \neq 6$, то уравнение имеет два различных корня в том и только том случае, когда его дискриминант положителен, то есть $p^2 + p - 6 > 0$. Следовательно, $p < -3$ или $p > 2$, $p \neq 6$.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, тогда по теореме Виета справедливы равенства $x_1 + x_2 = -\frac{2p}{p-6}$, $x_1 x_2 = -\frac{1}{p-6}$. Условие задачи будет выполнено, если $-\frac{p}{p-6} \leqslant -\frac{1}{p-6}$, или $\frac{p-1}{p-6} \geqslant 0$. Последнее

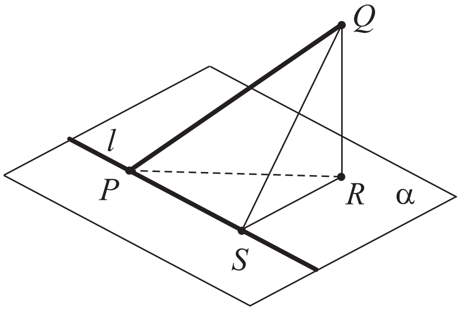

Рис. **83**

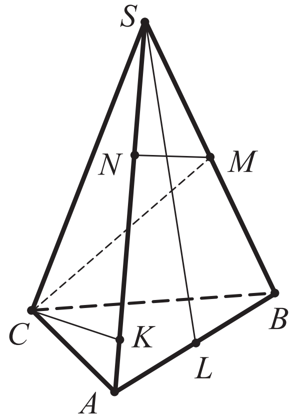

Рис. **84**

неравенство выполняется, если $p \leqslant 1$ или $p > 6$. С учетом ранее установленных ограничений окончательно получаем, что $p < -3$ или $p > 6$.

Ответ: $(-\infty,\, -3) \cup (6,\, \infty)$.

5. Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть в пространстве заданы некоторая прямая l, плоскость α, проходящая через l, и некоторый отрезок PQ, который проектируется на α. Если отрезок параллельно перенести, то величина его проекции на плоскость не изменится. Поэтому можно считать, что один из концов отрезка (точка P) лежит на прямой l.

Опустим из точки Q перпендикуляр QR на плоскость α и перпендикуляр QS на прямую l (рис. 83). По теореме о трех перпендикулярах RS тоже является перпендикуляром к l. Катет PS прямоугольного треугольника PRS не больше его гипотенузы PR, значит, длина проекции PR отрезка PQ на плоскость α не может быть меньше, чем проекция PS этого отрезка на прямую l. Для того, чтобы эти величины совпали, достаточно плоскость α выбрать так, чтобы она была перпендикулярна плоскости PQS. В этом случае QS окажется перпендикуляром к α, и точки R и S совпадут.

Для рассматриваемой задачи это означает, что наименьшая величина проекции отрезка CM на плоскость, проходящую через ребро SA, равна проекции CM на прямую SA. Опустим из точек

C и M перпендикуляры CK и MN на SA (рис. 84). Пусть L — середина отрезка AB. Если β — величина угла LSB, то $\sin\beta = \frac{LB}{SB} = \frac{1}{5}$. Так как $\angle ASB = 2\beta$, $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = \frac{23}{25}$, то $SN = SM \cdot \cos 2\beta = \frac{23}{10}$. Аналогичным образом из треугольника ASC находим $SK = SC \cdot \cos 2\beta = \frac{23}{5}$. Отсюда $NK = SK - SN = \frac{23}{10}$.

Ответ: $\frac{23}{10}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $\min f(x) = -11$ при $x = -13$ и $x = 3$. **2.** $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $AB = 3$, $BC = 9\sqrt{7}$, $AC = 24$. *Указание.* Пусть точка L выбрана на отрезке AN так, что прямые ML и BC параллельны. Тогда $LK = 2$, $BN = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{8}NC$, и по свойству биссектрисы $AB : AC = BN : NC = 1 : 8$. **4.** $(-2, -1) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$. **5.** $\frac{9}{10}$. *Указание.* Пусть AK и BM — высоты в равнобедренных треугольниках SAC и SBC соответственно. Тогда наименьшая возможная длина проекции ребра AB на плоскость равна его проекции на прямую SC, то есть длине отрезка KM.

Вариант 1.3. **1.** $\min f(x) = -16$ при $x = -18$ и $x = 4$. **2.** $\frac{k\pi}{7}$ $(k \neq 7m;\ k, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $AB = 78$, $BC = \frac{117\sqrt{7}}{4}$, $AC = \frac{39}{4}$. *Указание.* Пусть точка L выбрана на отрезке BN так, что прямые ML и AC параллельны. Тогда $LM = \frac{4}{9}AN = \frac{8}{9}NC$, $CM : MB = 1 : 8$, и по свойству биссектрисы $AC : AB = CM : MB = 1 : 8$. **4.** $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. **5.** $\frac{23}{10}$. *Указание.* Пусть AK и B_1M — высоты в треугольниках AA_1C и B_1A_1C соответственно. Тогда наименьшая возможная длина проекции отрезка AB_1 на плоскость равна его проекции на прямую A_1C, то есть длине отрезка KM.

Вариант 1.4. **1.** $\min f(x) = -13$ при $x = -6$ и $x = 5$. **2.** $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $AB = 3\sqrt{10}$, $BC = 15\sqrt{6}$, $AC = 12\sqrt{10}$. *Указание.* Пусть точка L выбрана на отрезке AM так, что прямые LN и BC параллельны. Тогда $LN = \frac{1}{8}MC$, $AL = \frac{3}{2}$, $LK = \frac{7}{2}$, $BM = \frac{KM \cdot LN}{LK} = \frac{MC}{4}$, и по свойству биссектрисы $AB : AC = BM : MC = 1 : 4$.

4. $\left(-\frac{3}{2},\,-1\right) \cup (3,\,4\,]$. **5.** $\frac{5}{4}$. *Указание.* Пусть MK — перпендикуляр, опущенный из точки M на SB, DL — высота в равнобедренном треугольнике SBD. Тогда наименьшая возможная длина проекции отрезка DM на плоскость равна его проекции на прямую SB, то есть длине отрезка KL.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x, y, z — стороны треугольника. Будем считать, что $x \leqslant y \leqslant z$. По условию задачи выполняется система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 60, \\ 4x + z = 71. \end{cases}$$

Известно, что одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой. Рассмотрим все возможные случаи.

А. Если $z = 2x$, то из второго уравнения системы находим $6x = 71$, $x = \frac{71}{6}$ и $z = \frac{71}{3}$. Тогда из первого уравнения следует $y = \frac{147}{6}$, и получается $y > z$, что противоречит выбору распределения сторон по их длине.

Б. Если $z = 2y$, то оказывается, что $x + y \leqslant 2y = z$. Это значит, что не выполняется неравенство треугольника $x + y > z$, необходимое для его существования.

В. Если $y = 2x$, то система преобразуется к виду

$$\begin{cases} 3x + z = 60, \\ 4x + z = 71. \end{cases}$$

Отсюда $x = 11$, $z = 27$, и тогда $y = 22$. Полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 11, 22, 27.

2. Заметим, что в силу четности функции $\cos x$ равенство $\cos x = \cos|x|$ верно при всех x, поэтому $\operatorname{tg}|x|$ определен, если $\cos x \neq 0$. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $x \geqslant 0$, тогда $|x| = x$, $\operatorname{tg}|x| = \operatorname{tg} x$. Используя формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и умножая уравнение на $\cos x$, приводим его к виду

$$(3 - 5\sin x)\sin x = 2\sin x\cos^2 x.$$

Полагая $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, после элементарных преобразований получаем

$$\sin x(2\sin^2 x - 5\sin x + 1) = 0.$$

Приравниваем нулю каждый из сомножителей. Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Из условия $x \geqslant 0$ следует ограничение $k \geqslant 0$. В том случае, когда $2\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$, решаем это квадратное относительно $\sin x$ уравнение. Из двух его корней $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ и $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ первый больше 1 и не может быть равен $\sin x$. Следовательно, $\sin x = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{5-\sqrt{17}}{4} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). Так как $\arcsin\frac{5-\sqrt{17}}{4} > 0$, то условие $x \geqslant 0$ будет выполняться для $n \geqslant 0$.

Б. Пусть теперь $x < 0$, тогда $|x| = -x$, $\operatorname{tg}|x| = -\operatorname{tg} x$. Действуя аналогично случаю «А», приводим уравнение к виду

$$\sin x(2\sin^2 x + 5\sin x - 5) = 0.$$

Отсюда или $\sin x = 0$, $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$), или $2\sin^2 x + 5\sin x - 5 = 0$. В последнем случае корнями квадратного уравнения для определения $\sin x$ будут числа $-\frac{5+\sqrt{65}}{4}$ и $\frac{\sqrt{65}-5}{4}$. Но $-\frac{5+\sqrt{65}}{4} < -1$, поэтому $\sin x = \frac{\sqrt{65}-5}{4}$, $x = (-1)^m \arcsin\frac{\sqrt{65}-5}{4} + m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). Поскольку $\arcsin\frac{\sqrt{65}-5}{4} > 0$, условие $x < 0$ выполняется для $m < 0$.

Объединяя обе серии корней $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$) и $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$) в одну: $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), и замечая, что условие $\cos x \neq 0$ выполнено для всех найденных корней, завершаем решение задачи.

Ответ: $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); $(-1)^n \arcsin\frac{5-\sqrt{17}}{4} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$); $(-1)^m \arcsin\frac{\sqrt{65}-5}{4} + m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$).

3. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда OM — перпендикуляр к стороне AC. Опустим также перпендикуляр ON на BH (рис. 85).

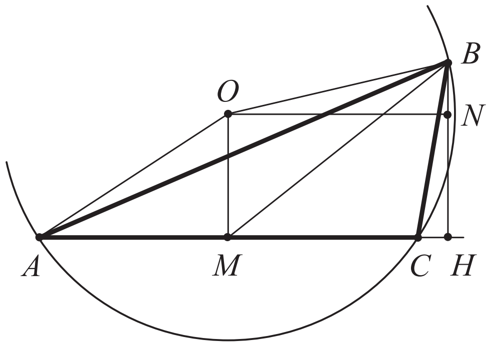

Рис. **85**

Так как $OMHN$ — прямоугольник, то $ON = MH$, $OM = NH$. Треугольники BMH, BON и AOM — прямоугольные. По теореме Пифагора находим: $ON^2 = MH^2 = BM^2 - BH^2 = 11^2 - 7^2 = 72$, $BN^2 = OB^2 - ON^2 = 81 - 72 = 9$, тогда $OM = NH = BH - BN = 4$ и $AM^2 = AO^2 - OM^2 = 9^2 - 4^2 = 65$, $AC = 2AM = 2\sqrt{65}$. Зная высоту BH и основание AC, легко определяем площадь треугольника: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\,AC \cdot BH = 7\sqrt{65}$.

Ответ: $7\sqrt{65}$.

4. Левая часть неравенства определена, если $x \neq 0$ и $7 - 2\cdot 3^x > 0$, то есть для $x < \log_3(7/2)$, $x \neq 0$. Заметим, что $0{,}8 \cdot 1{,}25 = 1$, поэтому $\log_{1,25} 3 = -\log_{0,8} 3$. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $0 < x < \log_3(7/2)$. Умножая неравенство на x и учитывая, что $-x\log_{0,8} 3 = -\log_{0,8} 3^x$, приводим его к виду:

$$\log_{0,8}\frac{7 - 2\cdot 3^x}{3} + \log_{0,8} 3^x = \log_{0,8}\frac{(7 - 2\cdot 3^x)\cdot 3^x}{3} \geqslant 0.$$

Основание логарифма меньше единицы, поэтому полученное неравенство выполнено, если $\frac{(7-2\cdot 3^x)\cdot 3^x}{3} \leqslant 1$, или $2\cdot(3^x)^2 - 7\cdot 3^x + 3 \geqslant 0$. Отсюда либо $3^x \geqslant 3$, либо $3^x \leqslant 1/2$. Но в рассматриваемом случае $1 < 3^x < 7/2$, поэтому должно быть $3 \leqslant 3^x < 7/2$ и, соответственно, $1 \leqslant x < \log_3(7/2)$.

Б. Пусть теперь $x < 0$. Умножая на x, меняя при этом знак неравенства, а также повторяя рассуждения пункта «А», приходим к неравенству $2\cdot(3^x)^2 - 7\cdot 3^x + 3 \leqslant 0$. Отсюда $1/2 \leqslant 3^x \leqslant 3$, и с учетом условия $x < 0$ находим еще один промежуток $[-\log_3 2,\, 0)$, который входит в множество решений.

Ответ: $\left[-\log_3 2,\, 0\right) \cup \left[\,1,\, \log_3(7/2)\,\right)$.

5. По условию задачи $AB^2 + BC^2 = AC^2$, поэтому треугольник ABC, лежащий в основании пирамиды, прямоугольный, AC — его гипотенуза. Пусть SH — высота пирамиды (рис. 86). Поскольку все ее боковые ребра SA, SB и SC равны, их проекции AH, BH и CH на плоскость основания тоже равны, а значит, точка H — центр описанной около треугольника ABC окружности, т. е. середина его гипотенузы AC. Отсюда $BH = \sqrt{7}$, $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = 3$.

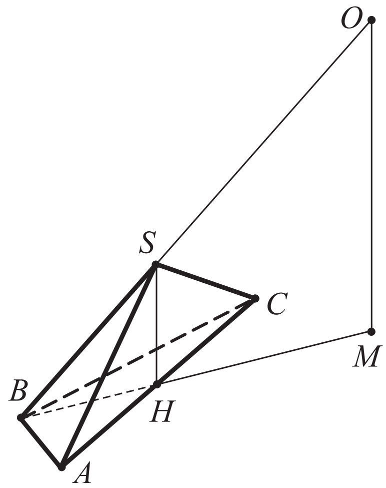

Рис. **86**

Пусть O — центр заданной сферы, M — точка ее касания с плоскостью ABC, тогда OM и SH параллельны как перпендикуляры к плоскости основания, а треугольники BOM и BSH подобны. Если R — искомый радиус, то $OB = OS + SB = R + 4$, $OM = R$. Из подобия треугольников $\frac{OM}{SH} = \frac{OB}{SB}$, отсюда $\frac{R}{3} = \frac{R+4}{4}$, $R = 12$.

Ответ: 12.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 65, 85, 130. **2.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\pm \arccos\frac{3-\sqrt{7}}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$; $\arccos\frac{3-\sqrt{7}}{2}$; $\pm \arccos\frac{\sqrt{19}-3}{2} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z},\ m < 0)$; $-\arccos\frac{\sqrt{19}-3}{2}$. **3.** 204. *Указание.* Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, OM и ON — перпендикуляры, опущенные из точки O на сторону AC и высоту BH соответственно. Тогда BM — медиана, $MH = 5$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников BMH, OBN и AOM находим $BM = \sqrt{314}$, $BN = 12$, $NH = OM = 5$, $AM = 12$, $AC = 24$. **4.** $(-\log_5 3,\ -1 + \log_5 2\,] \cup (\,0,\ \log_5 2\,]$. **5.** 96. *Указание.* Основанием высоты SH является середина H гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC.

Вариант 2.3. **1.** $11, 22, 23$. **2.** $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $(-1)^n \arcsin \frac{3-\sqrt{5}}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0)$; $(-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{21}-3}{2} + m\pi$ $(m \in \mathbb{Z},\ m < 0)$. **3.** $16\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, BH — высота, ON — перпендикуляр, опущенный из точки O на BH. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников BMH, OBN и AOM находим $BH = MH = ON = 4\sqrt{2}$, $BN = 3\sqrt{2}$, $NH = OM = \sqrt{2}$, $AM = 4\sqrt{2}$. **4.** $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup \left[\log_4 \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. **5.** $35/24$. *Указание.* Легко заметить, что в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC. Следовательно, основанием высоты SH пирамиды является середина H гипотенузы BC.

Вариант 2.4. **1.** $10, 21, 30$. **2.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\pm \arccos \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$; $\arccos \frac{1-\sqrt{7}}{2}$; $\pm \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z},\ m < 0)$; $-\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **3.** $3\sqrt{6}/2$. *Указание.* Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, K — точка пересечения его медиан, BH — высота. Тогда $BK = \frac{2}{3} BM = 2$, треугольники BKO и OKM — прямоугольные, $OK = KM = 1$. Отсюда $\angle BMA = 45^\circ$, $BH = 3\sqrt{2}/2$, а длина отрезка AM легко находится из прямоугольного треугольника MOC. **4.** $(1 - \log_2 11,\ -\log_2 5\,] \cup (\,0,\ 1\,]$. **5.** $16\sqrt{2}/3$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, M — точка ее касания с плоскостью основания, H — середина гипотенузы AB. Тогда SH — высота пирамиды, прямые SH и OM параллельны. Используя подобие треугольников SCH и OCM, легко найти все недостающие элементы.

2001

Решение варианта 1.1

1. С помощью формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ преобразуем данную функцию к виду

$$f(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 1.$$

Значения косинуса целиком заполняют промежуток $[-1,\ 1]$, поэтому множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений квадратного трехчлена $4y^2 + 2y - 1$, когда переменная y изменяется на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Известно, что множество значений всякой квадратичной функции $g(y) = ay^2 + by + c$ на любом отрезке $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ также является отрезком вида $[\,m,\, M\,]$, где

$$m = \min_{\alpha \leqslant y \leqslant \beta} g(y), \qquad M = \max_{\alpha \leqslant y \leqslant \beta} g(y).$$

В данном случае минимальное значение достигается в вершине соответствующей параболы — точке $y_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$, принадлежащей промежутку $[-1,\, 1\,]$, а максимальное — на одном из концов отрезка $[-1,\, 1\,]$. Непосредственным вычислением находим

$$g(y_0) = 4\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 + 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) - 1 = -\tfrac{5}{4},$$
$$g(1) = 4 + 2 - 1 = 5, \quad g(-1) = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Следовательно, $m = -5/4$, $M = 5$.

Ответ: $[-5/4,\, 5\,]$.

2. Из третьего уравнения системы находим $yz - 2xz - 6z = 0$, или $z(y - 2x - 6) = 0$. Значит, либо $z = 0$, либо $y = 2x + 6$.

Пусть $z = 0$, тогда и первое, и второе уравнения исходной системы сводятся к равенству $xy = 0$. Это равенство выполняется, если хотя бы одно из чисел x или y равно нулю. Таким образом, в данном случае решениями системы являются всевозможные наборы вида $(0;\, y;\, 0)$ или $(x;\, 0;\, 0)$, где x и y — любые действительные числа.

Пусть теперь $z \neq 0$, но $y = 2x+6$. Вычитая из второго уравнения исходной системы удвоенное первое, получим $3xz - yz = -8z$. Так как $z \neq 0$, то на z можно сократить: $3x - y = -8$, или $y = 3x + 8$. Учитывая условие $y = 2x + 6$, находим $3x + 8 = 2x + 6$, $x = -2$, $y = 2$. Соответствующее значение $z = 1/6$ легко вычисляется из первого или второго уравнения исходной системы.

Ответ: $(-2;\, 2;\, 1/6)$, $(x;\, 0;\, 0)$, $(0;\, y;\, 0)$, где $x,\, y \in \mathbb{R}$.

3. Обозначим через K, L, N, P и Q точки касания, как указано на рис. 87. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем $BK = BL = x$, $AK = AN = AQ = y$, $CQ = CP = u$, $MP = MN = ML = v$. Выражая

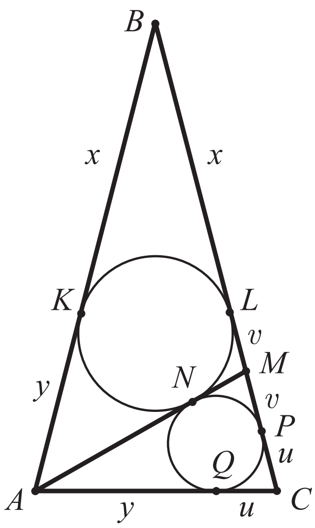

Рис. **87**

длины сторон треугольника через x, y, u, v, придем к системе

$$\begin{cases} x+y=8, \\ y+u=4, \\ x+2v+u=8. \end{cases}$$

Разность первого и второго уравнений запишем в виде

$$x-u \equiv (x+v)-(u+v)=4,$$

а третье уравнение преобразуем так:

$$(x+v)+(u+v)=8.$$

Получилась система уравнений относительно $x+v$, $u+v$, из которой $BM=x+v=6$, $MC=u+v=2$. Следовательно,

$$S_{ABM} : S_{ACM} = BM : CM = 3 : 1,$$

$$S_{ACM} = \frac{1}{4}\, S_{ABC} = \frac{1}{2}\, AC\sqrt{AB^2 - AC^2/4} = \sqrt{15},$$

$$S_{ABM} = 3\, S_{ACM} = 3\sqrt{15}.$$

Ответ: $S_{ABM} = 3\sqrt{15}$, $S_{ACM} = \sqrt{15}$.

4. Допустим, что в один день с валенком продано p правых и l левых сапог. Тогда в другой день было продано $2-p$ и $13-l$ правых и левых сапог соответственно. Если c — цена левого сапога и он на s дороже валенка, то цена правого сапога равна $c+s$, а из условия задачи следует, что

$$p(c+s)+lc+(c-s)=(2-p)(c+s)+(13-l)\,c,$$

иными словами,

$$(14-2l-2p)\,c=(2p-3)s. \tag{1}$$

Число p может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть $p = 0$, тогда уравнение (1) превращается в $(2l - 14)\,c = 3s$. Заметим, что по смыслу задачи выполнено условие $0 < s < c$, следовательно, $0 < (2l - 14)\,c < 3\,c$. Сокращая положительный множитель c, получаем $0 < 2l - 14 < 3$. Единственное целое число l, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае $p = 1$ уравнение (1) эквивалентно $(2l - 12)\,c = s$. Вновь обращаясь к условию $0 < s < c$, заключаем $0 < (2l - 12)\,c < c$, т. е. $0 < 2l - 12 < 1$. Понятно, что никакое целое число l не удовлетворяет получившемуся неравенству.

Рассуждая точно так же при $p = 2$, снова получим, что уравнение (1) не выполняется ни при каких целых l.

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $p = 0$, $l = 8$.

Ответ: В один день с валенком продано 8 левых сапог и ни одного правого.

5. Пусть N, M и L — точки пересечения плоскости α с прямыми DD_1, CD и CC_1 соответственно (рис. 88). Так как $AD \parallel KC$, то треугольники AMD и KMC подобны, причем коэффициент подобия равен 4, поэтому $MD = \frac{4}{3}\,CD = \frac{16}{3}$, $AM = \sqrt{AD^2 + MD^2} = \frac{20}{3}$.

Параллельные грани AA_1D_1D и BB_1C_1C пересекаются с плоскостью α по отрезкам параллельных прямых AN и KL. Значит, треугольники AMN и KML также подобны с коэффициентом подобия, равным 4. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, следовательно, $S_{AMN} = 16\,S_{KML} = \frac{16}{15}\,S_{AKLN} = \frac{40}{3}$.

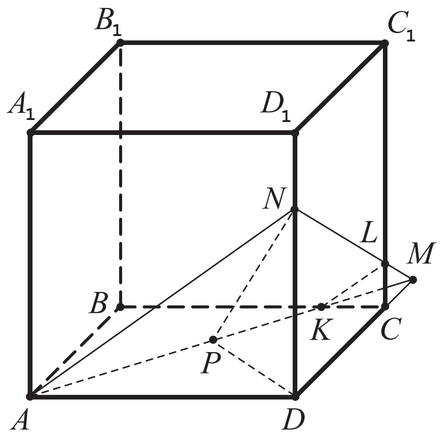

Рис. **88**

Опустим перпендикуляр DP на прямую AM. По теореме о трех перпендикулярах NP и AM также перпендикулярны, при этом

$$DP = \frac{AD \cdot MD}{AM} = \frac{16}{5},$$

$$NP = \frac{2\,S_{AMN}}{AM} = 4,$$

$$ND = \sqrt{NP^2 - PD^2} = \frac{12}{5}.$$

Теперь легко найти объем пирамиды $MNAD$, затем — объем подобной ей пирамиды $NLKC$ и наконец — объем V усеченной пирамиды $ANDKLC$:

$$V_{MNAD} = \frac{1}{6}\,AD \cdot ND \cdot MD = \frac{128}{5},$$

$$V_{MLKC} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot V_{MNAD} = \frac{2}{15}, \quad V = \frac{126}{15}.$$

Объем всего куба равен 64, поэтому искомое отношение есть

$$\frac{126}{15} : \left(64 - \frac{126}{15}\right) = \frac{21}{139}.$$

Ответ: $21 : 139$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** $[-1/8, 6]$. **2.** $(-3; -1/2; -2)$, $(x; 0; 0)$, $(0; 0; z)$, где x, $z \in \mathbb{R}$. **3.** $5 : 4$. *Указание.* Выразить стороны треугольника через отрезки касательных, проведенных к данным окружностям из точек A, B, C, M. Из получившейся системы уравнений найти отрезки AM и CM. **4.** Девять эников и ни одного бэника. **5.** $\frac{28}{9}$. *Указание.* Пусть M, N и L — точки пересечения плоскости α с прямыми AB, BC и CD соответственно. Воспользуйтесь подобием пирамид $MBNB_1$ и $LCNK$.

Вариант 1.3. **1.** $[-5, 5/4]$. **2.** $(1/2; 3; -2)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$, где y, $z \in \mathbb{R}$. **3.** $\frac{12}{5}$ и $\frac{18}{5}$. *Указание.* Выразить стороны треугольника через отрезки касательных, проведенных к данным окружностям из точек A, B, C, M. Из получившейся системы уравнений найти отрезки BM и CM. **4.** Восемь умеренных пиявок и ни одной злобной. **5.** $10 : 29$. *Указание.* Пусть M, N и L — точки пересечения плоскости α с прямыми A_1D_1, A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Воспользуйтесь подобием пирамид AA_1MN и KB_1LN.

Вариант 1.4. **1.** $[-6, 1/8]$. **2.** $(2; -1/3; -3)$, $(x; 0; 0)$, $(0; 0; z)$, где x, $z \in \mathbb{R}$. **3.** $5 : 7$. *Указание.* Выразить стороны треугольника через отрезки касательных, проведенных к данным окружностям из точек A, B, C, M. Из получившейся системы уравнений найти отрезки AM и BM. **4.** Девять рогов и два копыта. **5.** $\frac{39}{2}$. *Указание.* Пусть M, N и L — точки пересечения плоскости α с прямыми AA_1, BB_1 и AB соответственно. Воспользуйтесь подобием пирамид $AMDN$ и $BLKN$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть m — исходное число пачек обычного порошка, тогда число пачек необычного равно $\frac{4m}{3}$. Так как это число — целое, то $m = 3n$, где $n \in \mathbb{N}$. Значит, исходные количества пачек всех трех сортов составляют $3n$, $4n$ и $6n$ оответственно.

После продаж и поставок количество превосходного порошка составило $(1 + 0{,}8) \cdot 6n = \frac{54n}{5}$, а необычного — $\frac{54 \cdot n}{5 \cdot 2} \cdot 5 = \frac{27n}{4}$ пачек. Эти числа — целые, следовательно, n делится на 4 и 5, т. е. $n = 20k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Наконец, число пачек обычного порошка будет равно $\frac{27n}{20} \cdot 2 = \frac{27n}{10}$, причем

$$0 < 3n - \frac{27n}{10} = (60 - 54) \cdot k = 6k \leqslant 10.$$

Этому неравенству удовлетворяет единственное натуральное число $k = 1$. Таким образом, исходное количество порошка в магазине равняется $3n + 4n + 6n = 13 \cdot 20 \cdot k = 260$ пачек.

Ответ: 260 пачек.

2. Учитывая области определения тангенса и котангенса, а также тот факт, что знаменатели входящих в уравнение дробей не должны равняться нулю, замечаем

$$x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

Если теперь умножить обе части исходного уравнения на $\sin x \cdot \cos x$, то последовательно получим

$$3\cos^2 x + \sin x = \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x,$$

$$3\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3}\cos x - \sin x,$$

$$(\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

Последнее уравнение выполнено в двух случаях: либо $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$, либо $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$. После деления на 2 эти уравнения легко приводятся к виду:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Решением (2) является серия корней $x_1 = \frac{\pi}{3} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, целиком удовлетворяющая условию (1). Уравнение (3) имеет две серии корней: $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ и $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, из которых только x_2 удовлетворяет условию (1).

Ответ: $\frac{\pi}{3} + n\pi$; $-\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(n,\ m \in \mathbb{Z})$.

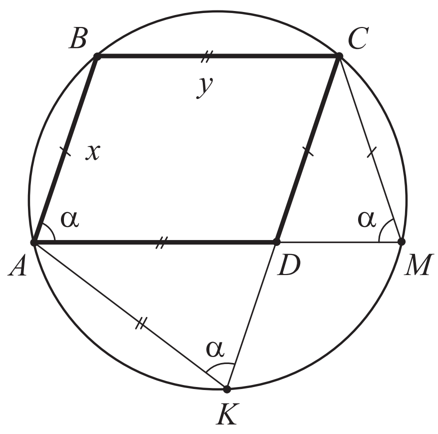

Рис. **89**

3. Пусть $AB = CD = x$, $BC = AD = y$, $\angle BAD = \alpha$. Заметим, что $ABCM$ — трапеция, вписанная в заданную окружность (рис. 89). Значит, эта трапеция — равнобедренная, откуда $MC = x$, $\angle CMD = \angle CDM = \alpha$. Выразив основание MD равнобедренного треугольника CMD через его боковую сторону и угол α, получим

$$MD = 2MC \cdot \cos\alpha,$$

т. е.

$$23 - y = \frac{2}{3} \cdot x.$$

Точно так же, рассмотрев трапецию $ABCK$ и равнобедренный треугольник ADK, придем к уравнению

$$KD = 2AK \cdot \cos\alpha, \quad \text{т. е.} \quad 22 - x = \frac{2}{3} \cdot y.$$

Решая полученную систему, находим: $x = 12$, $y = 15$. Следовательно, $S_{ABCD} = xy \cdot \sin\alpha = 12 \cdot 15 \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 120\sqrt{2}$.

Ответ: $120\sqrt{2}$.

4. Заметим, что $(\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, поэтому

$$\log_{\sqrt{2}+1}(3+2\sqrt{2}) = 2,$$

а исходное неравенство можно переписать в виде

$$\log_{x-1}\frac{10}{6x^2-15} \leqslant -2. \tag{4}$$

В силу стандартных ограничений на основание и область определения логарифмической функции имеем $x-1>0$, $x-1\neq 1$, $6x^2-15>0$, т. е. $x\in(\sqrt{5/2},\,2)\cup(2,\,\infty)$.

В случае $x\in(\sqrt{5/2},\,2)$ основание логарифма меньше единицы, и неравенство (4) последовательно преобразуется так:

$$\frac{10}{6x^2-15} \geqslant \frac{1}{(x-1)^2}, \quad 10(x-1)^2 \geqslant 6x^2-15, \quad (2x-5)^2 \geqslant 0.$$

Полученное соотношение выполнено при всех допустимых значениях x, поэтому промежуток $(\sqrt{5/2},\,2)$ целиком состоит из решений исходной задачи.

Если $x>2$, то основание логарифма больше единицы, поэтому те же самые преобразования, что и выше, приводят к противоположному неравенству $(2x-5)^2 \leqslant 0$. Это неравенство выполняется только при $x=5/2$. Так как $5/2>2$, полученное значение является решением исходной задачи.

Ответ: $(\sqrt{5/2},\,2)\cup\{5/2\}$.

5. Рассмотрим двугранный угол, образованный плоскостями ASD и BSC (рис. 90). Его ребром является прямая SO, где O — точка пересечения прямых AD и BC. Так как параллельные прямые KN и LM расположены на гранях этого угла, то они не пересекаются с ребром SO. Иными словами, $KN \parallel SO$ и $LM \parallel SO$. Теперь, используя свойства подобных треугольников, нетрудно найти отношение отрезков KN и LM.

Из подобия треугольников AOB и COD вытекает, что $3OB = 2OC$. В плоскости OSC имеются еще две пары подобных треугольников: $\triangle OSC \sim \triangle PMC$, $\triangle OSB \sim \triangle PLB$. Отсюда

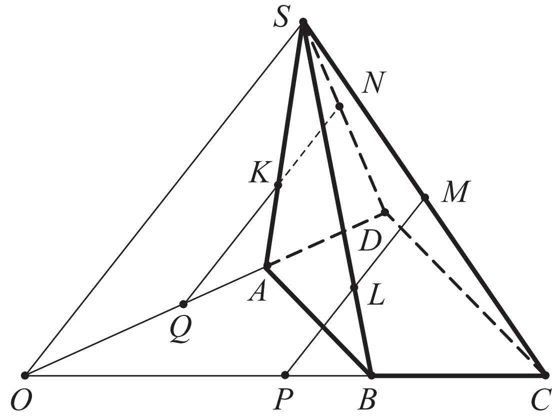

Рис. **90**

$$OP = \frac{1}{2}\,OC = \frac{3}{4}\,OB, \quad PB = OB - OP = \frac{1}{4}\,OB,$$

$$MP = \frac{1}{2}\,OS, \quad LP = \frac{1}{4}\,OS, \quad LM = MP - LP = \frac{1}{4}\,OS.$$

В плоскости OSD также расположены две пары подобных треугольников: $\triangle OSD \sim \triangle QND$, $\triangle OSA \sim \triangle QKA$. Рассуждая, как и выше, находим $KN = \frac{1}{5}\,OS$. Таким образом, $KN = \frac{4}{5}\,LM = 4$.

Ответ: 4.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 260 ворон. **2.** $-\frac{\pi}{6} + k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $18\sqrt{15}$. *Указание.* Пусть $AB = x$, $BC = 2x$. Так как трапеция $ABCM$ вписана в окружность, то она равнобедренная. Значит, $CD = MC = x$. Аналогично, $AD = AK = 2x$. Углы A и C при вершинах равнобедренных треугольников KAD и DCM равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, эти треугольники подобны, откуда $2MD = KD$, т. е. $2(15-2x) = 12 - x$, $x = 6$. **4.** $\left(-1/\sqrt{3},\, 1/3\right) \cup \left\{1/2\right\}$. **5.** 5. *Указание.* Прямые KL и MN параллельны ребру SO двугранного угла, образованного плоскостями BSA и CSD; O — точка пересечения прямых AB и CD.

Вариант 2.3. **1.** 24 автомобиля. **2.** $-\frac{\pi}{3} + k\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ $(k,\, n \in \in \mathbb{Z})$. **3.** $15\sqrt{15}$. *Указание.* Пусть $AB = x$, $BC = y$. Так как трапеция $ABMD$ вписана в окружность, то она равнобедренная. Значит, $CD = MD = x$. Выражая через x основание равнобедренного треугольника MDC, получаем $MC = BC - BM = 2CD \cdot \cos\angle MCD$, т. е. $y - 7 = x/2$. Аналогично, $CK = CD - KD = 2BC \cdot \cos\angle BCK$, $x - 1 = y/2$. Решая полученную систему, находим $x = 6$, $y = 10$. **4.** $\left(\sqrt{3}/2,\, 1\right) \cup \left\{3/2\right\}$. **5.** 7. *Указание.* Прямые KN и ML параллельны ребру SO двугранного угла, образованного плоскостями ASD и CSB; O — точка пересечения прямых AD и BC.

Вариант 2.4. **1.** 160 черепашек. **2.** $\frac{\pi}{6} + k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $20\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть $AD = x$, $CD = 2x$. Так как трапеция $ABMD$ вписана в окружность, то она равнобедренная. Значит, $BC = BK = x$. Аналогично, $AB = MD = 2x$. Из подобия равнобедренных треугольников CBK и CDM получаем $CM = 2CK$, т. е. $x - 1 = 2(2x - 8)$, $x = 5$. **4.** $\left(-1/\sqrt{5},\, 0\right) \cup \left\{2/5\right\}$. **5.** 10. *Указание.* Прямые KL и MN параллельны ребру SO двугранного угла, образованного плоскостями BSA и CSD; O — точка пересечения прямых AB и CD.

2002

Решение варианта 1.1

1. Левая часть неравенства определена, если

$$x^2 - 1 \geqslant 0, \quad \sqrt{x^2-1} \neq 1.$$

Отсюда $|x| \geqslant 1$, $x^2 \neq 2$, то есть $x \in (-\infty, -\sqrt{2}\,) \cup (-\sqrt{2}, -1\,] \cup [\,1, \sqrt{2}\,) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $x \in (-\infty, -\sqrt{2}\,) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, тогда $\sqrt{x^2-1} > 1$. Умножив на $\sqrt{x^2-1} - 1$, приведем неравенство к виду $3x \leqslant 5\sqrt{x^2-1}$. Для всех $x \in (-\infty, -\sqrt{2}\,)$ оно является верным. Если $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$, то возведем неравенство в квадрат и получим $9x^2 \leqslant 25x^2 - 25$, $x^2 \geqslant 25/16$, $x \geqslant 5/4$ (с учетом положительности x). Так как $5/4 < \sqrt{2}$, то весь промежуток $(\sqrt{2}, +\infty)$ входит в множество решений.

Б. Пусть теперь $\sqrt{x^2-1} - 1 < 0$, то есть $x \in (-\sqrt{2}, -1\,] \cup [\,1, \sqrt{2}\,)$. В этом случае с учетом отрицательности знаменателя приходим к неравенству $3x \geqslant 5\sqrt{x^2-1}$. Отсюда $x \geqslant 0$, то есть $x \in [\,1, \sqrt{2}\,)$.

Возводя в квадрат, получаем $x^2 \leqslant 25/16$, $x \leqslant 5/4$, а в множество решений включаем промежуток $[1,\ 5/4]$. Остается объединить множества, найденные в обоих случаях.

Ответ: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup [1,\ 5/4] \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

2. Преобразуем сумму синусов в левой части уравнения в произведение, а для правой части воспользуемся формулой синуса удвоенного угла. Тогда данное уравнение примет вид

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 1 = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \sin\frac{x}{2}\Bigl(2\cos 1 - \cos\frac{x}{2}\Bigr) = 0.$$

Отсюда или $\sin\frac{x}{2} = 0$, или $\cos\frac{x}{2} = 2\cos 1$. В первом случае получаем серию корней $\frac{x}{2} = n\pi$, $x = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Во втором случае замечаем, что $1 < \pi/3$, а функция $\cos x$ является убывающей на промежутке $[0,\ \pi]$, поэтому $2\cos 1 > 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$. Значит, уравнение $\cos\frac{x}{2} = 2\cos 1$ решений не имеет.

Ответ: $2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть прямые BC и DE пересекаются в точке F. Из условия следует, что четырехугольник $ABFE$ — параллелограмм (рис. 91).

Предположим, что площадь параллелограмма $ABFE$ равна $2S$, тогда площадь каждого из треугольников ABF, AFE, ABE и BFE равна S. Заметим, что $CF = \frac{1}{3}BF$, $FD = \frac{3}{8}FE$. Пусть $\angle CFD = \alpha$. Тогда для площадей треугольников BFE и CFD получаем $S_{BFE} = \frac{1}{2}\cdot BF\cdot FE\cdot\sin\alpha = S$, в то время как $S_{CFD} = \frac{1}{2}\cdot CF\cdot FD\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}BF\cdot\frac{3}{8}FE\cdot\sin\alpha = \frac{1}{8}S_{BFE} = \frac{1}{8}S$, а заданная в условии площадь четырехугольника $BCDE$ равна $S_{BFE} - S_{CFD} = \frac{7}{8}S = 21$.

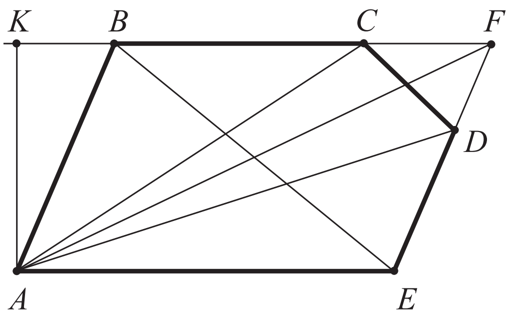

Рис. **91**

Отсюда $S = 24$, площадь всего параллелограмма $ABFE$ равна 48, а $S_{CFD} = 3$.

Заметим, что у треугольников ABC и ABF общая высота AK, и $BC = \frac{2}{3}BF$. Следовательно, $S_{ABC} = \frac{2}{3}S_{ABF} = \frac{2}{3}S = 16$. Аналогичным образом, $S_{ADE} = \frac{5}{8}S_{AFE} = \frac{5}{8}S =$

$= 15$, поскольку $DE = \frac{5}{8} FE$. Теперь вычисляем искомую площадь треугольника ACD:

$$S_{ACD} = S_{ABFE} - S_{ABC} - S_{ADE} - S_{CFD} = 48 - 16 - 15 - 3 = 14.$$

Ответ: 14.

4. Площадь S_{OAB} треугольника OAB составляет четверть площади параллелограмма $ABCD$, поэтому достаточно найти такое положение точек A и B на прямых $y = x$ и $y = -2x$ соответственно, при котором S_{OAB} минимальна.

Докажем, что этот минимум достигается в том случае, когда точка $M(4;\,1)$ является серединой отрезка AB. Пусть $AM = MB$ и через точку M проведен любой другой отрезок A_1B_1, концы которого лежат на заданных прямых (рис. 92). Если A_1 принадлежит отрезку OA, то B лежит на отрезке OB_1 (или, соответственно, наоборот). В указанном случае проведем через точку B прямую, параллельную OA. Предположим, что она пересечет отрезок A_1B_1 в точке N.

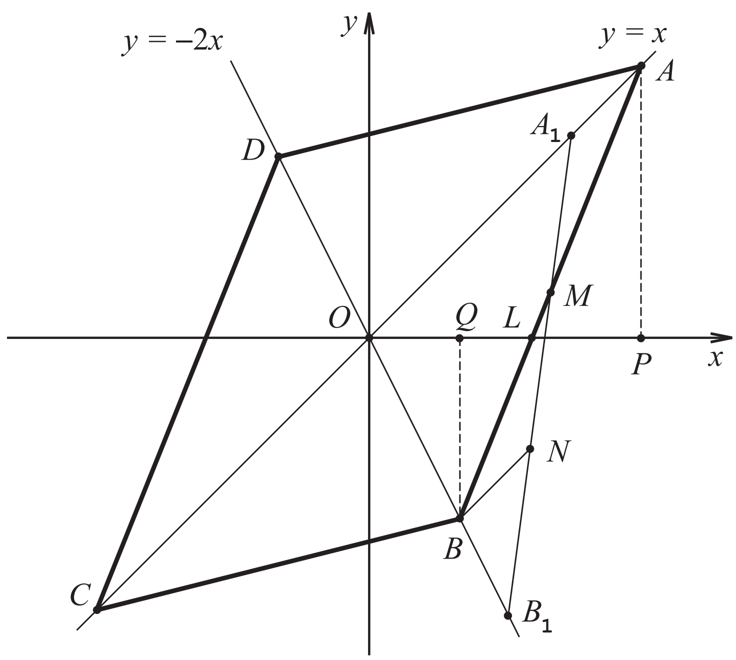

Рис. **92**

Нетрудно заметить, что треугольники A_1AM и NBM равны, поскольку $AM = BM$ и к ним прилегают попарно равные углы. Поэтому для площадей выполняются следующие соотношения:

$$S_{OA_1B_1} = S_{OAB} - S_{MAA_1} + S_{MBB_1} > S_{OAB} - S_{MAA_1} + S_{MBN} = S_{OAB},$$

так как справедливо очевидное неравенство $S_{MBB_1} > S_{MBN}$.

Обозначим координаты точки A через $(x_1;\ y_1)$, а координаты точки B — через $(x_2;\ y_2)$. Тогда $y_1 = x_1$, $y_2 = -2x_2$, и с учетом того, что M — середина AB, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 4, \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 - 2x_2 = 2$, и находим $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, а также координаты искомых точек: $A(6;\ 6)$ и $B(2;\ -4)$. Для того, чтобы вычислить площадь S_{OAB}, найдем абсциссу x_3 точки пересечения L прямой AB с осью Ox. Легко получить уравнение прямой AB, оно имеет вид $2y = 5x - 18$. Следовательно, $x_3 = 18/5$. Площадь всего треугольника OAB равна сумме площадей треугольников OAL и OBL, у которых общая сторона OL, а высоты AP и BQ, проведенные к ней, равны соответственно $|\,y_1|$ и $|\,y_2|$, то есть 6 и 4. Поэтому $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} \cdot (|\,y_1| + |\,y_2|) = 18$, значит, наименьшее возможное значение площади параллелограмма $ABCD$ равно 72.

Ответ: 72.

5. Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пусть их центры — точки O и O_1 соответственно. Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 93).

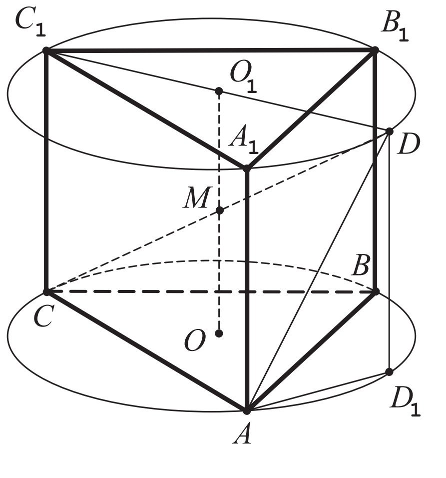

Рис. **93**

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности O_1. Покажем, что CD — диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Поскольку $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, то есть в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 — проекция точки точки D на плоскость основания ABC, высота пирамиды равна h, а радиус окружностей O и O_1 равен r. Рассмотрим прямоугольные треугольники CC_1D и ADD_1. Учитывая, что $C_1D = 2r$, $AD_1 = r$, $CC_1 = DD_1 = h$, по теореме Пифагора получаем: $h^2 + 4r^2 = 6^2 = 36$, $h^2 + r^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$. Отсюда $r = 2$, $h = 2\sqrt{5}$. Тогда сторона основания равна $2\sqrt{3}$, его площадь $S = 3\sqrt{3}$, и следовательно, объем призмы $V = Sh = 6\sqrt{15}$.

Ответ: $6\sqrt{15}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $(-\infty, -\sqrt{2}\,) \cup [\,1, \sqrt{2}\,) \cup [\,5/3, +\infty)$. **2.** $3k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** 51. **4.** 28/5. *Указание.* Площадь треугольника ABC имеет наименьшее возможное значение, когда точка $(-3;\,8)$ является серединой стороны AB. **5.** 36. *Указание.* Точка D лежит на окружности, описанной около основания $A_1B_1C_1$ призмы, B_1D — ее диаметр. Рассматривая прямоугольные треугольники DMC_1 и BMC и применяя теорему Пифагора, получим систему двух уравнений для определения стороны основания и высоты данной призмы.

Вариант 1.3. **1.** $(-\infty, -\sqrt{3}\,) \cup [\,\sqrt{2},\, 3/2\,] \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. **2.** $(2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 32. **4.** 36. *Указание.* Площадь параллелограмма $ABCD$ имеет наименьшее возможное значение, когда точка $(-1;\,-5)$ является серединой стороны BC. **5.** $12\sqrt{3}$. *Указание.* Точка D лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, A_1D — ее диаметр. Пусть D_1 — проекция D на плоскость основания ABC. Рассматривая прямоугольные треугольники DMD_1 и DNC_1 и применяя теорему Пифагора, получаем систему двух уравнений для определения стороны основания и высоты данной призмы.

Вариант 1.4. **1.** $(-\infty, -\sqrt{3}\,) \cup [\,\sqrt{2}, \sqrt{3}\,) \cup [\,9/4, +\infty)$. **2.** $\frac{3\pi}{2} + 3n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 31. **4.** 42. *Указание.* Площадь треугольника ABC имеет наименьшее возможное значение, когда точка $(1;\,-4)$ является серединой стороны BC. **5.** $12\sqrt{6}$. *Указание.* Точка D лежит на окружности, описанной около основания ABC призмы, CD — ее диаметр. Рассматривая прямоугольные треугольники DBB_1 и DCM и применяя теорему Пифагора, нетрудно получить систему двух уравнений для определения стороны основания и высоты данной призмы.

Решение варианта 2.1

1. Заметим сначала, что хотя бы одно из чисел a или b не должно быть равным 0. В противном случае, если $a = b = 0$, функция $f(x)$ не определена вообще ни для одного значения x. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то получаем $f(x) = 5x + 1$ и $f(x)$ не является постоянной. Значит, $a \neq 0$. Пусть теперь при всех x из области определения D_f функции $f(x)$ (то есть при $x \neq -b/a$) выполняется равенство $f(x) = k$. Тогда $(a+5b)x + a + b = kax + kb$, или $(a+5b-ka)x + (a+b-kb) = 0$ при всех $x \in D_f$. Последнее возможно в том и только том случае, когда выполняется система уравнений

$$\begin{cases} a + 5b - ka = 0, \\ a + b - kb = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения $a = (k-1)\,b$ и подставляя в первое, получаем $(k^2 - 2k - 4)\,b = 0$. Если $b = 0$, то и $a = 0$, чего быть не может, как отмечалось выше. Следовательно, $k^2 - 2k - 4 = 0$, $k = 1 \pm \sqrt{5}$, $a = (k-1)\,b = \pm\sqrt{5}\,b$, где $b \neq 0$.

Ответ: $a = \pm\sqrt{5}\,b$, $b \neq 0$.

2. Для корней уравнения должны выполняться условия

$$\sin x \leqslant \tfrac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}^2 x \leqslant \tfrac{2}{7}, \quad \cos x > 0. \tag{1}$$

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения, чтобы избавиться от радикалов. После умножения на $\cos^2 x$ получим $1 - 3\sin x = 4\cos^2 x - 14\sin^2 x$. Используя формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, приходим к квадратному относительно $\sin x$ уравнению $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Его корнями являются $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{3}$. Первое значение является посторонним, поскольку в силу (1) должно быть $\sin x \leqslant \frac{1}{3}$.

Множество решений уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$ разобьем на две серии: $x_1 = -\arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi$, $x_2 = \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Заметим, что $\cos x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} < 0$, поэтому серия корней x_2 — посторонняя для исходного уравнения. Для x_1 все условия (1) выполнены.

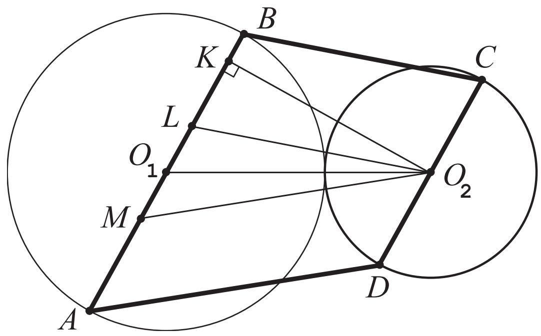

Рис. **94**

Ответ: $-\arcsin\frac{1}{3} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Проведем из центра O_2 окружности радиуса $r_2 = 2$ отрезки O_2L и O_2M, которые параллельны соответственно боковым сторонам BC и AD трапеции, а также опустим перпендикуляр O_2K на AB (рис. 94).

Ясно, что $AM = DO_2 = r_2 = CO_2 = BL = 2$, поэтому $O_1L = O_1M = r_1 - r_2 = 1$. Зная основания $AB = 2r_1 = 6$, $CD = 2r_2 = 4$ трапеции, а также площадь $S_{ABCD} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$, легко находим ее высоту

$$h = \frac{2S_{ABCD}}{AB + CD} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1O_2K. Его гипотенуза $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 5$, катет $O_2K = h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора $KO_1^2 = O_1O_2^2 - O_2K^2 = \frac{25}{4}$. Тогда $KL = O_1K - O_1L = \frac{3}{2}$, $KM = KO_1 + O_1M = \frac{7}{2}$. По теореме Пифагора, примененной теперь к прямоугольным треугольникам O_2KL и O_2KM, находим:

$$BC = O_2L = \sqrt{O_2K^2 + KL^2} = \sqrt{21},$$

$$AD = O_2M = \sqrt{O_2K^2 + KM^2} = \sqrt{31}.$$

Ответ: $\sqrt{21}$ и $\sqrt{31}$.

4. Левая часть неравенства определена в том случае, когда $5 - \frac{1}{x} > 0$ и $5 - \frac{1}{x} \neq 1$. Решая эти неравенства, находим, что $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $0 < 5 - \frac{1}{x} < 1$, то есть $x \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$. Тогда левая часть исходного неравенства отрицательна, оно выполняется, и тем самым весь указанный промежуток входит в множество решений.

Б. Пусть теперь $5 - \frac{1}{x} > 1$. Это справедливо для $x \in (-\infty, 0) \cup \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Исходное неравенство тогда преобразуется к виду $2 \leqslant \leqslant \left(5 - \frac{1}{x}\right)^3$, или $5 - \frac{1}{x} > \sqrt[3]{2}$. Последнее выполняется, если $x < 0$ или $x \geqslant 1/(5 - \sqrt[3]{2}\,)$.

Объединяя промежутки, найденные в пунктах «А» и «Б», получим решение задачи.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup [\,1/(5 - \sqrt[3]{2}\,), +\infty)$.

5. Пусть T и R — середины ребер AB и BC соответственно. Плоскости FB_1D_1 и GB_1D_1 пересекают плоскость основания $ABCD$ по прямым, параллельным прямой B_1D_1. Ясно, что это будут соответственно прямые FT и GR (рис. 95). Построим теперь плоскость CC_1M. Она содержит отрезок MN и проходит через точку T. Пусть P и Q — соответственно точки пересечения отрезков B_1D_1 и C_1M, CT и GR. Рассматривая подобные треугольники MPB_1 и C_1PD_1, находим, что $MP = \frac{1}{2}\,PC_1 = \frac{1}{3}\,MC_1$. Аналогичным образом, из подобия треугольников TGQ и CRQ получаем $CQ = \frac{1}{3}\,CT = \frac{1}{3}\,MC_1$.

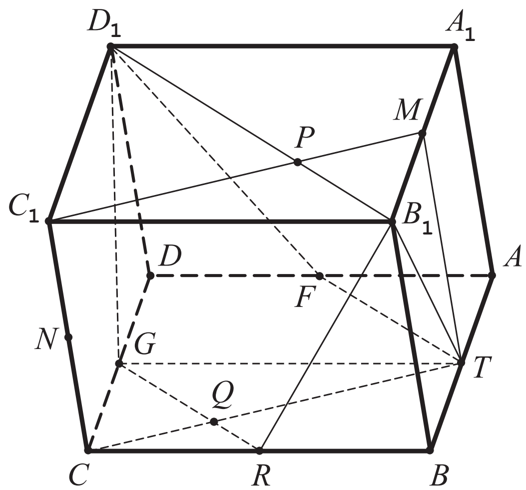

Рис. **95**

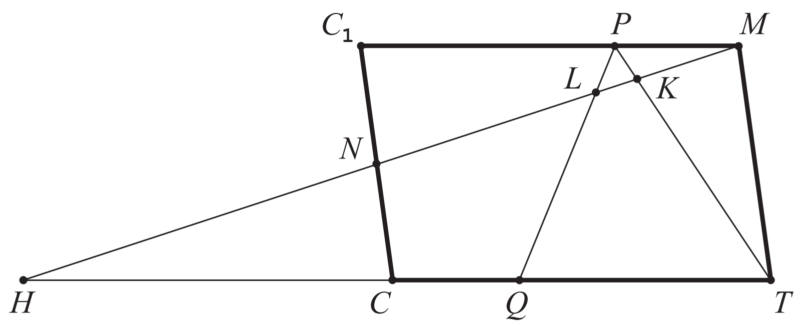

Рис. **96**

Изобразим сечение параллелепипеда плоскостью CC_1M (рис. 96). Точки K и L, заданные в условии задачи, — это, как легко заметить, соответственно точки пересечения отрезков PT и PQ с отрезком MN. Продолжим MN до пересечения с прямой TC в точке H. Тогда $CH = MC_1$, $TH = 2MC_1$, $MH = 2MN$, $QH = QC + CH = \frac{4}{3}MC_1$. Рассмотрим две пары подобных треугольников: MPK и HTK, MPL и HQL. Для первой пары имеем

$$\frac{MK}{KH} = \frac{MP}{HT} = \frac{MC_1/3}{2MC_1} = \frac{1}{6}.$$

Отсюда $MK = \frac{1}{7}MH = \frac{2}{7}MN$. Из подобия MPL и HQL вытекает, что

$$\frac{ML}{LH} = \frac{MP}{QH} = \frac{MC_1/3}{4MC_1/3} = \frac{1}{4}, \quad ML = \frac{1}{5}MH = \frac{2}{5}MN.$$

Теперь находим

$$LN = MN - ML = \frac{3}{5}MN,$$

$$KL = ML - MK = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right)MN = \frac{4}{35}MN.$$

Следовательно, $MK : KL : LN = 10 : 4 : 21$.

Ответ: $10 : 4 : 21$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $a = \pm\sqrt{3}\,b$, $b \neq 0$. **2.** $\arccos\frac{1}{3} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 2 и 6. *Указание.* Отношение $3 : 1$ площадей заданных треугольников равно отношению диаметров окружностей. Пусть $DC = 2r$,

$BC = x$, тогда $AB = 6r$, $AD = 2x$. Выберем на AB точку M так, чтобы прямые CM и AD были параллельны. В треугольнике BCM известны все стороны: $BM = 4r$, $BC = x$, $CM = 2x$; медиана CN равна отрезку, соединяющему центры окружностей, то есть $CN = 4r$. Отсюда легко получить, что $x = 2r\sqrt{2}$, а высота трапеции $h = r\sqrt{7}$. Выражая через r площадь трапеции, находим $r = 2$. **4.** $(-\infty,\, 1/(\sqrt[4]{3}-2)\,] \cup \bigl(-1,\, -\frac{1}{2}\bigr) \cup (0, +\infty)$. **5.** $7:1:20$. *Указание.* Рассмотрим плоскость A_1MN. Пусть она пересекает прямые D_1C_1 и DC в точках P и Q соответственно, тогда A_1MQP — параллелограмм, N — середина A_1P. Плоскости A_1BD и A_1BF пересекают указанный выше параллелограмм по отрезкам A_1S и A_1R, точки S и R лежат на отрезке MQ, причем $MS = \frac{1}{6}\,MQ$, $MR = \frac{1}{5}\,MQ$. Рассматривая подобные треугольники MKS и NKA_1, MLR и NLA_1, находим $MK = \frac{1}{4}\,MN$, $ML = \frac{2}{7}\,MN$.

Вариант 2.3. **1.** $a = \pm\sqrt{2}\,b$, $b \neq 0$. **2.** $\arcsin\frac{1}{4} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 5 и $2\sqrt{10}$. *Указание.* Отношение площадей треугольников ABC и BCD равно отношению диаметров AB и CD окружностей, поэтому их радиусы равны соответственно $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$. Пусть точка M выбрана на AB так, что прямые CM и AD параллельны. В треугольнике BCM сторона $BM = AB - CD = \sqrt{5}$, медиана $CN = \frac{5}{2}\sqrt{5}$, высота $CH = 2\sqrt{5}$. Зная это, легко определить его стороны BC и $CM = AD$. **4.** $(-\infty, 0) \cup \bigl(\frac{1}{6},\, \frac{1}{5}\bigr) \cup \bigl[\,1/(6-\sqrt[3]{4}\,), +\infty\bigr)$. **5.** $7:3:4$. *Указание.* Рассмотрим плоскость BB_1N. Пусть она пересекает прямые DC, D_1C_1 и A_1D_1 в точках P, Q и N_1 соответственно. Обозначим через R точку пересечения отрезков AC и BN. Тогда $BR = \frac{2}{3}\,BN$. Рассмотрим параллелограмм PQB_1B. В нем N_1 — середина QB_1, L и K — точки пересечения N_1R и MN, B_1R и MN соответственно. Пусть прямая MN пересекает прямую QB_1 в точке S, тогда $NM = MS$. Рассматривая подобные треугольники N_1LS и RLN, B_1KS и RKN, находим $NL = \frac{2}{7}\,MN$, $NK = \frac{1}{2}\,MN$.

Вариант 2.4. **1.** $a = \pm\sqrt{7}\,b$, $b \neq 0$. **2.** $\arccos\bigl(-\frac{1}{4}\bigr) + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{15}$ и $\sqrt{15}/2$. *Указание.* Пусть диаметры AB и CD окружностей равны соответственно $4r$ и $2r$, боковые стороны трапеции $BC =$

$= 3x$, $AD = 4x$. Выберем точку M на AB так, чтобы прямые CM и AD были параллельны. В треугольнике BCM стороны $BM = 2r$, $BC = 3x$, $CM = 4x$; медиана CN равна $3r$. Отсюда $x = \frac{2}{\sqrt{5}}r$, а высота трапеции $h = \frac{4\sqrt{11}}{5}r$. Выражая через r площадь трапеции, находим $r = \sqrt{15}/2$. **4.** $(-\infty, 1/(\sqrt[4]{5} - 3)\,] \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \cup (0, +\infty)$. **5.** $12 : 3 : 5$. *Указание.* Рассмотрим плоскость DCM, она пересекает ребро D_1A_1 в его середине M_1, CDM_1M — параллелограмм. Пусть плоскости ACD_1 и GCD_1 пересекают прямую MM_1 в точках S и P соответственно, тогда $MP = \frac{3}{4}MM_1$, $MS = \frac{3}{2}MM_1$. Заметим, что L и K — точки пересечения отрезков CS и MN, CP и MN. Рассматривая подобные треугольники NLC и MLS, NKC и MKP, находим $NL = \frac{1}{4}MN$, $NK = \frac{3}{5}MN$.

2003

Решение варианта 1.1

1. Пусть x (км) — расстояние от А до Б, u (км/мин) — скорость пешехода, v (км/мин) — скорость велосипедиста, t (мин) — искомое время, тогда

$$\begin{cases} 30v = 30u + x, \\ 1{,}16 \cdot 25v = 25u + x, \\ 0{,}8 \cdot vt = ut + x. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $v = 5u$, $x = 120u$. Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем

$$5 \cdot 0{,}8 \cdot ut = ut + 120u \;\Rightarrow\; 3t = 120,\; t = 40.$$

Ответ: 40 минут.

2. При условии $\sin 3x \neq 0$ последовательно находим

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin 3x, \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x,$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получаем две возможности.

А. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$, $x=\frac{\pi}{3}+2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. Эта серия корней не удовлетворяет условию $\sin 3x\neq 0$.

Б. $\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0$, $x=\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Для этой серии корней $\sin 3x=\sin\left(\frac{6k+2}{5}\pi\right)$. Условие $\sin 3x\neq 0$ выполнено при нецелых $\frac{6k+2}{5}$, то есть при $k\neq 5m+3$ $(m\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$, $k\neq 5m+3$ $(k,\, m\in\mathbb{Z})$.

3. Положим $BD=x$, $MD=y$, $AD=CD=z$, $\angle ADB=\alpha$ (рис. 97). Используя свойство пересекающихся хорд, получаем

$$AD\cdot CD=BD\cdot MD\ \Rightarrow\ xy=z^2.$$

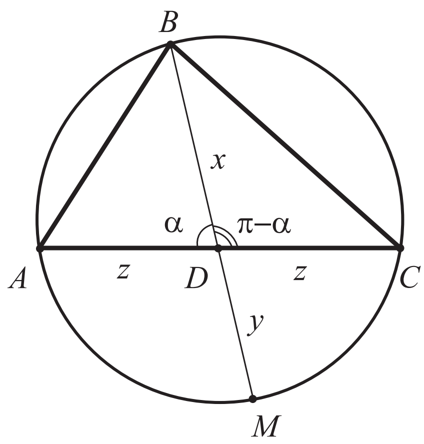

Рис. **97**

По теореме косинусов

$$AB^2=49=z^2+x^2-2xz\cos\alpha,$$

$$BC^2=81=z^2+x^2+2xz\cos\alpha,$$

откуда $x^2+z^2=65$. Привлекая, наконец, условие $x+y=13$, приходим к системе

$$\begin{cases} xy=z^2,\\ x^2+z^2=65,\\ x+y=13.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $x(13-x)=65-x^2\ \Rightarrow\ 13x=65\ \Rightarrow\ x=5$.

Ответ: 5.

4. Заметим, что $x\geqslant 3$. Полагая $z=\sqrt{2x-6}$, приведем исходное неравенство к виду

$$|\,6z-8\,|\geqslant z^2+1,\quad z\geqslant 0.$$

Рассмотрим далее все возможные случаи.

А. Пусть $6z-8\geqslant 0$, то есть $z\geqslant\frac{4}{3}$. Тогда $6z-8\geqslant z^2+1$, $z^2-6z+9\leqslant 0$, $(z-3)^2\leqslant 0$, $z=3>\frac{4}{3}$, $x=\frac{15}{2}>3$.

Б. Пусть $0 \leqslant z < \frac{4}{3}$, тогда $8 - 6z \geqslant z^2 + 1$, $z^2 + 6z - 7 \leqslant 0$, $z_{1,2} = -3 \pm 4$. Учитывая, что $z \geqslant 0$ и $x \geqslant 3$, имеем $0 \leqslant z \leqslant 1$, $0 \leqslant 2x - 6 \leqslant \leqslant 1$, $3 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$.

Ответ: $\left[3,\, \frac{7}{2}\right] \cup \left\{\frac{15}{2}\right\}$.

5. Пусть F — середина BD, а E — середина AB, $\angle ABD = \alpha$ (рис. 98). По теореме Пифагора $AF = \sqrt{BA^2 - BF^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

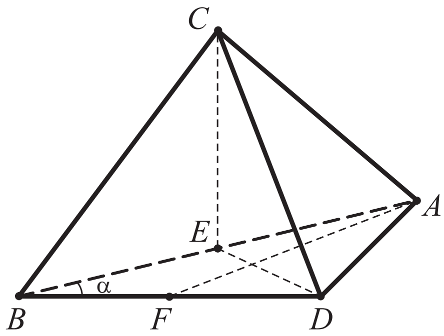

Рис. **98**

Если h — высота пирамиды, проведенная из вершины C, то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\, h \cdot S_{ABD} = \frac{1}{6}\, h \cdot BD \cdot AF = \frac{4\sqrt{15}}{3}\, h = 4\sqrt{15}.$$

Значит, $h = 3$. Высота CE в треугольнике ABC также равна 3, поэтому CE — высота пирамиды.

По теореме косинусов

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\, AB \cdot BD \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Аналогично,

$$DE^2 = BE^2 + BD^2 - 2\, BE \cdot BD \cdot \cos\alpha = 16 + 16 - 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{4} = 24.$$

Следовательно, $CD^2 = DE^2 + CE^2 = 24 + h^2 = 33$.

Ответ: $\sqrt{33}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** 18 %. **2.** $-\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \neq 7m + 3$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{65}$. **4.** $[4,\, 5] \cup \{20\}$. **5.** 11.

Вариант 1.3. **1.** 30 минут. **2.** $\frac{2\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \neq 7m + 2$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** $\left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup \left[\frac{3}{2},\, 2\right]$. **5.** $\sqrt{51}$.

Вариант 1.4. **1.** 10 %. **2.** $-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \neq 5m + 3$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $2\sqrt{6}$. **4.** $\{-14\} \cup [1,\, 2]$. **5.** $\sqrt{89}$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть искомая сумма S выдана m монетами достоинством 81 рубль, n монетами в 9 рублей и k монетами в 1 рубль. Понятно, что $n \leqslant 8$ и $k \leqslant 8$, иначе ту же сумму можно составить меньшим числом монет, заменив девять одинаковых монет одной монетой большего достоинства. Так как всего монет 23, то $m \geqslant 7$. Заметим, что уже при $m = 9$ искомая сумма S окажется больше $81m = 729$. Следовательно, возможны лишь три случая:

$$m = 7,\ n = 8,\ k = 8, \quad S = 647;$$
$$m = 8,\ n = 8,\ k = 7, \quad S = 727;$$
$$m = 8,\ n = 7,\ k = 8, \quad S = 719.$$

Условие $S < 700$ выполняется только в первом случае.

Ответ: 647 рублей.

2. Так как $3x^2 \geqslant 0$, то $0 \leqslant \arccos(3x^2) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant 0$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant 0$, откуда

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 0. \tag{1}$$

Вычислив теперь косинус от обеих частей уравнения $\arccos(3x^2) = -2\arcsin x$, получим

$$3x^2 = \cos(-2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2.$$

Значит, $x^2 = \frac{1}{5}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. В силу условия (1) выбираем знак минус.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

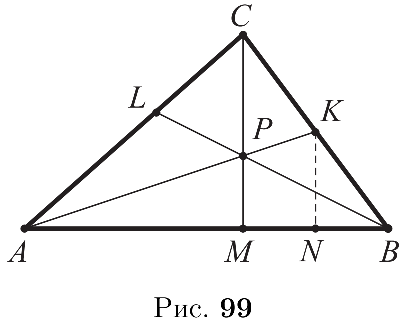

Рис. **99**

3. Из точки K опустим перпендикуляр KN на AB (рис. 99). Понятно, что KN — средняя линия треугольника BCM. Положим $x = MN = NB$, $y = AM$. По теореме об отношении отрезков, на которые делит сторону треугольника его биссектриса, имеем

$$BC : BM = CP : PM = 5 : 3,$$

откуда $BC = \frac{5}{3}\,BM = \frac{10}{3}\,x$. Значит, по теореме Пифагора

$$BC^2 - BM^2 = CM^2 \Rightarrow \left(\frac{100}{9} - 4\right)x^2 = 64 \Rightarrow x = 3.$$

Из подобия треугольников AKN и APM вытекает

$$AN : KN = AM : PM \Rightarrow \frac{y+3}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 9.$$

Таким образом, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\,AB \cdot CM = \frac{1}{2}\,(y + 2x) \cdot 8 = 60$.

Ответ: 60.

4. Перепишем неравенство в виде

$$4^{\,x+1} + 4 \cdot 4^{\,|x+1|} \leqslant 10$$

и рассмотри две возможности.

А. $x + 1 \geqslant 0$. При этом $|\,x + 1| = x + 1$, а исходное неравенство равносильно $5 \cdot 4^{\,x+1} \leqslant 10$, то есть $4^{\,x+1} \leqslant 2$, $x + 1 \leqslant \frac{1}{2}$, $x \leqslant -\frac{1}{2}$. С учетом условия $x + 1 \geqslant 0$ получаем $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Б. $x + 1 < 0$. В данном случае $|\,x + 1| = -x - 1$, а неравенство приводится к виду $4^{\,2(x+1)} - 10 \cdot 4^{\,x+1} + 4 \leqslant 0$. Полагая $y = 4^{\,x+1}$, придем к квадратному неравенству $y^2 - 10y + 4 \leqslant 0$, решением которого является промежуток $\left[\,5 - \sqrt{21},\, 5 + \sqrt{21}\,\right]$. Возвращаясь к переменной x, находим $\log_4 \frac{5 - \sqrt{21}}{4} \leqslant x \leqslant \log_4 \frac{5 + \sqrt{21}}{4}$. Учитывая условие $x + 1 < 0$, заключаем $x \in \left[\,\log_4 \frac{5 - \sqrt{21}}{4},\, -1\right)$.

Остается объединить промежутки, найденные в случаях А и Б.

Ответ: $\left[\,\log_4 \frac{5 - \sqrt{21}}{4},\, -\frac{1}{2}\,\right]$.

5. Пусть $AC = 1$, $CD = 5$. Понятно, что AC и BD перпендикулярны CD (рис. 100). Через точку D проведем прямую, параллельную AC, а через точку A — прямую, параллельную CD. Получится прямоугольник $ACDE$, в котором $AE = CD = 4$, $AE \parallel CD$. Заметим, что отрезок CD перпендикулярен плоскости BDE. Отсюда вытекает, что $AE \perp BDE$ и угол AEB — прямой, кроме того, высота BO треугольника BDE является одновременно и высотой пирамиды $ABCD$, проведенной к грани ACD. Положив теперь $\angle BED = \alpha$

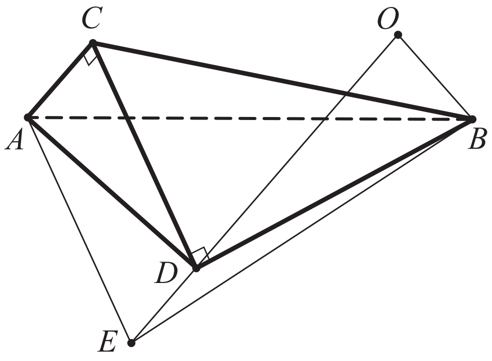

Рис. **100**

и применив последовательно теорему Пифагора и теорему косинусов, находим

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{48 - 16} = 4\sqrt{2},$$

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE \cdot \cos\alpha \Rightarrow 25 = 32 + 1 - 8\sqrt{2}\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad BO = BE \cdot \sin\alpha = 4,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot BO \cdot S_{ACD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 447. **2.** $\sqrt{2/3}$. **3.** $3\sqrt{5}$. **4.** $\left(-\infty,\, \log_9 \frac{5-2\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{2},\, \infty\right)$. **5.** 6.

Вариант 2.3. **1.** 293. **2.** $-\frac{1}{\sqrt{19}}$. **3.** 30. **4.** $\left(-\infty,\, \log_2 \frac{7-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[2,\, \infty\right)$. **5.** 24.

Вариант 2.4. **1.** 179. **2.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **3.** $12\sqrt{2}$. **4.** $\left[1 + \log_3 \frac{21-\sqrt{393}}{2},\, 3\right]$. **5.** 24.

2004

Решение варианта 1.1

1. Пусть x, y и z очков потеряно при стрельбе соответственно первым, вторым и третьим стрелками (по сравнению с максимально возможным результатом 50 очков). Из условия задачи вытекает, что выполняются неравенства $x \geqslant 3$, $y \geqslant 3$ и $z \geqslant 2$. Все вместе стрелки потеряли 9 очков, поэтому $x+y+z = 9$. Возможны всего три случая:

$$\text{а)}\quad x = 3,\ y = 3,\ z = 3;$$
$$\text{б)}\quad x = 3,\ y = 4,\ z = 2;$$
$$\text{в)}\quad x = 4,\ y = 3,\ z = 2.$$

Первый случай не подходит, поскольку известно, что один из стрелков победил, набрав больше всех очков. Во втором случае второй стрелок должен был бы выбить 4 девятки и одну десятку, что тоже противоречит условию. Остается третий случай, который всем условиям задачи удовлетворяет. Стрелки выбили: первый — 46 очков $(2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 8)$, второй — 47 очков $(2 \cdot 10 + 3 \cdot 9)$, третий — 48 очков $(3 \cdot 10 + 2 \cdot 9)$.

Ответ: 46, 47, 48.

2. Для каждого значения a рассмотрим два случая.

А. $x \geqslant -a$, тогда $|x + a| = x + a$, и неравенство преобразуется к виду $x+a \leqslant x$, т. е. $a \leqslant 0$. Если действительно $a \leqslant 0$, то неравенство в случае А выполнено для всех $x \in [-a, +\infty)$. При $a > 0$ решений нет.

Б. $x < -a$, тогда $|x + a| = -(x + a)$, и получаем неравенство $-(x+a) \leqslant x$, т. е. $x \geqslant -a/2$. Если $a \geqslant 0$, то выполняется $-a \leqslant -a/2$. Неравенства $x < -a$ и $x \geqslant -a/2$ не могут быть справедливыми одновременно, поэтому решений при $a \geqslant 0$ в случае Б нет. При $a < 0$ получаем промежуток $[-a/2, -a)$.

Остается объединить найденные множества каждого a.

Ответ: $[-a/2, +\infty)$ при $a \leqslant 0$; решений нет при $a > 0$.

3. Обозначим через K и L точки касания окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, с основаниями AD и BC соответствен-

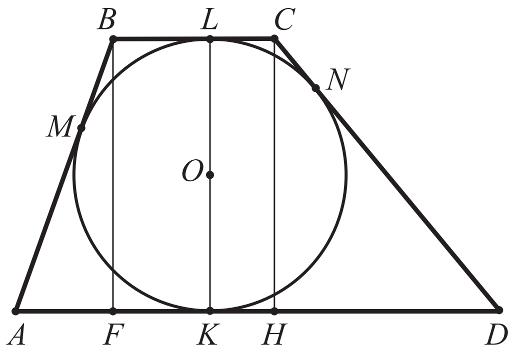

Рис. **101**

но (рис. 101). Отрезок LK перпендикулярен основаниям, а его середина O — центр окружности.

Положим $BM = x$, $CN = 2y$. Тогда $AM = 2x$, $AB = 3x$, $DN = 9y$, $CD = 11y$. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, поэтому $BL = x$, $AK = 2x$, $CL = 2y$, $DK = 9y$. Опустим высоты BF и CH на основание AD. Ясно, что $FK = BL$, $KH = CL$. В прямоугольных треугольниках ABF и CHD катеты $AF = AK - FK = x$, $DH = DK - HK = 7y$. По теореме Пифагора $BF^2 = AB^2 - AF^2 = 8x^2$, $CH^2 = CD^2 - HD^2 = 72y^2$. Поскольку $BF = CH$, получаем $8x^2 = 72y^2$, $x = 3y$. Отсюда $AD = 2x + 9y = 15y$, $BC = x + 2y = 5y$, $AD : BC = 3 : 1$.

Ответ: $3 : 1$.

4. Отметим, что для корней уравнения должны выполняться условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

Выберем φ так, чтобы $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Можно взять $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ ($= \operatorname{arctg} 2$). Заметим, что $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Теперь исходное уравнение приводим к виду $\sin(x+\varphi) = \sin 2x$, откуда $x + \varphi + 2k\pi = 2x$, $x = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), или $\pi - x - \varphi + 2n\pi = 2x$, $x = -\frac{\varphi}{3} + \frac{(2n+1)\pi}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ для всех корней выполнены.

Проверим неравенство $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0$. Для первой серии корней имеем $\sin(\varphi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi) > 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, так как $0 < \varphi - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$. Для корней второй серии левая часть неравенства принимает вид $\sqrt{2}\sin(-\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3})$. На основании соотношений $-\frac{\pi}{6} < -\frac{\varphi}{3} < -\frac{\pi}{12}$ и $-\frac{\pi}{12} < -\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{12} < 0$ неравенство

$\sin(-\frac{\varphi}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{2n\pi}{3})>0$ выполняется только для целых чисел вида $n=3m+1$ $(m\in\mathbb{Z})$. Таким образом, во второй серии условию задачи удовлетворяют корни $x=-\frac{\varphi}{3}+(2m+1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $-\frac{\varphi}{3}+(2m+1)\pi$, $\varphi+2k\pi$, где $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ $(m,k\in\mathbb{Z})$.

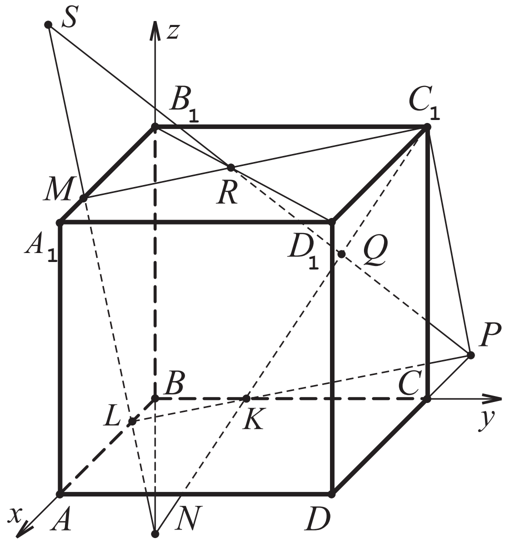

Рис. **102**

5. Заметим, что $MB_1:LB=B_1C_1:BK=3:1$. Отсюда легко получается, что прямые ML и C_1K пересекаются на продолжении ребра BB_1 в точке N, где $BN=\frac{1}{2}$ (рис. 102). Значит, прямая l лежит в плоскости MC_1KL, которая пересекает плоскости оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно по прямым LK и MC_1. Отсюда вытекает, что P — точка пересечения прямых LK и DC, а R — точка пересечения прямых C_1M и B_1D_1.

Из подобия треугольников LBK и PCK следует, что $PC:LB=KC:BK=2:1$, $PC=\frac{1}{2}$. Аналогичным образом, используя подобие треугольников MB_1R и C_1D_1R, находим $C_1D_1:MB_1=D_1R:RB_1=4:3$, $MR=\frac{3}{7}C_1M$. Четырехугольник LMC_1P является параллелограммом, поэтому $C_1M=LP$, и в подобных треугольниках SMR и SLP имеем $SR:SP=MR:LP=3:7$, $SP=\frac{7}{4}RP$. Длину отрезка RP найдем методом координат. Начало системы координат поместим в точку B, а оси x, y, z направим вдоль лучей BA, BC и BB_1. Нетрудно вычислить, что точки P и R имеют соответственно координаты $\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$ и $\left(\frac{3}{7};\frac{3}{7};1\right)$, поэтому

$$SP=\frac{7}{4}RP=\frac{7}{4}\sqrt{\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{7}-1\right)^2+1}=\frac{\sqrt{429}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{429}}{8}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $48, 47, 46$. **2.** x — любое, если $a \leqslant 0$; $(-\infty, a/2\,]$, если $a > 0$. **3.** $4:1$. **4.** $\frac{\varphi}{3} + 2m\pi$, $-\varphi + (2n+1)\pi$, где $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{213}/8$. *Указание.* Прямые ML и BK пересекаются на продолжении ребра AA_1 в точке N такой, что $A_1N = 1$. Точка S получается как пересечение прямых BM и CD, а точка Q — прямых A_1C_1 и KL.

Вариант 1.3. **1.** $45, 46, 47$. **2.** x — любое, если $a \geqslant 0$; $(-\infty, -a/2]$, если $a < 0$. **3.** $7:8$. **4.** $-\frac{\varphi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi$, где $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}$ $(m \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{865}/18$. *Указание.* Прямые DK и ML пересекаются на продолжении ребра CC_1 в точке N такой, что $C_1N = 1/2$. Точка P получается как пересечение прямых DM и AB, а точка R — прямых LK и A_1C_1.

Вариант 1.4. **1.** $47, 48, 47$. **2.** При $a < 0$ решений нет; $[\,a/2, +\infty)$, если $a \geqslant 0$. **3.** $5:7$. **4.** $\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $-\varphi + 2n\pi$, где $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{61}}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{427}/9$. *Указание.* Прямые ML и A_1K пересекаются на продолжении ребра D_1D в точке N такой, что $DN = 1$; Q получается в пересечении прямых MA_1 и B_1D_1; S — общая точка прямых LK и AB.

Решение варианта T1.1

1. Пусть для натуральных чисел m и n выполняются равенства $m = \sqrt{a^2+1}$, $n = \sqrt{4a^2+37}$. Тогда $m^2 = a^2+1$, $n^2 = 4a^2+37$ и $n^2 - 4m^2 = (n-2m)(n+2m) = 33$. Ясно, что $n > 2m$ и $n - 2m < n + 2m$. С учетом этих неравенств число 33 можно разложить на целые множители всего двумя способами:

А. $n - 2m = 3$, $n + 2m = 11$. Отсюда $n = 7$, $m = 2$, $a^2 + 1 = 4$, $a = \pm\sqrt{3}$.

Б. $n - 2m = 1$, $n + 2m = 33$. Тогда $n = 17$, $m = 8$, $a^2 + 1 = 64$, $a = \pm\sqrt{63}$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{63}$.

2. Угол AMB вписан в окружность S_2 и измеряется половиной дуги AB этой окружности, лежащей в круге S_1 (рис. 103). Следовательно, величина α этого угла не зависит от положения точки M на дуге AB вне круга S_1. Аналогично, угол BDA вписан в окружность S_1 и измеряется половиной дуги AB этой окружности, лежащей в круге S_2. Его величина β также не зависит от выбора точки M. Угол CAD — внешний для треугольника DAM. Он равен сумме двух внутренних углов AMD и ADM, не смежных с ним, и его величина $\gamma = \alpha + \beta$ остается постоянной для всех допустимых положений точки M. Но угол CAD вписан в окружность S_1 и опирается на ее дугу CD, расположенную вне круга S_2. Следовательно, дуга CD (а значит, и стягивающая ее хорда CD) имеет одну и ту же длину для всех точек M.

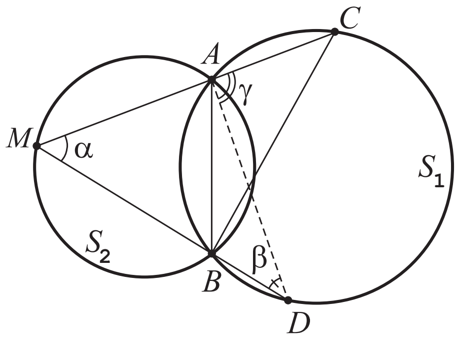

Рис. **103**

3. Умножим неравенство на положительное число xy и приведем его к виду $x\sin x + y\sin y \geqslant y\sin x + x\sin y$. Перенося все члены неравенства в левую часть и раскладывая на множители, получаем $(x - y)(\sin x - \sin y) \geqslant 0$. На промежутке $(0, \pi/2)$ функция $\sin x$ является строго возрастающей. Поэтому, если $x \geqslant y$, то $\sin x \geqslant \sin y$, а если $x < y$, то $\sin x < \sin y$ для всех значений $x, y \in (0, \pi/2)$. Следовательно, оба сомножителя имеют один и тот же знак при $x \neq y$, и неравенство справедливо в строгом смысле, а при $x = y$ оно превращается в равенство.

4. Можно считать, что все три прямые проходят через одну точку S (рис. 104). Этого всегда можно добиться параллельным переносом, так как при параллельном переносе углы между прямыми сохраняются. Отложим от точки S на каждой из прямых равные отрезки SA, SB и SC. Если точки S, A, B, C (а значит, и данные прямые) лежат в од-

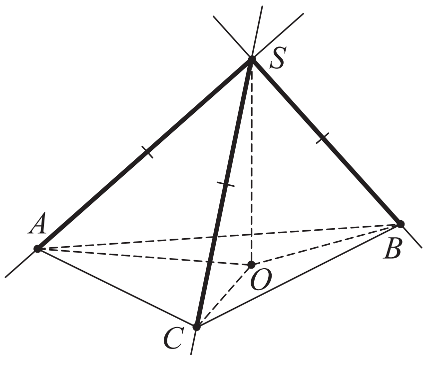

Рис. **104**

ной плоскости, то в качестве искомой прямой можно взять любой перпендикуляр к этой плоскости. Если же точки S, A, B и C являются вершинами некоторой пирамиды (не лежат в одной плоскости), то опустим из вершины S высоту SO на плоскость основания ABC. Прямоугольные треугольники AOS, BOS и COS равны (по катету и гипотенузе), поэтому равными являются их углы ASO, BSO и CSO. Прямая SO — искомая.

Ответы и указания к варианту Т1.2

1. $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{91}$. **2.** *Указание.* Угол AMB постоянен как вписанный в окружность S_2. В то же время он измеряется полусуммой дуг CD и AB окружности S_1. **3.** *Указание.* Воспользоваться тем, что функция $\cos x$ убывает на промежутке $(0,\ \pi/2)$. **4.** *Указание.* Плоскость ABC, построенная при решении задачи 4 варианта Т1.1, удовлетворяет условию данной задачи.

Решение варианта 2.1

1. Пусть v км/ч — скорость катера в стоячей воде, u км/ч — скорость течения. Тогда расстояние S между пунктами А и Б составляет $10(v-u)$ км. Две трети обратного пути катер прошел со скоростью $v+u$, оставшуюся треть — со скоростью u. Отсюда $\frac{2S}{3(v+u)}+\frac{S}{3u}=14$. Подставляя найденную ранее величину S, получаем уравнение

$$\frac{20(v-u)}{3(v+u)}+\frac{10(v-u)}{3u}=14.$$

Умножив на $3(v+u)u$, преобразуем его к виду $5v^2-11uv-36u^2=0$. Поделив на u^2 и решив квадратное относительно v/u уравнение, находим, что $v=4u$. Тогда $S=10(v-u)=30u$, $v+u=5u$, а искомое время $t=\frac{S}{v+u}=6$.

Ответ: 6 часов.

2. Левая часть неравенства определена, если $x>0$, $x\neq 1$ и выражение под знаком первого из логарифмов положительно, то есть $\log_2\left(\frac{22}{3}-2^{3-x}\right)>0$. Решая последнее неравенство, получаем $\frac{22}{3}-8\cdot 2^{-x}>1$, $2^x>\frac{24}{19}$, $x>\log_2\frac{24}{19}$. Следовательно, значения x должны принадлежать множеству $\left(\log_2\frac{24}{19},\ 1\right)\cup(1,+\infty)$.

Рассмотрим два случая.

А. Пусть $x > 1$, тогда исходное неравенство преобразуется к виду $\log_2\left(\frac{22}{3} - 2^{3-x}\right) \geqslant x$. Далее получаем $\frac{22}{3} - 8 \cdot 2^{-x} > 2^x$. Умножая на 2^x, превращаем неравенство в квадратное $(2^x)^2 - \frac{22}{3} \cdot 2^x + 8 \leqslant \leqslant 0$ относительно 2^x. Оно выполняется, если $\frac{4}{3} \leqslant 2^x \leqslant 6$, то есть $x \in \left[\log_2 \frac{4}{3}, \log_2 6\right]$. Учитывая начальное ограничение $x > 1$, окончательно определяем множество $(1, \log_2 6]$ решений неравенства в случае А.

Б. Пусть теперь $\log_2 \frac{24}{19} < x < 1$, то есть $\frac{24}{19} < 2^x < 1$. Поскольку на указанном промежутке основание логарифма меньше 1, исходное неравенство преобразуется в $\log_2\left(\frac{22}{3} - 2^{3-x}\right) \leqslant x$. Далее получаем, что $(2^x)^2 - \frac{22}{3} \cdot 2^x + 8 \geqslant 0$, отсюда $2^x \leqslant \frac{4}{3}$ или $2^x \geqslant 6$. Последнее в данном случае невозможно. Учитывая, что $\frac{24}{19} < \frac{4}{3}$, находим множество решений $x \in \left(\log_2 \frac{24}{19}, \log_2 \frac{4}{3}\right]$ для случая Б.

Объединяя найденные множества, получаем

Ответ: $\left(\log_2 \frac{24}{19}, \log_2 \frac{4}{3}\right] \cup \left(1, \log_2 6\right]$.

3. Пусть $HK = x$, тогда $AH = 4x$. Прямоугольные треугольники AHL и CHK подобны, поскольку их острые углы AHL и CHK равны как вертикальные (рис. 105). Отсюда следует, что $AH \cdot HK = LH \cdot HC$, $4x^2 = 36$, $x = HK = 3$, $AH = 12$. По теореме Пифагора находим $KC = \sqrt{CH^2 - HK^2} = 6\sqrt{2}$. Рассмотрев теперь подобные треугольники HKC и BLC, получаем

$$\frac{BL}{LC} = \frac{HK}{KC}, \; BL = \frac{HK \cdot LC}{KC} = \frac{HK \cdot (CH + HL)}{KC} = \frac{13}{2\sqrt{2}}.$$

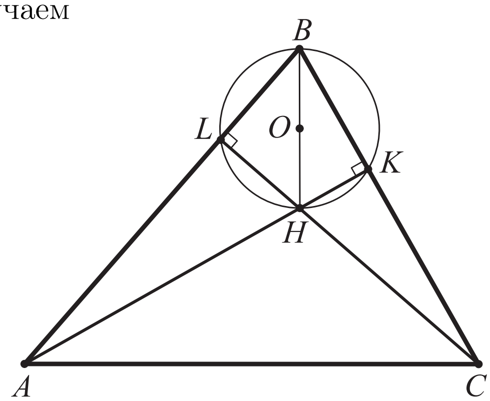

Рис. **105**

Окружность O, построенная на отрезке BH как на диаметре, проходит через точки K и L, так как углы BLH и BKH — прямые. Следовательно, она является описанной около треугольника BLK, а ее радиус равен

$$\frac{1}{2}\,BH = \frac{1}{2}\sqrt{BL^2 + LH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{169}{8} + 16} = \frac{\sqrt{297}}{4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{297}}{4\sqrt{2}}$.

4. По условию должно выполняться уравнение $\sin 4x - \sin 7x = \sin x - \sin 4x$, или $\sin x + \sin 7x = 2\sin 4x$. Воспользуемся формулой преобразования суммы синусов в произведение и приведем уравнение к виду

$$2\sin 4x\cos 3x = 2\sin 4x, \quad \sin 4x(\cos 3x - 1) = 0.$$

Отсюда $\sin 4x = 0$, $x = \frac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\cos 3x = 1$, $x = \frac{2n\pi}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Проверим теперь, для каких из найденных корней арифметическая прогрессия является строго возрастающей, то есть $\sin x > \sin 4x > \sin 7x$. Ясно, что можно проверять только одно из неравенств. Рассмотрим разность прогрессии $d = \sin x - \sin 4x$. Подставляя корни первой серии, получаем $d = \sin\frac{k\pi}{4} - \sin k\pi = \sin\frac{k\pi}{4}$. Условие $d > 0$ выполнено, если $\sin\frac{k\pi}{4} > 0$. Последнее неравенство справедливо для целых чисел k вида $k = 8m+1$, $k = 8m+2$, $k = 8m+3$ при произвольном $m \in \mathbb{Z}$, и соответственно для $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi$. Рассмотрим теперь корни $x = \frac{2n\pi}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. В этом случае $d = \sin\frac{2n\pi}{3} - \sin\frac{8n\pi}{3} = -2\sin n\pi\cos\frac{5n\pi}{3} = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Во второй серии нет корней, для которых разность прогрессии положительна.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2m\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $\frac{3\pi}{4} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$.

5. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу. Пусть два шара с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 касаются друг друга и некоторой плоскости в точках P_1, P_2 соответственно. Выразим длину отрезка P_1P_2 через r_1 и r_2. Радиусы O_1P_1 и O_2P_2, проведенные в точки касания шаров с заданной плоскостью, перпендикулярны ей. Следовательно, прямые O_1P_1 и O_2P_2 параллельны. Проведем через них плоскость и рассмотрим получившееся сечение (рис. 106).

Пусть для определенности $r_2 \leqslant r_1$. Опустим перпендикуляр O_2K на O_1P_1. В прямоугольном треугольнике O_1KO_2 имеем $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_1K = r_1 - r_2$. Отсюда $P_1P_2 = KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} =$

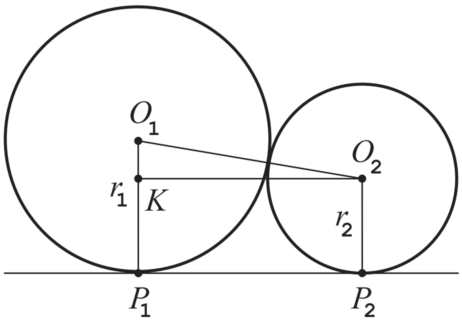

Рис. **106**

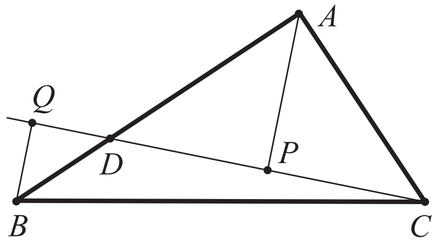

Рис. **107**

$= \sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Ясно, что если эти же шары по-прежнему касаются плоскости, но расстояние между их центрами больше r_1+r_2, то и расстояние между точками их касания с плоскостью будет больше, чем $2\sqrt{r_1r_2}$.

Вернемся к исходной задаче. Будем для краткости обозначать заданные шары вершинами треугольника ABC, в которых они касаются плоскости: шар A, шар B, шар C, а их радиусы обозначим R_A, R_B и R_C. Зададим на прямой CD точки P и Q — точки касания шара C с плоскостью в те моменты, когда он в процессе движения вдоль прямой CD касался соответственно шаров A и B (рис. 107).

Из предыдущих рассуждений вытекает, что AP и BQ являются перпендикулярами к прямой CD, $AP = 2\sqrt{R_AR_C} = 2\sqrt{32R_C} = 8\sqrt{2R_C}$, $BQ = 2\sqrt{R_BR_C} = 2\sqrt{8R_C} = 4\sqrt{2R_C}$. Из подобия треугольников APD и BQD находим, что $AD : BD = AP : BQ = 2 : 1$, $AD = \frac{2}{3}AB = 48$. Значит, прямоугольный треугольник ACD равнобедренный, $8\sqrt{2R_C} = AP = AC/\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$, а $R_C = 9$.

Ответ: 9.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 6 часов. **2.** $\left(\log_3\frac{14}{9}, \log_3 2\right] \cup \left(1, \log_3\frac{7}{2}\right]$. **3.** $\frac{8}{\sqrt{15}}$. **4.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $(2n+1)\pi$ $(m,\, n \in \mathbb{Z})$. **5.** 75.

Вариант 2.3. **1.** 4 часа. **2.** $\left(\log_2\frac{15}{11}, \log_2\frac{5}{3}\right] \cup \left(1, \log_2 3\right]$. **3.** $\frac{\sqrt{153}}{4\sqrt{2}}$. **4.** $\pm\frac{\pi}{4} + 2m\pi$, $2n\pi$ $(m,\, n \in \mathbb{Z})$. **5.** 5.

Вариант 2.4. **1.** 5 часов. **2.** $\left(\log_3\frac{20}{11}, \log_3\frac{5}{2}\right]\cup\left(1, \log_3 4\right]$. **3.** $\frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{15}}$. **4.** $-\frac{\pi}{3}+2m\pi$, $-\frac{2\pi}{3}+2n\pi$ $(m,\, n\in\mathbb{Z})$. **5.** 12.

Решение варианта Т2.1

1. Данное неравенство эквивалентно неравенству $112 < 448^{7/9}$. Возводя обе его части в девятую степень, приходим к соотношению $112^9 < 448^7$. Разложим основания степеней на простые множители: $112 = 2^4\cdot 7$, $448 = 2^6\cdot 7$. Отсюда $112^9 = (2^4\cdot 7)^9 = 2^{36}\cdot 7^9$, $448^7 = (2^6\cdot 7)^7 = 2^{42}\cdot 7^7$, а исходное неравенство оказывается эквивалентным неравенству $2^{36}\cdot 7^9 < 2^{42}\cdot 7^7$. Сокращая на 2^{36} и 7^7, получаем очевидное утверждение $7^2 = 49 < 2^6 = 64$.

2. Пусть для определенности точка M лежит на дуге AB окружности O радиуса R, описанной около равностороннего треугольника ABC. Обозначим через α величину наименьшего из углов AOM и BOM (на рис. 108 это угол AOM). Ясно, что $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$. Тогда $\angle BOM=\frac{2\pi}{3}-\alpha$, $\angle COM=\frac{2\pi}{3}+\alpha$. Применяя теорему косинусов к треугольникам AOM, BOM и COM, получаем $AM^2 = AO^2+OM^2-2\cdot AO\cdot OM\cdot\cos\alpha = 2R^2-2R^2\cos\alpha$, $BM^2 = 2R^2-2R^2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$, $CM^2 = 2R^2-2R^2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$. Складывая полученные выражения, находим $AM^2+BM^2+CM^2 = 6R^2-2R^2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\alpha\right]$. Сумма в квадратных скобках равна нулю, так как $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha=-\cos\alpha$. Значит, величина $AM^2+BM^2+CM^2$ постоянна и равна $6R^2$ независимо от положения точки M на окружности.

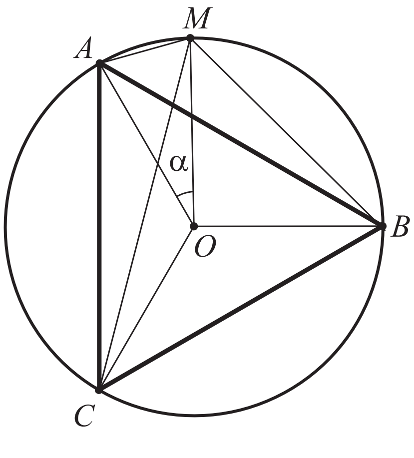

Рис. **108**

3. Пусть $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$, $\arccos\frac{7}{25}=\beta$. По определению арксинуса $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (в нашем случае $\alpha>0$), $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. На указанном промежутке $\cos\alpha\geqslant 0$, поэтому $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \arcsin\frac{4}{5} = \alpha$, а для доказательства исходного равенства достаточно обосновать равенство $\beta = \pi - 2\alpha$. Оба числа принадлежат промежутку $[0, \pi]$. Заметим, что $\cos\beta = \frac{7}{25}$, $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$. Таким образом, $\cos\beta = \cos(\pi - 2\alpha)$. Отсюда вытекает, что $\beta = \pi - 2\alpha$, поскольку косинус является строго убывающей функцией на отрезке $[0, \pi]$ числовой прямой.

4. Опустим из вершины D высоту DH на плоскость основания ABC пирамиды (рис. 109). Ясно, что выполняется неравенство $DH \leqslant DC = 3$, поскольку перпендикуляр не превосходит наклонной, проведенной к плоскости из той же точки.

Пусть α — величина угла ABC. Тогда площадь S_{ABC} треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\,AB\cdot BC\cdot\sin\alpha$, и так как $AB = 1$, $\sin\alpha \leqslant 1$, справедливо еще одно неравенство $S_{ABC} \leqslant \frac{BC}{2}$. Тогда для объема V заданной пирамиды получаем: $2 = V = \frac{1}{3}\cdot DH\cdot S_{ABC} \leqslant \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{BC}{2} = \frac{BC}{2}$. Отсюда следует, что $BC \geqslant 4$. Легко заметить, что равенство возможно только в том случае, когда ребро CD перпендикулярно плоскости основания, а треугольник ABC прямоугольный ($\alpha = \pi/2$).

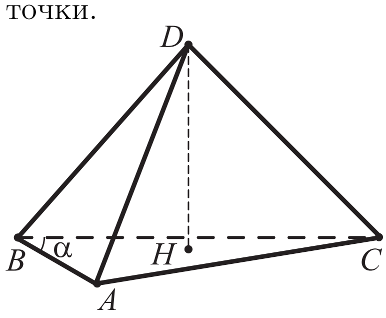

Рис. **109**

ФАКУЛЬТЕТЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ГЕОЛОГО-ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ

1975

Решение варианта 1

1. Выясним, при каких значениях x все подкоренные выражения будут неотрицательными. Для этого решим систему неравенств

$$16 - x^2 \geqslant 0, \quad 2x + 4 \geqslant 0, \quad 2x + \sqrt{16 - x^2} \geqslant 0. \tag{1}$$

Первым двум неравенствам удовлетворяют те и только те значения x, которые принадлежат отрезку $[-2,\, 4\,]$. Рассмотрим на этом отрезке последнее неравенство системы (1), переписав его в виде

$$\sqrt{16 - x^2} \geqslant -2x. \tag{2}$$

В случае $x \in [\,0,\, 4\,]$ неравенство (2) очевидно, так как в его левой части стоит неотрицательное число, а в правой — неположительное. Поэтому отрезок $[\,0,\, 4\,]$ входит в множество решений системы (1).

Пусть $x \in [-2,\, 0)$, тогда обе части неравенства (2) положительны и его можно возвести в квадрат. В результате получим $16 \geqslant 5x^2$, или $|x| \leqslant 4/\sqrt{5}$. Учитывая соотношение $-2 < -4/\sqrt{5}$, заключаем, что $x \in [-4/\sqrt{5},\, 0)$.

Итак, решением системы (1) является промежуток $[-4/\sqrt{5},\, 4\,]$, в котором исходная задача равносильна неравенству $2x + \sqrt{16 - x^2} <$ $< 2x + 4$. Вычитая $2x$ из обеих частей и вновь возводя в квадрат, получаем $-x^2 < 0$, т. е. $x \neq 0$.

Ответ: $[-4/\sqrt{5},\, 0) \cup (0,\, 4\,]$.

2. Пусть ABC — заданный треугольник, $AC \perp BC$, $BC = a$, O — центр окружности, а E и D — точки пересечения окружности с катетами AC и BC соответственно (рис. 110). По условию задачи $EC = CD$.

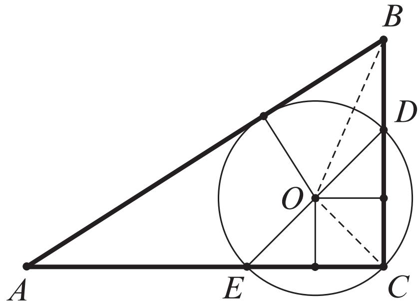

Рис. **110**

Вписанный в окружность прямой угол DCE опирается на диаметр, поэтому точки O, E и D лежат на одной прямой, а ECD — равнобедренный прямоугольный треугольник с острым углом 45°. Если через r обозначить радиус окружности, то расстояния от точки O до сторон AC и BC будут равны $r \sin 45° = r/\sqrt{2}$, а расстояние от O до AB равно r. Выразим теперь через r площадь исходного треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(AB \cdot r + AC \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + BC \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ar}{\sin 30°} + \frac{ar \cdot \operatorname{ctg} 30°}{\sqrt{2}} + \frac{ar}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ar}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1).$$

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\, AC \cdot BC = \frac{1}{2}\, a^2 \operatorname{ctg} 30° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Приравняв найденные значения площади, определим искомый радиус.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$.

3. Исходное уравнение равносильно следующему:

$$3 \cos x \cos 3x = 1 \qquad (3)$$

В самом деле, любое решение этого уравнения удовлетворяет неравенству $\cos 3x \neq 0$ и, следовательно, является решением исходной задачи. Обратно, каждое решение исходной задачи удовлетворяет (3). Поэтому далее будем решать уравнение (3).

По формуле умножения косинусов получаем $3(\cos 4x + \cos 2x) = 2$. Выразив $\cos 4x$ через $\cos 2x$, придем к квадратному уравнению относительно $\cos 2x$, корнями которого являются числа $-\frac{\sqrt{129}+3}{12}$ и $\frac{\sqrt{129}-3}{12}$. Первый из этих корней не попадает в промежуток $[-1,\ 1]$

и, следовательно, не может быть равен $\cos 2x$ ни при каких значениях x. Второй корень лежит в указанном промежутке, поэтому $\cos 2x = \frac{\sqrt{129}-3}{12}$, $2x = \pm \arccos \frac{\sqrt{129}-3}{12} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{129}-3}{12} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4. Область определения логарифмической функции состоит из положительных чисел, а основание логарифма должно быть больше нуля и отлично от единицы, поэтому $x \in (4,\, 5) \cup (5,\, 8) \cup (8,\, \infty)$. Переходя теперь в исходном уравнении к логарифмам по основанию 7, получаем $2\log_7(x-2) + \log_7(8-x)^2 = 2$. Заметим, что $\log_7(8-x)^2 = 2\log_7|8-x|$, значит, $\log_7(x-2) + \log_7|8-x| = 1$, или

$$(x-2)|8-x| = 7. \tag{4}$$

Пусть $x \in (4,\, 5) \cup (5,\, 8)$, тогда $|8-x| = 8-x$, а равенство (4) превращается в квадратное уравнение $x^2 - 10x + 23 = 0$ с корнями $5-\sqrt{2}$ и $5+\sqrt{2}$. Первый из них меньше четырех и, следовательно, является посторонним. Второй корень принадлежит интервалу $(5,\, 8)$ и поэтому будет решением исходного уравнения.

Если же $x > 8$, то (4) превращается в уравнение $x^2 - 10x + 9 = 0$ с корнями 1 и 9, из которых только $x = 9$ является решением задачи.

Ответ: $5+\sqrt{2}$; 9.

5. Сечение шара плоскостью ABC — круг, вписанный в треугольник ABC. Центр шара O лежит на прямой OD, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через центр D вписанного круга (рис. 111). Центр круга лежит на биссектрисе угла BAC, следовательно, $\angle BAD = 60°$. Кроме того, AD — общий перпендикуляр к параллельным прямым m и OD. Длина этого перпендикуляра совпадает с расстоянием от точки O до прямой m и, значит, равна радиусу r данного шара.

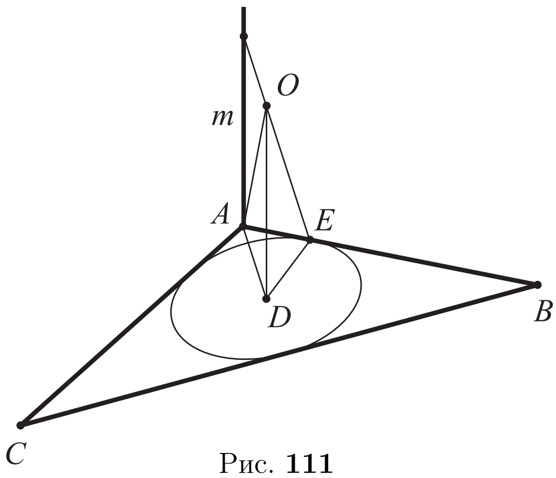

Рис. **111**

Пусть E — точка касания шара со стороной AB. По теореме Пифагора имеем $AO^2 = AD^2 + OD^2 = AD^2 + OE^2 - DE^2 = 2r^2 - (r\sin 60^\circ)^2 = 5r^2/4$.

Ответ: $r\sqrt{5}/2$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(-\infty,\,-1\,] \cup \bigl(\frac{4+2\sqrt{13}}{3},\,\infty\bigr)$. **2.** $2r^2\sin^3\alpha$. *Указание.* Пусть AB — боковая сторона трапеции, а O — центр окружности. Используя равенство углов при основании равнобедренного треугольника AOB, найдите угол DAC. При этом возможны два случая: центр круга лежит внутри трапеции и вне ее. **3.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ $(k,\,m,\,n \in \mathbb{Z})$. **4.** 2. **5.** $a^2\sqrt{14}/12$. *Указание.* На ребре $A'B'$ выберем точку D' так, чтобы $A'D' = 2B'D'$. Так как $C'D' \parallel CD$, то искомое сечение параллельно плоскости $AC'D'$. Следовательно, для построения этого сечения достаточно через точку D провести прямую, параллельную AD'.

Вариант 3. **1.** $[-3\sqrt{2},\,0) \cup (0,\,6\,]$. **2.** $4a^2\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть F — середина AB, E — середина BC. Из равенства углов FAE и AEF вытекает, что $AF = FE = \frac{1}{2}(AD + BC) = 2a$. Высота трапеции равна $AB\sin 45^\circ = 2a\sqrt{2}$. **3.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$ $(k,\,n \in \mathbb{Z})$. **4.** 4; $\sqrt{34}$. **5.** $\frac{a^2(2\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}}$. *Указание.* На ребре CC' или на его продолжении найдите точку, равноудаленную от граней указанного в условии двугранного угла. Искомая плоскость проходит через эту точку и прямую AB.

Вариант 4. **1.** $\bigl(-\infty,\,\frac{3-\sqrt{84}}{3}\bigr) \cup [\,4,\,\infty)$. **2.** $a^2\sqrt{3}/4$. *Указание.* Воспользоваться тем, что меньшее из оснований, боковая сторона и диагональ трапеции образуют равнобедренный треугольник. **3.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n \in \mathbb{Z})$. **4.** 3; 4. **5.** $\frac{3}{8}a^2\sqrt{42}$. *Указание.* Пусть E — середина AC, F — точка пересечения AD и BE. В плоскости SBE проведите перпендикуляр к BE, проходящий через точку F. Вместе с прямой AD этот перпендикуляр определяет искомое сечение.

1976

1. Если три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, то полусумма первого и третьего равна второму из них. Если же три числа — последовательные члены геометрической прогрессии, то произведение первого и третьего равно квадрату второго. Отсюда и из условий задачи следует:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 2a_2, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 21, \\ (a_2 + 1)^2 = (a_1 - 1)(a_3 + 21). \end{cases}$$

Из первых двух уравнений данной системы находим

$$a_1 = 14 - a_3, \qquad a_2 = 7. \tag{1}$$

Подставив найденные значения в третье уравнение, получаем $64 = (13 - a_3)(a_3 + 21)$, или $a_3^2 + 8a_3 - 209 = 0$. Корни этого квадратного уравнения равны 11 и -19. Отсюда и из равенств (1) вытекает, что либо $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, либо $a_1 = 33$, $a_2 = 7$, $a_3 = -19$.

Ответ: (3; 7; 11) или (33; 7; -19).

2. Переходя от квадратов синусов и косинусов к косинусам двойных аргументов, перепишем исходное уравнение в виде $\cos 4x - \cos 2x = \cos 16x - \cos 14x$. Разности косинусов преобразуем в произведения: $\sin 3x \sin x = \sin 15x \sin x$. Таким образом, либо

$$\sin x = 0, \quad x = \pi l \quad (l \in \mathbb{Z}), \tag{2}$$

либо $\sin 15x - \sin 3x = 0$. В последнем случае вновь преобразуем разность в произведение $\sin 6x \cos 9x = 0$, откуда находим еще две серии корней:

$$\sin 6x = 0, \quad x = \frac{\pi k}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}); \tag{3}$$

$$\cos 9x = 0, \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi m}{9} \quad (m \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

Осталось заметить, что серия (3) содержит серию (2). Кроме того, часть корней из серии (4), получающихся при $m = 3n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$), также попадает в (3).

Ответ: $\frac{\pi k}{6}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi m}{9}$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

3. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, а O — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 112). Так как диагонали взаимно перпендикулярны, то $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(AC\cdot OB + AC\cdot OD) = \frac{1}{2}AC\times BD = \frac{1}{2}AC^2$. С другой стороны, AOD и BOC — равнобедренные прямоугольные треугольники, поэтому $AC = AO + OC = (AD + BC)\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(AD + BC) = l\sqrt{2}$. Таким образом, $S_{ABCD} = l^2$.

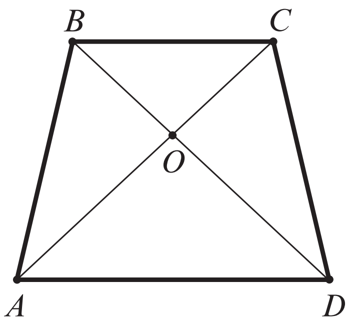

Рис. **112**

Ответ: l^2.

4. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Квадратный трехчлен $\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3$ положителен при всех x, так как он не имеет действительных корней. Следовательно, возможны только следующие случаи.

А. $\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3 < 1$, или $x \in (2,\ 4)$. Показательная функция убывает, если ее основание меньше единицы, поэтому в данном случае неравенство (5) равносильно условию $x^2 - x - 7 < -1$, справедливому при $x \in (-2,\ 3)$. Пересекая интервалы $(-2,\ 3)$ и $(2,\ 4)$, заключаем, что $x \in (2,\ 3)$.

Б. $\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3 > 1$, или $x \in (-\infty,\ 2) \cup (4,\ \infty)$. Теперь основание степени в (5) больше единицы, и мы приходим к неравенству $x^2 - x - 7 > -1$, справедливому при $x \in (-\infty,\ -2) \cup (3,\ \infty)$. Таким образом, $x \in (-\infty,\ -2) \cup (4,\ \infty)$.

В. $\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3 = 1$. В этом случае левая и правая части (5) равны единице и новых решений не возникает.

Ответ: $(-\infty,\ -2) \cup (2,\ 3) \cup (4,\ \infty)$.

5. Пусть S — вершина угла, O — центр шара, O_1, O_2 и O_3 — точки касания шара с гранями угла, причем O_3 лежит внутри плоского угла в 90°. Через точки O, O_1 и O_2 проведем плоскость. Эта плоскость перпендикулярна общей стороне плоских углов, равных 60°.

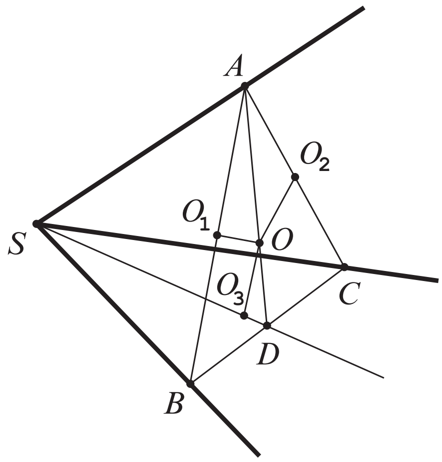

Рис. **113**

Точку пересечения плоскости с этой стороной обозначим через A, а через B и C — точки пересечения плоскости с остальными ребрами трехгранного угла (рис. 113).

Треугольники ABS и ACS равны, так как они прямоугольные, имеют общий катет AS и, кроме того, равные острые углы ASB и ASC. Но тогда треугольники ABC и SBC — равнобедренные.

Точка O равноудалена от сторон AB и AC треугольника ABC, следовательно, она лежит на биссектрисе AD. Так как AD одновременно является медианой и высотой, то D — середина BC и $AD \perp BC$. Прямая SD также перпендикулярна BC, поэтому плоскость ASD перпендикулярна BC и, значит, плоскости SBC. Но тогда радиус OO_3 должен лежать в плоскости ASD.

Положив теперь $AS = x$, легко находим $SB = x/\cos 60^\circ = 2x$, $AB = x \operatorname{tg} 60^\circ = x\sqrt{3}$, $BD = SD = SB \sin 45^\circ = x\sqrt{2}$, $AD = \sqrt{SD^2 - AS^2} = x$.

Таким образом, треугольник ASD — равнобедренный, следовательно, $\angle ADS = 45^\circ$ и $O_3D = O_3O = R$, $OD = R\sqrt{2}$, $AO = AD - OD = x - R\sqrt{2}$. В силу подобия треугольников AO_1O и ABD имеем $AO : OO_1 = AB : BD$, или $\frac{x - R\sqrt{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Отсюда окончательно получаем $x = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R$, $SD = R(2+\sqrt{3})$, $SO_3 = SD - R = R(1+\sqrt{3})$, $SO^2 = O_3O^2 + SO_3^2 = R^2\,(5 + 2\sqrt{3})$.

Ответ: $R\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(1;\, -3;\, 9)$ или $(1/3;\, -5/3;\, 25/3)$. **2.** πk; $\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $R^2\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть E — середина CD. Трапеция $ABED$ вписана в окружность, значит, она равнобочная.

Но тогда $BE = AD = BC$, а BCE — правильный треугольник. **4.** $(-\infty,\ -1/\sqrt{2}) \cup (1/3,\ 1/\sqrt{2}) \cup (3,\ \infty)$. **5.** $10\sqrt{3} - 25/4$. *Указание.* Из точки A опустим на диагональ BD перпендикуляр AE. В плоскости AEA' через точку E проведем прямую, образующую с AE угол в $60°$. Эта прямая вместе с BD определяет искомое сечение.

Вариант 3. **1.** $(4;\ 6;\ 9)$ или $(9;\ 6;\ 4)$. **2.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $6 : 5$. *Указание.* Пусть F, G и H — точки касания окружности соответственно со сторонами BC, DC и BD треугольника BCD. Положим $CD = x$, $BD = y$. Тогда $CF = CG = x - 1$, $BF = BH = y - 1$ и, значит, $5 = BC = CF + BF = x + y - 2$, т. е. $x + y = 7$. С другой стороны, по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 25$. Отсюда находим $x = 3$, $y = 4$. **4.** $(-\infty,\ -1) \cup (1 - \sqrt{2},\ 0) \cup (1 + \sqrt{2},\ \infty)$. **5.** $4/\sqrt{11}$. *Указание.* Плоскости $AA'C'C$ и $B'D'E$ перпендикулярны, поэтому перпендикуляр к линии пересечения этих плоскостей, проведенный из точки A, будет одновременно и перпендикуляром к плоскости $B'D'E$.

Вариант 4. **1.** $(3;\ 9;\ 27)$ или $(1/3;\ -5/3;\ 25/3)$. **2.** $\frac{2\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{3}\,(R^2 - a^2/4)$. *Указание.* Вписанный четырехугольник является равнобочной трапецией, основания которой можно найти по теореме Пифагора. **4.** $(-\infty,\ -1/\sqrt{3}) \cup (1/2,\ 1/\sqrt{3}) \cup (3/2,\ \infty)$. **5.** $1/\sqrt{30}$. *Указание.* Пусть AP — высота треугольника ABD. Искомое расстояние равно расстоянию от точки P до прямой $D'B$.

1977

Решение варианта 1

1. За 10 часов плот преодолел расстояние 80 км, поэтому скорость течения реки 8 км/ч. Пусть скорость катера в стоячей воде равна v (км/ч). Тогда вверх по реке он шел $100/(v-8)$ часов, а вниз по реке $80/(v+8)$ часов. Весь путь занял 10 часов, следовательно,

$$\frac{100}{v-8} + \frac{80}{v+8} = 10, \quad \text{или} \quad v^2 - 18v - 80 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $9 + \sqrt{161}$ и $9 - \sqrt{161}$. Смыслу задачи отвечает только первый из них, так как второй — отрицательный.

Ответ: $9 + \sqrt{161}$ км/ч.

2. Исключим из рассмотрения значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, для которых $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла. При всех оставшихся x функция $\cos x$ не равна нулю, поэтому исходное уравнение можно умножить на $\cos x$. В результате получим $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin 2x$. Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{2}$ и воспользуемся формулой синуса суммы двух аргументов. С учетом равенства $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ будем иметь $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x = 0$. Преобразуя разность синусов в произведение, находим

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

Таким образом, либо $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$, либо $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Осталось заметить, что первая серия корней содержится во второй, а любое решение из второй серии не совпадает с $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ни при каком целом k.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Значит, $BK = BM$ (рис. 114). Обозначим через x длину AK, тогда $BK = BM = MC = 2x$, $AB = 3x$, $BC = 4x$. Если O — центр окружности, то по теореме Пифагора $AO^2 = R^2 + x^2$, $OC^2 = 4x^2 + R^2$. С другой стороны, BO — биссектриса угла B, поэтому $AO : OC = AB : BC = 3 : 4$. Следовательно, $\frac{x^2 + R^2}{4x^2 + R^2} = \frac{9}{16}$, $x = R\sqrt{7/20}$. Теперь искомая площадь легко вычисляется:

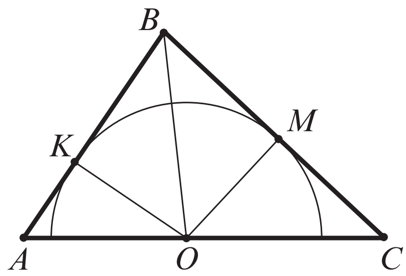

Рис. **114**

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BOC} = \frac{1}{2}\,(AB \cdot KO + BC \cdot MO) = \frac{7}{2}\,Rx = \frac{7}{20}\,R^2\sqrt{35}.$$

Ответ: $\frac{7}{20}\,R^2\sqrt{35}$.

4. Ввиду известных ограничений на возможные значения основания логарифмической функции и на ее область определения имеем

$$x > \frac{2}{3}, \quad x \neq 1. \tag{1}$$

Разделим исходное уравнение на $3^{\log_x(3x-2)}$ и перейдем к логарифмам по основанию x. Получим

$$3 \cdot \left(2/3\right)^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot \left(\sqrt{2/3}\,\right)^{\log_x(3x-2)} + 2 = 0.$$

Полагая теперь

$$y = \left(\sqrt{2/3}\,\right)^{\log_x(3x-2)},$$

придем к квадратному уравнению $3y^2 - 5y + 2 = 0$ с корнями $y_1 = 1$, $y_2 = 2/3$. Далее возникают две возможности.

А. $\left(\sqrt{2/3}\,\right)^{\log_x(3x-2)} = 1$, т. е. $\log_x(3x-2) = 0$, $3x - 2 = 1$, $x = 1$. Найденное значение x противоречит (1).

Б. $\left(\sqrt{2/3}\,\right)^{\log_x(3x-2)} = \frac{2}{3}$, или $\log_x(3x-2) = 2$. Следовательно, $3x - 2 = x^2$ и либо $x = 1$, либо $x = 2$. Из этих корней только второй удовлетворяет условиям (1).

Ответ: 2.

5. Пусть M и N — середины CC' и $A'D'$ соответственно (рис. 115). Продолжим BM до пересечения с продолжением $B'C'$ в некоторой точке E. Соединив затем E и N, обозначим через F и G точки пересечения прямой EN соответственно с $C'D'$ и продолжением $A'B'$. Возникшая в результате плоскость BEG и будет искомой.

Понятно, что плоскость BEG образует равные углы с параллельными плоскостями $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Удобнее искать угол α между

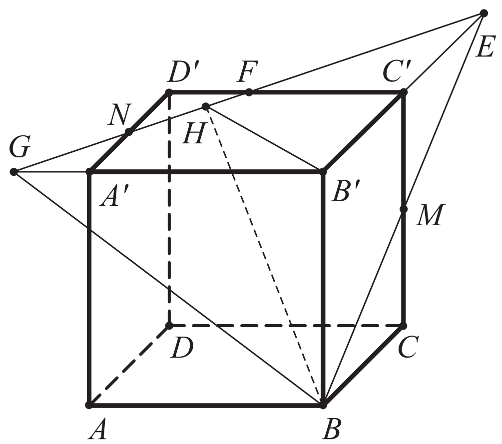

Рис. **115**

BEG и $A'B'C'D'$, тангенс которого равен отношению BB' к высоте $B'H$ треугольника $B'EG$, а для $B'H$ справедливо представление $B'H = B'E \cdot \frac{B'G}{EG}$.

Пусть длина ребра куба равна 1, тогда из равенства треугольников BMC и $MC'E$ следует $C'E = 1$, а из подобия треугольников $B'EG$ и $A'NG$ легко получаем $A'G = \frac{1}{3}$. Таким образом, $B'E = 2$, $B'G = \frac{4}{3}$, $EG = \sqrt{B'E^2 + B'G^2} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$, $B'H = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1/B'H = \sqrt{13}/4$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** В 2 раза. **2.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{269/5}$. *Указание.* Пусть E — центр прямоугольника, тогда $OE \perp BD$. Если опустить перпендикуляр OF на прямую AC, то возникнет прямоугольный треугольник OEF, угол FOE которого равен острому углу между диагоналями прямоугольника. Синус этого угла равен $(AB \cdot BC)/(2AE^2) = 24/25$, значит, $\cos\angle AEO = \sin\angle FOE = 24/25$. Теперь искомое расстояние можно найти по теореме косинусов из треугольника AOE. **4.** $1 + \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **5.** $\sqrt{2}/81$. *Указание.* Выберем на ребре AC точку H так, чтобы $AH = 1/3$, тогда отрезок GH окажется параллельным плоскости EFG, а объем пирамиды $DEFG$ будет равен объему пирамиды $DEFH$. Площадь грани DFH этой последней пирамиды равна $2/9$ площади грани тетраэдра $SABC$, а высота, опущенная из точки E на грань DFH, равна $2/3$ высоты тетраэдра. Следовательно, объем $DEFH$ равен $4/27$ объема $SABC$.

Вариант 3. **1.** 7,5 часа. **2.** $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; πn $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $(9\sqrt{6} - 6)/8$. *Указание.* Пусть $AO = x$. Из подобия треугольников BOD и AOC вытекает, что $AC = 1$, $OD = 3x$, причем $4 = CD = OD + OC = OD + \sqrt{AC^2 + AO^2} = 3x + \sqrt{x^2 + 1}$. Корни этого уравнения равны $(6 + \sqrt{6})/4$ и $(6 - \sqrt{6})/4$. Первый из них посторонний, поскольку $(6 + \sqrt{6})/4 > 4/3 > OD/3$. Теперь площадь треугольника BOC легко подсчитать как разность площадей треугольников BCD и BOD. **4.** $-1/2$. **5.** $a\sqrt{2}$. *Указание.* Нетрудно заметить, что $\angle B'D'C' = 90^\circ$, поэтому $B'D' \perp C'D'$. Так как DD' также перпендикулярно $B'D'$, то $B'D'$ — перпендикуляр к плоскости $DD'C'C$ и, следовательно, к CD'. Четырехугольник $DD'C'C$ — квадрат, значит $CD' \perp DC'$. Но $DC' \parallel AB'$, поэтому CD' — перпендикуляр к AB'. Итак, CD' — искомый перпендикуляр к плоскости $AB'D'$.

Вариант 4. **1.** 6 часов и 3 часа. **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{a^2}{4\operatorname{tg}^3\alpha}\left(2\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}\right)\cdot\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$. *Указание.* Положим $CD = 2x$, тогда по теореме Пифагора $AD^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 2ax$. С другой стороны, $AD^2 = (AB - CD)^2 \operatorname{tg}^2\alpha = (a - 2x)^2 \operatorname{tg}^2\alpha$. Приравнивая полученные выражения для AD^2, придем к уравнению относительно x. Отбор корней этого уравнения осуществляется из тех соображений, что α — острый угол и поэтому $x < a/2$. **4.** $5/2$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{6}$. *Указание.* Пусть D и E — середины ребер AB и SC соответственно; точка F лежит на ребре AC, причем $AF = a$. Опустим перпендикуляр EG на AC. Тангенс искомого угла равен отношению EG к расстоянию от точки G до прямой DF.

1978

Решение варианта 1

1. Если умножить на 2 второе уравнение исходной системы, а затем вычесть из него первое, то получится равенство $xy = 2$, в силу которого $y = 2/x$. Подставив это выражение в первое уравнение данной системы, легко придем к биквадратному уравнению $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ с корнями $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Соответствующие значения y определяются по формуле $y = 2/x$.

Ответ: $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; $(1;\ 2)$; $(-1;\ -2)$.

2. Сразу же исключим значения $x = \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), при которых функция $\operatorname{ctg} x$ не определена. Для всех оставшихся x величина $\sin x$ отлична от нуля, поэтому исходное уравнение можно умножить на $\sin x$. Получим $\sin x = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$. Пользуясь формулой косинуса разности, приходим к равенству $\sin x = \cos 2x$, легко сводящемуся к квадратному относительно $\sin x$ уравнению $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, в силу которого либо $\sin x = -1$, либо $\sin x = 1/2$.

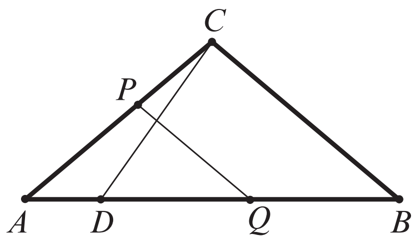

Рис. **116**

В первом случае $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, а во втором случае $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть P и Q — точки пересечения прямой O_1O_2 со сторонами AC и AB соответственно (рис. 116). Заметим, что CD — общая хорда окружностей O_1 и O_2, поэтому линия центров этих окружностей делит CD пополам. Так как прямая O_1O_2 еще и параллельна BC, то PQ — средняя линия треугольника BCD. Следовательно, $BQ = QD = 2AD$, $AQ = 3AD$. По условию задачи $AB = 5AD$. Из этих соотношений и подобия треугольников APQ и ABC вытекает

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{AQ^2}{AB^2} = \frac{9AD^2}{25AD^2} = \frac{9}{25}, \quad \frac{S_{APQ}}{S_{PQBC}} = \frac{9/25}{1 - 9/25} = \frac{9}{16}.$$

Ответ: $9 : 16$.

4. Логарифмическая функция определена для положительных значений аргумента, поэтому $1 + \frac{1}{x} > 0$ и $1 + \frac{x}{4} > 0$. Решением первого из этих неравенств является множество $(-\infty,\, -1) \cup (0,\, \infty)$, а решением второго — множество $(-4,\, \infty)$. Таким образом,

$$x \in (-4,\, -1) \cup (0,\, \infty). \tag{1}$$

Переходя теперь в исходном неравенстве к логарифмам по основанию 2, получаем

$$\log_2\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - \log_2\left(1 + \tfrac{x}{4}\right) \geqslant 1.$$

Потенцируя, избавимся от логарифмов:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \geqslant 1 + \frac{x}{4}. \tag{2}$$

На основании (1) возможны следующие случаи.

А. $x \in (-4,\, -1)$. Умножив (2) на отрицательное число $4x$, придем к квадратному неравенству $x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$, выполненному при $x \in (-\infty,\, -1 - \sqrt{3}\,] \cup [-1 + \sqrt{3},\, \infty)$. Учитывая условие $-4 < x < -1$, получаем: $x \in (-4,\, -1 - \sqrt{3}\,]$.

Б. $x > 0$. Умножив (2) на положительное число $4x$, получим неравенство $x^2+2x-2 \leqslant 0$, выполненное при $x \in [-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\,]$. Следовательно, $x \in (0,\ -1+\sqrt{3}\,]$.

Ответ: $(-4,\ -1-\sqrt{3}\,] \cup$
$\cup\,(0,\ -1+\sqrt{3}\,]$.

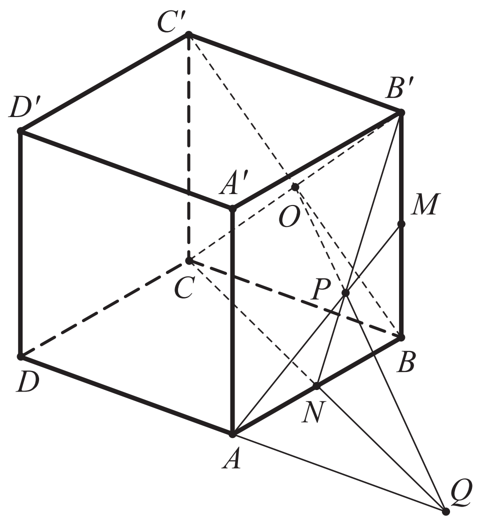

Рис. **117**

5. Прямая PQ является линией пересечения плоскостей OAM и OCN, при этом P — точка пересечения плоскости OCN с прямой AM, а Q — точка пересечения плоскости OAM с прямой CN (рис. 117). Так как плоскость OCN совпадает с $CB'N$, то P есть точка пересечения AM с $B'N$. Отрезки AM и $B'N$ — медианы в треугольнике ABB', поэтому $AP = \frac{2}{3}\,AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2+MB^2} = \sqrt{5}/3$. Плоскость OAM параллельна прямой AD, поскольку $OM \parallel AD$. Значит, AD — линия пересечения плоскости OAM с плоскостью $ABCD$, а Q является точкой пересечения прямых AD и CN. Из равенства треугольников AQN и CBN следует, что $AQ = 1$. Заметим, наконец, что AD — перпендикуляр к плоскости $AA'B'B$, поэтому угол PAQ прямой и $PQ^2 = AQ^2+AP^2 = 1+\frac{5}{9} = \frac{14}{9}$.

Ответ: $\sqrt{14}/3$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(3;\,1)$, $(-3;\,-1)$, $(\sqrt{6}/2;\,\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}/2;\,-\sqrt{6})$. **2.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $(1+1/\sqrt{2})\,R^2$. *Указание.* Пусть E — точка касания данной окружности с продолжением AD. Тогда CDE — прямоугольный треугольник с острым углом в 45°, значит, $CD = R\sqrt{2}$. С другой стороны, $\angle CDB = \angle CDE$, поэтому $\angle BDE = \angle ADB = 90^\circ$ и треугольник ADB также прямоугольный с острым углом в 45°. Высота этого треугольника, равная высоте трапеции, имеет длину R. Значит, $AB = 2R$, а площадь трапеции легко вычисляется по формуле $\frac{1}{2}\,R(AB+CD)$. **4.** $[-2,\ -1\,]\cup(2/3,\ \infty)$. **5.** $\frac{1}{4}\sqrt{30-18\sqrt{2}}$. *Указание.* Пусть O — центр, а E — точка касания сферы с ребром AC; D и F — проекции точки O на плоскости ABC и SAC соответственно. Понятно, что D лежит на биссектрисе угла BAC и, значит, совпадает с серединой BC, а F лежит на биссектрисе угла SAC, равного $45°$. Четырехугольник $ODEF$ является прямоугольником, диагональ OE которого равна искомому радиусу. Стандартным способом легко подсчитать, что $DE = \sqrt{3}/4$, $AE = 3/4$. Положим $OE = x$, тогда $OD = FE = \sqrt{x^2 - 3/16} = AE\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}$. Возводя это равенство в квадрат, найдем x.

Вариант 3. **1.** $(2;\,-1/2)$, $(-2;\,1/2)$, $(1;\,-1)$, $(-1;\,1)$. **2.** πk; $\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $5:9$. *Указание.* Так как CE — высота и медиана в треугольнике CBD, то $BC = CD = 3$. Пусть CG — высота треугольника ABC; по теореме Пифагора легко находим $CG = AD = \sqrt{BC^2 - BG^2} = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{14}$. Теперь из подобия треугольников ADF и ADC получаем $AF = AD^2/AC = 5/\sqrt{14}$. **4.** $[\,1-\sqrt{5},\ -1/3)\cup[\,1+\sqrt{5},\ \infty)$. **5.** $\sqrt{21}/8$. *Указание.* Точка Q является пересечением прямой $A'D'$ и плоскости α, проходящей через M и прямую KL. Пусть, для определенности, точка K лежит на ребре AA'. Проведем через M прямую, параллельную KL. Эта прямая пересекает AD в точке N $(AN = 1/4)$ и принадлежит плоскости α. Продолжив прямую KN до пересечения с прямой $A'D'$, найдем точку Q. Из равенства треугольников AKN и $A'KQ$ следует, что $A'Q = 1/4$. Точку P можно найти как пересечение прямых KL и MQ, при этом PK окажется, очевидно, средней линией треугольника MNQ. Значит, $PQ = \frac{1}{2}\,MQ$, а $MQ^2 = NQ^2 + MN^2 = 4KN^2 + MN^2 = 4AN^2 + 4AK^2 + MN^2 = 21/16$.

Вариант 4. **1.** $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\,\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\,-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\,1\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\,-1\right)$. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $8\sqrt{2}/3$. *Указание.* Прямая O_1O_2 перпендикулярна общей хорде CD окружностей O_1, O_2 и делит ее пополам. Эта же прямая проходит через точку B. Значит, высота BE треугольника BCD будет одновременно его медианой. Теперь находим $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 2\sqrt{2}$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}\,BE\cdot CD = 2\sqrt{2}$,

$S_{ABC} = \frac{4}{3} S_{BCD}$. **4.** $(-\infty, -1/2) \cup [1, 5]$. **5.** $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, E и F — его проекции на плоскости ABS и ABC соответственно, D — точка касания сферы с ребром SA. Понятно, что E лежит на биссектрисе угла ASB, а F — на биссектрисе угла CAB. Если x — радиус сферы, то $OD = OF = AD = AF = x$, $\angle ODE = \angle FAB = 30^\circ$, следовательно, $DE = x\sqrt{3}/2$. С другой стороны, $DE = DS \operatorname{tg} \angle DSE = (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = (1-x)(\sqrt{2}-1)$. Приравнивая найденные значения DE, получаем линейное уравнение относительно x.

1979

Решение варианта 1

1. Пусть первый автомобиль проезжает x, а второй — y километров в день. Согласно условию задачи имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{6x}{y} - \frac{2}{3} \cdot \frac{6y}{x} = 2, \\ 1{,}8\,x + 1{,}6\,y = 520, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} - 2\,\frac{y}{x} = 1, \\ 9x + 8y = 2600. \end{cases}$$

Обозначим отношение x/y через t, тогда в силу первого уравнения получим: $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Отрицательный корень противоречит смыслу задачи. Значит, $x = 2y$ и на основании второго уравнения системы заключаем: $26y = 2600$, $y = 100$, $x = 200$.

Ответ: 100 км и 200 км.

2. Положим $t = \frac{x+y}{x-y}$. Из первого уравнения исходной системы вытекает: $t + 6/t = 5$, $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Если $t = 2$, то $x+y = 2x-2y$, или $x = 3y$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, получим $3y^2 = 2$. Следовательно, $y_1 = \sqrt{6}/3$, $x_1 = \sqrt{6}$; $y_2 = -\sqrt{6}/3, x_2 = -\sqrt{6}$. Действуя аналогично в случае $t = 3$, найдем еще два решения $y_3 = 1$, $x_3 = 2$; $y_4 = -1$, $x_4 = -2$.

Ответ: $(\sqrt{6};\ \sqrt{6}/3)$, $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6}/3)$, $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$.

3. Сгруппируем слагаемые в левой части уравнения следующим образом:

$$4\left(\tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 4\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) - 1 = 0.$$

Согласно формуле косинуса суммы двух аргументов имеем

$$4\cos\left(\tfrac{\pi}{3} + 2x\right) - 4\sqrt{3}\cos\left(\tfrac{\pi}{6} + x\right) - 1 = 0.$$

Пусть $x + \frac{\pi}{6} = y$, тогда данное уравнение примет вид $4\cos 2y - 4\sqrt{3}\cos y - 1 = 0$, или $8\cos^2 y - 4\sqrt{3}\cos y - 5 = 0$. Получилось квадратное уравнение относительно $\cos y$, корнями которого являются $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{13}}{4}$ и $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4}$. Первый из этих корней посторонний, так как $\frac{1}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{13}) > 1$, а $|\cos y| \leqslant 1$. Следовательно, $\cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4}$ и $x + \frac{\pi}{6} = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4. Данная окружность вписана в равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (рис. 118). Пусть E, F и G — точки касания окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно, а r — ее радиус. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Поэтому $AE = AG = a - r$, $CG = FC = a - r$, $AC = AG + CG = 2a - 2r$. С другой стороны, $AC = a\sqrt{2}$. Следовательно, $2a - 2r = a\sqrt{2}$ и $r = (1 - \sqrt{2}/2)a$.

Через φ обозначим угол ADE. Понятно, что $\operatorname{tg}\varphi = AE/DE = \frac{a-r}{r} = 1 + \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = -1$. Таким образом, $2\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Пересечение круга и четырехугольника $ABCD$ есть сектор, центральный угол которого равен $2\varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$. По формуле площади сектора находим

$$S = \frac{\pi r^2\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{5\pi}{8}r^2 = \frac{5\pi a^2}{16}(3 - 2\sqrt{2}).$$

Ответ: $\frac{5}{16}\pi a^2(3 - 2\sqrt{2})$.

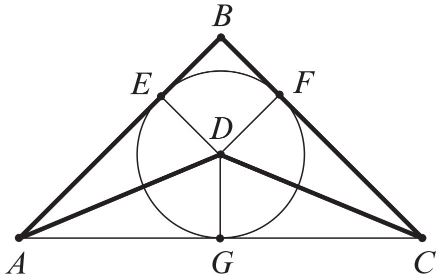

Рис. **118**

5. Прямая MN лежит очевидно в плоскости AA_1N. Проведем через точку K плоскость, параллельную

AA_1N. Нетрудно увидеть, что это будет плоскость CC_1P_1P (рис. 119), а $BP = B_1P_1 = D_1N = \sqrt{2}/2$. В плоскости CC_1P_1P лежит прямая l.

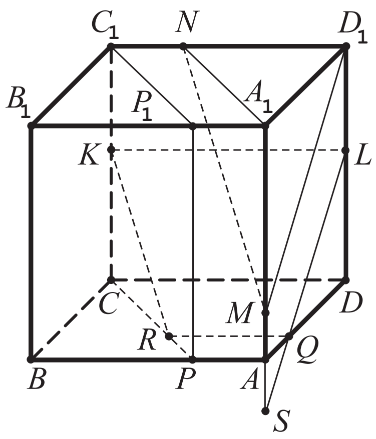

Рис. **119**

Аналогично, MN лежит в плоскости C_1D_1M. Через точку K проведем плоскость, параллельную C_1D_1M. Это будет плоскость KLQ, где $KL \parallel C_1D_1$, $LQ \parallel D_1M$. Прямая l лежит также в плоскости KLQ, значит, l есть линия пересечения плоскостей CC_1P_1P и KLQ, а искомая часть l совпадает с отрезком KR, где R — точка пересечения PC с плоскостью KLQ, при этом $RQ \parallel AB$.

Продолжим LQ до пересечения с AA_1 в точке S. Из подобия треугольников LQD и ASQ следует, что $AQ : DQ = AS : DL = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$CR = \frac{2}{3}\,PC = \frac{2}{3}\sqrt{BP^2 + 1} = \sqrt{2/3},$$
$$KR = \sqrt{CR^2 + KC^2} = \sqrt{2/3 + 1/3} = 1.$$

Ответ: 1.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 6 м^3 и 4 м^3. **2.** $\left(\frac{\sqrt{19}-2}{5}; 4+\sqrt{19}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{19}-2}{5}; 4-\sqrt{19}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$. **3.** $\frac{\pi k}{b+c}$; $\frac{\pi n}{c-a}$ (k, $n \in \mathbb{Z}$). **4.** 120°. *Указание.* Пусть O_1, r_1 — центр и радиус вписанной окружности; O_2, r_2 — центр и радиус второй из данных окружностей; A — проекция O_1 на тот катет треугольника, где лежит O_2. Треугольник AO_1O_2 прямоугольный, поэтому $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$, т. е. $r_2^2 = r_1^2 + (r_2 - r_1)^2$. Отсюда вытекает, что $r_1 = r_2$. Теперь легко вычислить нужный угол. **5.** 1/2. *Указание.* Через точку L проведем плоскости α и β, где α параллельна плоскости AA_1N, а β — плоскости B_1C_1M. Понятно, что α и β параллельны прямой MN, но тогда их линия пересечения и есть искомая прямая l.

Вариант 3. **1.** 15 км/ч и 10 км/ч. **2.** $\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}; \frac{3+\sqrt{57}}{6}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}; \frac{3-\sqrt{57}}{6}\right)$, $(4; 2)$, $(-2; -1)$. **3.** $\frac{\pi}{8}$. **4.** $\frac{\pi a^2}{3}(2-\sqrt{3})$. *Указание.* Если одна сторона треугольника в два раза больше другой, а угол между ними равен 60°, то этот треугольник прямоугольный. Итак, ABC — прямоугольный треугольник. Теперь легко найти и радиус вписанной в него окружности $r = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$, и угол ADC (он равен 120°), а затем и площадь соответствующего сектора. **5.** $\sqrt{6}/4$. *Указание.* Проведем через точку R две плоскости α и β, где α параллельна плоскости C_1D_1P, а β — плоскости ADQ. Каждая из этих плоскостей параллельна прямой PQ, но тогда искомая прямая l будет линией пересечения α и β.

Вариант 4. **1.** 100 и 200 единиц. **2.** $(-2; 2/3)$, $(4; 4/3)$. **3.** $(-1)^n \times \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **4.** $3R/8$. *Указание.* Пусть O_1 — центр, а r — радиус вписанной окружности; O_2 — центр описанной окружности. Точка O_2 — середина гипотенузы данного треугольника, а длина гипотенузы равна $2R$. Спроектируем O_1 на гипотенузу и обозначим проекцию буквой A. Треугольник O_1O_2A прямоугольный, значит, $AO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1A^2 = R^2/4 - r^2$. Катеты исходного треугольника равны $R + r + AO_2$ и $R + r - AO_2$. Если подставить сюда найденное значение AO_2, а затем записать для исходного треугольника теорему Пифагора, то получится уравнение относительно r. **5.** $\sqrt{6}/4$. *Указание.* Через точку F проведем плоскости α и β, где α параллельна плоскости ABN, а β — плоскости CDM. Каждая из плоскостей α и β параллельна прямой MN, а линия их пересечения совпадает с искомой прямой l.

1980

Решение варианта 1

1. Перепишем исходное уравнение в виде $\cos^2 x - 1 = \sin x \cos^2 x + \sin^3 x$. В правой части этого равенства вынесем за скобки множитель $\sin x$ и воспользуемся тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. В итоге получим уравнение $-\sin^2 x = \sin x$. Таким образом, либо $\sin x = 0$ и

$x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), либо $\sin x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: πk; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

2. Сумма углов CAD и ACD равна $63° + 42° = 105°$. Но тогда угол ADC в треугольнике CAD равняется $180° - 105° = 75°$ (рис. 120). Таким образом, углы ABC и ADC в сумме составляют $180°$, а все вершины четырехугольника лежат на одной окружности. Радиус R этой окружности легко найти, применив теорему синусов к треугольнику ACD:

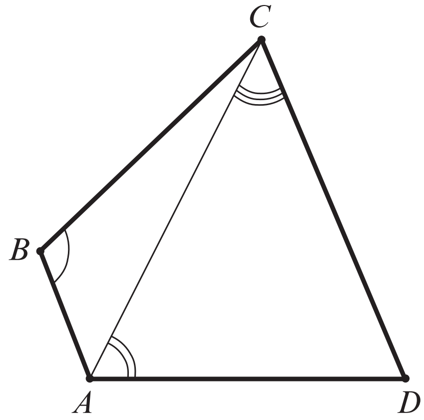

Рис. **120**

$$R = \frac{AC}{2\sin 75°} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sin 75°} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\cos 15°} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos 30°}} = \sqrt{3} - 1.$$

Площадь же круга равна

$$\pi\,(\sqrt{3}-1)^2 = 2\pi\,(2-\sqrt{3}).$$

Ответ: $2\pi\,(2-\sqrt{3})$.

3. Переходя к основанию 6, запишем уравнение в виде

$$\log_6 2(1+2^{-x}) - x\log_6 2 = \log_6 a,$$

откуда следует $2(1+2^{-x}) = a \cdot 2^x$. Обозначив 2^x через y, придем к уравнению $ay^2 - 2y - 2 = 0$. Так как параметр a входит в область определения логарифмической функции, то он положителен и полученное уравнение является квадратным. Корни этого уравнения $y_1 = \frac{1}{a}\,(1+\sqrt{1+2a})$ и $y_2 = \frac{1}{a}\,(1-\sqrt{1+2a})$. Второй из корней отрицателен, следовательно, он посторонний, поскольку $y = 2^x$ больше нуля при всех x. Таким образом,

$$2^x = \frac{1+\sqrt{1+2a}}{a}, \quad x = \log_2 \frac{1+\sqrt{1+2a}}{a}.$$

Найденное значение x неотрицательно при условии $\sqrt{1+2a} \geqslant$ $\geqslant a - 1$. В случае $0 < a \leqslant 1$ это условие выполняется. Если же $a > 1$, то неравенство можно возвести в квадрат. В итоге получим

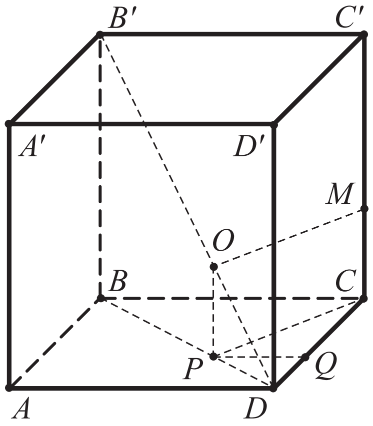

Рис. **121**

$a^2 - 4a \leqslant 0$, т. е. $a \in [0, 4] \cap (1, \infty) = (1, 4]$. Итак, исходное уравнение имеет неотрицательные решения только при $a \in (0, 1] \cup (1, 4] = (0, 4]$.

Ответ: $\log_2 \frac{1+\sqrt{1+2a}}{a}$ при $0 < a \leqslant 4$.

4. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямых AB и AA', совпадает с плоскостью $AB'C'D$. Геометрическое место точек, равноудаленных от AA' и $A'D'$, есть плоскость $A'B'CD$. Центр O шара принадлежит обеим указанным плоскостям и, значит, лежит на линии их пересечения, т. е. на диагонали $B'D$ куба (рис. 121).

Заметим, что расстояния от точки O до AA' и CC' одинаковы, следовательно, шар касается ребра CC' в точке M. Но тогда OM — перпендикуляр к CC'. Теперь мы легко находим длину перпендикуляра OP к плоскости $ABCD$ ($OP = MC = 1/3$), длину отрезка PD ($PD = \frac{1}{3}BD = \sqrt{2}/3$), длину перпендикуляра PQ к прямой CD ($PQ = 1/3$) и, наконец, длину отрезка CQ ($CQ = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}$). По теореме Пифагора $OM^2 = PC^2 = CQ^2 + PQ^2 = (2/3)^2 + (1/3)^2 = 5/9$.

Ответ: $\sqrt{5}/3$.

5. Решением биквадратного неравенства $x^4 - 4x^2 + 3 \leqslant 0$ является множество значений x, для которых $1 \leqslant x^2 \leqslant 3$, т. е. объединение промежутков $[-\sqrt{3}, -1]$ и $[1, \sqrt{3}]$.

График функции $f(x) = -x^2 + ax + 1$ есть парабола, вершина которой находится в точке $x = a/2$. В зависимости от расположения этой точки относительно указанных выше промежутков возможны следующие случаи.

А. $\frac{a}{2} \leqslant -\sqrt{3}$. При этом функция $f(x)$ убывает в каждом из промежутков, а ее наибольшее значение достигается при $x = -\sqrt{3}$, $f(-\sqrt{3}) = -2 - a\sqrt{3}$. Аналогично, при $\frac{a}{2} \geqslant \sqrt{3}$ максимум достигается в точке $x = \sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = a\sqrt{3} - 2$.

Б. $-\sqrt{3} < \frac{a}{2} \leqslant -1$. В этом случае вершина параболы лежит в интервале $(-\sqrt{3},\ -1)$; функция $f(x)$ достигает максимального значения в точке $x = \frac{a}{2}$, причем $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$. Аналогично, если $1 \leqslant \frac{a}{2} < \sqrt{3}$, то максимум достигается в точке $\frac{a}{2}$ и $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$.

В. $-1 < \frac{a}{2} \leqslant 0$. Функция $f(x)$ возрастает в промежутке $[-\sqrt{3},\ -1]$ и убывает в промежутке $[1,\ \sqrt{3}]$. Максимум может достигаться либо при $x = -1$ и $f(-1) = -a$, либо при $x = 1$ и $f(1) = a$. Так как $a \leqslant 0$, то максимум достигается при $x = -1$ и равен $-a$. В случае $0 \leqslant \frac{a}{2} < 1$ максимум, равный a, достигается при $x = 1$.

Ответ: $\sqrt{3}\,|a| - 2$ при $|a| \geqslant 2\sqrt{3}$; $\frac{a^2}{4} + 1$ при $2 \leqslant |a| < 2\sqrt{3}$; $|a|$ при $|a| < 2$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** *Указание.* Пусть O — вершина сектора; A — одна из вершин квадрата, лежащая на дуге; B — проекция точки A на биссектрису угла между радиусами сектора. Если $2x$ — длина стороны квадрата, то $AB = x$, $OB = 2x + x\operatorname{ctg}15^\circ$. По теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + OB^2$, или $x^2 = \frac{169}{1 + (2 + \operatorname{ctg}15^\circ)^2}$. Заметим, что $\operatorname{ctg}15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}$, поэтому $4x^2 = \frac{169}{5 + 2\sqrt{3}} < 20$. **3.** $\log_3 \frac{\sqrt{16a + 1} - 1}{4} + 1$ при $a \geqslant \frac{5}{18}$. **4.** $\frac{51\sqrt{2}}{100}$. *Указание.* Геометрическое место точек, равноудаленных от ребер AA', AB и AD, есть прямая AC', поэтому центр сферы O лежит на AC'. Подберите точку O так, чтобы OM равнялось расстоянию от O до какого-нибудь из ребер AA', AB или AD. **5.** $2a + 4|a| - 3$ при $|a| \geqslant 2$; $(a + 1)^2$ при $1 \leqslant |a| < 2$; $2a + 2|a|$ при $|a| < 1$.

Вариант 3. **1.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** 1. *Указание.* Заметим, что $\angle DCE = 55^\circ$, $\angle BCE = 45^\circ$. Но тогда сумма углов BAE и BCE равна 180°, значит, вокруг четырехугольника $ABCE$ можно описать окружность. Радиус окружности найдите по теореме синусов, примененной к треугольнику ABE. **3.** $\log_3 \frac{\sqrt{8a + 1} - 1}{4}$ при $a \geqslant 3$. **4.** 1. *Указание.* Геометрическое место точек, равноудаленных от ребер AA', AB и $A'D'$, есть прямая $B'D$, следовательно, точка P лежит на $B'D$. Каждая точка диагонали $B'D$ равноудалена от вершин B и C', поэтому $BP = C'P = 1$. **5.** $2 - 2|a|(\sqrt{3} + 1)$ при

$|a| \geqslant \sqrt{3}$; $-(a-1)^2$ при $1 \leqslant |a| < \sqrt{3}$; $2a - 2|a|$ при $|a| < 1$.

Вариант 4. **1.** $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$). **2.** *Указание.* Пусть O — вершина сектора, $ABCD$ — данный квадрат, причем AB лежит на радиусе сектора, а C — на дуге. Не уменьшая общности, считаем, что A лежит между O и B. Положим $AB = x$, тогда $OA = x\sqrt{3}$, $OB = x(1+\sqrt{3})$. По теореме Пифагора из треугольника OBC находим $625 = x^2 + x^2(1+\sqrt{3})^2$, откуда $x^2 = \frac{625}{5+2\sqrt{3}} < 100$. **3.** $\log_4 \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}$ при $a \geqslant 2$. **4.** $\sqrt{3/2}$. *Указание.* Прямая $B'D$ — геометрическое место точек, равноудаленных от AA', CC' и AB, поэтому центры сфер O_1 и O_2 лежат на $B'D$. Найдите на $B'D$ две точки, удаленные от любого из ребер AA', CC' или AB на расстояние $\sqrt{3}/2$, и определите расстояние между ними. **5.** $-4a^2+3$ при $a \in (-\infty, -1\,] \cup (-1/2, 1/2\,]$; $8a+7$ при $a \in (-1, -3/4\,]$; $-4|a|+4$ при $a \in (-3/4, -1/2\,] \cup (1/2, \infty)$.

1981

Решение варианта 1

1. Пусть из 1 т молока получается x кг творога. Тогда жиры составляют в нем $0{,}155\,x$ кг, а в оставшейся сыворотке жиров $0{,}005 \times (1000 - x)$ кг. Всего же в исходном количестве молока было 50 кг жиров, поэтому получаем уравнение $0{,}155\,x + 0{,}005\,(1000 - x) = 50$. Отсюда $x = 300$.

Ответ: 300 кг.

2. Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, поэтому данное уравнение приводится к виду $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 5x = 0$. Разность косинусов преобразуем в произведение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$. Отсюда получаем две серии корней: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $\sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $x_2 = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

3. Пусть O — центр окружности. Так как треугольники AOD и BOE равнобедренные, причем углы при их основаниях заданы, то

$\angle AOD = 90^\circ$, $\angle BOE = 30^\circ$ (рис. 122). Отсюда следует, что $\angle DOE = 60^\circ$, поэтому треугольник DOE — равносторонний и, значит, радиус окружности $R = DE = 1$, а диаметр $AB = 2$. В треугольнике ABC $\angle C = 60^\circ$. По теореме синусов имеем:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}, \quad BC = AB \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ},$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC \sin 60^\circ}{2} = \frac{AB^2 \sin 45^\circ \sin 75^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2(\cos 30^\circ - \cos 120^\circ)}{\sqrt{3}}.$$

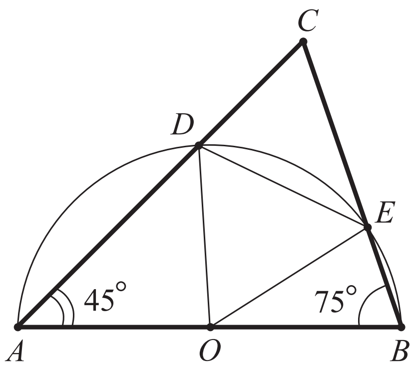

Рис. **122**

Ответ: $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Положим $z = \frac{1}{x}$ и запишем неравенство в виде

$$2z + 3 \leqslant \sqrt{41 - 16z}. \tag{1}$$

Подкоренное выражение $41 - 16z$ неотрицательно при $z \leqslant \frac{41}{16}$. Далее рассмотрим два случая.

А. $2z + 3 < 0$, т. е. $z < -\frac{3}{2}$. Для таких значений z левая часть неравенства (1) отрицательна, а правая определена и положительна. Таким образом, все значения $z < -\frac{3}{2}$ принадлежат множеству решений.

Б. $2z + 3 \geqslant 0$, $z \geqslant -\frac{3}{2}$, а с учетом области определения $-\frac{3}{2} \leqslant z \leqslant \frac{41}{16}$. Теперь обе части неравенства (1) положительны; возводя их в квадрат, получаем для указанного промежутка изменения z равносильное неравенство $4z^2 + 12z + 9 \leqslant 41 - 16z$. Его решением является отрезок $-8 \leqslant z \leqslant 1$. Учитывая ограничения пункта «Б», заключаем $-\frac{3}{2} \leqslant z \leqslant 1$.

Объединяя значения, полученные при рассмотрении обоих случаев, приходим к выводу, что (1) выполняется для $z \leqslant 1$. Таким образом, исходное неравенство справедливо, если $\frac{1}{x} \leqslant 1$, т. е. $x < 0$ или $x \geqslant 1$.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

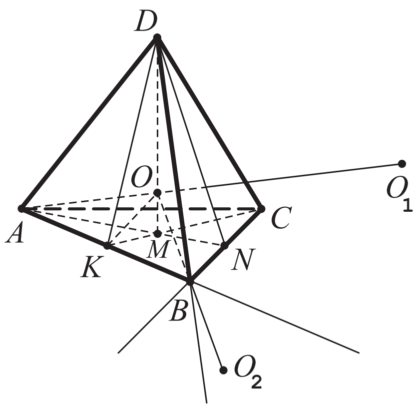

Рис. **123**

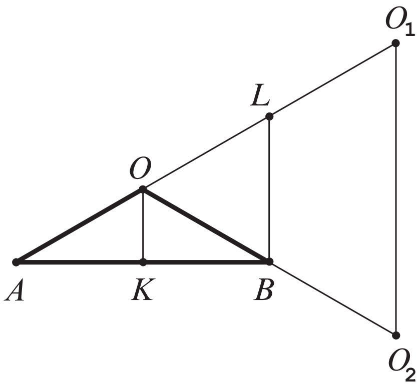

Рис. **124**

5. Пусть K и N — середины ребер AB и BC, M — центр треугольника ABC, O — центр вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара. Тогда DM — высота тетраэдра, а точка O лежит на DM (рис. 123).

Найдем радиус R вписанного шара. В прямоугольном треугольнике DKM: $DK = \sqrt{3}/2$, $KM = \frac{1}{3}CK = \sqrt{3}/6$. Положим $\varphi = \angle DKM$. Понятно, что $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 1/\sqrt{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2/3}$,

$$R = OM = KM \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{6}/12, \quad OK = KM/\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}/4.$$

Поскольку первый шар касается, как и вписанный в тетраэдр, всех граней трехгранного угла с вершиной A, его центр O_1 лежит на луче AO. Учитывая, что его радиус $R_1 = 3R$, легко показать, что $AO_1 = 3AO$.

Второй шар касается граней трехгранного угла, симметричного углу тетраэдра с вершиной B относительно этой вершины, его радиус $R_2 = R$, поэтому центр O_2 шара симметричен точке O относительно B.

Для определения расстояния O_1O_2 рассмотрим сечение плоскостью AOB (рис. 124). Проведем $BL \parallel KO$. Точка K — середина AB, поэтому $AL = 2AO$, и поскольку $AO_1 = 3AO$, то L — середина OO_1. Следовательно, $O_1O_2 = 2BL = 4KO = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $3:2$. **2.** $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{5\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{13}/3$. *Указание.* Точка C — середина отрезка BD, поэтому AC и DM — медианы треугольника ABD, $MN=\frac{1}{3}MD$. **4.** $(-\infty,\ 0)\cup[\frac{1}{2},\ \infty)$. **5.** $1/\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть O — центр вписанного в данную пирамиду шара. Тогда центр O_1 первого шара лежит на луче BO, $BO_1=\frac{3}{2}BO$, центр O_2 второго шара — на луче AO, $AO_2=\frac{1}{2}AO$.

Вариант 3. **1.** 5%. **2.** $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{5}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$. *Указание.* Пусть O — центр окружности, тогда $\angle DCO=45^\circ$, радиус $CO=1$ и сторона данного треугольника $AC=\sqrt{3}$. **4.** $(-\infty,\ -1/6]\cup[24/25,\ \infty)$. **5.** $8\sqrt{3}/3$. *Указание.* Пусть O — центр шара, вписанного в данную пирамиду. Тогда центр O_1 первого шара лежит на луче AO, $AO_1=3AO$, центр O_2 второго шара симметричен O относительно точки B.

Вариант 4. **1.** 13 000 пар. **2.** $-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{7}/3$. *Указание.* Точка B — середина отрезка AF, поэтому FD и CB — медианы треугольника AFC, $FE=\frac{2}{3}FD$. **4.** $(-\infty,\ 0)\cup[1/3,\ \infty)$. **5.** $1/\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть O — центр вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара. Тогда центр O_1 первого шара лежит на луче AO, $AO_1=\frac{1}{2}AO$, центр O_2 второго шара лежит на луче BO, $BO_2=\frac{3}{2}BO$.

1982

Решение варианта 1

1. Область определения функции состоит из тех x, для которых $6x-x^2-5\geqslant 0$, т. е. $1\leqslant x\leqslant 5$. Для определения множества значений приведем подкоренное выражение к виду $4-(x-3)^2$. Ясно, что наибольшее его значение равно 4 при $x=3$, наименьшее на указанном промежутке равно 0 при $x=1$ и $x=5$, а все промежуточные значения между 0 и 4 принимаются в остальных точках отрезка $[1,\ 5]$. Тогда $\sqrt{4-(x-3)^2}$ принимает значения от 0 до 2.

Ответ: Область определения $[1,\ 5]$, множество значений $[0,\ 2]$.

2. Очевидно, что логарифмические функции, стоящие в неравенстве, определены для всех действительных значений x. Учитывая, что $\log_{1/2}(x^2+1) = -\log_2(x^2+1)$, приводим неравенство к виду $\log_2(4x^4+3x^2+6) \geqslant \log_2(x^2+1)(3x^2+6)$. Основание логарифма больше 1, поэтому, проделав элементарные преобразования, приходим в итоге к неравенству $x^4-6x^2 \geqslant 0$. Оно выполняется для тех значений x, для которых $x^2 \leqslant 0$ или $x^2 \geqslant 6$. Решением первого неравенства является единственное число $x=0$, а второе выполняется для $x \leqslant -\sqrt{6}$ и $x \geqslant \sqrt{6}$.

Ответ: $(-\infty, -\sqrt{6}\,] \cup \{0\} \cup [\,\sqrt{6}, \infty)$.

3. Заметим, что $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2+11/5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$. Так как угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$, то их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{5\alpha^2+11}$. С другой стороны, координаты векторов заданы, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\alpha+1$. Отсюда следует уравнение для определения α

$$3\alpha+1 = \sqrt{5\alpha^2+11}. \qquad (1)$$

Возводя обе его части в квадрат, находим два значения $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -5/2$. Проверка показывает, что при $\alpha = -5/2$ левая часть уравнения (1) отрицательна. Значит, корень α_2 посторонний, появившийся при возведении в квадрат.

Ответ: 1.

3C. Пусть $AC = x$. Выражая по теореме косинусов сторону AB треугольника и учитывая, что $\cos\angle ACB = 3/4$, получаем уравнение $x^2-9x+20=0$ для определения x. Его корнями являются числа $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$. Если $AC = 4$, то получается, что $AC^2+AB^2 = 32 < BC^2 = 36$, т. е. треугольник ABC — тупоугольный. Если же $AC = 5$, то проверка показывает, что ABC — остроугольный и, значит, $AC = 5$ удовлетворяет условию задачи. Вычислив $\sin\angle ACB = \sqrt{7}/4$, определим площадь S треугольника ABC: $S = \frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB = 15\sqrt{7}/4$. С другой стороны, $S = p\cdot r$, где r — радиус вписанного круга, p — полупериметр треугольника. Поскольку $p = 15/2$, находим $r = \sqrt{7}/2$.

Ответ: $\sqrt{7}/2$.

4. Преобразуем произведение синусов в разность косинусов:

$$2\sin\left(4x+\tfrac{\pi}{4}\right)\sin 6x=\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(10x+\tfrac{\pi}{4}\right).$$

Замечая, что $\sin\left(10x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(10x+\frac{\pi}{4}\right)$, приведем данное уравнение к виду $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(10x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Применяя теперь формулу сложения косинусов, получим $\cos 6x\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=0$. Приравняем нулю каждый множитель отдельно: $\cos 6x=0$, $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$ $(k\in\mathbb{Z})$; $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, $x_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Объединяя эти серии корней, получаем множество решений исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$.

5. Пусть K — середина AB. Поскольку $SA=SB$, $BC=AC$, то SK и CK — высоты треугольников SAB и ABC. Учитывая, что плоскости SAB и ABC перпендикулярны, получаем $SK\perp CK$. Но $SK\perp AB$, значит, SK — высота пирамиды, $SK=1$. Пусть L — точка пересечения плоскости α с прямой AC (рис. 125). Найдем CL. Для этого в плоскости ASC проведем $MQ\parallel AC$ (рис. 126). По условию задачи $SM=\frac{1}{3}AS$, поэтому $MQ=\frac{1}{3}AC$, $SQ=\frac{1}{3}SC$, $QN=SN-SQ=SC/6$. Треугольники MQN и NCL подобны, следовательно, $CL=MQ\cdot NC/QN=3MQ=AC$.

Рассмотрим теперь $\triangle ALB$ (см. рис. 125). Так как $AK=KB$, $AC=CL$, то $LB\parallel CK$. Отсюда вытекает, что $LB\perp AB$. Учитывая,

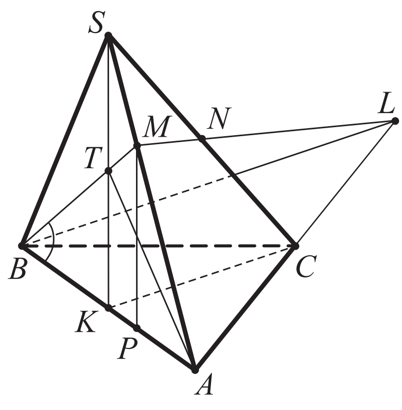

Рис. **125**

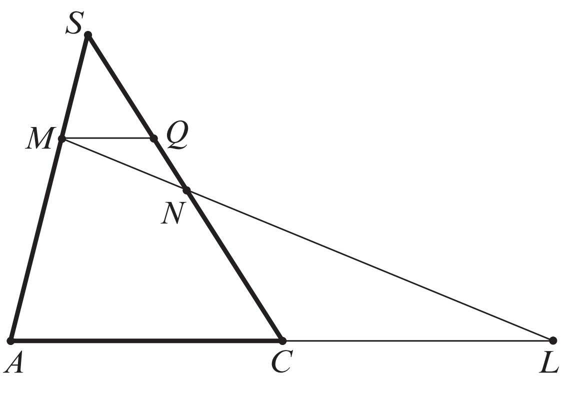

Рис. **126**

что SK — высота пирамиды и $LB \perp SK$, приходим к выводу, что прямая LB перпендикулярна плоскости SAB, а это означает, что MBA — плоский угол двугранного угла между плоскостями BML и ABL.

Опустим из точки M перпендикуляр MP на отрезок AB. Поскольку $AM = \frac{2}{3}SA$, то $AP = \frac{2}{3}AK = \frac{1}{3}$, $MP = \frac{2}{3}SK = \frac{2}{3}$, $BP = AB - AP = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\angle MBA = MP/BP = 1$, т. е. $\angle MBA = 45°$. Опустим, наконец, перпендикуляр AT на отрезок BM. Ранее было показано, что прямая BL перпендикулярна плоскости SAB, поэтому $AT \perp BL$, и значит, AT — перпендикуляр к плоскости BML, его длина — искомое расстояние. В прямоугольном треугольнике ABT находим $AT = AB\sin 45° = 1/\sqrt{2}$.

Возможен второй путь решения, который использует введение системы координат, составление уравнения плоскости и определение с его помощью расстояния от точки до плоскости. Приведем его в сокращенном виде. Начало системы координат поместим в точку K — основание высоты CK, ось x направим вдоль луча KC, ось y — вдоль KB, ось z — вдоль KS (рис. 127). Определив координаты точек, получим $B\,(0;\ 1/2;\ 0)$, $M\,(0;\ -1/6;\ 2/3)$, $N\,(\sqrt{3}/4;\ 0;\ 1/2)$, $A\,(0;\ -1/2;\ 0)$.

Уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Для того чтобы плоскость проходила через точки B, M и N, должна выполняться система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b + d = 0, \\ -\frac{1}{6}b + \frac{2}{3}c + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{1}{2}c + d = 0. \end{cases}$$

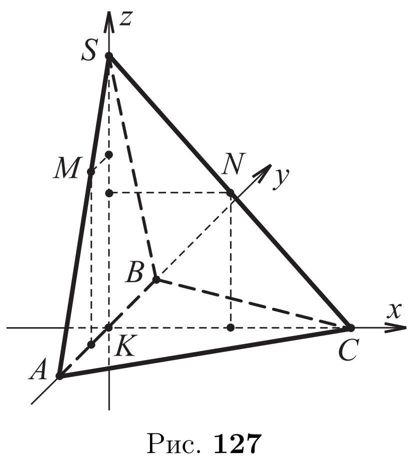

Рис. **127**

Заметим, что $d \neq 0$, иначе плоскость α проходила бы кроме точек M и B через начало координат K и совпала бы с плоскостью SAB. Учитывая, что все коэффициенты уравнения плоскости можно умножить на отличное от нуля число, полагаем $d = -1$. Тогда из первого уравнения $b = 2$, а из остальных уравнений $c = 2$, $a = 0$. Таким образом, уравнение плоскости α имеет вид $2y + 2z - 1 = 0$.

Напомним, что если заданы уравнение $ax + by + cz + d = 0$ некоторой плоскости β и точка P с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (считается, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), то расстояние h от нее до плоскости β вычисляется по формуле $h = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Действительно, если $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки P на β, то вектор $\vec{n} = (x_0 - x_1;\ y_0 - y_1;\ z_0 - z_1)$ перпендикулярен плоскости. Как известно, вектор $\vec{m} = (a;\ b;\ c)$ тоже перпендикулярен плоскости, поэтому косинус угла φ между $\vec{n}$ и $\vec{m}$ равен ± 1. Тогда $|\vec{m} \cdot \vec{n}| = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}|$. С другой стороны, $\vec{m} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$. Точка $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ принадлежит β, поэтому $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$, $\vec{m} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$. Остается заметить, что $h = |\vec{n}|$, $|\vec{m}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, откуда

$$h = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Возвращаясь к решению задачи, воспользуемся полученной формулой. Точка A имеет координаты $(0;\ -1/2;\ 0)$, следовательно, $h = |2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1|/\sqrt{2^2 + 2^2} = 1/\sqrt{2}$.

Ответ: $1/\sqrt{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** Область определения $[-3,\ 7]$, множество значений $[0,\ 5]$. **2.** $(-\infty,\ -\sqrt{3}\,] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3},\ \infty)$. **3.** 17. **3С.** $4\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть E — точка касания окружности и стороны AD, O — центр окружности. Тогда OE — средняя линия трапеции, радиус окружности $R = OE = 2$. **4.** $\frac{\pi k}{5}$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $12\sqrt{2}/5$. *Указание.* Плоскость α образует с плоскостью основания $ABCD$ двугранный угол в 45°, расстояние от вершины C до ребра этого угла равно $24/5$.

Вариант 3. **1.** Область определения $[-8,\ 2]$, множество значений $[0,\ 5]$. **2.** $(-\infty,\ -\sqrt{7}\,] \cup \{0\} \cup [\sqrt{7},\ \infty)$. **3.** 10. **3С.** $\sqrt{241}/2$. **4.** $\frac{\pi k}{10}$; $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $3\sqrt{3}/4$. *Указание.* Пусть S — точка пересечения плоскости α с прямой AA_1, K — точка пересечения α с ребром AB. Тогда SKA — плоский угол двугранного угла между α и плоскостью основания ABC, $\angle SKA = 60^\circ$.

Вариант 4. **1.** Область определения $[-4,\,6]$, множество значений $[0,\,5]$. **2.** $(-\infty,\,-\sqrt{11}\,]\cup\{0\}\cup[\,\sqrt{11},\,\infty)$. **3.** 2. **3С.** 5/2. *Указание.* Пусть O — центр окружности, тогда CO и BO — биссектрисы углов C и B, принадлежащих боковой стороне BC трапеции, отсюда следует, что треугольник COB — прямоугольный. **4.** $\frac{\pi k}{6}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** 1. *Указание.* Плоский угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания $ABCD$ равен 45°, CM является перпендикуляром, опущенным из точки C на ребро этого угла.

1983

Решение варианта 1

1. Функция $\operatorname{tg}3x$ определена при тех значениях x, для которых $\cos3x\neq0$. Используя соотношение $\sin2x\cos x+\cos2x\sin x=\sin3x$, приведем уравнение к виду $\operatorname{tg}3x\big(\cos3x-\sin(x+\frac{\pi}{6})\big)=0$. Приравняем нулю каждый сомножитель.

А. $\operatorname{tg}3x=0$, т. е. $x_1=\frac{\pi k}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Эта серия корней удовлетворяет условию $\cos3x\neq0$.

Б. $\cos3x-\sin\big(x+\frac{\pi}{6}\big)=0$. Подставляя $\cos3x=\sin\big(3x+\frac{\pi}{2}\big)$ и преобразуя разность синусов в произведение, получим $\sin\big(x+\frac{\pi}{6}\big)\times\cos\big(2x+\frac{\pi}{3}\big)=0$. Отсюда или $\sin\big(x+\frac{\pi}{6}\big)=0$, т. е. $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi m$ $(m\in\mathbb{Z})$, или $\cos\big(2x+\frac{\pi}{3}\big)=0$, т. е. $x_3=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Но для второй серии корней $\cos3x_2=\cos\big(-\frac{\pi}{2}+3\pi m\big)=0$, поэтому она является посторонней. Корни x_3 удовлетворяют условию $\cos3x\neq0$.

Ответ: $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$.

2. Пусть K, L и M — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно, O — центр окружности. Положим $\angle ACB=\alpha$, по условию $\cos\alpha=5/13$, поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{3}{2}.$$

Так как CO — биссектриса угла C, а OL — радиус окружности (рис. 128), то из прямоугольного треугольника OLC находим: $CL=$

$= OL \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2} = 5$. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны между собой, поэтому $CM = 5$, и если положить $AK = x$, $BK = y$, то $AM = x$, $BL = y$, а стороны данного треугольника ABC выражаются через x и y следующим образом: $AB = x + y$, $AC = x + 5$, $BC = y + 5$.

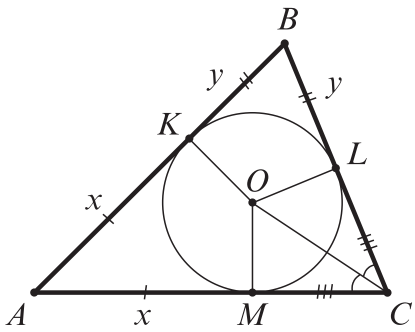

Рис. **128**

Известно, что площадь треугольника S выражается через радиус r вписанной окружности и полупериметр p формулой $S = p \cdot r$. Для треугольника ABC $p = x+y+5$, r и S заданы, поэтому $S = \frac{10}{3}(x+y+5) = 60$. Отсюда получаем первое уравнение $x + y = 13$, связывающее x и y. Выражая AB по теореме косинусов через AC и BC и учитывая, что $\cos\alpha = 5/13$, получаем второе уравнение $(x + y)^2 = (5 + x)^2 + (5 + y)^2 - \frac{10}{13}(5 + x)(5 + y)$. Раскрывая скобки и заменяя в уравнении $x + y$ на 13, приведем его к виду $xy = 40$. Таким образом, x и y определяются из системы $x + y = 13$, $xy = 40$. Решая ее, находим $x_1 = 5$, $y_1 = 8$ или $x_2 = 8$, $y_2 = 5$. Первому случаю соответствуют стороны $AB = 13$, $BC = 13$, $AC = 10$, второму — $AB = 13$, $BC = 10$, $AC = 13$.

Ответ: $AB = 13$, $BC = 13$, $AC = 10$ или $AB = 13$, $BC = 10$, $AC = 13$.

3. Пусть скорость разрядника составляет $100x$ (м/мин), тогда скорость начинающего будет равна $100x - 200 = 100(x - 2)$. За полминуты разрядник пробежал $100x/2 = 50x$ метров и не закончил дистанцию, т. е. пробежал меньше 400 метров, поэтому $50\,x < 400$, и тогда $x < 8$. С другой стороны, расстояние $50x$ начинающий пробежал быстрее, чем за $5/6$ минуты, и поскольку пробежал он его за $\frac{50x}{100x - 200} = \frac{x}{2x - 4}$ минут, то должно выполняться неравенство $\frac{x}{2x - 4} < \frac{5}{6}$. Решая его, находим, что $x < 2$ или $x > 5$.

Всю дистанцию с учетом остановки разрядник пробежал за $\frac{400}{100x} + \frac{1}{3} = \frac{4}{x} + \frac{1}{3}$ минут, а начинающий — за $\frac{400}{100x - 200} = \frac{4}{x - 2}$

минут. Следовательно, $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} < \frac{4}{x-2}$. Этому неравенству удовлетворяют значения $-4 < x < 0$, $2 < x < 6$. По смыслу задачи $x > 0$ (и даже $x > 2$), поэтому приходим к выводу, что все три условия выполняются при $5 < x < 6$, т. е. скорость разрядника $v = 100x$ может принимать значения из промежутка (500, 600).

Ответ: 500 м/мин $< v < 600$ м/мин.

4. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $0 < a^2 - 2 < 1$, т. е. $2 < a^2 < 3$. Тогда данное неравенство равносильно выполнению двух следующих:

$$0 < (a^2 - 1)x^2 + 2x + 2 < a^2 - 2.$$

Однако правое неравенство не может выполняться для всех x хотя бы потому, что при $x = 0$ мы получаем $2 < a^2 - 2$, или $a^2 > 4$, а по условию рассматривается случай, когда $2 < a^2 < 3$.

Б. Пусть теперь $a^2 - 2 > 1$, т. е. $a^2 > 3$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $(a^2 - 1)x^2 + 2x + 2 > a^2 - 2$. Поскольку $a^2 - 1 > 0$, оно выполняется для всех x в том и только том случае, когда дискриминант квадратного трехчлена $(a^2 - 1)x^2 + 2x + 4 - a^2$ отрицателен: $D/4 = 1 - (a^2 - 1)(4 - a^2) < 0$. Это справедливо для $(5-\sqrt{5})/2 < a^2 < (5+\sqrt{5})/2$. Учитывая, что $a^2 > 3$ и $(5-\sqrt{5})/2 < 3 <$ $< (5 + \sqrt{5})/2$, окончательно получаем $3 < a^2 < (5 + \sqrt{5})/2$.

Ответ: $\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{3}\right) \cup$ $\cup \left(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

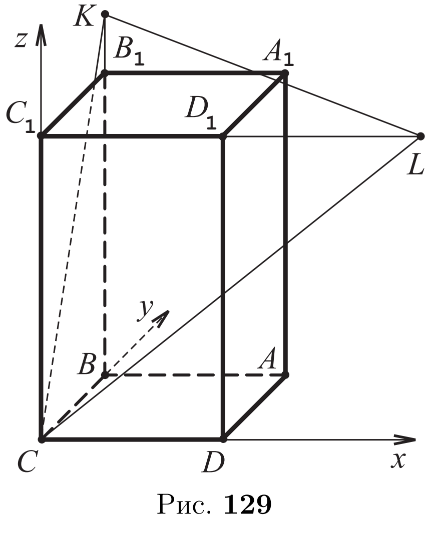

Рис. **129**

5. Введем систему координат. В качестве начала координат возьмем вершину C параллелепипеда, оси x, y и z направим вдоль лучей CD, CB и CC_1 соответственно. Пусть K — вершина треугольника, принадлежащая прямой BB_1, L — вершина, принадлежащая C_1D_1 (рис. 129). Координаты этих точек имеют вид $K\,(0;\ 3;\ \alpha)$ и $L\,(\beta;\ 0;\ 5)$, где α и β —

неизвестные числа. Учитывая, что $CK^2 = 3^2 + \alpha^2$, $CL^2 = \beta^2 + 5^2$, $KL^2 = 3^2 + \beta^2 + (\alpha - 5)^2$, и принимая во внимание равенство сторон треугольника, получаем систему

$$\alpha^2 = 16 + \beta^2, \quad (\alpha - 5)^2 = 16.$$

Из последнего уравнения $|\alpha - 5| = 4$, т. е. $\alpha = 1$ или $\alpha = 9$. Значение $\alpha = 1$ не может удовлетворять первому уравнению ни при каком β. При $\alpha = 9$ получаем $\beta = \pm\sqrt{65}$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют два правильных треугольника CKL и CKL_1 с общими вершинами C и $K\,(0;\,3;\,9)$. Вершины $L\,(\sqrt{65};\,0;\,5)$ и $L_1\,(-\sqrt{65};\,0;\,5)$ симметричны относительно плоскости BCC_1B_1. Сторона каждого из них равна $3\sqrt{10}$, медиана равна $3\sqrt{30}/2$.

Ответ: $3\sqrt{30}/2$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$ ($k,\,n,\,m \in \mathbb{Z}$). **2.** 5 и 6. *Указание.* Если K — точка касания вписанной окружности со стороной BC, $\angle C = \alpha$, то из соотношения $S = pr$ получается, что $CK = 3$. Далее определяются $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha$ и используется теорема косинусов. **3.** $4\,\text{км/ч} < v < 6\,\text{км/ч}$. **4.** $(-2,\,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\,2)$. **5.** $5\sqrt{3}/4$.

Вариант 3. **1.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ ($k,\,n \in \mathbb{Z}$). **2.** 10 и 12. **3.** $50\,\text{м}^3/\text{ч} < v < 60\,\text{м}^3/\text{ч}$. **4.** $\left(-\sqrt{4+\sqrt{3}},\,-\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)\cup\left(\sqrt{4-\sqrt{3}},\,\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

Вариант 4. **1.** $\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$; $\frac{2\pi}{3} + \pi m$ ($k,\,n,\,m \in \mathbb{Z}$). **2.** 10 и 13. **3.** $200\,\text{м/мес} < v < 300\,\text{м/мес}$. **4.** $\left(-\sqrt{4+\sqrt{5}},\,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},\,\sqrt{4+\sqrt{5}}\,\right)$. **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{3(2+\sqrt{2})}$.

1984

Решение варианта 1

1. Преобразуя сумму синусов в произведение, приходим к уравнению $\sin\frac{13x^2}{2}\cos\frac{3x^2}{2} = 0$. Приравнивая нулю каждый сомножитель, находим: $\sin\frac{13x^2}{2} = 0$, $\frac{13x^2}{2} = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) и $\cos\frac{3x^2}{2} = 0$, $\frac{3x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$(k \in \mathbb{Z})$. Но $x^2 \geqslant 0$, поэтому должны выполняться неравенства $n \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$, т.е. $n, k = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда окончательно получаем две серии корней $x_1 = \pm\sqrt{\frac{2\pi n}{13}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{2\pi n}{13}}$; $\pm\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$.

2. Левая часть уравнения определена для тех значений x, для которых выполнены условия $2x > 0$, $2x \neq 1$ и $2x^2 - x - 14 > 0$. По определению логарифма из данного уравнения следует, что $2x = 2x^2 - x - 14$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $x_1 = 7/2$, $x_2 = -2$, но второй корень не входит в область определения.

Ответ: $7/2$.

3. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, поэтому $\angle NAK = \angle CAB = 30°$ и точки A, B и N лежат на одной прямой (так же, как и точки A, K и C). Пусть x — сторона ромба $ABCD$, y — сторона $AMNK$, тогда их диагонали AC и AN равны соответственно $x\sqrt{3}$ и $y\sqrt{3}$. Будем для определенности считать, что $x \geqslant y$, при противоположном соотношении сторон решение абсолютно аналогичное. Рассмотрим два возможных расположения данных ромбов.

А. Пусть точка N лежит на отрезке AB, т. е. $y\sqrt{3} \leqslant x$ (рис. 130). В этом случае треугольник AKN — пересечение ромбов, его площадь равна $y^2\sqrt{3}/4$, а площадь объединения равна сумме площадей

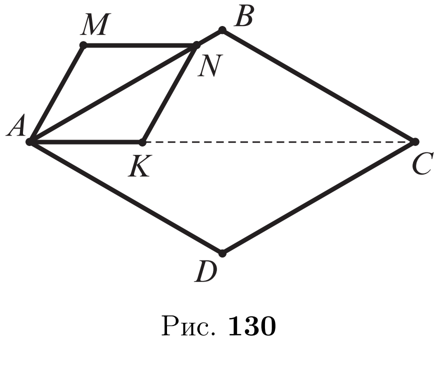

Рис. **130**

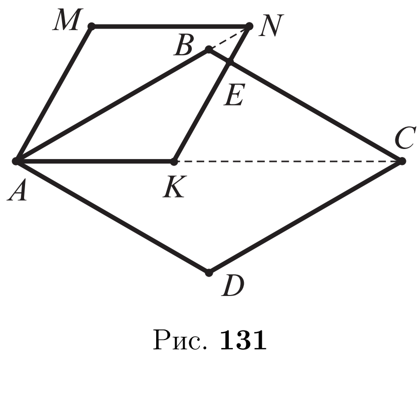

Рис. **131**

ромба $ABCD$ и треугольника AMN, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,y^2$. Из условий задачи вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,y^2 = 23\sqrt{3}, \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\,y^2 = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда $x^2 = 36$, $y^2 = 20$, или $x = 6$, $y = \sqrt{20}$. Но тогда $y\sqrt{3} = \sqrt{60} > x = 6$, что противоречит условию $y\sqrt{3} \leqslant x$. Таким образом, полученный результат не соответствует исходному предположению пункта «А».

Б. Пусть теперь точка B лежит на отрезке AN, т. е. $y\sqrt{3} > x$. Тогда ромбы (с учетом того, что $y \leqslant x$) расположены так, как изображено на рис. 131. Пусть E — точка пересечения отрезков KN и BC. Треугольник KEC — прямоугольный, поскольку $\angle EKC = 60^\circ$ как внешний угол ромба $AMNK$, $\angle ECK = 30^\circ$. Так как $KC = AC - AK = x\sqrt{3} - y$, то площадь KEC равна $\frac{\sqrt{3}}{8}\,(x\sqrt{3} - y)^2$. Отсюда следует, что площадь четырехугольника $ABEK$ — пересечения ромбов — равна разности площадей треугольников ABC и KEC: $\frac{\sqrt{3}}{4}\,x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\,(x\sqrt{3} - y)^2$. Площадь объединения равна сумме площадей ромба $AMNK$ и треугольников ADC и KEC, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\,(x\sqrt{3} - y)^2$. Следовательно, x и y определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}\,x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\,(x\sqrt{3} - y)^2 = 5\sqrt{3}, \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\,(x\sqrt{3} - y)^2 = 23\sqrt{3}. \end{cases}$$

Раскрывая скобки, после преобразований приходим к системе

$$-(x^2 + y^2) + 2\sqrt{3}\,xy = 40, \quad 5(x^2 + y^2) - 2\sqrt{3}\,xy = 184.$$

Из нее получаем $x^2 + y^2 = 56$, $xy = 16\sqrt{3}$. Отсюда следует (с учетом неравенств $0 < y \leqslant x$), что $x^2 = 32$, $y^2 = 24$, т. е. $x = 4\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{6}$. Поскольку $y\sqrt{3} = 6\sqrt{2} > 4\sqrt{2} = x$, найденные значения x и y удовлетворяют условиям пункта «Б». Следовательно, площадь ромба $ABCD$ равна $16\sqrt{3}$, а площадь $AKNM$ составляет $12\sqrt{3}$.

Ответ: $16\sqrt{3}$ и $12\sqrt{3}$.

4. Положим $z = \sin x$. Тогда данное уравнение имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, когда квадратное уравнение $(a^2+1)\,z^2 + 2a^2\,z + 1/2 = 0$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[-1,\,1]$. Значит, дискриминант должен быть положительным, т. е. $D = 4a^4 - 2(a^2+1) = 2(2a^2+1)(a^2-1) \geqslant 0$. Это неравенство справедливо, если $a^2 \geqslant 1$.

Рассмотрим один из корней $z_1 = \dfrac{-2a^2 + \sqrt{4a^4 - 2a^2 - 2}}{2(a^2+1)}$ данного уравнения. Очевидно, что при $a^2 \geqslant 1$ выполняются неравенства $0 \leqslant \sqrt{4a^4 - 2a^2 - 2} \leqslant \sqrt{4a^4} = 2a^2$, поэтому $z_1 < \dfrac{-2a^2 + 2a^2}{2(a^2+1)} = 0$ и $z_1 \geqslant \dfrac{-2a^2}{2(a^2+1)} > -1$. Таким образом, корень z_1 принадлежит промежутку $(-1,\,0)$ при всех a, для которых $a^2 \geqslant 1$, значит, исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при $a \leqslant -1$ и $a \geqslant 1$.

Ответ: $(-\infty,\,-1\,] \cup [\,1,\,\infty)$.

5. Пусть O — центр второй сферы, K, L и M — точки ее касания с ребрами AA_1, A_1D и A_1B_1 соответственно, S и T — проекции точки O на грани AA_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 132). Отрезки касательных к сфере, выходящие из одной точки, равны между собой и перпендикулярны радиусам, проведенным в точки касания, поэтому $A_1K = A_1L = A_1M$, $OK \perp A_1K$, $OL \perp A_1L$, $OM \perp A_1M$. Отсюда следует, что проекции SK и SL наклонных OK и OL на плоскость AA_1D_1D перпендикулярны ребрам AA_1 и A_1D_1. В прямоугольных треугольниках LOS и KOS с общим катетом OS равны гипотенузы OL и OK, поэтому $LS = KS$, точка S лежит на диагонали A_1D грани AA_1D_1D и A_1LSK — квадрат. Аналогичным образом доказывается, что T лежит на диагонали A_1C_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ и A_1LTM — квадрат, равный A_1LSK.

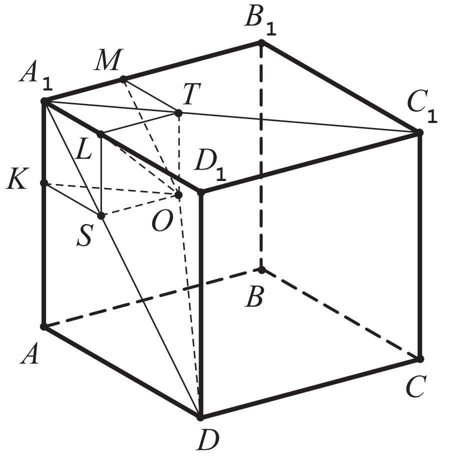

Рис. **132**

Если R — радиус сферы, то из равенства $LS = LT = OS$ следует, что треугольник LSO равнобедренный и $OS = R/\sqrt{2}$. Заметим, что

$A_1S = OM = R$, $SD = \sqrt{2} - R$ и, кроме того, $OD = 2R$, поскольку сферы с центрами O и D радиуса R каждая касаются. Рассмотрев прямоугольный треугольник OSD, получаем уравнение $4R^2 = (\sqrt{2} - R)^2 + R^2/2$ для определения R. Его корнями являются числа $2(\sqrt{7} - \sqrt{2})/5$ и $-2(\sqrt{7} + \sqrt{2})/5$. По смыслу задачи $R > 0$, значит, $R = 2(\sqrt{7} - \sqrt{2})/5$, при этом выполнено неравенство $A_1S = R < \sqrt{2} = A_1D$, т. е. центр O лежит внутри куба, как это и требуется по условию.

Ответ: $\frac{2}{5}(\sqrt{7} - \sqrt{2})$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\pm\sqrt{\frac{\pi(2k+1)}{13}}$; $\pm\sqrt{\pi(2n+1)}$ $(k, n = 0, 1, 2, \ldots)$. **2.** 5. **3.** $75\sqrt{3}/4$ и $16\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть a и b — стороны данных треугольников, $a < b$. Необходимо рассмотреть два возможных случая: первый — когда в пересечении получается треугольник, т. е. $2a \leqslant \sqrt{3}\,b$, и второй — когда $2a > \sqrt{3}\,b$ и в пересечении возникает четырехугольник. Условию задачи соответствует второй случай. **4.** $(-1, 1)$ **5.** $1 - 1/\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть O — центр второй сферы, R — ее радиус, K — середина ребра AD. Точка O лежит на диагонали A_1C куба, расстояние от нее до всех граней угла A равно R, а до точки K составляет $R + 1/2$.

Вариант 3. **1.** $\pm\sqrt{\frac{2\pi k}{7}}$; $\pm\sqrt{\frac{\pi(2n+1)}{11}}$ $(k, n = 0, 1, 2, \ldots)$. **2.** 4. **3.** 25 и 18. *Указание.* Пусть a и b — стороны данных квадратов, $a \leqslant b$. Тогда возможны два случая: первый — когда в пересечении получается треугольник, т. е. $a\sqrt{2} \leqslant b$, и второй — когда $a\sqrt{2} > b$ и в пересечении возникает четырехугольник. Данным задачи соответствует второй случай. **4.** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. **5.** $(3-\sqrt{7})/2$. *Указание.* Пусть O — центр второй сферы, R — ее радиус. Точка O лежит на диагонали A_1C куба, расстояние от нее до граней угла A_1 равно R, а до вершины D составляет $R + 1$.

Вариант 4. **1.** $\pm\sqrt{\frac{2\pi k}{15}}$; $\pm\sqrt{\frac{2\pi n}{7}}$ $(k, n = 0, 1, 2, \ldots)$. **2.** 3/2. **3.** 162 и 100. *Указание.* Пусть a и b — катеты данных треугольников, $a \leqslant b$. Возможны два случая: первый — когда в пересечении получается треугольник, т. е. $a\sqrt{2} \leqslant b$, и второй — когда $a\sqrt{2} > b$ и в пересечении возникает четырехугольник. Условию задачи соответствует второй случай. **4.** $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$. **5.** $(3-\sqrt{5})/2$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, R — ее радиус, K — середина ребра AD. Точка O лежит на диагонали B_1D куба, расстояние от нее до точки K равно $R+1/2$, а до граней угла B_1 составляет R.

1985

Решение варианта 1

1. Показатель степени в записи первого числа равен $\frac{7}{4}\log_5 3$, а само число есть $3^{7/4}$. Второе число равно $3^{3/2}$, и поскольку $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$, то первое число больше.

Ответ: Первое число больше.

2. Заметим, что $y \neq 0$, поскольку при $y = 0$ не может выполняться второе уравнение системы. Выражая из него $x+1 = \frac{9}{y}$ и подставляя в первое, получаем для определения y биквадратное уравнение $y^4 - 27y^2 + 162 = 0$. Его корнями относительно $z = y^2$ являются числа 9 и 18, отсюда $y_1 = 3$, $y_2 = -3$, $y_3 = 3\sqrt{2}$, $y_4 = -3\sqrt{2}$. Им соответствуют значения $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}-1$, $x_4 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$.

Ответ: $(2;\ 3)$, $(-4;\ -3)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1;\ 3\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}-1;\ -3\sqrt{2}\right)$.

3. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную основаниям трапеции; пусть L и K — точки ее пересечения с прямыми BC и AD соответственно (рис. 133). Положим $BC = a$, тогда $AD = 3a$. Если высота трапеции равна h, то ее площадь оказывается равной $2ah$, а площадь каждой из частей составляет ah. Учитывая, что $BM = 2AM$, находим $ML = 2h/3$, $MK = h/3$. Следовательно, площадь треугольника MBC составляет $ah/3$, а треугольника AMD — $ah/2$. Поскольку четырехугольники $MBCN$ и

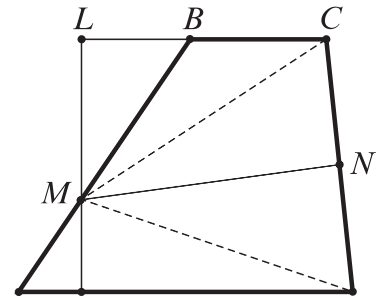

Рис. **133**

$AMND$ — равновеликие и площадь каждого равна ah, то оставшиеся их части — треугольники MCN и MND — имеют соответственно площади $2ah/3$ и $ah/2$. Высота, проведенная из вершины M, для этих треугольников общая, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований CN и ND, т. е. $CN : ND = 4 : 3$.

Ответ: $4 : 3$.

4. Замечая, что $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, приводим уравнение к виду $\cos 7x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Преобразуя разность косинусов в произведение, получим $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$. Отсюда следует, что или $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, т. е. $x_2 = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Объединяя обе серии корней, получаем решение задачи.

Ответ: $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

5. Пусть плоскость α пересекает прямую AA_1 в точке K. Так как N — середина ребра A_1C_1, а прямые A_1C_1 и AC параллельны, то $AK : A_1K = AC : A_1N = 2$. Отсюда следует, что $AK = 2$ (рис. 134).

Опустим из точки A перпендикуляр AL на прямую CM. Прямая AK перпендикулярна плоскости ABC, поэтому AL — проекция KL на эту плоскость. Значит, KL — перпендикуляр к CM и угол ALK — плоский угол двугранного угла между α и плоскостью основания.

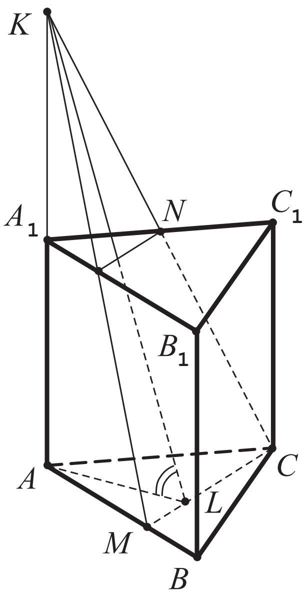

Рис. **134**

В треугольнике AMC: $AC = 1$, $AM = 2/3$, $\angle A = 60^\circ$, отсюда по теореме косинусов $CM = \sqrt{7}/3$. Площадь S этого треугольника равна $\frac{1}{2}AM \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$, т. е. $S = \sqrt{3}/6$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2}AL \cdot CM$, поэтому $AL = \sqrt{3/7}$. Пусть $\angle ALK = \varphi$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = AK/AL = 2\sqrt{7/3}$ и, значит, $\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{7/3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7/3}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** Второе число больше. **2.** $(2;\,1)$, $(-2;\,-7)$, $\bigl(\frac{4}{\sqrt{3}};\ 2\sqrt{3}-3\bigr)$, $\bigl(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ -2\sqrt{3}-3\bigr)$. **3.** $3:8$. *Указание.* Пусть L — точка пересечения прямых BN и AD. Используя подобие треугольников BCN и DNL, находим, что $AL = 3BC$. После этого, рассматривая пару подобных треугольников BKM и AKL, определяем, что $BM = \frac{3}{11}BC$. **4.** $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7/3}$. *Указание.* Пусть K и N — точки пересечения плоскости α с прямыми AA_1 и AB соответственно, AL — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую DN. Тогда $AN = 2$, $AK = 4$, $AL = 2\sqrt{3/7}$ и угол ALK — искомый.

Вариант 3. **1.** Первое число больше. **2.** $(3;\,1)$, $(-1;\,-1)$, $\bigl(1+\frac{1}{\sqrt{5}};\ 2\sqrt{5}\bigr)$, $\bigl(1-\frac{1}{\sqrt{5}};\ -2\sqrt{5}\bigr)$. **3.** $5:4$. *Указание.* Пусть прямая, параллельная AC и проведенная через точку M, пересекает отрезок BN в точке L. Тогда из подобия треугольников KLM и AKN следует, что $KL = \frac{1}{3}KN$ и, значит, $LN = \frac{4}{9}BN$. **4.** $\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{2\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Пусть Q — точка пересечения плоскости α с прямой BC, P — основание перпендикуляра, опущенного из M на плоскость основания. Тогда $BQ = 2$, точка P лежит на диагонали BD и $BP = \frac{1}{4}BD$. Если L — основание перпендикуляра, опущенного из P на прямую AN, то $PL = \frac{\sqrt{5}}{4}$ и угол MLP — искомый.

Вариант 4. **1.** Второе число больше. **2.** $(1;\,2)$, $(-1;\,6)$, $(\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 4+\sqrt{2})$. **3.** $3:1$. *Указание.* Пусть прямая, проведенная через точку N параллельно основаниям трапеции, пересекает отрезок AM в точке L. Тогда $KL = \frac{1}{2}AM$, $LM = \frac{3}{4}AM$. **4.** $-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{40}+\frac{\pi n}{5}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{13}}{3}$. *Указание.* Пусть плоскость α пересекает прямые CC_1 и BC в точках K и P соответственно, CL — перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую DN. Тогда $CK = 2$, $CP = \frac{3}{2}$, $CL = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и угол KLC — искомый.

1986

Решение варианта 1

1. Используя формулы для функций двойного аргумента, приведем данное уравнение к виду $3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$. Проверкой убеждаемся, что если $\cos x = 0$, то x не является решением уравнения. Разделив его на $\cos^2 x$, приходим к квадратному уравнению $3y^2 + 10y + 1 = 0$ относительно $y = \operatorname{tg} x$. Его корнями являются числа $\frac{\sqrt{22}-5}{3}$ и $-\frac{\sqrt{22}+5}{3}$. Отсюда $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{22}-5}{3} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ или $x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{22}+5}{3} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Объединяя найденные серии корней, получим решение задачи.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{22}-5}{3} + \pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{22}+5}{3} + \pi k\ \ (n,\, k \in \mathbb{Z})$.

2. Левая часть уравнения определена, если $7x - 28 > 0$ и $7x + 28 \neq 0$, т. е. для $x > 4$, а правая часть — в том случае, когда $2x^2 - 6x - 9 > 0$. Это неравенство выполняется, если $x < \frac{3}{2}(1-\sqrt{3})$ или $x > \frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$. Поскольку $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) > 4$, в область определения уравнения входят значения x, для которых $x > \frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$. Для таких значений x данное уравнение приводится к виду $\log_7(x^2-16) = \log_7(2x^2-6x-9)$, откуда следует, что $x^2 - 16 = 2x^2 - 6x - 9$, или $x^2 - 6x + 7 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Первый корень не входит в область определения, а второй принадлежит ей, так как $3+\sqrt{2} > \frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

Ответ: $3 + \sqrt{2}$.

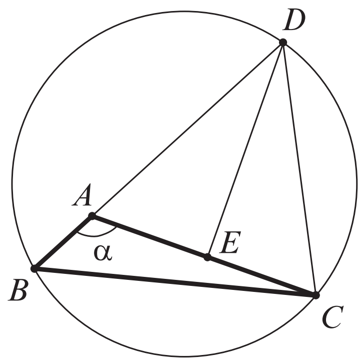

Рис. **135**

3. Пусть E — середина стороны AC. Тогда точка D лежит на перпендикуляре к AC, проведенном через E. Поскольку угол A треугольника ABC тупой, D лежит на продолжении отрезка AB за точку A (рис. 135). Определим угол BDC. Треугольник ADC равнобедренный, угол DAC при его основании равен $\pi - \alpha$. Поэтому $\angle ADC = \pi - 2\angle DAC = 2\alpha - \pi$ и тогда $\sin\angle ADC = \sin(2\alpha - \pi) = -\sin 2\alpha$.

Учитывая, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, имеем $\pi < 2\alpha < 2\pi$, т. е. $-\sin 2\alpha > 0$. Если R — радиус описанной около треугольника BDC окружности, то по теореме синусов $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle BDC} = -\dfrac{a}{2\sin 2\alpha} = \dfrac{a}{2|\sin 2\alpha|}$.

Ответ: $\dfrac{a}{2|\sin 2\alpha|}$.

4. Каждое из уравнений системы определяет на плоскости xy прямую линию. Координаты точки пересечения прямых задают решение системы, поэтому система не имеет решений тогда и только тогда, когда прямые не пересекаются.

Известно, что прямые параллельны или совпадают, если коэффициенты при x и y одного уравнения пропорциональны коэффициентам другого, т. е. определитель системы равен нулю. Для данной системы уравнений это означает, что $\Delta = 4a(a-2) - (1-5a) = 0$, или $4a^2 - 3a - 1 = 0$. Отсюда $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Проверка показывает, что при $a = 1$ система действительно не имеет решений, в то время как при $a = -\frac{1}{4}$ прямые совпадают и система имеет бесконечное множество решений. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

5. Плоскость грани BB_1C_1C пересекается с плоскостями α и β по прямым BC_1 и B_1C соответственно. Диагонали BC_1 и B_1C пересекаются в точке K — центре грани BB_1C_1C, следовательно, эта точка лежит на прямой l (рис. 136). Прямая B_1M, лежащая в плоскости β, пересекает AB в точке N. Учитывая, что AM и BB_1 параллельны и $AM = \frac{1}{2}BB_1$, находим $BN = 2AB = 2$. Прямая AB принадлежит плоскости α, поэтому точка N — общая для α и β, т. е. N лежит на прямой l.

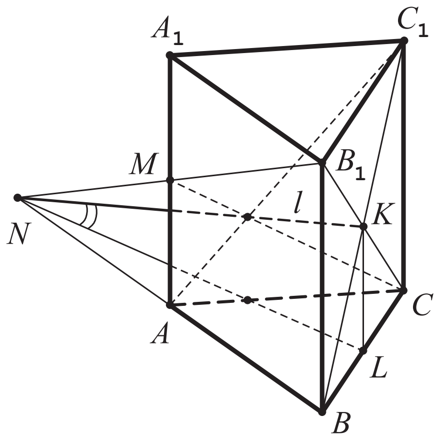

Рис. **136**

Опустим из точки K перпендикуляр KL на плоскость ABC. Поскольку боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости основания и K — середина BC_1, получаем, что прямая KL параллельна CC_1, L —

середина BC и $KL = \frac{1}{2}\,CC_1 = 1$. В треугольнике BNL: $BL = 1/2$, $BN = 2$, $\angle B = 60^\circ$, поэтому по теореме косинусов $NL = \sqrt{13}/2$. Прямая NL — проекция данной прямой l на плоскость ABC. Следовательно, острый угол KNL прямоугольного треугольника NLK — искомый. Если $\angle KNL = \varphi$, то $\operatorname{tg}\varphi = KL/NL = 2/\sqrt{13}$, поэтому $\varphi = \operatorname{arctg}(2/\sqrt{13})$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\operatorname{arctg}(1+\sqrt{5}/2)+\pi k$; $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{5}/2)+\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** $2+\sqrt{5}$. **3.** $\frac{a}{2\cos(\alpha/2)}$. *Указание.* BO и CO — биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC, поэтому $\angle BOC = \frac{1}{2}\,(\pi-\alpha)$. **4.** $a = -6$. **5.** $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2/29})$. *Указание.* Прямая l проходит через данную точку K и точку N, лежащую на луче DC, причем $DN = 2$. Основание P перпендикуляра KP, опущенного из K на плоскость $ABCD$, лежит на диагонали AC, $AP = \frac{1}{4}\,AC$, $PN = \sqrt{29/8}$. Угол KNP прямоугольного треугольника PKN — искомый.

Вариант 3. **1.** $\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}/2)+\pi k$; $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}/2)+\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** $\sqrt{6}-1$. **3.** $\frac{a}{2\cos(\alpha/2)}$. *Указание.* BO и CO — биссектрисы, поэтому $\angle BOC = (\pi+\alpha)/2$. **4.** $a = 5$. **5.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/5)$. *Указание.* Прямая l проходит через данную точку L и точку N, лежащую на луче CM, причем $CN = 2CM$. Основание P перпендикуляра LP, опущенного из точки L на плоскость ABC, принадлежит CM, $CP = \frac{1}{3}\,CM$. Угол LNP — искомый.

Вариант 4. **1.** $\operatorname{arctg}\frac{7+\sqrt{5}}{2}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{7-\sqrt{5}}{2}+\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** $2\sqrt{7}-3$. **3.** $\frac{a}{2\sin 2\alpha}$. *Указание.* Угол BOC равен 2α. **4.** $a = 4$. **5.** $\operatorname{arctg}(4/\sqrt{10})$. *Указание.* Пусть L и K — центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ соответственно, N — точка пересечения прямых, проходящих через A и M и параллельных соответственно прямым BD и AC. Прямая l проходит через точки L и N, $KN = \sqrt{5/8}$, угол LNK — искомый.

1987

Решение варианта 1

1. Левая часть уравнения определена только в том случае, когда $|x| \leqslant 1$. Уравнение решаем, приравнивая к нулю каждый из сомножителей левой части. Если $\arccos x = 0$, то $x = 1$. Квадратное уравнение $13x^2 + 2x - 14 = 0$ имеет корни $-\frac{1}{13}(\sqrt{183} + 1)$ и $\frac{1}{13}(\sqrt{183} - 1)$. Первый из них меньше -1 и не входит в область определения функции $y = \arccos x$.

Ответ: $1, \frac{1}{13}(\sqrt{183} - 1)$.

2. Обозначим $y = \sin 2x - \cos 2x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $8 \cdot 2^{2y} - 14 \cdot 6^y + 3 \cdot 3^{2y} = 0$. Разделив его на 3^{2y} и положив $z = (2/3)^y$, получим уравнение $8z^2 - 14z + 3 = 0$. Следовательно, $z_1 = 3/2$, $z_2 = 1/4$. Логарифмируя по основанию $2/3$, находим $y_1 = -1$, $y_2 = \log_{2/3}(1/4)$.

Заметим, что $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, и рассмотрим отдельно каждое из значений y_1, y_2. Пусть $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, тогда $2x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{4} + \pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$. Для четных значений $m = 2n$ имеем $x = \pi n$, а для нечетных $m = 2k - 1$ получается $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(n,\, k \in \mathbb{Z})$. Отметим, что $\left|\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$ при всех x, в то время как $y_2 = \log_{2/3}(1/4) = 2\log_{2/3}(1/2) > 2$, поэтому уравнение $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = y_2$ корней не имеет.

Ответ: $\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(n,\, k \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна x, тогда длины ее боковых сторон будут x и $2x$, а сумма оснований равна $6 - 3x$ (рис. 137). Значит, удвоенная площадь $2S = x(6-3x) = 3-3(x-1)^2$ достигает наибольшего значения при $x = 1$. Заметим, что для существования трапеции заданной высоты x необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2x\cos 30^\circ = x\sqrt{3} < 6 - 3x$, тогда длины ее оснований составят

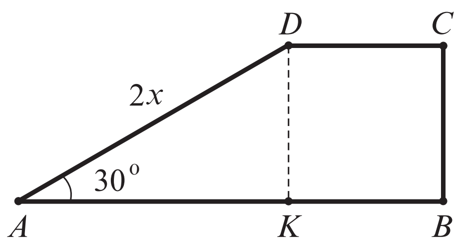

Рис. **137**

$CD = \frac{1}{2}\,[\,6-(3+\sqrt{3})x\,]$, $AB = \frac{1}{2}\,[\,6-(3-\sqrt{3})x\,]$. Найденное значение x удовлетворяет указанному условию.

Ответ: 1.

4. Пусть x (кг) — масса второго куска сплава, y — третьего. Тогда масса первого куска — $2x$. Вычисляя массу нового сплава, находим $3x+y = 12$. Сравнивая количество меди в исходных кусках и во всем сплаве, получаем $\frac{4}{3}\,x + \frac{3}{4}\,x + \frac{5}{6}\,y = \frac{48}{5}$. Объединяя эти уравнения в систему, определяем: $x = 0{,}96$, $y = 9{,}12$. Итак, масса первого куска сплава равна 1,92 кг, второго — 0,96 кг и третьего — 9,12 кг.

Ответ: 1,92, 0,96 и 9,12 кг.

5. По теореме синусов находим $\sin\angle CAB = \frac{BC\,\sin\angle ACB}{AB} = 1/2$, т. е. $\angle CAB = 30^\circ$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный, $AC = 6$. Плоскость ABC пересекает сферу по окружности, центр которой находится в точке C, а радиус R равен $2\sqrt{3}$. Учитывая, что $BC < R < AC$, приходим к выводу, что эта окружность пересекает сторону AC в точке L такой, что $CL = 2\sqrt{3}$, и сторону AB в некоторой точке K (рис. 138).

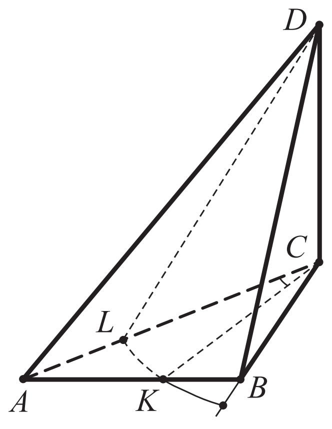

Рис. **138**

Для того чтобы определить искомую длину дуги LK, найдем угол ACK. Угол B в треугольнике KCB прямой, поэтому $\cos\angle KCB = BC/KC = \sqrt{3}/2$, $\angle KCB = \frac{\pi}{6}$ и, значит, $\angle ACK = \angle ACB - \angle KCB = \frac{\pi}{6}$. Отсюда следует, что длина дуги LK равна $R\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 0; $\frac{1}{17}\,(\sqrt{307}-1)$. **2.** $-\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** 13,75, 5,5 и 2,75 кг. **5.** $\pi\sqrt{3}$. *Указание.* В сечении сферы плоскостью $ABCD$ получится окружность радиуса $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, которая касается сторон AB и AD основания.

Вариант 3. **1.** 1; $\frac{1}{15}(\sqrt{241}-1)$. **2.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(k,\, n\in\mathbb{Z})$. **3.** $4(\sqrt{2}-1)$. **4.** 6,4, 3,2 и 14,4 кг. **5.** $4\sqrt{5}\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$ $(=2\sqrt{5}\arccos\frac{1}{9})$.

Вариант 4. **1.** 0; $\frac{1}{22}(13\sqrt{3}-1)$. **2.** $\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(k,\, n\in\mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $5\frac{1}{7}$, $3\frac{3}{7}$ и $15\frac{3}{7}$ кг. **5.** $\pi/\sqrt{3}$.

1988

Решение варианта 1.1

1. Поскольку вершина параболы лежит на оси Ox, ее уравнение имеет вид $y=a(x-c)^2$. Парабола проходит через точку $A\,(-1;\,-1)$, поэтому $a(c+1)^2=-1$. В то же время прямая AB, как легко заметить, имеет уравнение $y=x$. Тангенс угла наклона ее к оси x, поскольку она касается параболы в точке A, должен быть равен значению производной $y'=2a(x-c)$ при $x=-1$; отсюда $-2a(c+1)=1$. Объединяя полученные два уравнения для a и c в систему, находим $a=-\frac{1}{4}$, $c=1$.

Ответ: $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$.

2. Заметим, что $\sqrt{2}\sin\bigl(x+\frac{\pi}{4}\bigr)=\sin x+\cos x$, $\sin 2x+2\sin^2 x=$ $=2\sin x(\sin x+\cos x)$. Используя эти соотношения, данное уравнение можно привести к виду $(\sin x+\cos x)(2\cos 2x-\sin x)=0$. Отсюда $\sin x+\cos x=0$ или $2\cos 2x-\sin x=0$. Решениями первого уравнения являются числа $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Второе уравнение преобразуется к квадратному $4\sin^2 x+\sin x-2=0$ относительно $\sin x$. Его корнями являются числа $\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$, которые по модулю меньше 1, поэтому $x_2=(-1)^k\arcsin\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $(-1)^k\arcsin\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(k,\, n\in\mathbb{Z})$.

3. Центр O окружности совпадает с серединой гипотенузы AB, $AB=13$, поэтому радиус R окружности равен $13/2$. Площадь четырехугольника $AMNK$ найдем как сумму площадей равнобедренных треугольников AOM, MON, NOK и AOK (рис. 139). Пусть $\angle ABC=\alpha$, $\angle CAB=\beta$ $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2})$. Тогда центральный угол AOM, который опирается на половину дуги AC, равен вписанному углу ABC, опирающемуся на дугу AC, то есть $\angle AOM = \alpha$. Аналогичным образом $\angle NOB = \beta$, поэтому $\angle MON = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$. Так как K — середина дуги AB, то KO — перпендикуляр к диаметру AB. Следовательно, $\angle AOK = \frac{\pi}{2}$, $\angle KON = \frac{\pi}{2} + \beta$. Заметим, что $\sin\alpha = 5/13$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\beta = \sin\alpha = 5/13$, поэтому общая площадь всех четырех перечисленных треугольников равна $\frac{1}{2}R^2(2 + 2\sin\alpha) = \frac{117}{2}$.

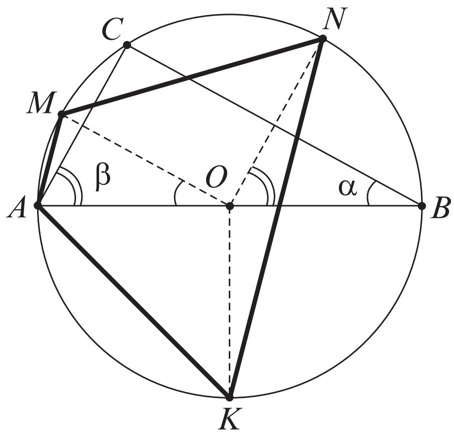

Рис. **139**

Ответ: $\frac{117}{2}$.

4. Левая часть уравнения определена, если выполняются условия $x + 2 > 0$ (и тогда $x + 3 > 1$), $x + 2 \neq 1$, $11x^2 + 46x + 48 > 0$ и все внутренние логарифмы в исходном выражении положительны.

Логарифм по основанию 2 равен 1, отсюда логарифм по основанию $x + 3$ равен 2, и поэтому исходное уравнение преобразуется к виду $11x^2 + 46x + 48 = (x + 3)^2$. Для любого корня этого квадратного уравнения при условиях $x > -2$, $x \neq -1$ выражение $11x^2 + 46x + 48$ положительно и левая часть исходного уравнения определена. Корнями получившегося квадратного уравнения являются числа $-2 + 1/\sqrt{10}$ и $-2 - 1/\sqrt{10}$. Условиям $x > -2$, $x \neq -1$ удовлетворяет только первый корень.

Ответ: $1/\sqrt{10} - 2$.

5. Опустим из точки E перпендикуляр EG на прямую KL. Поскольку $EK = \frac{3}{4}AK$, то $KG = \frac{3}{8}KL$, поэтому прямая GF параллельна боковым ребрам обеих призм (рис. 140). Проведем через точки E, G и F плоскость. Так как прямая EG параллельна высоте симметричных треугольников ABC и AKL, то она пересечет AB и BC в точках E_1 и G_1 таких, что $AE_1 = AE$, $BG_1 = KG$. В сечении

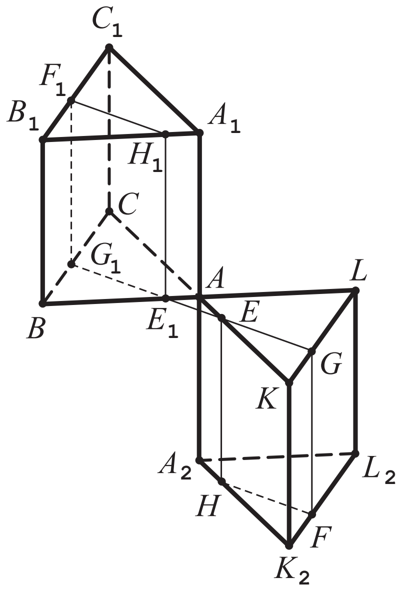

Рис. **140**

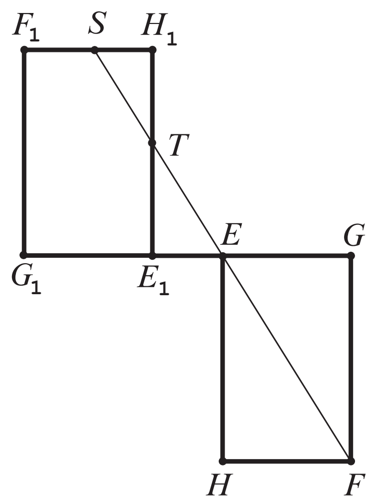

Рис. **141**

плоскостью EGF призмы $AKLA_2K_2L_2$ получается прямоугольник $EGFH$ со сторонами $EG = 3\sqrt{3}/8$, $GF = 1$ и диагональю $EF = \sqrt{91}/8$. Призму $ABCA_1B_1C_1$ эта плоскость пересечет по прямоугольнику $E_1H_1F_1G_1$, симметричному $EGFH$ относительно середины отрезка EE_1, причем $EE_1 = \sqrt{3}/4 = \frac{2}{3}\,EG$ (рис. 141). Пусть прямая EF пересекает стороны прямоугольника $E_1H_1F_1G_1$ в точках S и T. Прямоугольные треугольники SH_1T и EGF подобны, $H_1T = \frac{1}{3}\,G_1F_1$, поэтому $ST = \frac{1}{3}\,EF = \sqrt{91}/24$.

Ответ: $\sqrt{91}/24$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** $y = x^2 + 4$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** 28. *Указание.* Треугольник CMK — равнобедренный, $CK = 2$. **4.** $\frac{1}{10}\,(\sqrt{35} - 5)$. **5.** 3/2. *Указание.* Плоскость, проведенная через точки E и F параллельно боковым ребрам параллелепипедов, параллельна диагонали AC.

Вариант 1.3. **1.** $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{10})$. **5.** $\sqrt{3}/4$. *Указание.* Плоскость, проведенная через точки E и F параллельно боковым ребрам призмы, перпендикулярна ребру KL.

Вариант 1.4. **1.** $y = \frac{1}{2}(3 - x^2)$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{221}{4}$. **4.** $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 5)$. *Указание.* Данное уравнение приводится к кубическому, один из корней которого $x = -3$. **5.** $\sqrt{5}/2$. *Указание.* Плоскость, проведенная через точки E и F параллельно боковым ребрам призмы, параллельна грани AA_1B_1B.

Решение варианта 2.1

1. В область определения уравнения входят значения x, удовлетворяющие одновременно неравенствам $\dfrac{6x^2+1}{1-3x} > 0$ и $\dfrac{3x-1}{5x-5} > 0$. Первое из них справедливо для всех $x < 1/3$, второе также выполняется для всех x, удовлетворяющих этому условию.

Преобразуем исходное уравнение к виду $\lg \dfrac{6x^2+1}{5-5x} = 0$, откуда $6x^2 + 1 = 5 - 5x$. Из двух корней $x_1 = -4/3$ и $x_2 = 1/2$ этого квадратного уравнения условию $x < 1/3$ удовлетворяет только первый.

Ответ: $-4/3$.

2. Левая часть уравнения определена, если $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Умножив на $\sin\frac{x}{2}$ и воспользовавшись формулой удвоения аргумента для синуса, приходим к уравнению $10\sin x\cos x + 20\sin x - 7\cos x - 14 = 0$, или $(\cos x + 2)(10\sin x - 7) = 0$. Первый сомножитель не может быть равен нулю, так как $|\cos x| \leqslant 1$; отсюда $10\sin x - 7 = 0$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{7}{10} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Заметим, что $0 < \frac{7}{10} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому выполняются неравенства $0 < \arcsin\frac{7}{10} < \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$ принадлежит единственный корень $\pi - \arcsin\frac{7}{10}$ из найденной серии.

Ответ: $\pi - \arcsin(7/10)$.

3. Пусть $AM = x$. Тогда $MC = \sqrt{9 - x^2}$, $CN = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$ (рис. 142). Углы MAC и BCN равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами CN и AM, BC и AC, поэтому прямоугольные треугольники AMC и BNC подобны. Отсюда $AM : AC =$

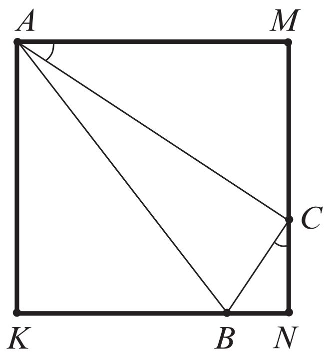

Рис. **142**

$= CN : BC$, т.е. $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$. Определяя из этого уравнения $x = 9/\sqrt{13}$, находим $AK = \frac{3}{2}MC = 9/\sqrt{13}$, $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 7/\sqrt{13}$ и, следовательно, площадь треугольника AKB составляет $63/26$.

Ответ: $63/26$.

4. Приведем подкоренные выражения к виду $x+1-2\sqrt{x} = (1-\sqrt{x})^2$, $x+1+2\sqrt{x} = (1+\sqrt{x})^2$. Отсюда следует, что область определения данного уравнения состоит из значений $x \geqslant 0$. Замечая, что $\sqrt{a^2} = |a|$, запишем данное уравнение в виде $|1-\sqrt{x}|+|1+\sqrt{x}| = 2$. Рассмотрим сначала случай, когда $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$, тогда $|1-\sqrt{x}| = 1-\sqrt{x}$, $|1+\sqrt{x}| = 1+\sqrt{x}$ и уравнение для рассматриваемого промежутка изменения x превращается в тождество. Следовательно, все числа из отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ являются корнями уравнения. Если же $\sqrt{x} > 1$, то приходим к уравнению $2\sqrt{x} = 2$. Его корень $x = 1$ не удовлетворяет условию $\sqrt{x} > 1$.

Ответ: $[0, 1]$.

5. Сторона BC основания равна 5. Опустим перпендикуляр SO на плоскость ABC (рис. 143). Прямоугольные треугольники SOB, SOC и SOA имеют равные гипотенузы и общий катет SO, поэтому катеты OB, OA и OC равны между собой, т.е. O — центр описанной около треугольника окружности. Следовательно, O — середина гипотенузы BC, и так как треугольник SBC равносторонний, то $SO = 5\sqrt{3}/2$. Искомый объем пирамиды $MNPQ$ можно найти как разность объемов V_1 и V_2 пирамид $QBMN$ и $PBMN$ с общим основанием BMN. В треугольнике BMN высота $AB = 3$,

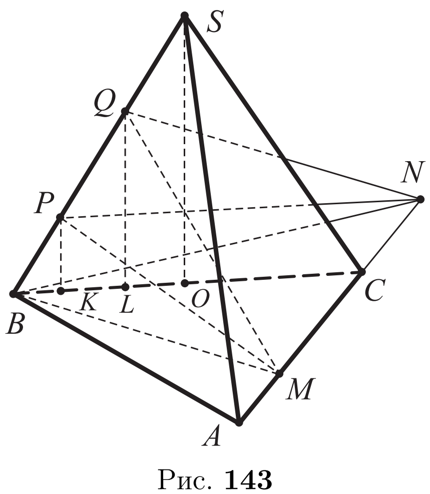

Рис. **143**

$MN = 5$, поэтому его площадь равна $15/2$. Так как $BQ = \frac{3}{5}\,BS$, $BP = \frac{1}{5}\,BS$, то высоты пирамид $QBMN$ и $PBMN$ равны соответственно $QL = \frac{3}{5}\,SO = 3\sqrt{3}/2$, $PK = \frac{1}{5}\,SO = \sqrt{3}/2$. Вычислив объемы этих пирамид $V_1 = 15\sqrt{3}/4$ и $V_2 = 5\sqrt{3}/4$, находим искомый объем пирамиды $MNPQ$: $V_1 - V_2 = 5\sqrt{3}/2$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $-\frac{1}{4}$. **2.** $\pi - \arcsin\frac{2}{5}$. **3.** $\frac{81}{10}$. **4.** $[-4,\,0\,]$. **5.** $\frac{5}{4}\sqrt{11}$. *Указание.* Искомый объем находится как разность объемов пирамид $QBMN$ и $PBMN$ с общим основанием NBM.

Вариант 2.3. **1.** 2. **2.** $\pi - \arcsin\frac{4}{5}$. **3.** $\frac{14}{5}$. *Указание.* Пусть $CH = x$, тогда $CK = 3x$. Используя подобие прямоугольных треугольников ACH и CKB, составляем уравнение для определения x. **4.** $[\,4,\,8\,]$. **5.** $\frac{45}{8}$.

Вариант 2.4. **1.** 3. **2.** $2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **3.** $\frac{28}{13}$. **4.** $[\,9,\,18\,]$. **5.** $\frac{6}{5}\sqrt{66}$.

1989

Решение варианта 1

1. Через x и y обозначим искомые массы первого и второго сплавов. Тогда первый сплав будет содержать $\frac{1}{5}\,x$ олова, а второй — $\frac{3}{10}\,y$ олова. Сумма $\frac{x}{5} + \frac{3y}{10}$ должна составить 27 % от 10, т. е. $\frac{27}{10}$. Таким образом, имеем систему $2x + 3y = 27$, $x + y = 10$, решением которой являются $x = 3$, $y = 7$.

Ответ: 3 и 7 кг.

2. Умножив исходное уравнение на $\sin x \cos x$, получаем $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 5\sin x$, или $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$. Возникло квадратное уравнение относительно $\sin x$ с корнями 2 и $1/2$. Корень 2 посторонний, так как $|\sin x| \leqslant 1$. Следовательно, $\sin x = 1/2$.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

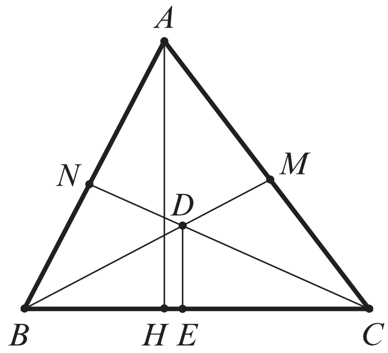

Рис. **144**

3. Пусть D — точка пересечения BM и CN, E — проекция D на прямую BC. Так как треугольник ABC остроугольный, то E лежит между B и C (рис. 144). Медианы делятся точкой D в отношении $1:2$, поэтому $BD = \frac{2}{3}BM = \frac{8}{3}$, $CD = \frac{2}{3}CN = \frac{10}{3}$. Кроме того, $DE = \frac{1}{3}AH = 2$. По теореме Пифагора имеем $BC = BE + CE = \sqrt{BD^2 - DE^2} + \sqrt{CD^2 - DE^2} = \frac{1}{3}(8 + 2\sqrt{7})$. Искомая площадь равна $\frac{1}{2}AH \cdot BC = 8 + 2\sqrt{7}$.

Ответ: $8 + 2\sqrt{7}$.

4. Оба подкоренных выражения должны быть неотрицательными, поэтому $x \geqslant 4$. Перепишем теперь исходное неравенство в виде $\sqrt{21x+16} < 20 + \sqrt{x-4}$ и, пользуясь неотрицательностью левой и правой частей, возведем его в квадрат. В итоге получим $x - 19 < 2\sqrt{x-4}$. При $x \in [4, 19)$ это соотношение заведомо выполняется, так как $x - 19 < 0$, а $\sqrt{x-4} \geqslant 0$. Если же $x \geqslant 19$, то можно вновь возвести в квадрат обе части неравенства и получить обычное квадратное неравенство $x^2 - 42x + 377 < 0$, выполненное при $x \in (13, 29)$. Пересекая этот интервал с промежутком $[19, \infty)$, находим, что $x \in [19, 29)$. Таким образом, множество решений исходной задачи — промежуток $[4, 29)$.

Ответ: $[4, 29)$.

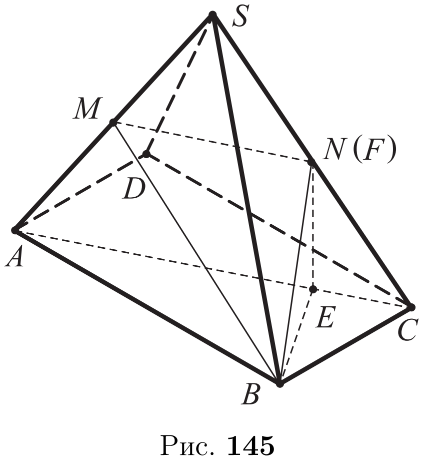

Рис. **145**

5. В плоскости SAC проведем прямую MN, параллельную AC (рис. 145). Понятно, что MN — средняя линия треугольника ASC, причем BMN будет искомой плоскостью α. Опустим теперь перпендикуляр BE на AC, а затем из точки E в плоскости SAC восстановим к AC перпендикуляр до пересечения с прямой MN в некоторой точке F (можно показать, хотя это далее нигде не понадобится, что F и N совпадают). Искомый угол между плоскостями α и SAC есть угол BFE, тангенс которого равен BE/EF. Отрезок BE находим из соотношения $BE = AB \cdot BC/AC = 4/\sqrt{5}$. Длина EF равна половине высоты треугольника ASC, т. е. $2EF = \sqrt{AS^2 - AC^2/4} = 2$. Таким образом, $BE/EF = 4/\sqrt{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 4/\sqrt{5}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{40}{3}$ кг. **2.** $\pm\frac{1}{2} \arccos\frac{1}{3} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $2\sqrt{10} - 4$. *Указание.* Пусть D — точка пересечения медиан AM и BN. Опустим перпендикуляр DE на BC, тогда $BM = BE - ME$, а отрезки BE и ME найдем по теореме Пифагора из треугольников BDE и MDE. **4.** $[2,\ 57/4)$. **5.** $1:2$. *Указание.* Заметим, что плоскости BCD и ABC перпендикулярны, поэтому проекция E точки M на плоскость ABC лежит на отрезке BC. Длина ME равна расстоянию от точки E до прямой BN. Вычислив ME и BE, легко убедиться, что $BE = 2ME$. Но тогда BN — биссектриса угла ABC.

Вариант 3. **1.** 9 и 6 кг. **2.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{9}{2}\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть D — точка пересечения медиан BM и CN, E — проекция D на BC. Тогда $DE = \frac{1}{3} AH = 3$, $BD = \frac{2}{3} BM = 5$. Теперь по теореме Пифагора легко найти BE, а затем и CD. Искомая медиана CN равна $\frac{3}{2} CD$. **4.** $[1,\ 29/4)$. **5.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{30}/3)$. *Указание.* Плоскость α пересекает ребро AD в точке N такой, что $AN = 1/3$. Через вершину C проведем перпендикулярную MN плоскость. Пусть P и Q — точки пересечения этой плоскости с AB и MN соответственно. Треугольник CPQ — прямоугольный, а угол PQC — искомый. Тангенс этого угла равен CP/PQ.

Вариант 4. **1.** 15 кг. **2.** $\pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{3}) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{34}$. *Указание.* Пусть D — точка пересечения медиан AM и BN, а E — проекция D на BC. Тогда $DE = \frac{1}{3} AH = 5/3$, $BD = \frac{2}{3} BN = 13/3$, $BM = \frac{1}{2} BC = 5$. Из треугольника BDE по теореме Пифагора найдем BE, разность $BM - BE$ равна ME, а DM определим по теореме Пифагора из треугольника DEM. Медиана AD равна $3DM$. **4.** $[-2,\ 14)$. **5.** $2:3$. *Указание.* Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную прямой BN. Пусть P и Q — точки пересечения этой плоскости с AB и BN соответственно. Треугольник MPQ — прямоугольный с острым углом 45°, $MP \perp AB$. Теперь, используя подобие треугольников PQB и ABN, нетрудно найти AN.

1990

Решение варианта 1

1. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию в логарифмах и приведем все логарифмические выражения в данном уравнении к основанию 2, в результате чего оно преобразуется к виду

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = \frac{4}{3+\log_2 x}. \tag{1}$$

Положим $y = \log_2 x$. После элементарных преобразований (1) приводится к квадратному относительно y уравнению $y^2 - 6y - 3 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ и $y_2 = 3 - 2\sqrt{3}$. Заметим, что в исходном уравнении $x \neq 1$, $2x \neq 1$, $8x \neq 1$, т. е. должны выполняться условия $y \neq 0$, $y \neq -1$, $y \neq -3$. Оба найденных значения y_1 и y_2 удовлетворяют этим ограничениям. Следовательно, $x_1 = 2^{3+2\sqrt{3}}$, $x_2 = 2^{3-2\sqrt{3}}$.

Ответ: $2^{3+2\sqrt{3}}$, $2^{3-2\sqrt{3}}$.

2. Используя тождества $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, приведем данное уравнение к квадратному $6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0$ относительно $\sin x$. Его корни равняются $3/2$ и $-1/3$. Первый из них является посторонним, а для второго получаем $\sin x = -1/3$, $x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{3}) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Учитывая, что $-\frac{\pi}{2} < \arcsin(-\frac{1}{3}) < 0$, нетрудно заметить, что наименьшим положительным корнем будет $x = \arcsin\frac{1}{3} + \pi$.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3} + \pi$.

3. Пусть K и L — точки касания прямой l_1, M и N — прямой l_2 соответственно с окружностями O_1 и O_2, а r_1 и r_2 — радиусы окружностей; для определенности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2$. Проведем прямую через центры O_1 и O_2, пусть A и B — точки ее пересечения с окружностями (рис. 146). Из условия следует, что $AB = 1$. Действительно, если выбрать произвольно A' на окружности O_1 и B' на окружности O_2, то длина ломаной $O_1A'B'O_2$, равная $r_1 + r_2 + A'B'$, будет не меньше, чем длина отрезка $O_1O_2 = r_1 + r_2 + AB$. Значит, $A'B' \geqslant AB$. Равенство возможно только в случае, когда $A' = A$, $B' = B$, поэтому расстояние между A и B наименьшее.

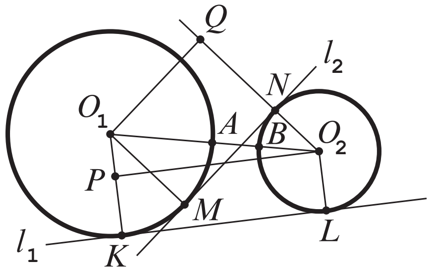

Рис. **146**

Радиусы O_1K, O_2L перпендикулярны прямой l_1; O_1M и O_2N — прямой l_2. Опустим перпендикуляры O_2P и O_1Q соответственно на прямые O_1K и O_2N. Так как KPO_2L — прямоугольник, то $PO_2 = KL = 24$, $PK = O_2L = r_2$, следовательно, в прямоугольном треугольнике O_1PO_2 катет $O_1P = r_1 - r_2$, гипотенуза $O_1O_2 = r_1 + r_2 + AB = r_1 + r_2 + 1$. Отсюда получаем первое уравнение для определения r_1 и r_2: $(r_1 - r_2)^2 + 24^2 = (r_1 + r_2 + 1)^2$, т. е. $4r_1r_2 + 2(r_1 + r_2) = 575$.

Точно так же в прямоугольном треугольнике O_1QO_2: $O_1Q = MN = 7$, $QO_2 = r_1 + r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2 + 1$, отсюда $(r_1 + r_2 + 1)^2 = (r_1 + r_2)^2 + 49$, и значит, $2(r_1 + r_2) = 48$. Тогда из первого уравнения $4r_1r_2 = 575 - 48 = 527$, и мы получаем систему

$$4r_1r_2 = 527, \qquad r_1 + r_2 = 24.$$

Решая ее и учитывая исходное предположение $r_1 \geqslant r_2$, находим $r_1 = 31/2$, $r_2 = 17/2$.

Ответ: $\frac{31}{2}$ и $\frac{17}{2}$.

4. Заметим, что должно выполняться условие $3x + 22 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -22/3$, и рассмотрим два случая.

А. Пусть $x + 4 > 0$, или $x > -4$. Умножая неравенство на $x + 4$, приводим его к виду $\sqrt{3x + 22} < x + 4$. Оба выражения в рассматриваемой области изменения x неотрицательны, поэтому, возводя в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $3x + 22 < x^2 + 8x + 16$, т. е. $x^2 + 5x - 6 > 0$. Его решения образуют множество

$(-\infty,\ -6) \cup (1,\ \infty)$. Учитывая ограничение $x > -4$, получаем для первого случая множество значений $(1,\ \infty)$.

Б. Пусть $x + 4 < 0$, тогда левая часть исходного неравенства неположительна и, следовательно, меньше 1. Значит, неравенство справедливо для всех $x \in \left[-\frac{22}{3},\ -4\right)$.

Объединяя множества, найденные в каждом случае, получаем

Ответ: $\left[-\frac{22}{3},\ -4\right) \cup (1,\ \infty)$.

5. Пусть M — середина ребра BC. Плоскость $AA'M$ содержит точку K и делит двугранный угол с ребром AA' пополам, поэтому центр O сферы принадлежит этой плоскости (рис. 147). Обозначим через N, R и P точки касания сферы соответственно с плоскостями ABC, $AA'B'B$ и прямой $A'K$. Тогда OR и ON — перпендикуляры к плоскостям $AA'B'B$ и ABC, причем точка N лежит на отрезке AM, а OP — перпендикуляр к прямой $A'K$.

Проведем через O, N и R плоскость. Она пересечет прямую AB в точке T. Поскольку прямая AB перпендикулярна OR и ON, она перпендикулярна плоскости ORN и, в частности, прямой NT. Легко заметить, что $ORTN$ — квадрат со стороной, равной радиусу сферы (обозначим его через r). Тогда из прямоугольного треугольника ANT имеем $AN = NT/\sin 30^\circ = 2r$.

Рассмотрим сечение $AA'M$ (рис. 148). Через L обозначим точку пересечения прямых $A'K$ и AM. Так как KM — средняя линия

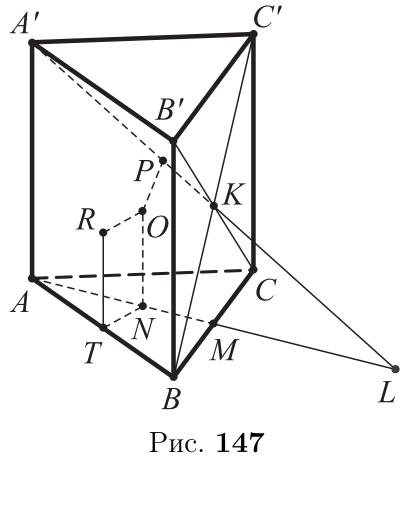

Рис. **147**

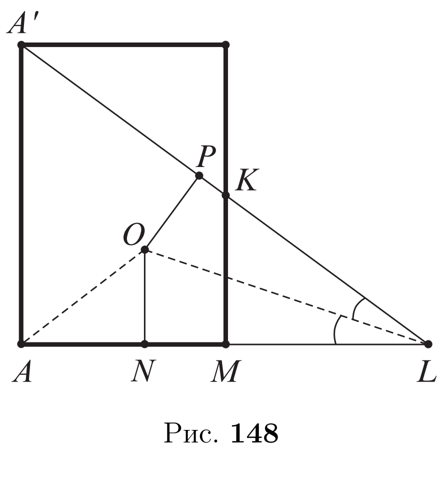

Рис. **148**

треугольника $AA'L$, то $AL = 2AM = 4$. Пусть угол OLA равен β. Учитывая, что OL — биссектриса угла $A'LA$, находим $\angle A'LA = 2\beta$. Гипотенуза $A'L$ прямоугольного треугольника $A'AL$ равняется $A'L = \sqrt{AL^2 + A'A^2} = 5$, отсюда

$$\cos 2\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{1-\cos 2\beta}} = 3.$$

В треугольнике ONL имеем $NL = ON\operatorname{ctg}\beta = 3r$. Используя равенство $AL = AN + NL$, получаем уравнение $5r = 4$. Остается проверить, что значение $r = 4/5$ удовлетворяет условию задачи. Заметим, что $AN = 2r = 8/5 < AM = 2$, поэтому центр O сферы действительно лежит внутри призмы.

Ответ: $4/5$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $5^{-2\sqrt{3}}$; $5^{2\sqrt{3}}$. **2.** $\arccos(-\frac{2}{3})$. **3.** 2 и 10. **4.** $\left[\frac{5}{2}, 4\right) \cup (7, \infty)$. **5.** $1/2$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, r — ее радиус, K — точка касания сферы с плоскостью основания $ABCD$. Точка O лежит в плоскости $A'AC$ на расстоянии $r\sqrt{2}$ от прямой $A'A$, K принадлежит диагонали AC основания. Если угол C прямоугольного треугольника $A'AC$ обозначить через 2α, то $\cos 2\alpha = AC/A'C = 1/3$. Поскольку O лежит на биссектрисе угла ACA', то $AC = AK+KC = r(\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\alpha)$. Отсюда, вычислив $\operatorname{ctg}\alpha$, нетрудно найти r.

Вариант 3. **1.** $2^{4+2\sqrt{10}}$; $2^{4-2\sqrt{10}}$. **2.** $\pi + \arcsin\frac{1}{5}$. **3.** $\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}-1$. *Указание.* Пусть A и B — точки касания прямой l_3 с окружностями O_1 и O_2, K — точка пересечения l_3 с линией центров O_1 и O_2. Отрезок AB равен разности радиусов r_1 и r_2 данных окружностей, т. е. $r_1 - r_2 = 2$. В то же время в прямоугольных треугольниках O_1AK и O_2BK угол K равен 60°, поэтому $(r_1+r_2)\operatorname{ctg}60^\circ = AB$, или $r_1 + r_2 = 2\sqrt{3}$. **4.** $\left[-\frac{11}{5}, -1\right) \cup (5, \infty)$. **5.** $3/5$. *Указание.* Пусть Q — середина ребра BC. Центр O данной сферы и высота SH лежат в плоскости ASQ. Обозначим через K и L точки касания сферы с плоскостью основания ABC и высотой SH соответственно. Тогда K принадлежит отрезку AQ, а четырехугольник $OKHL$ — квадрат со стороной, равной радиусу r сферы. Центр O_1 вписанного в пирамиду шара совпадает с точкой пересечения прямых AO и SH, его радиус R равен $3/4$. Если обозначить $\angle OAK = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = R/AH = 1/4$. Поскольку $AK = r\operatorname{ctg}\alpha$, $KH = r$, $AK + KH = AH = 3$, то отсюда и получаем ответ на вопрос задачи.

Вариант 4. **1.** $3^{2\sqrt{3}-4}$; $3^{-2\sqrt{3}-4}$. **2.** $\arccos(-\frac{1}{4})$. **3.** 5 и 5/4. *Указание.* Обозначим через B и C точки касания прямой l с окружностями O_1 и O_2; r_1 и r_2 — их радиусы ($r_1 \geqslant r_2$), AD и O_2K — перпендикуляры, опущенные из точек A и O_2 на прямые l и O_1B соответственно. Рассматривая прямоугольный треугольник O_1O_2K, получаем равенство $BC^2 = O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2$, отсюда $4r_1r_2 = 25$. В трапеции O_1O_2CB основания $O_1B = r_1$, $O_2C = r_2$, прямая AD параллельна основаниям и делит боковые стороны в отношении $r_1 : r_2$. Следовательно, $AD = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = 2$ и $r_1 + r_2 = 25/4$. **4.** $[-1/3, 3)\cup(8, \infty)$. **5.** $2\sqrt{3}/7$. *Указание.* Центр O искомой сферы, радиус OP, проведенный в точку касания P с плоскостью основания $ABCD$, и высота SH пирамиды лежат в плоскости SCA. Заметим, что центр O_1 вписанного в пирамиду шара совпадает с точкой пересечения прямых CO и SH, а его радиус равен $\sqrt{3}/4$. Отсюда, если $\angle OCP = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}/4$, $CP = OP\operatorname{ctg}\alpha = 4r/\sqrt{6}$, где r — искомый радиус. В то же время, если обозначить через 2β величину угла SAP, то $\cos 2\beta = 1/5$. Поскольку AO — биссектриса угла SAP, то $AP = OP\operatorname{ctg}\beta = r\sqrt{6}/2$. Замечая, что $AP+CP = AC$, получаем уравнение для определения r.

1991

Решение варианта 1

1. Пусть в первой бочке было x литров воды, а во второй — y литров. Если z — количество воды, которое переливали из первой бочки во вторую, то по условию задачи

$$\begin{cases} x - z = 3(y+z), \\ x - 2z = 2(y+2z). \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем $y = 2z$, а затем, подставляя найденное y в любое из уравнений, определим $x = 10z$. Итак, $x : y = 10z : 2z = 5$.

Ответ: 5.

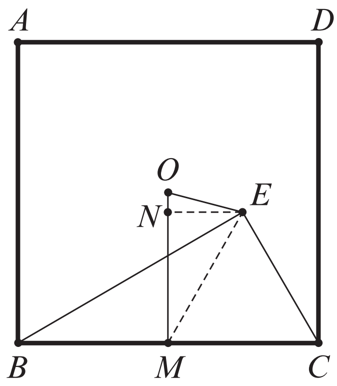

Рис. **149**

2. Пусть O — центр квадрата, M — середина BC, EN — перпендикуляр к OM (рис. 149). Положим $MN = x$, $ON = y$, тогда x — длина высоты треугольника BCE. Медиана ME прямоугольного треугольника BCE равна половине гипотенузы BC, поэтому $ME = OM = \sqrt{10}/2$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ONE и NME, получаем $NE^2 = 1 - y^2 = 5/2 - x^2$. С другой стороны, $x + y = \sqrt{10}/2$. Таким образом, возникает система уравнений относительно x и y, которая легко решается. Например, можно выразить y из второго уравнения системы и подставить в первое — получится уравнение относительно x. Опуская промежуточные выкладки, сразу приведем результат: $x = 2\sqrt{10}/5$. Искомая площадь равна $x \cdot BC/2 = 2$.

Ответ: 2.

3. Область допустимых значений аргумента характеризуется неравенством $(x+20)(x^2-2x-8) > 0$. При решении этого неравенства следует рассмотреть два случая — когда оба сомножителя положительны и когда они оба отрицательны. В первом случае имеем систему

$$\begin{cases} x + 20 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 > 0. \end{cases}$$

из которой следует, что $x > -20$, $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$. Таким образом,

$$x \in (-20, -2) \cup (4, \infty). \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что во втором случае новых решений не появится, поэтому (1) описывает всю область допустимых значений.

Приступая к решению исходного неравенства, перейдем к логарифмам по основанию $\sqrt{3}-1$. Получим

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x+20)^2 \leqslant \log_{\sqrt{3}-1}\left[(x+20)(x^2-2x-8)\right].$$

Отсюда с учетом неравенства $\sqrt{3}-1<1$ вытекает

$$(x+20)^2 \geqslant (x+20)(x^2-2x-8).$$

В силу (1) сомножитель $x+20$ положителен, поэтому можно разделить на него обе части неравенства. В итоге приходим к стандартной задаче $x+20>x^2-2x-8$, решением которой является отрезок $[-4,\ 7]$. Остается учесть область допустимых значений аргумента.

Ответ: $[-4,\ -2)\cup(4,\ 7]$.

4. Возможны два случая, в которых модуль «раскрывается» поразному.

А. $\cos x \geqslant \sin x$. В этом случае уравнение принимает вид $\cos x = \operatorname{ctg} x$, а его решениями являются $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Среди найденных корней условию $\cos x\geqslant \sin x$ удовлетворяют лишь $x = 2\pi k+\frac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Б. $\cos x<\sin x$. Уравнение приводится к виду $\sin x=\operatorname{ctg} x$, или $\sin^2 x=\cos x$. Это соотношение легко превращается в квадратное уравнение $\cos^2 x+\cos x-1=0$ для $\cos x$, корнями которого являются $(-1+\sqrt{5})/2$ и $-(1+\sqrt{5})/2$. Второй из них — посторонний, так как он меньше -1. Первый корень дает $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Знак минус не подходит, поскольку нарушается условие $\cos x<\sin x$. В случае знака плюс имеем $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1/\sqrt{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{4}<\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\pi}{2}$ и условие $\cos x<\sin x$ выполнено.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$; $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ $(n,\ k\in\mathbb{Z})$.

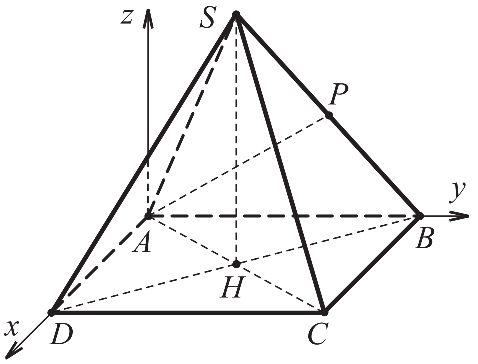

Рис. **150**

5. Применим метод координат. Пусть A совпадает с началом координат (рис. 150), ось x направлена вдоль луча AD, ось y — вдоль луча AB, ось z перпендикулярна плоскости xy и направлена в то полупространство, где лежит вершина S.

Пусть z — третья координата точки S. Так как проекция H вершины S на основание пирамиды попадает в центр квадрата, то первые две координаты точки S равны 3. Координаты точек B и C равны соответственно (0; 6; 0) и (6; 6; 0). Точка P — середина отрезка SB, поэтому ее координаты — полусуммы координат точек S и B — равны (3/2; 9/2; z/2). По условию векторы $\vec{AP}$ и $\vec{CS}$ ортогональны, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{AP} = (3/2;\ 9/2;\ z/2), \quad \vec{CS} = (-3;\ -3;\ z),$$
$$\vec{AP} \cdot \vec{CS} = \frac{1}{2}\,(-9 - 27 + z^2) = 0.$$

Отсюда $z^2 = 36$, $z = 6$, а искомый объем равен $\frac{1}{3}\,z \cdot S_{ABCD} = 72$.

Другое решение этой задачи приведено в указании к варианту 3 для механико-математического факультета, 1991 г.

Ответ: 72.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 2. **2.** $9\sqrt{3}/2$. *Указание.* Пусть O — центр треугольника ABD, а M — середина AB. В треугольнике MOC известны все стороны, значит, по теореме косинусов можно найти косинус угла OMC, затем — синус угла BMC и, наконец, высоту треугольника ABC. **3.** $(-1,\ 2\,] \cup [\,3,\ 5)$. **4.** $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **5.** $8\sqrt{6}$. *Указание.* Примените метод координат, выбрав в качестве начала точку A, ось y направьте вдоль AB, ось z — вдоль AA', а ось x — перпендикулярно плоскости $AA'B'B$. См. также указание к варианту 2 для механико-математического факультета, 1991 г.

Вариант 3. **1.** 11/4. **2.** 5/4. *Указание.* Пусть O — центр квадрата, M — середина AB. В треугольнике MOC все стороны известны, значит, по теореме косинусов можно найти косинус угла OMC, затем — синус угла BMC и, наконец, высоту треугольника ABC. **3.** $[-1,\ 1) \cup (3,\ 6\,]$. **4.** $\pi + 2\pi k$; $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{14}/3$. *Указание.* Примените метод координат, выбрав в качестве начала точку A, ось y направьте вдоль луча AB, ось z — перпендикулярно плоскости ABC, ось x — перпендикулярно осям y и z. См. также решение варианта 1 для механико-математического факультета, 1991 г.

Вариант 4. **1.** $5/2$. **2.** $3\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть O — центр треугольника ABC, M — середина AB. В треугольнике OMD известны все стороны; по теореме косинусов можно найти косинус угла DMO, равный синусу угла AMD, а высота треугольника ABD равняется $MD\cdot\sin\angle AMD$. **3.** $[-1,\,2)\cup(4,\,8]$. **4.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. **5.** $4\sqrt{10}/3$. *Указание.* Примените метод координат, выбрав в качестве начала точку A, ось x направьте вдоль луча AD, ось y — вдоль луча AB, а ось z — перпендикулярно плоскости $ABCD$. См. также указание к варианту 4 для механико-математического факультета, 1991 г.

1992

Решение варианта 1

1. Пусть скорости велосипедиста и пешехода соответственно равны u и v (км/ч). Тогда расстояние между ними через 1 ч 10 мин после начала движения составит $u-v-\frac{v}{6}$ (км). Это же расстояние они преодолевают за 34 мин, двигаясь навстречу друг другу, т. е. $u-v-\frac{v}{6}=34\,\frac{u+v}{60}$. Отсюда вытекает, что $u=4v$.

Во втором случае расстояние между велосипедистом и пешеходом через 1 ч 20 мин после начала движения будет равно $u-v-\frac{v}{3}$, а встретятся они через

$$\frac{4}{3}+\frac{u-v-v/3}{u+v}=\frac{4}{3}+\frac{4v-v-v/3}{4v+v}=\frac{112}{60}$$

часа с момента старта.

Ответ: 112 минут.

2. Исходное уравнение имеет смысл для

$$\sin 2x>0,\quad 0<\cos x<1 \tag{1}$$

и при выполнении этих ограничений эквивалентно следующему:

$$2\cos^2 x\sin 2x=3\sin x\cos x.$$

Учитывая, что $\sin 2x \neq 0$, находим $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Из этой серии корней условиям (1) удовлетворяют $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

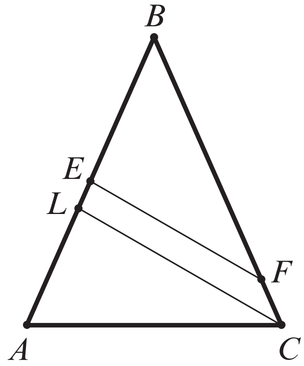

Рис. **151**

3. Положим $AC = a$, $AB = BC = b$. Обозначим через S площадь треугольника ABC, а через EF — линию, параллельную CL и делящую площадь пополам (рис. 151). По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем пропорцию $AL : LB = a : b$, откуда $S_{ACL} : S_{BCL} = a : b$, $S_{BCL} = Sb/(a+b)$. С другой стороны, треугольники BCL и BEF подобны, поэтому $S_{BCL} : S_{BEF} = CL^2 : EF^2 = 8 : 5$. Так как по условию $S_{BEF} = S/2$, то $S_{BCL} = 4S/5$. Приравнивая найденные выражения для S_{BCL}, получаем $4S/5 = Sb/(a+b)$, следовательно, $b = 4a$.

Зная отношение сторон треугольника ABC, находим $\cos\angle BAC = \frac{a}{2b} = \frac{1}{8}$, $AL = \frac{ab}{a+b} = \frac{4a}{5}$. Применив, наконец, теорему косинусов к треугольнику ACL, получим $a = 10$.

Ответ: 10, 40, 40.

4. Левая часть исходного неравенства определена при

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

Далее рассмотрим два случая. Пусть $0 < x < 1$, тогда неравенство можно переписать в виде $\frac{x^2}{3(x-1/2)^2} \geqslant x$. Разделив обе части на положительное число x и умножив на $3(x-1/2)^2$, придем к соотношению $3x^2 - 4x + 3/4 \leqslant 0$. Решением последнего неравенства является множество $[\,(4-\sqrt{7})/6,\ (4+\sqrt{7})/6\,]$, пересечение которого с интервалом $(0,1)$ с учетом (2) дает $[\,(4-\sqrt{7})/6,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1)$.

Действуя аналогично в случае $x > 1$, получим противоположное неравенство $3x^2 - 4x + 3/4 \geqslant 0$, выполняющееся при $x \geqslant (4+\sqrt{7})/6$ или при $x \leqslant (4-\sqrt{7})/6$. В силу ограничения $x > 1$ множество $(-\infty,\ (4-\sqrt{7})/6\,]$ надо отбросить.

Ответ: $\left[\,\frac{4-\sqrt{7}}{6},\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \cup \left[\,\frac{4+\sqrt{7}}{6},\ \infty\right)$.

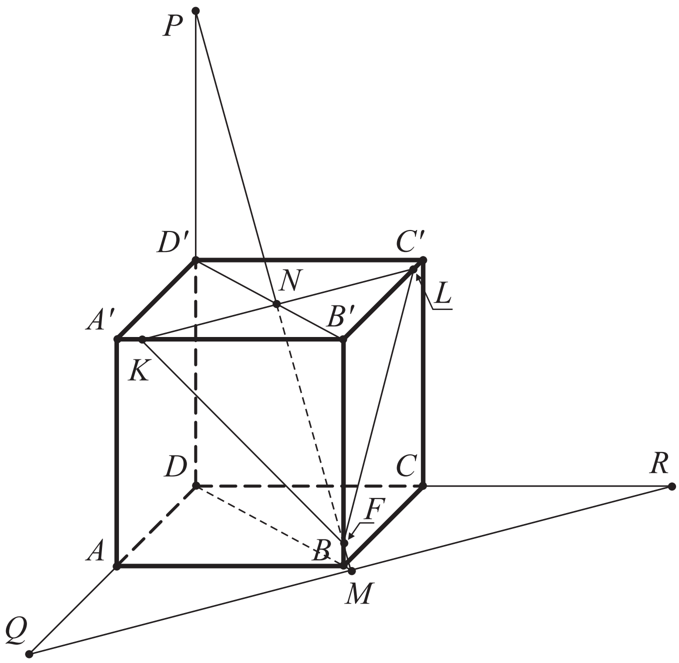

Рис. **152**

5. Для построения искомого сечения соединим середину M отрезка RQ с точкой P (рис. 152). Отрезок PM лежит в плоскости $BDD'B'$ и поэтому пересекается с $B'D'$ в некоторой точке N.

В силу подобия треугольников $PD'N$ и PDM имеем $D'N : PD' = DM : PD$. Следовательно, $D'N = PD' \cdot DM/PD = 11\sqrt{2}/2$, $B'N = B'D' - D'N = 9\sqrt{2}/2$. Плоскость PQR пересекается с параллельными плоскостями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ по параллельным прямым. Значит, линия пересечения плоскостей PQR и $A'B'C'D'$ проходит через точку N параллельно QR. Отрезок KL этой линии параллелен также диагонали $A'C'$ и образует с $B'D'$ угол в $90°$. Отсюда $KL = 2B'N = 9\sqrt{2}$.

Из соображений симметрии вытекает, что плоскость PQR пересекается с гранями $AA'B'B$ и $BB'C'C$ по отрезкам KF и FL той же длины, что и KL. Таким образом, искомое сечение — правильный треугольник KFL со стороной $9\sqrt{2}$. Его площадь равна $81\sqrt{3}/2$.

Ответ: $81\sqrt{3}/2$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 98 минут. **2.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** 12, $12\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть $AC = a$, $AB = b$, S — площадь треугольника, EF — отрезок, параллельный CH и делящий площадь пополам. Если выразить площадь треугольника CBH через S и отношение $a : b$, а затем воспользоваться подобием треугольников CBH и BEF, в силу которого $S_{CBH} : S_{BEF} = CH^2 : EF^2 = 3 : 2$, то можно найти $a : b$. **4.** $\left(1,\ \frac{23-\sqrt{57}}{12}\right] \cup \left(2,\ \frac{23+\sqrt{57}}{12}\right]$. **5.** $\frac{5}{9}$. *Указание.* Искомое сечение — прямоугольный треугольник. Его легко построить, если провести через L прямую, параллельную AB, до пересечения с лучом $A'A$ в некоторой точке M. Точки пересечения MK с ребрами AC и CC' будут двумя вершинами сечения.

Вариант 3. **1.** 195 минут. **2.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** $3\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $BC = a$, $AD = b$, S — площадь трапеции, EF — отрезок, параллельный AC и делящий площадь пополам. Легко показать, что площадь треугольника ACD равна $bS/(a+b)$. С другой стороны, в силу подобия треугольников ACD и DEF имеем $S_{ACD} = S_{DEF} \cdot AC^2/EF^2 = \frac{2S}{3}$. Приравняв найденные выражения для S_{ACD}, получим уравнение относительно $\frac{a}{b}$. **4.** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2},\ \infty\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{13}}{12}$. *Указание.* Искомое сечение — равнобедренный треугольник. Для его построения опустим перпендикуляр CL на прямую, проходящую через K параллельно AB. Через P и Q обозначим точки пересечения отрезка ML с ребром CD и гранью ABD соответственно. Точка P будет вершиной искомого треугольника, а отрезок PQ — его высотой.

Вариант 4. **1.** 216 минут. **2.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. **3.** 25, 25, 40. *Указание.* Пусть $AC = a$, $AB = b$, S — площадь треугольника ABC, EF — отрезок, параллельный CH и делящий площадь пополам. Нетрудно показать, что $S_{ACH} = Sa^2/(2b^2)$. С другой стороны, в силу подобия треугольников ACH и AEF имеем $S_{ACH} = S_{AEF} \cdot CH^2/EF^2 = 32 \cdot S/25$. Приравнивая найденные выражения для S_{ACH}, найдем $\frac{a}{b}$. **4.** $\left(-2,\ \frac{-1-\sqrt{8}}{2}\right] \cup \left(-1,\ \frac{-1+\sqrt{8}}{2}\right]$. **5.** $(10 + 2\sqrt{19})/3$. *Указание.* Искомое сечение — треугольник с вершиной B. Для отыскания остальных вершин проведем через B прямую, параллельную AB'. Пусть N — точка пересечения этой прямой с лучом $A'A$. Отрезок MN пересекает ребра AC и CC' в вершинах искомого сечения.

1993

Решение варианта 1

1. С помощью формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ приведем исходное равенство к виду $4\cos^2 x + 2\cos x = 3$. Полагая $y = \cos x$, получаем $4y^2+2y-3=0$, $y_1 = \frac{-\sqrt{13}-1}{4}$, $y_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$. Величина y_1 меньше -1 и значением $\cos x$ быть не может. Следовательно, $\cos x = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$, $\cos 2x = \frac{1}{2} - \cos x = \frac{3-\sqrt{13}}{4}$.

Ответ: $\frac{3-\sqrt{13}}{4}$.

2. Так как шары были четырех различных цветов и ни у кого не было двух шаров одного цвета, то каждый человек купил не более четырех шаров. Пусть n_1, n_2, n_3 и n_4 — количества людей, купивших соответственно 1, 2, 3 и 4 шара. По условию задачи имеем

$$n_1+n_2+n_3+n_4 = 101, \quad n_1+2n_2+3n_3+4n_4 = 212, \quad n_4 = n_2+13.$$

Подставим выражение n_4 из третьего уравнения в первое и второе. В результате получим $n_1+2n_2+n_3 = 88$, $n_1+6n_2+3n_3 = 160$. Отсюда $2n_2+n_3 = 88-n_1$, $6n_2+3n_3 = 3(2n_2+n_3) = 3(88-n_1) = 264-3n_1$. Значит, $n_1+264-3n_1 = 160$, $n_1 = 52$.

Ответ: 52.

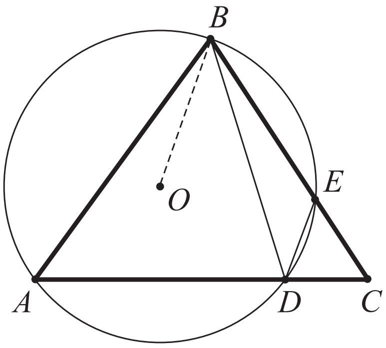

Рис. **153**

3. Применив теорему синусов к треугольнику BDE (рис. 153), получим

$$\sin\angle BED = \frac{BD}{2OB} = \frac{5}{8},$$

откуда $\sin\angle CED = \sin(180^\circ - \angle BED) = \sin\angle BED = \frac{5}{8}$. Искомый радиус найдем по теореме синусов из треугольника CDE: $r = \frac{CD}{2\sin\angle CED} = 8/5$.

Ответ: 8/5.

4. Заметим, что $\sqrt{2}/6 = 1/(3\sqrt{2})$, поэтому исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_{3\sqrt{2}}(x^2 - 6x + 4) \geqslant \log_{3\sqrt{2}}\left(5 - \frac{9x}{2} - \frac{x^2}{2}\right).$$

Так как $3\sqrt{2} > 1$, то приходим к системе

$$x^2 - 6x + 4 \geqslant 5 - \frac{9x}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad 5 - \frac{9x}{2} - \frac{x^2}{2} > 0.$$

Решением первого неравенства этой системы является множество $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{33}}{6}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{33}}{6}, \infty\right)$, а решением второго — множество $(-10, 1)$. Пересечение найденных множеств будет решением исходной задачи.

Ответ: $\left(-10, \frac{3-\sqrt{33}}{6}\right]$.

5. Применим метод координат. Расположим начало координат в точке B, а оси x, y, z направим вдоль лучей BA, BC и BB' соответственно (рис. 154). Плоскость BDM проходит через начало координат, поэтому ее уравнение имеет вид $ax + by + cz = 0$. Подставляя сюда координаты точек $D = (5;\ 10;\ 0)$ и $M = (0;\ 5;\ 2\sqrt{5})$, получаем $5a + 10b = 0$, $5b + 2\sqrt{5}\,c = 0$, откуда $b = -\frac{a}{2}$, $c = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. Полагая $a = 4$, приходим к уравнению $4x - 2y + \sqrt{5}\,z = 0$.

Вектор $\vec{n} = (4;\ -2;\ \sqrt{5})$ перпендикулярен плоскости BDM. Косинус угла φ между этим вектором и осью x равен его первой координате, деленной на его длину, то есть

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{16+4+5}} = \frac{4}{5}.$$

Угол между осью x и плоскостью BDM равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, поэтому

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{3}{5}.$$

Длина искомой проекции есть $A'B'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$.

Ответ: 3.

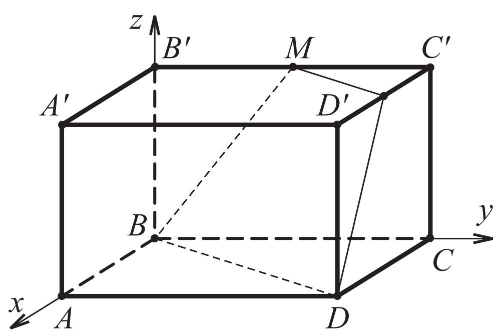

Рис. **154**

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\sqrt{17}-5}{4}$. **2.** 21. **3.** $\frac{21}{5}$. *Указание.* Примените теорему синусов к треугольникам ABD и BDC. **4.** $\left(-2,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$. **5.** $\frac{3}{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат.

Вариант 3. **1.** $\frac{6\sqrt{2}-7}{4}$. **2.** 45. **3.** $\frac{35}{3}$. *Указание.* Примените теорему синусов к треугольникам ABC и ADC. **4.** $(-\infty,\ -1-\sqrt{6}) \cup \cup [4+2\sqrt{2},\ \infty)$. **5.** $\sqrt{362}/7$. *Указание.* Воспользуйтесь координатным методом.

Вариант 4. **1.** $2-\sqrt{5}$. **2.** 16. **3.** $\frac{18}{7}$. *Указание.* Примените теорему синусов к треугольникам ABE и BCE. **4.** $\left[\frac{9-\sqrt{89}}{4},\ 2-\sqrt{3}\right) \cup \cup \left(2+\sqrt{3},\ \frac{9+\sqrt{89}}{4}\right]$. **5.** $\frac{7}{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь координатным методом, выбрав в качестве начала координат точку C и направив оси вдоль ребер параллелепипеда.

1994

Решение варианта 1

1. Воспользуемся формулой $\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$ и приведем уравнение к виду $2\sin^2 2x + 2\sin 2x = 1$. Полагая $y = \sin 2x$, получим $2y^2+2y-1=0$, $y_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Число y_1 меньше -1 и значением $\sin 2x$ быть не может. Поэтому $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi k}{2}\quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b$, $(x_1-x_2)+(x_1+x_2) = = 2x_1 = b$, $(x_1-x_2)(x_1+x_2) = x_1^2 - x_2^2 = a^2$. Значит, $x_1x_2 = 2x_1$ и либо $x_1 = 0$, либо $x_2 = 2$.

В случае $x_1 = 0$ имеем $b = 0$, $a^2 = -x_2^2$. Так как $a^2 \geqslant 0$, $-x_2^2 \leqslant 0$, то равенство $a^2 = -x_2^2$ возможно только при $a = 0$.

Если $x_2 = 2$, то $x_1 + 2 = -a$, $x_1^2 - 4 = a^2$. Отсюда $x_1^2 - 4 = x_1^2 + 4x_1 + 4$, $4x_1 = -8$, $x_1 = -2$. Поэтому $a = 0$, $b = -4$.

Ответ: $a = 0$, $b = 0$ или $a = 0$, $b = -4$.

3. Продолжим AK до пересечения с лучом BC в некоторой точке M (рис. 155). Треугольники AKD и CMK равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Значит, $MC = AD = BC$ и $BM = 2AD$.

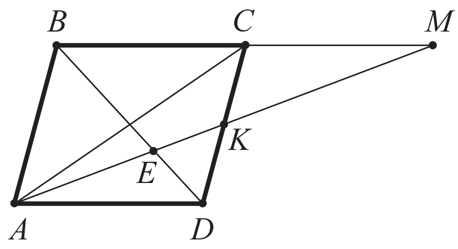

Рис. **155**

Треугольники BME и ADE подобны (по двум углам), причем коэффициент подобия равен 2. Следовательно, высота треугольника ADE, опущенная из точки E, в два раза короче высоты треугольника BME, проведенной из той же точки. В сумме эти высоты составляют высоту h параллелограмма. Таким образом, $h = \frac{3}{2}$, $AC = h/\sin\angle CAD = h/\sin 30^\circ = 3$.

Ответ: 3.

4. Пусть сначала $0 < |x-1| < 1$, то есть $x \in (0,\,1) \cup (1,\,2)$. В данном случае большему показателю степени отвечает меньшая степень и исходное неравенство превращается в $x+1 < 2\sqrt{x+2}$. Так как $x+1 > 0$, то полученное неравенство можно возвести в квадрат. В итоге находим $x^2+2x+1 < 4x+8$, $x \in (1-2\sqrt{2},\,1+2\sqrt{2})$. Учитывая ограничение на область изменения переменной x, заключаем, что $x \in (0,\,1)\cup(1,\,2)$.

Пусть теперь $|x-1| > 1$, то есть $x \in (-\infty,\,0)\cup(2,\,\infty)$. В этом случае исходное неравенство равносильно $2\sqrt{x+2} < x+1$. Значения $x < -1$ заведомо не удовлетворяют полученному неравенству, так как они либо не попадают в область определения корня $\sqrt{x+2}$, либо $x+1$ будет отрицательно, а $\sqrt{x+2}$ — нет. Если же $x \geqslant -1$, то неравенство $2\sqrt{x+2} < x+1$ можно опять возвести в квадрат и получить $x \in (-\infty,\,1-2\sqrt{2})\cup(1+2\sqrt{2},\,\infty)$. Учитывая ограничения на область изменения x, приходим к заключению $x \in (1+2\sqrt{2},\,\infty)$.

Ответ: $(0,\,1)\cup(1,\,2)\cup(1+2\sqrt{2},\,\infty)$.

5. Положим $BM = x$ и обозначим через P и Q соответственно проекции точек D и M на прямую AC (рис. 156). Понятно, что P — середина AC, поэтому PQ будет проекцией не только отрезка DM, но и отрезка BM. Следовательно, $PQ = BM\cdot\cos\angle BAC = \frac{1}{2}\,x$.

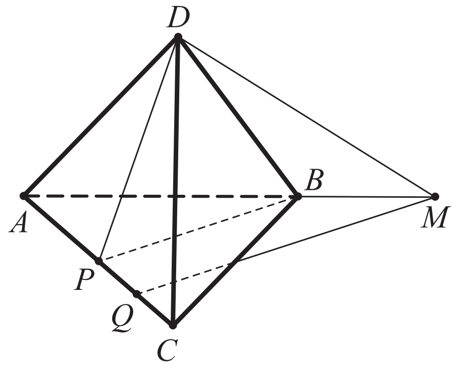

Рис. **156**

С другой стороны, PQ равняется произведению DM и косинуса угла между прямыми DM и AC, то есть $PQ = \frac{1}{4}\,DM$. Величину DM найдем из треугольника AMD по теореме косинусов: $DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD \cdot AM \cdot \cos\angle ADM = x^2 + x + 1$. Приравнивая найденные выражения для PQ, приходим к уравнению

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + x + 1},$$

откуда $3x^2 - x - 1 = 0$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Геометрическому смыслу задачи отвечает только положительный корень.

Ответ: $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** πk; $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{6} - 2}{2} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $a = 0$, $b = 0$ или $a = 2$, $b = 1$. **3.** 6. *Указание.* Пусть M — точка пересечения прямых AK и BC. Из подобия треугольников ADE и BME вытекает, что высота параллелограмма в полтора раза больше высоты треугольника BME. **4.** $[-3,\, -2) \cup (3 - 2\sqrt{5},\, -1) \cup (-1,\, 0)$. **5.** $\dfrac{1 + \sqrt{6}}{2}$. *Указание.* Пусть φ — угол между прямыми SM и CD, P — середина CD. Тогда отрезок DP — проекция SM на прямую CD, откуда $SM = DP/\cos\varphi = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$. Теперь AM легко найти по теореме косинусов из треугольника ASM.

Вариант 3. **1.** $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** $a = 1$, $b = -1$. **3.** $2\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть M — точка пересечения прямых AK и BC. Из подобия треугольников BME и ADE следует, что высота параллелограмма в полтора раза больше искомого расстояния. **4.** $(1,\, 2) \cup (2,\, 3) \cup (5 + 2\sqrt{5},\, \infty)$. **5.** $\dfrac{\sqrt{33} - 1}{16}$. *Указание.* Пусть $BM = x$; P и Q — проекции точек M и D на прямую AC. Понятно, что $PQ = \frac{x}{2}$. С другой стороны, $PQ = \frac{1}{6}\,DM$. Выразив DM по теореме косинусов из треугольника ADM, получим уравнение для x.

Вариант 4. **1.** πk; $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $a = 6$, $b = 5$. **3.** 60° и 120°. *Указание.* Пусть M — точка пересечения прямых AK и BC. Используя подобие треугольников ADE и BME, покажите, что высота параллелограмма в полтора раза больше высоты треугольника BME. **4.** $[-4,\, -3) \cup \left(\frac{5}{2} - \sqrt{22},\, -2\right) \cup (-2,\, -1)$. **5.** $\frac{5+\sqrt{6}}{10}$ или $\frac{5-\sqrt{6}}{10}$. *Указание.* Пусть φ — угол между прямыми SM и AB, P — середина AB, тогда отрезок AP будет проекцией SM на прямую AB, откуда $SM = AB/\cos\varphi = \frac{1}{2} : \frac{5}{9} = \frac{9}{10}$. Теперь AM нетрудно найти по теореме косинусов из треугольника ASM.

1995

Решение варианта 1.1

1. Используя преобразование $2\sin 2x \cdot \sin 4x = \cos 2x - \cos 6x$, приведем исходное уравнение к виду $\cos 2x - \sin 3x = 0$. Заменяя $\sin 3x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, последовательно получаем

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0, \quad 2\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0,$$
$$\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \quad (k \in \mathbb{Z});$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \quad \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

2. Допустим, что Буратино положил в «Обирон» x золотых, а папа Карло — в «Вампириал» y золотых. Тогда их совместный капитал составляет $x + y$. Первоначально они предполагали получить $6\,(x+y) = \Phi$ золотых. Фактически папа Карло получил $3y/2 = \Phi/6$. Отсюда $y = \Phi/9$, $x + y = \Phi/6$, $x = \Phi/6 - \Phi/9 = \Phi/18$. Буратино получил в три раза меньше папы Карло, то есть $\frac{1}{6}\Phi : 3 = \Phi/18$. Таким образом, прибыль Буратино составила $\Phi/18 - x = \Phi/18 - \Phi/18 = 0$ золотых.

Ответ: 0%.

3. Приведем исходное уравнение к виду $2^{x(x-1)-2} = 3^{2(x-2)}$. Логарифмируя по основанию 2, получаем $x(x-1)-2 = 2(x-2)\log_2 3$, или $(x+1)(x-2) = 2(x-2)\log_2 3$. Следовательно, имеются две возможности: либо $x = 2$, либо $x+1 = 2\log_2 3$ и $x = \log_2 9 - 1$.

Ответ: $2,\ \log_2 9 - 1$.

4. Пусть M — середина основания AD данного ромба, MN и BP перпендикулярны AD (рис. 157). Положим $AB = AD = 2x$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $AP = 2x\cos\alpha$, $AM = MD = x$, $BN = AM - AP = x - 2x \times \cos\alpha$, $NC = BC - BN = x + 2x\cos\alpha$, $BP = 2x\sin\alpha$. По условию задачи имеем

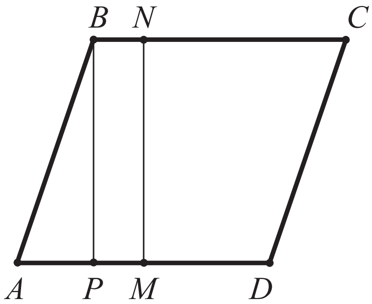

Рис. **157**

$$S_{ABNM} = \frac{1}{2}BP\cdot(AM+BN) = 2x^2(1-\cos\alpha)\sin\alpha = 12,$$

$$S_{CDMN} = \frac{1}{2}BP\cdot(DM+CN) = 2x^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha = 27.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $27 - 27\cos\alpha = 12 + 12\cos\alpha$. Откуда $\cos\alpha = 5/13$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 12/13$, $x^2 = 6/[(1-\cos\alpha)\sin\alpha] = 169/16$, $x = 13/4$.

Ответ: $\frac{13}{2}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** 6 минут. **3.** 1; $2 - \log_4 25$. **4.** $20\sqrt{2/3}$.

Вариант 1.3. **1.** $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** В 14 часов. **3.** 3; $\log_5 3 - 1$. **4.** $8\sqrt{5}$.

Вариант 1.4 **1.** $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **2.** 6 часов. **3.** 1; $3 - \log_4 9$. **4.** $10\sqrt{3}$.

Решение варианта 2.1

1. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{10-x} = \sqrt[3]{3-x}+1$ и возведем в куб обе его части. Получим равносильное уравнение

$$10 - x = 3 - x + 3\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{3-x} + 1.$$

Полагая $y = \sqrt[3]{3-x}$, находим $y^2 + y - 2 = 0$, $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Следовательно, $\sqrt[3]{3-x_1} = -2$, $x_1 = 11$ и $\sqrt[3]{3-x_2} = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: 11; 2.

2. Через t минут в резервуаре окажется $100 + 20t + 10t = 100 + 30t$ кг раствора. При этом соли в нем будет $0{,}15 \cdot 100 + 0{,}05 \cdot 20t + 0{,}15 \cdot 10t = 15 + 2{,}5\,t$ кг. По условию задачи $0{,}1 \cdot (100 + 30t) = 15 + 2{,}5\,t$. Отсюда $10 + 3t = 15 + 2{,}5\,t$, $0{,}5\,t = 5$, $t = 10$.

Ответ: 10 минут.

3. При условии $\cos x \neq 0$ исходное уравнение равносильно следующему: $1 + \sin x = \cos^2 x - \sin x \cos x$, или $\sin^2 x + \sin x + \sin x \cos x = 0$. Далее имеются две возможности: либо $\sin x = 0$ и $x = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, либо $\sin x + \cos x = -1$. В последнем случае

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4},$$
$$x = -\frac{\pi}{4} - (-1)^m\frac{\pi}{4} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Если $m = 2n$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и условие $\cos x \neq 0$ нарушается. Если же $m = 2n + 1$, то $x = \pi(2n+1)$ и данная серия содержится среди уже найденных корней $x = \pi k$.

Ответ: πk $(k \in \mathbb{Z})$.

4. Так как прямоугольные треугольники ACH и BCK имеют общий острый угол C, то два других острых угла $\angle OAC$ и $\angle OBC$ этих треугольников равны друг другу (рис. 158). Положим $\angle ABK = \angle CBK = \angle OAK = \alpha$. Тогда $BH = AH \operatorname{ctg} 2\alpha = OH \operatorname{ctg}\alpha$ или $4\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $2(2\cos^2\alpha - 1) = \cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 2/3$, $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1/3}$. Из треугольников ACH и ABK находим

$$AC = \frac{AH}{\cos\angle OAK} = \frac{4}{\cos\alpha} = 4\sqrt{3/2};$$
$$BK = AK \operatorname{ctg}\angle ABK = \frac{AC}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{3};$$

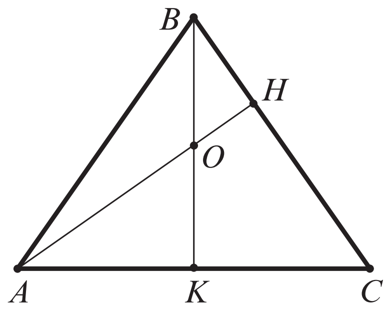

Рис. **158**

$$S_{ABC} = AK \cdot BK = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3/2} = 6\sqrt{2}.$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** -17; 18. **2.** 20 месяцев. **3.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **4.** $10\sqrt{5}$.

Вариант 2.3. **1.** -77; 75. **2.** 10 часов. **3.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). **4.** $5\sqrt{60}/3$.

Вариант 2.4. **1.** -72; 80. **2.** 50 часов. **3.** πk ($k \in \mathbb{Z}$). **4.** $45\sqrt{5}/2$.

1996

Решение варианта 1.1

1. Применяя формулу синуса суммы, получаем $\sin 3x + \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. Если «свернуть» сумму синусов в произведение, то уравнение примет вид $(2\sin 2x - \sqrt{3})\cos x = 0$. Следовательно, либо $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), либо $\sin 2x = \sqrt{3}/2$ и $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

2. Запишем исходное неравенство в виде

$$3\sqrt{x^2 - 60x + 500} \geqslant 70 - 5x \qquad (1)$$

и рассмотрим два случая.

А. $70 - 5x < 0$, т. е. $x > 14$. В этом случае правая часть (1) отрицательна, и неравенство будет выполнено, когда подкоренное выражение больше или равно нулю. Решая стандартное квадратное неравенство $x^2 - 60x + 500 \geqslant 0$, находим $x \in (-\infty, 10] \cup [50, \infty)$. С учетом условия $x > 14$ заключаем, что $x \in [50, \infty)$.

Б. $70 - 5x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 14$. В данной ситуации обе части неравенства (1) неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$9(x^2 - 60x + 500) \geqslant (70 - 5x)^2. \qquad (2)$$

Заметим, что теперь условие $x^2 - 60x + 500 \geqslant 0$ в проверке не нуждается — оно автоматически выполняется для всех решений неравенства (2). Раскрывая скобки, приведем соотношение (2) к виду $16x^2 - 160x + 400 \leqslant 0$, или $16(x-5)^2 \leqslant 0$. Решением этого неравенства является единственное значение $x = 5$, которое удовлетворяет условию $x \leqslant 14$.

Ответ: $\{5\} \cup [\,50, \infty)$.

3. Пусть O — центр вписанной окружности, M, N и K — точки касания со сторонами AB, AC и BC соответственно (рис. 159). Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то $AM = AN$, $BM = BK$. Значит, $AB = AM + BM = AN + BK = AC + BC - CN - CK = AC + BC - 2\sqrt{OC^2 - ON^2} = AC + BC - 6\sqrt{5}$. Выражая площадь треугольника через его периметр и радиус вписанной окружности, находим $2S_{ABC} = ON \cdot (AB + BC + AC) = \sqrt{5}\,[\,2(AC + BC) - 6\sqrt{5}\,] = 60$. Отсюда $AC + BC = 9\sqrt{5}$.

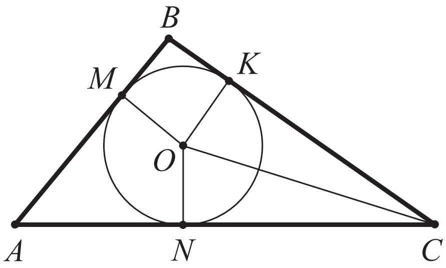

Рис. **159**

Ответ: $9\sqrt{5}$.

4. Заметим, что исходное уравнение определено при

$$6x + 5 > 0, \quad 6x + 5 \neq 1, \quad x \neq 0, \quad |x| \neq 1, \tag{3}$$

и приведем его к виду

$$\log_{6x+5} 10 \cdot \log_4 10 = (\log_4 10 - \log_{6x+5} 10) \log_{x^2} 100.$$

Переходя к логарифмам по основанию 10, получаем

$$\frac{1}{\lg(6x+5)\lg 4} = \left[\frac{1}{\lg 4} - \frac{1}{\lg(6x+5)}\right] \cdot \frac{2}{\lg x^2},$$

или $\lg|x| = \lg(6x+5) - \lg 4$. Обратим внимание, что здесь использовано тождество $\lg x^2 = 2\lg|x|$. «Потеря» модуля является ошибкой и может привести к потере корней.

Получившееся уравнение равносильно $4|x| = 6x + 5$. При $x \geqslant 0$ имеем $4x = 6x + 5$, откуда $x = -5/2$, что противоречит условию

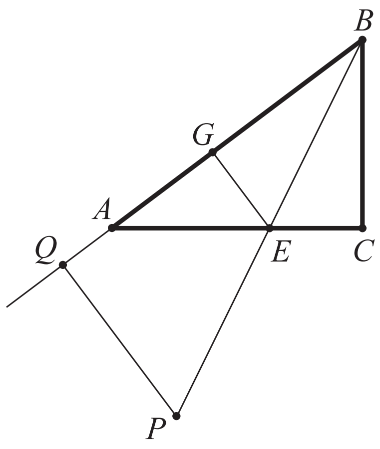

Рис. **160**

$x \geqslant 0$. Если же $x < 0$, то $-4x = 6x + 5$, $x = -1/2$, и условие $x < 0$ выполняется. Неравенства (3) также справедливы при $x = -1/2$.

Ответ: $x = -1/2$.

5. Рассмотрим плоскость основания пирамиды (рис. 160). Нетрудно понять, что треугольник ABC — прямоугольный, так как $AB^2 = AC^2 + BC^2$. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем $AE : CE = AB : BC = 10 : 6$, откуда $AE = 5$, $CE = 3$. Опустим из точек P и E перпендикуляры PQ и EG на прямую AB. Треугольники BGE и BQP подобны, поэтому $PQ : EG = BP : BE = 2$. С другой стороны, прямоугольные треугольники BEC и BEG равны (по гипотенузе и острому углу). Значит, $PQ = 2EG = 2EC = 6$. Осталось заметить, что точка Q совпадает с основанием высоты грани ABD, опущенной из точки D. При этом по теореме Пифагора $DQ^2 = DP^2 + PQ^2 = 144 + 36 = 180$. Следовательно, $S_{DAB} = AB \times \times \frac{1}{2} DQ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{180} = 30\sqrt{5}$.

Ответ: $30\sqrt{5}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** πk; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty,\, 1\,] \cup \cup \{7\}$. **3.** 30. **4.** $-2/3$. **5.** $24\sqrt{26}$. *Указание.* Основание высоты грани SAB совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB.

Вариант 1.3. **1.** πk; $(-1)^{n}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty, -10\,] \cup \cup \{10\}$. **3.** 6. **4.** $-3/5$. **5.** $\sqrt{15}$. *Указание.* Основание высоты грани ACD совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AC.

Вариант 1.4. **1.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $\{-7\} \cup \cup [\,5,\, \infty)$. **3.** $3\sqrt{2}$. **4.** $-1/17$. **5.** $108\sqrt{26}/25$. *Указание.* Основание высоты грани BCD совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки Q на прямую BC.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x — число деревянных рублей, y — число корочек хлеба, z — число сольдо, закопанных на поле Чудес. По условию задачи

$$150x = 5 + z + 51y, \quad 0 < x \leqslant 30, \quad 0 \leqslant z \leqslant 3.$$

Так как 150 и 51 делятся на 3, то число $5+z$ также должно быть кратно 3. Среди целых чисел от 0 до 3 только $z = 1$ удовлетворяет этому условию. Выразим теперь y через x. Учитывая равенство $z = 1$, получим

$$y = \frac{150x-6}{51} = \frac{153x}{51} - \frac{3x+6}{51} = 3x - \frac{x+2}{17}.$$

Следовательно, $x+2$ должно делиться на 17, т. е. x равняется одному из чисел 15, 32, 49, … . Среди них только $x = 15$ удовлетворяет условию $x \leqslant 30$. Таким образом, $y = 3\cdot 15 - \frac{15+2}{17} = 45 - 1 = 44$.

Ответ: 44.

2. Возведем в квадрат исходное уравнение:

$$\sqrt{2}\sin x + (\sqrt{6}-2)\cos x = 4\sin^2\tfrac{x}{2}. \qquad (1)$$

Всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\sin\tfrac{x}{2} \geqslant 0, \qquad (2)$$

будет решением исходной задачи, и наоборот. Заметим также, что для всех корней уравнения (1) автоматически выполнено неравенство $\sqrt{2}\sin x + (\sqrt{6}-2)\cos x \geqslant 0$, проверка которого становится излишней.

Воспользуемся формулой $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$ и преобразуем (1) следующим образом:

$$\sqrt{2}\sin x + \sqrt{6}\cos x = 2, \quad \text{или} \quad \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\sin\bigl(x + \frac{\pi}{3}\bigr) = 1/\sqrt{2}$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Проверим условие (2) отдельно для четных и нечетных k. В случае $k = 2l$ имеем $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi l$, $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{24} + \pi l$. Условие (2) выполняется только для $l = 2n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$. При $k = 2l+1$ получаем

$x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi l$, $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{24} + \pi l$, и условие (2) выполняется для $l = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\frac{23\pi}{12} + 4\pi n$; $\frac{5\pi}{12} + 4\pi m$ (n, $m \in \mathbb{Z}$).

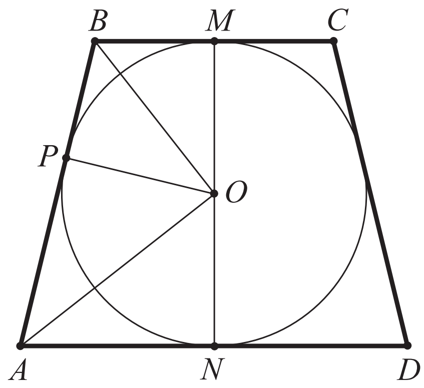

Рис. **161**

3. Пусть M, N, P — точки касания окружности со сторонами BC, AD и AB соответственно (рис. 161). Понятно, что M — середина BC, а N — середина AD. Найдем положение точки P.

Центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис внутренних углов трапеции, поэтому $\angle OAB + \angle ABO = \frac{1}{2}(\angle NAB + \angle ABM) = 90°$. Значит, треугольник ABO — прямоугольный, а OP — его высота. По теореме Пифагора $AP^2 = AO^2 - OP^2 = 8$. Согласно свойству высоты прямоугольного треугольника $BP = OP^2/AP = 1/\sqrt{8}$.

Осталось заметить, что MN — высота трапеции, а полусумма оснований равна $AN + BM = AP + BP = \sqrt{8} + 1/\sqrt{8}$. Таким образом, $S_{ABCD} = MN \cdot (AN + BN) = 2(\sqrt{8} + 1/\sqrt{8}) = 9\sqrt{2}/2$.

Ответ: $9\sqrt{2}/2$.

4. Сначала найдем множество допустимых значений аргумента. Так как подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а знаменатель дроби — отличным от нуля, то

$$(2x+2)(x^2-3x+2) \equiv 2(x+1)(x-1)(x-2) \geqslant 0, \quad x \neq 2,$$

откуда $x \in [-1, 1] \cup (2, \infty)$. Теперь рассмотрим два случая.

А. $x \in [-1, 1]$. Домножая неравенство на отрицательное число $x - 2$, получаем

$$\sqrt{2(x+1)(x-1)(x-2)} \leqslant 2(x-1)(x-2).$$

Обе части этого неравенства в рассматриваемом промежутке неотрицательны, поэтому его можно возвести в квадрат

$$2(x+1)(x-1)(x-2) \leqslant 4(x-1)^2(x-2)^2.$$

Число $x = 1$ этому неравенству удовлетворяет. Если же $x < 1$, то множитель $(x-1)(x-2)$ положителен. Сократив его, придем к стандартному квадратному неравенству $2(x+1) \leqslant 4(x-1)(x-2)$, откуда с учетом условия $-1 \leqslant x < 1$ находим $x \in [-1,\ 1/2\,]$. Итак, множеством решений для случая «А» является $[-1,\ 1/2\,] \cup \{1\}$.

Б. $x > 2$. В данном случае знаменатель $x - 2$ положителен, поэтому

$$\sqrt{2(x+1)(x-1)(x-2)} \geqslant 2(x-1)(x-2).$$

В области $x > 2$ обе части неотрицательны. Возводя их в квадрат и повторяя рассуждения пункта «А», получаем $2(x+1) \geqslant 4(x-1)\times$ $\times(x-2)$, или $1/2 \leqslant x \leqslant 3$. Учитывая ограничение $x > 2$, заключаем, что $x \in (2,\ 3\,]$.

Ответ: $[-1,\ 1/2\,] \cup \{1\} \cup (2,\ 3\,]$.

5. Пусть O — центр сферы, а Q — точка пересечения диагоналей ромба (рис. 162). Сечение сферы плоскостью основания $ABCD$ есть окружность, вписанная в ромб. Прямая, соединяющая центры сферы и окружности, перпендикулярна секущей плоскости. Точка Q совпадает с центром окружности, поэтому $OQ \perp ABCD$. Высота SH пирамиды также перпендикулярна плоскости $ABCD$, следовательно, OQ и SH параллельны.

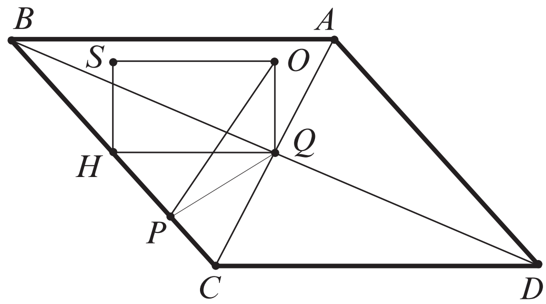

Рис. **162**

Радиус OS, проведенный в точку касания сферы с прямой SH, перпендикулярен этой прямой. Отрезок QH также перпендикулярен SH. Значит, $SOQH$ — прямоугольник, а радиус OS сферы равен QH.

Обозначим через P проекцию точки Q на прямую BC. По теореме о трех перпендикулярах $OP \perp BC$. Следовательно, OP — также радиус данной сферы. Таким образом, вычислив $QH = OP$ и QP, по теореме Пифагора найдем высоту пирамиды: $SH^2 = OQ^2 = OP^2 -$ $- QP^2 = QH^2 - QP^2$. Отрезки QH и QP легко находятся как элементы прямоугольного треугольника BQC с катетами $BQ = 4$, $CQ = 3$. Имеем: $QH = \frac{1}{2}\,BC = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2} = \frac{5}{2}$, $QP = BQ \cdot CQ/BC = \frac{12}{5}$. Окончательно заключаем $SH^2 = (5/2)^2 - (12/5)^2 = 49/100$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\,AC \cdot BD = 24$, $V_{SABCD} = \frac{1}{3}\,SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} \cdot 24 = \frac{28}{5}$.

Ответ: $\frac{28}{5}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 18 и 16. **2.** $\frac{7\pi}{12} + 4\pi n$; $\frac{\pi}{12} + 4\pi m$ $(m,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** 6. **4.** $[-1,\, 1) \cup \{3\} \cup [\,4,\, 7\,]$. **5.** $9\sqrt{15}/8$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Покажите, что $AQOD$ — прямоугольник.

Вариант 2.3. **1.** 65. **2.** $\frac{11\pi}{12} + 4\pi n$; $\frac{5\pi}{12} + 4\pi m$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $2\sqrt{15}$. **4.** $[-7,\, -5) \cup \{-3\} \cup [-2,\, 1\,]$. **5.** $8\sqrt{15}$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Покажите, что $ODCQ$ — прямоугольник.

Вариант 2.4. **1.** 34. **2.** $\frac{13\pi}{12} + 4\pi n$; $\frac{7\pi}{12} + 4\pi m$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $4\sqrt{5}$. **4.** $[\,1,\, 5/2\,] \cup \{3\} \cup (4,\, 5\,]$. **5.** $72/5$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, а Q — центр ромба. Покажите, что $OSHQ$ — прямоугольник.

1997

Решение варианта 1.1

1. Пусть у Ниф-Нифа x золотых, тогда домик стоит $x + 19$ золотых, у Нуф-Нуфа $x + 10$, а у Наф-Нафа $2x + 10$ золотых. Общее количество денег у поросят равно $4x + 20$. Они смогут купить домик, если выполняется неравенство $4x + 20 \geqslant x + 19$, т. е. $3x + 1 \geqslant 0$. Так как по смыслу задачи $x \geqslant 0$, то неравенство действительно выполняется.

Ответ: Смогут.

2. Левая и правая части уравнения определены, если выполняются неравенства

$$\frac{-2x-1}{x+2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{4x+1} > 0.$$

Решением первого будет интервал $(-2,\ -1/2)$, второго — множество $(-\infty,\ -1/4) \cup (2,\ \infty)$. Их общая часть совпадает с первым интервалом $(-2,\ -1/2)$.

Переходя в правой части к логарифму по основанию 2, получим

$$2\log_2\left(\frac{-2x-1}{x+2}\right) = \log_2\left(\frac{4x+1}{x-2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{4x+1}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и раскрывая скобки, приходим к квадратному уравнению $7x^2+9x+2=0$, корнями которого являются числа $x_1=-1$, $x_2=-\frac{2}{7}$. Так как $x_2=-\frac{2}{7}>-\frac{1}{2}$, то области определения исходного уравнения принадлежит только x_1.

Ответ: -1.

3. Заметим, что треугольник ABM является равнобедренным, поскольку $\angle AMB = \angle MBC$ как внутренние накрест лежащие углы при секущей BM (рис. 163), в то время как $\angle ABM = \angle MBC$ по условию. Следовательно, $AM = AB = 12$. Аналогичным образом, в треугольнике CDK $KD = CD = 12$. Пусть длина основания AD равна x. Тогда $BC = x$, $MK = x-24$. Из подобия треугольников PBC и PMK вытекает, что $MK : BC = PM : PB = \frac{1}{5}$, т. е. $x - 24 = \frac{1}{5}x$, $x = 30$.

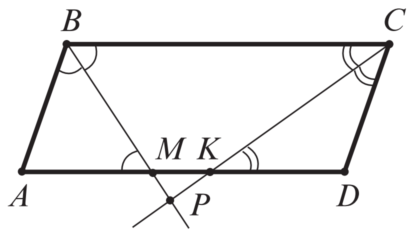

Рис. **163**

Ответ: 30.

4. Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0$. Заметим, что если $\cos x = 0$, то тогда $\sin 4x = 4\cos 2x \sin x \cos x = 0$. Следовательно, если $\sin 4x \neq 0$, то тем более $\cos x \neq 0$, и достаточно проверять только выполнение неравенства $\sin 4x \neq 0$.

Умножим уравнение на $\cos x \sin 4x$ и проделаем следующие элементарные преобразования: $\sin x \sin 4x + \cos x \cos 6x = 0$, $\cos 3x - \cos 5x + \cos 7x + \cos 5x = 0$, $\cos 3x + \cos 7x = 0$, $\cos 5x \cos 2x = 0$. Рассмотрим теперь два случая.

А. $\cos 2x = 0$, т. е. $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Для таких значений x

имеем $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 0$, поэтому ни один из корней найденной серии не входит в область определения исходного уравнения.

Б. $\cos 5x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Для проверки условия $\sin 4x \neq 0$ запишем n в виде $n = 5m + l$, где l — остаток от деления n на 5, который может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, а m — целое число. Если $x = \frac{\pi}{10} + \frac{(5m+l)\pi}{5}$, то $\sin 4x = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + 4\pi m + \frac{4l\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{(4l+2)\pi}{5}\right)$. Полагая последовательно $l = 0, 1, 2, 3, 4$, нетрудно проверить, что $\sin 4x = 0$ только при $l = 2$, а для остальных значений l условие $\sin 4x \neq 0$ выполняется.

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$ $(n \neq 5m + 2;\ n,\ m \in \mathbb{Z})$.

5. Введем систему координат, взяв в качестве ее начала точку A и направив оси x, y, z вдоль лучей AB, AD, AA' (рис. 164). Угол α между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AP}$ равен $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{3}$, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Из условия задачи находим $\overrightarrow{AD} = (0;\ 9;\ 0)$, $\overrightarrow{AA'} = (0;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{A'C} = (6;\ 9;\ -3)$. Пусть $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + x\cdot \overrightarrow{A'C} = (6x;\ 9x;\ 3 - 3x)$, тогда

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{36x^2 + 81x^2 + 9(1-x)^2} = 3\sqrt{14x^2 - 2x + 1}.$$

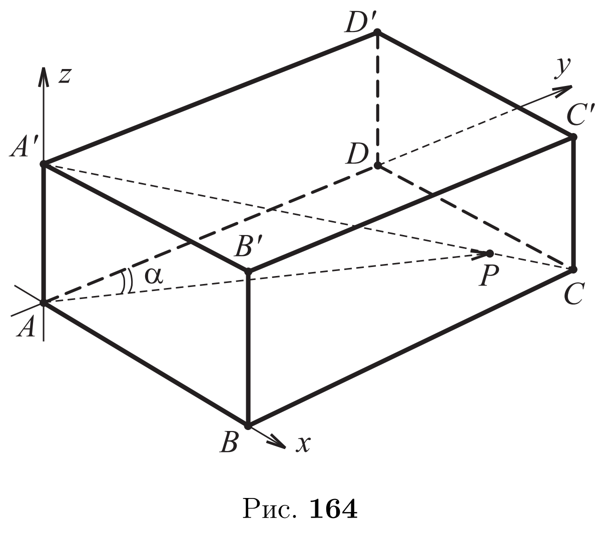

Рис. **164**

Замечая, что
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\,\overrightarrow{AD}\,|\cdot|\,\overrightarrow{AP}\,|},$$
приходим к уравнению для определения x:
$$\frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{81x}{27\sqrt{14x^2-2x+1}}, \quad \text{или} \quad \sqrt{14x^2-2x+1} = \sqrt{17}x. \qquad (1)$$
Возводя его в квадрат, получаем $3x^2+2x-1=0$, откуда $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$. Корень $x_2<0$, поэтому является посторонним для уравнения (1), а также не подходит по смыслу задачи, поскольку по условию точка P лежит на диагонали $A'C$ параллелепипеда, т. е. $x\in[0,\,1]$. Корень $x_1=\frac{1}{3}$ удовлетворяет всем условиям задачи, следовательно, $\overrightarrow{A'P}=\frac{1}{3}\ \overrightarrow{A'C}$, $\quad A'P:PC=1:2$.

Ответ: $1:2$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** Смогут. **2.** -4. **3.** 18. **4.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Другая возможная запись решений: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$ $(n\neq 3m+1;\ n,\ m\in\mathbb{Z})$. **5.** $2:1$.

Вариант 1.3. **1.** Не хватит. **2.** -2. **3.** 15. **4.** $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Другая возможная запись решений: $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9}$ $(n\neq 3m+1;\ n,\ m\in\mathbb{Z})$. **5.** $1:1$

Вариант 1.4. **1.** Смогут. **2.** 3. **3.** 32. **4.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. **5.** $1:3$.

Решение варианта 2.1

1. Обозначим через x число депутатов, а через y — число оставшихся взрослых жителей, и сведем все данные в таблицу:

	Полезен	Вреден	Не знают
x	60%	30%	10%
y	10%	20%	70%
$x+y$	?	20,01%	?

Из столбца «Вреден» этой таблицы следует уравнение $0{,}3x+0{,}2y = 0{,}2001(x+y)$, откуда $0{,}0999x=0{,}0001y$, или $999x=y$. Искомый результат равен

$$100 \cdot \frac{0{,}6x + 0{,}1y}{x + y} = 100 \cdot \frac{0{,}6x + 99{,}9x}{1000x} = 10{,}05.$$

Ответ: 10,05%.

2. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$5\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0, \quad \sin 2x + 14\cos^2 x - 8 \neq 0. \qquad (1)$$

С помощью формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ первое соотношение системы (1) приводится к виду $10\cos^2 x + 2\cos x - 8 = 0$. Следовательно, либо $\cos x = -1$ и $x_1 = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), либо $\cos x = \frac{4}{5}$ и $x_2 = \pm \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Подставим найденные значения во второе соотношение системы (1). Для x_1 получаем $\sin 2x_1 = 0$, $\cos x_1 = -1$, $\sin 2x_1 + 14\cos^2 x_1 - 8 = 6 \neq 0$. Значит, x_1 — решение исходной задачи. При $x = x_2$ имеем $\cos x_2 = \frac{4}{5}$, $\sin x_2 = \pm\frac{3}{5}$, где знак совпадает со знаком при арккосинусе в выражении для x_2. Поэтому $\sin 2x_2 + 14\cos^2 x_2 - 8 = \pm\frac{24}{25} + \frac{24}{25}$ и корни со знаком минус нужно отбросить.

Ответ: $(2k+1)\pi$; $\arccos\frac{4}{5} + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

3. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACDB$ (рис. 165) и положим $AC = BC = BD = x$. Так как треугольники APH и BPD подобны (по двум углам), то $AH : BD = HP : BP = 1 : 5$, откуда $AH = \frac{x}{5}$, $CH = \frac{4x}{5}$. По теореме Пифагора из треугольника CBH находим $x^2 - (\frac{4}{5}x)^2 = BH^2 = 36$, т. е. $x = 10$, $AH = \frac{x}{5} = 2$. Значит, $AB^2 = BH^2 + AH^2 = 36 + 4 = 40$.

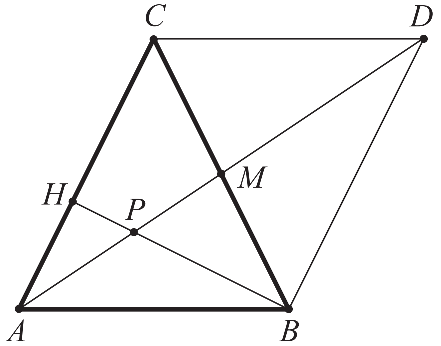

Рис. **165**

Ответ: $2\sqrt{10}$.

4. Основания логарифмов должны быть положительны и отличны от единицы, поэтому

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq \frac{\sqrt{37}}{7}. \qquad (2)$$

Перейдем теперь к логарифмам по основанию 7 и перепишем исходное

неравенство в виде
$$\frac{\log_7(x^2+12/49)-\log_7 x}{\log_7(x^2+12/49)\log_7 x} \leqslant 0. \tag{3}$$
Обозначим числитель и знаменатель дроби (3) через $f(x)$ и $g(x)$ соответственно и исследуем их знаки.

Неравенство $f(x) \geqslant 0$ эквивалентно системе $x^2+12/49 \geqslant x$, $x>0$, откуда $x \in (0,\ 3/7\,] \cup [\,4/7,\ \infty)$. Понятно, что решением противоположного неравенства $f(x) \leqslant 0$ будет отрезок $[\,3/7,\ 4/7\,]$.

Знаменатель $g(x)$ будет положительным, когда входящие в его состав логарифмы имеют одинаковые знаки, иными словами, когда либо $x^2+12/49>1$ и $x>1$, либо $x^2+12/49<1$ и $0<x<1$. Решая эти стандартные системы неравенств, получаем множество $(0,\ \sqrt{37}/7) \cup (1,\ \infty)$. Интервал $(\sqrt{37}/7,\ 1)$ будет множеством решений противоположного неравенства $g(x)<0$.

Неравенство (3) справедливо в случаях, когда
$$\text{либо}\quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \qquad \text{либо}\quad \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$
На основании проведенного выше исследования решением первой из этих систем является интервал $(\sqrt{37}/7,\ 1)$, а решением второй — отрезок $[\,3/7,\ 4/7\,]$. Условия (2) для каждого из найденных промежутков выполнены.

Ответ: $[\,3/7,\ 4/7\,] \cup (\sqrt{37}/7,\ 1)$.

5. Прямая LD — средняя линия треугольника SAB, поэтому $LD \parallel AB$. Но тогда LD параллельна плоскости ABC и, следовательно, прямой CM, так как эта прямая — линия пересечения плоскостей CLD и ABC (рис. 166).

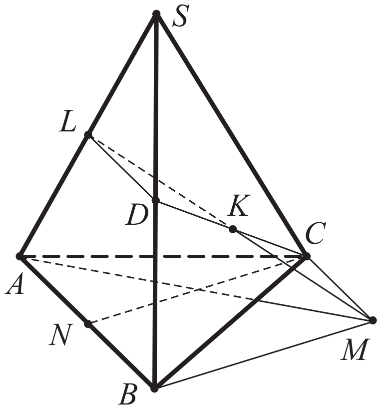

Рис. **166**

Из параллельности прямых LD, CM и равенства отрезков CK, DK вытекает равенство треугольников CKM и LDK. Значит, $CM = LD = \frac{1}{2}AB = 1$. Понятно также, что $CM \parallel AB$.

Вычисление AM сводится теперь к планиметрической задаче. Пусть N — середина AB (см. рис. 166). Тогда $CMBN$ — прямоугольник. Следовательно, BM равно высоте CN треугольника ABC, т. е. $BM = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора из треугольника AMB находим $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 4 + 3 = 7$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 10%. **2.** $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; $2\pi n - \arcsin\frac{3}{5}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $6\sqrt{5}$. *Указание.* Достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ и воспользоваться подобием треугольников APH и BPD. **4.** $[1/3, 2/3] \cup (\sqrt{7}/3, 1)$. **5.** $\sqrt{7/3}$. *Указание.* Пусть N — середина AB. Из параллельности прямых $C'K$ и CN вытекает, что $BM \parallel CN$, а из равенства отрезков $C'L$ и BL следует равенство $BM = C'K\,(= CN)$.

Вариант 2.3. **1.** 79,5%. **2.** $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$; $\arcsin\frac{4}{5} + (2n+1)\pi$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $15\sqrt{2}$. *Указание.* Опустите перпендикуляр MQ на прямую AC и воспользуйтесь теоремой Фалеса. **4.** $[1/4, 3/4] \cup (\sqrt{13}/4, 1)$. **5.** $2\sqrt{7}$. *Указание.* Из параллельности прямых AB и KD следует, что $CM \parallel AB$, а из равенства отрезков CL и DL вытекает, что $CM = KD\,(= \frac{1}{2}AB)$.

Вариант 2.4. **1.** 25,6%. **2.** $(2k+1)\pi$; $2\pi n - \arccos\frac{3}{5}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $10\sqrt{2}$. *Указание.* Опустите перпендикуляр MK на прямую AC и воспользуйтесь теоремой Фалеса. **4.** $[2/5, 3/5] \cup (\sqrt{19}/5, 1)$. **5.** $\sqrt{10}$. *Указание.* Из параллельности прямых KE и AC вытекает, что $DM \parallel AC$, а из равенства $DL = EL$ следует равенство $DM = KE\,(= \frac{1}{2}AC)$.

1998

Решение варианта 1.1

1. Если x — абсцисса общей точки графиков двух данных функций, то значения этих функций должны быть равны: $x^2 - ax - a = (1+a)x^2 + 2x$, а x будет корнем уравнения $ax^2 + (a+2)x + a = 0$.

Графики не имеют общих точек, когда полученное уравнение не имеет корней. Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным. Оно не имеет корней в том и только том случае, когда его дискриминант отрицателен: $D = (a+2)^2 - 4a^2 = (2-a)(2+3a) < 0$. Отсюда $a > 2$ или $a < -\frac{2}{3}$. Отдельно следует проанализировать случай $a = 0$. Тогда получается линейное уравнение $2x = 0$, которое имеет корень $x = 0$. Следовательно, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right) \cup (2,\ \infty)$.

2. Левая часть первого уравнения системы определена только для x и y, удовлетворяющих условиям $x < 2$, $y > 0$. С учетом этих ограничений преобразуем первое уравнение: $\log_3(2-x) + \log_3 \frac{y}{2} = \log_3 \frac{(2-x)y}{2} = 2$, $(2-x)y = 18$. Второе уравнение приведем к виду $(2-x)^2 + y^2 = 45$. Выражая из первого уравнения $2 - x = \frac{18}{y}$ и подставляя во второе, получаем $\frac{324}{y^2} + y^2 = 45$, $y^4 - 45y^2 + 324 = 0$. Отсюда $y^2 = 36$ или $y^2 = 9$. Учитывая, что должно выполняться условие $y > 0$, находим соответственно два решения системы: $y_1 = 6$, $x_1 = 2 - \frac{18}{y_1} = -1$ и $y_2 = 3$, $x_2 = 2 - \frac{18}{y_2} = -4$.

Ответ: $(-1;\ 6)$, $(-4;\ 3)$.

3. Пусть O — центр заданной окружности. Тогда радиусы OA и OD перпендикулярны соответственно прямым AC и BC, CO — биссектриса угла ACD (рис. 167). Положим $AM = 5x$, тогда $BM = 4x$. По теореме о секущей и касательной $BD^2 = AB \cdot BM = 36x^2$, отсюда $BD = 6x$. Так как треугольник равнобедренный, то $BC = AB = AM + MB = 9x$, $DC = BC - BD = 3x$. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому $AC = DC = 3x$. Пусть $\angle BCA = \alpha$, BK — высота, опущенная из вершины B на основание AC. Тогда

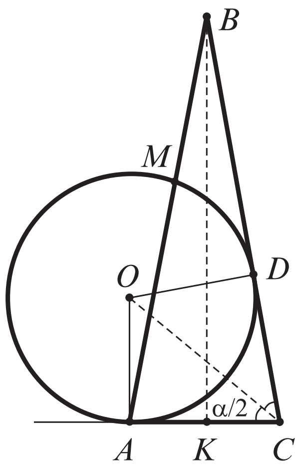

Рис. **167**

$$\cos\alpha = \frac{CK}{BC} = \frac{AC}{2BC} = \frac{3x}{2 \cdot 9x} = \frac{1}{6},$$
$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{5}{7}.$$

В прямоугольном треугольнике AOC: $AO = 2\sqrt{5}$, $AC = 3x$, $AO = AC \cdot \operatorname{tg} \angle ACO = AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $3x \cdot \sqrt{5/7} = 2\sqrt{5}$, $x = 2\sqrt{7}/3$. Периметр данного треугольника $P = AB + BC + AC = 21x = 14\sqrt{7}$.

Ответ: $14\sqrt{7}$.

4. Положим $y = 2^x$, тогда $2^{x+1} = 2y$ и данное уравнение запишется в виде $1 + 2\cos 2y = 3\cos y$. Заметим, что должно выполняться условие $y > 0$. Используя формулу $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$, преобразуем уравнение в квадратное $4\cos^2 y - 3\cos y - 1 = 0$ относительно $\cos y$. Возможны два случая.

А. $\cos y = 1$, тогда $y = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Условие $y > 0$ выполняется для чисел $k \geqslant 1$. Подставляя $2^x = y$, находим $x = \log_2(2k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1)$.

Б. $\cos y = -\frac{1}{4}$, т. е. $y = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Заметим, что $\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) < \pi$, поэтому условие $y > 0$ выполняется для каждого из корней при всех целых $n \geqslant 1$, а также при $n = 0$ для корня $y = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. Логарифмируя, находим соответствующие значения x.

Ответ: $\log_2 \arccos\left(-1/4\right)$; $\log_2\left(\pm\arccos\left(-1/4\right) + 2n\pi\right)$; $\log_2(2k\pi)$ $(k,\ n \in \mathbb{Z};\ k,\ n \geqslant 1)$.

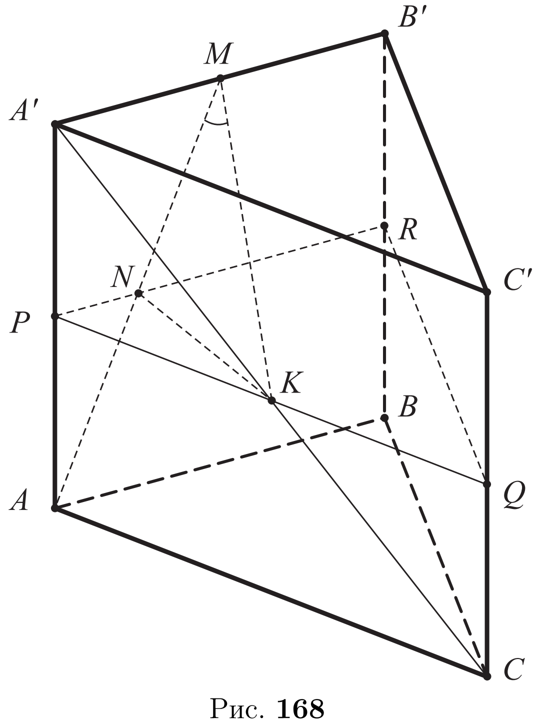

Рис. **168**

5. Проведем через точку K сечение плоскостью, параллельной плоскости основания ABC. В сечении получится правильный треугольник PQR (рис. 168), причем точки P, Q и R — середины ребер AA', CC' и BB' соответственно.

Опустим из точки K перпендикуляр KN на плоскость $AA'B'B$. Так как плоскости

PQR и $AA'B'B$ перпендикулярны, то KN лежит в плоскости PQR, а точка N принадлежит отрезку PR. По условию, в прямоугольном треугольнике NKM: $\angle MNK = 45°$, $MK = 3$. Значит, $MN = KN = MK \cdot \sin 45° = 3/\sqrt{2}$. Учитывая, что K — середина отрезка PQ и $PK = NK/\sin 60° = \sqrt{6}$, получаем $AC = PQ = 2\sqrt{6}$.

Заметим, что

$$A'M = \frac{1}{2}A'B' = PK, \quad PN = PK \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{2}A'M.$$

Следовательно, прямая MN проходит через точку A. В прямоугольном треугольнике $AA'M$: $AM = 2MN = 3\sqrt{2}$, $A'M = \sqrt{6}$. Отсюда находим высоту призмы

$$AA' = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = \sqrt{18-6} = 2\sqrt{3}.$$

Площадь основания равняется $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, поэтому объем призмы $V = AA' \cdot S_{ABC} = 36$.

Ответ: 36.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$. **2.** $(7; -1)$, $(2; -6)$. **3.** 150. *Указание.* По теореме о касательной и секущей $CD^2 = AC \cdot MC$, откуда $CD = 5$. Положим $AB = x$ и заметим, что $BD = AB = x$. Используя теорему Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2$, придем к уравнению $x^2 + (5+x)^2 = 25^2$. **4.** $1 + \log_2\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z},\ k > 0)$; $1 + \log_2\left((-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + n\pi\right)$ $(n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0)$. **5.** $\frac{16}{3}\sqrt{42}$. *Указание.* Проекция точки M на плоскость ASB совпадает с основанием высоты треугольника, полученного в сечении пирамиды плоскостью, проведенной через точку M параллельно плоскости ABC.

Вариант 1.3. **1.** $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$. **2.** $(5; -3)$, $(4; -4)$. **3.** 6. *Указание.* Пусть $CM = 2x$, $AC = 5x$. По теореме о касательной и секущей $CD^2 = AC \cdot MC$, откуда $CD = x\sqrt{10}$. Отрезки AB и BD равны радиусу данной окружности. Используя теорему Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2$, приходим к уравнению $4 + \left(2 + x\sqrt{10}\right)^2 = 25x^2$. **4.** $\log_2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0)$; $\log_2\left((-1)^{n+1} \arcsin\frac{3}{4} + n\pi\right)$ $(n \in \mathbb{Z},$

$n > 0$). **5.** $\frac{8}{3}\sqrt{6}$. *Указание.* Проекция точки K на плоскость ASC совпадает с основанием высоты треугольника, полученного в сечении пирамиды плоскостью, проведенной через точку K параллельно плоскости ABC.

Вариант 1.4. **1.** $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **2.** $(0; 8)$, $(-7; 1)$. **3.** $\frac{2}{5}\sqrt{15}$. *Указание.* По теореме о касательной и секущей $BD^2 = AB \cdot MB$, откуда $BD = 2$, $AC = CD = BC - BD = 2$. Теперь искомый радиус легко вычисляется. **4.** $1 + \log_2(2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$); $1 + \log_2\left(\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2n\pi\right)$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$) и $1 + \log_2 \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. **5.** $8\sqrt{6}$. *Указание.* Проекция точки K на плоскость $AA'B'B$ совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из K на прямую $A'B'$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x — количество старых, y — количество новых сольдо, заработанных папой Карло, z — сумма, вырученная им в предыдущий день и выраженная в старых сольдо. Если коэффициент k показывает, сколько стоит новый сольдо по отношению к старому, то по условию задачи $5(x+y) = z$ и $k(x+y) = 200z$. Выражая $(x+y)$ через z из первого уравнения, подставляя во второе и сокращая на z ($z > 0$ по смыслу задачи), легко находим, что $k = 1000$.

Ответ: 1000.

2. Левая и правая части уравнения определены, если $|x - 3| > 0$ и $x^2 - 3x > 0$. Указанные ограничения выполняются в области $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$, где исходное уравнение эквивалентно $|x - 3| = 5x(x - 3)$. Далее возможны два случая.

А. Пусть $x \in (3, \infty)$, тогда $|x-3| = x-3$ и уравнение принимает вид $(x - 3) = 5x(x - 3)$. Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{5}$. Оба найденных корня не удовлетворяют условию $x > 3$ и являются посторонними.

Б. Пусть $x \in (-\infty, 0)$, тогда $|x - 3| = 3 - x$ и мы приходим к уравнению $(3 - x) = 5x(x - 3)$. Его корень $x_1 = 3$ — посторонний, а корень $x_2 = -\frac{1}{5}$ удовлетворяет условию $x < 0$.

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

3. Острые углы BAK и CDK прямоугольных треугольников ABK и CDK равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу BC (рис. 169) данной окружности. Следовательно, указанные треугольники подобны и $BK : AK = KC : KD$.

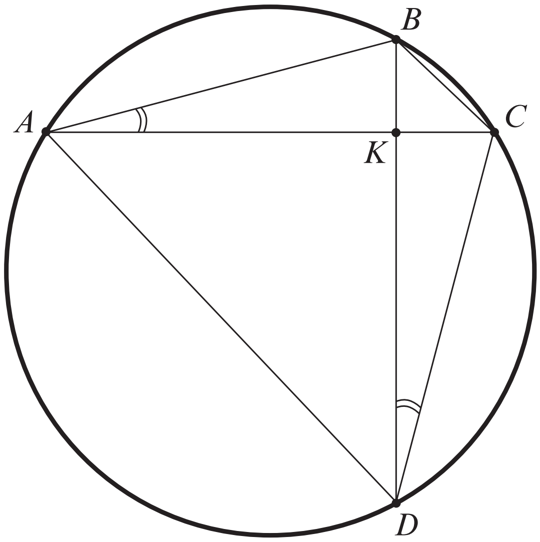

Рис. **169**

Пусть $KC = x$, $KD = y$. Тогда по теореме Пифагора $KC^2+KD^2 = CD^2$, т. е. $x^2 + y^2 = 500$. В то же время из подобия получаем

$$x = \frac{BK}{AK} \cdot y = \frac{2}{11} \cdot y.$$

Отсюда $KC = x = 4$, $KD = y = 22$. Применяя теперь теорему Пифагора к каждому из прямоугольных треугольников ABK, BCK и ADK, находим их гипотенузы $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 5\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = 2\sqrt{5}$, $AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = 11\sqrt{5}$. Значит, периметр четырехугольника $ABCD$ равен $AB + BC + CD + AD = 28\sqrt{5}$.

Ответ: $28\sqrt{5}$.

4. Левая часть уравнения определена при условии $\sin x \neq 0$. Умножая обе части на $\sin x$ и преобразуя разность $\sin 5x - \sin x$ в произведение $2\sin 2x \cos 3x$, приведем уравнение к виду $\sin 2x = 2\sin 2x \cos 3x$, или $\sin 2x(2\cos 3x - 1) = 0$. Отсюда

$$\sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos 3x - 1 = 0.$$

В первом случае $x = \frac{m\pi}{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$. Но для четных значений $m = 2k$ получается $\sin x = \sin \pi k = 0$, поэтому исходному уравнению удовлетворяют только те корни, которые соответствуют нечетным $m = 2k + 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Во втором случае $\cos 3x = \frac{1}{2}$, $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Условие $\sin x \neq 0$ выполняется для всех корней этой серии.

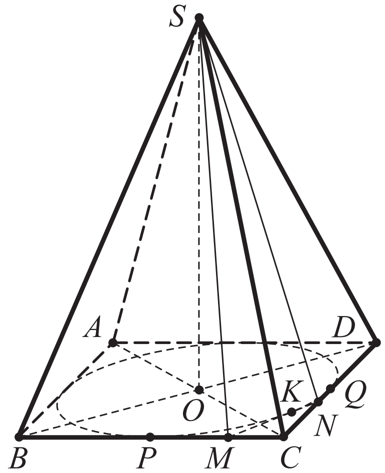

Рис. **170**

Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

5. Пусть O — центр вписанной в квадрат окружности. Обозначим через P и Q точки ее касания со сторонами BC и CD соответственно, через K — точку касания окружности с прямой MN (рис. 170).

Очевидно, что P и Q — середины сторон BC и CD. Так как пирамида правильная, то SO — ее высота. В прямоугольном треугольнике BSO: $BS = \sqrt{10}$, $BO = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$, поэтому $SO^2 = BS^2 - BO^2 = 8$.

Чтобы найти искомый объем пирамиды $SMNC$, зная ее высоту SO, достаточно найти площадь основания MNC. Пусть $MC = x$, $NC = y$. Учитывая, что треугольник MNC прямоугольный, и используя теорему Пифагора, получаем первое уравнение для определения x и y: $x^2 + y^2 = MN^2 = \frac{25}{36}$.

Заметим, что $PM = MK$ как отрезки касательных, проведенных к окружности O из точки M. Аналогично, $NK = NQ$. Отсюда следует, что $MK = PM = CP - CM = 1 - x$, $NK = NQ = CQ - CN = 1 - y$. С учетом равенства $MN = MK + KN$ получаем второе уравнение для определения x и y: $(1 - x) + (1 - y) = \frac{5}{6}$, или $x + y = \frac{7}{6}$. Решая полученную систему, находим $CM = x = \frac{1}{2}$, $CN = y = \frac{2}{3}$ (или наоборот: $CM = \frac{2}{3}$, $CN = \frac{1}{2}$). Следовательно,

$$S_{MNC} = \frac{1}{2}\,CM \cdot CN = \frac{1}{6}, \quad V_{SMNC} = \frac{1}{3}\,SO \cdot S_{MNC} = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\sqrt{2}/9$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** В 2 раза. **2.** $-3/2$. **3.** 28. *Указание.* Можно найти CD из подобия треугольников ABK и CDK, а затем, по теореме

Пифагора, вычислить BK и CK. **4.** $\frac{k\pi}{2}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{3}4/3$. *Указание.* Пусть P, Q и K — точки касания окружности с прямыми AB, AC и MN соответственно. По теореме косинусов $AM^2+AN^2-AM\cdot AN=MN^2=49/100$. С другой стороны, $AM+AN=(AP-MP)+(AQ-NQ)=AP+AQ-(MP+NQ)=$ $=2-(MK+NK)=2-MN=13/10$. Получилась система уравнений относительно AM и AN.

Вариант 2.3. **1.** В 16 раз. **2.** $-1/4$. **3.** $28\sqrt{5}$. *Указание.* Можно найти AD из подобия треугольников ADK и BCK, а затем, по теореме Пифагора, вычислить AB и CD. **4.** $k\pi$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{n\pi}{3}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть P, Q и K — точки касания окружности с прямыми BC, CD и MN соответственно. По теореме Пифагора $CM^2+CN^2=MN^2=169/225$. С другой стороны, $CM+CN=(CP-MP)+(CQ-NQ)=CP+CQ-(MP+$ $+NQ)=2-(MK+NK)=2-MN=17/15$. Получилась система уравнений относительно CM и CN.

Вариант 2.4. **1.** В 1,8 раза. **2.** $-1/4$. **3.** 270. *Указание.* Можно найти DK из подобия треугольников ABK и CDK, а затем, по теореме Пифагора, вычислить BK и CK. **4.** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **5.** $\frac{2}{81}\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть P, Q и K — точки касания окружности с прямыми AB, AC и MN соответственно. По теореме косинусов $AM^2+AN^2-AM\cdot AN=MN^2=49/81$. С другой стороны, $AM+AN=(AP-MP)+(AQ-NQ)=AP+AQ-(MP+NQ)=$ $=2-(MK+NK)=2-MN=11/9$. Получилась система уравнений относительно AM и AN.

1999

Решение варианта 1.1

1. Все подкоренные выражения должны быть неотрицательны, значит, областью допустимых значений x в исходной задаче будет множество $[-1,\,3]$. Для таких x обе части неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат и приходим к равносильному неравенству $13-3x+2\sqrt{(10-2x)(3-x)}\leqslant 1+x$, а затем приводим его к виду $\sqrt{(10-2x)(3-x)} \leqslant 2x-6$. Правая часть не может быть отрицательной, поэтому $x \geqslant 3$. Сравнивая с найденным выше промежутком допустимых значений для x, получаем единственное возможное значение $x = 3$. Проверкой убеждаемся, что это действительно решение исходного неравенства.

Ответ: 3.

2. Заметим, что для всех значений x выполняется неравенство $11 - 4\sin x > 0$. Переписывая уравнение в виде

$$\sqrt{12}\cos x = -\sqrt{11-4\sin x},$$

делаем вывод, что для всех корней уравнения должно выполняться условие $\cos x < 0$, поскольку правая часть отрицательна. После возведения в квадрат получаем уравнение $12\cos^2 x = 11 - 4\sin x$. Подставляя $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем квадратное относительно $\sin x$ уравнение $12\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{6}$.

Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$. Условию $\cos x < 0$ в этой серии удовлетворяют только корни для нечетных значений $m = 2k+1$, т. е. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Если $\sin x = -\frac{1}{6}$, то $x = (-1)^{m+1} \arcsin\frac{1}{6} + m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$. Условие $\cos x < 0$ опять выполняется только для нечетных значений $m = 2n+1$. В этом случае $x = \arcsin\frac{1}{6} + (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\arcsin\frac{1}{6} + (2n+1)\pi$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$.

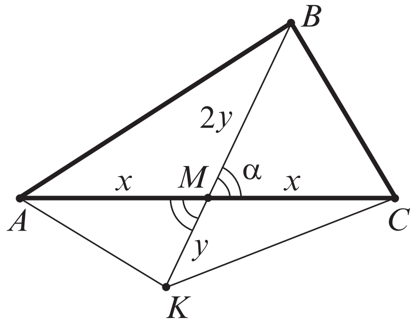

Рис. **171**

3. Пусть $AM = MC = x$, $MK = y$, $\angle BMC = \alpha$ (рис. 171). Тогда $BM = 2y$. Замечая, что $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$, воспользуемся теоремой косинусов для четырех треугольников AMB, BMC, CMK, AMK и запишем следующую систему равенств

$$\begin{aligned} AB^2 &= x^2 + 4y^2 + 4xy\cos\alpha, \\ BC^2 &= x^2 + 4y^2 - 4xy\cos\alpha, \\ CK^2 &= x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha, \end{aligned}$$

$$AK^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha.$$

Из первых двух соотношений следует, что $8xy\cos\alpha = AB^2 - BC^2 = 25 - 9 = 16$, отсюда $xy\cos\alpha = 2$. Из последних двух равенств получаем $CK^2 - AK^2 = 4xy\cos\alpha = 8$. Поэтому $AK^2 = CK^2 - 8 = 8$, $AK = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

4. Прямая $x + 2y = 3$ пересекает оси координат в точках $A(3;\,0)$ и $B\left(0;\,\frac{3}{2}\right)$. Луч, проходящий через начало координат и точку $(4;\,1)$, задается уравнением $4y = x$. Легко определить, что он пересекает заданную прямую в точке $Q\left(2;\,\frac{1}{2}\right)$. Пусть отраженный луч пересечет ось x в точке P. Опустим из точки Q перпендикуляр QR на ось y (рис. 172).

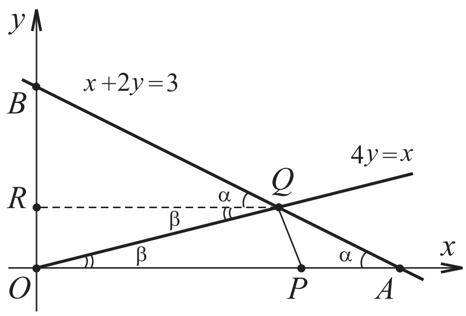

Рис. **172**

Пусть $\angle OAB = \alpha$, $\angle QOA = \beta$. Ясно, что тогда $\angle BQR = \alpha$, $\angle RQO = \beta$. Легко вычислить, что

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}},$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Заметим, что по закону отражения $\angle PQA = \angle OQB = \alpha + \beta$, тогда $\angle QPA = \pi - \alpha - (\alpha + \beta) = \pi - 2\alpha - \beta$. Отсюда

$$\sin\angle PQA = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{6}{\sqrt{85}},$$
$$\sin\angle QPA = \sin(\pi - (2\alpha + \beta)) = \sin(2\alpha + \beta) =$$
$$= \sin 2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\sin\beta = \frac{19}{5\sqrt{17}}.$$

По теореме синусов в треугольнике PQR имеем

$$\frac{AP}{\sin\angle PQA} = \frac{AQ}{\sin\angle QPA}.$$

Вычислив $AQ = \frac{\sqrt{5}}{2}$, находим

$$AP = \frac{AQ\sin\angle PQA}{\sin\angle QPA} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{85}} \cdot \frac{5\sqrt{17}}{19} = \frac{15}{19}.$$

Отсюда $OP = OA - OP = 3 - \frac{15}{19} = \frac{42}{19}$.

Ответ: $\left(\frac{42}{19}; 0\right)$.

5. Искомое расстояние совпадает с расстоянием от любой точки одной из данных в условии параллельных плоскостей до другой плоскости. Воспользуемся известной формулой для вычисления расстояния h от точки до плоскости, если заданы координаты $(x_0; y_0; z_0)$ точки и уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ в прямоугольной системе координат:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (1)$$

Выберем в качестве начала координат вершину B пирамиды и направим оси x и y вдоль лучей BA и BC, а ось z перпендикулярно плоскости основания (рис. 173). Опустим из вершины D высоту DO пирамиды на плоскость основания ABC. Так как боковые ребра DA, DB, DC имеют одинаковую длину, то прямоугольные треугольники DOA, DOB и DOC равны. Поэтому равны их катеты OA, OB и OC, т. е. O — центр описанной около прямоугольного треугольника ABC окружности. Отсюда следует, что O — середина гипотенузы AC. Вычислив длину гипотенузы $AC = 2\sqrt{33}$, находим высоту пирамиды

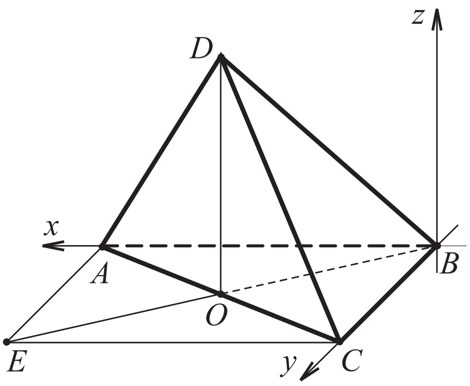

Рис. **173**

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \\ = \sqrt{49 - 33} = 4.$$

Рассмотрим также прямоугольник $ABCE$ в плоскости основания (рис. 173). Легко определяются координаты следующих точек: $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 6;\ 0)$, $D(2\sqrt{6};\ 3;\ 4)$, $E(4\sqrt{6};\ 6;\ 0)$. Так как прямая EC параллельна прямой AB, то плоскость CDE — одна из двух, заданных в условии, а другая проходит через прямую AB параллельно плоскости CDE. Найдем уравнение плоскости CDE. Для этого рассмотрим общее уравнение плоскости $ax+by+cz+d = 0$ и подставим в него координаты точек C, E и D. Получим систему уравнений для определения коэффициентов a, b, c и d:

$$6b + d = 0, \quad 4\sqrt{6}\,a + 6b + d = 0, \quad 2\sqrt{6}\,a + 3b + 4c + d = 0.$$

Из первого уравнения системы получаем $d = -6b$, из второго тогда следует, что $a = 0$, а из третьего уравнения находим $c = \frac{3}{4}\,b$. Так как коэффициенты уравнения плоскости определяются с точностью до общего множителя, полагаем $b = 4$, тогда $c = 3$, $d = -24$. Следовательно, уравнение плоскости CDE имеет вид: $4y + 3x - 24 = 0$. Расстояние h между параллельными плоскостями находим, вычисляя по формуле (1) расстояние от точки $B(0;\,0;\,0)$ до плоскости CDE:

$$h = \frac{|-24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{24}{5}.$$

Ответ: 24/5.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** 1. **2.** $\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$; $-\arcsin\frac{1}{3} + (2n+1)\pi$ ($k,\,n \in \mathbb{Z}$). **3.** $2\sqrt{6}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольников AMB, BMC, AMK и KMC. **4.** $\left(\frac{18}{11};\,0\right)$. **5.** $\frac{6}{7}$. *Указание.* Выберите прямоугольную систему координат. Естественно взять в качестве ее начала вершину A и направить две оси вдоль лучей AD и AC, а третью ось — параллельно лучу CB. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки C и D параллельно прямой AB. Искомое расстояние равно расстоянию от точки A до построенной плоскости.

Вариант 1.3. **1.** 1. **2.** $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2n\pi$ ($k,\,n\in\mathbb{Z}$). **3.** $3\sqrt{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольников AMB, BMC, AMK и KMC. **4.** $\left(\frac{30}{23};\,0\right)$. **5.** $\frac{8}{9}$. *Указание.* Выберите прямоугольную систему координат, взяв в качестве ее начала вершину A и направив оси вдоль лучей AB, AC и AD. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки C и M параллельно прямой BD. Искомое расстояние равно расстоянию от точки B до построенной плоскости.

Вариант 1.4. **1.** 2. **2.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{6}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольников AMB, BMC, AMK и KMC. **4.** $\left(\frac{84}{41};\, 0\right)$. **5.** $\frac{12}{7}$. *Указание.* Выберите прямоугольную систему координат. Естественно взять в качестве ее начала O середину ребра AB и направить две оси вдоль высот DO и CO равнобедренных треугольников ADB и ACB, а третью ось — вдоль прямой AB. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и D параллельно прямой BC. Искомое расстояние равно расстоянию от точки B до построенной плоскости.

Решение варианта 2.1

1. Положим $t=\sqrt{x^2-2x}$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $t^2-t-12=0$. Отсюда $t=4$ или $t=-3$. Но $t \geqslant 0$, поэтому значение $t=-3$ является посторонним, и остается случай $t=4$. Возводя в квадрат, получаем уравнение $x^2-2x=16$. Для обоих его корней, $x_1=1-\sqrt{17}$ и $x_2=1+\sqrt{17}$, подкоренное выражение в исходном уравнении является положительным.

Ответ: $1 \pm \sqrt{17}$.

2. С помощью формул приведения и преобразования суммы косинусов в произведение получаем

$$\sin\frac{x}{5}+\cos\frac{x}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{5}\right)+\cos\frac{x}{4}=0,$$

$$2\cos\left(\frac{x}{40}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{9x}{40}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Приравнивая сомножители нулю, рассмотрим два случая.

А. Пусть $\cos\left(\frac{x}{40}+\frac{\pi}{4}\right)=0$, тогда $\frac{x}{40}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=(40k+10)\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Б. Пусть теперь $\cos\left(\frac{9x}{40}-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Тогда $\frac{9x}{40}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x=$ $=(40n+30)\frac{\pi}{9}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $(40k+10)\pi$; $(40n+30)\frac{\pi}{9}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть диагонали AC и BD ромба $ABCD$, вписанного в прямоугольник, равны соответственно $4\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$. Опустим из вершин A и B перпендикуляры AE и BF на стороны прямоугольника (рис. 174).

Заметим, что стороны острых углов CAE и DBF попарно перпендикулярны: AC и BD перпендикулярны как диагонали ромба, AE и BF параллельны сторонам прямоугольника. Значит, прямоугольные треугольники ACE и BDF подобны. Полагая $AE = x$, $BF = y$, из подобия треугольников получаем соотношение $x : y = AC : BD = 2 : 1$, т. е. $x = 2y$. По условию задачи, площадь прямоугольника равна 34. Отсюда $xy = 2y^2 = 34$, $y = \sqrt{17}$, $x = 2\sqrt{17}$.

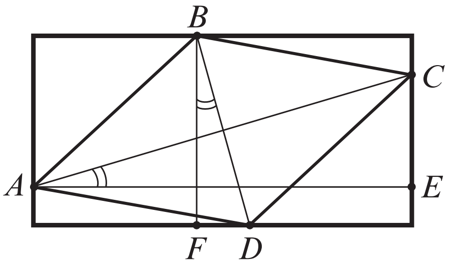

Рис. **174**

Ответ: $2\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$.

4. Выражения, стоящие под знаком логарифма, должны быть положительными, поэтому $\log_2 x > 0$, т. е. $x \in (1, \infty)$. Ясно, что для таких значений x определен и является положительным $\log_x 2$. Воспользуемся равенством $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, а также формулой перехода к основанию 2, и проделаем следующие равносильные преобразования исходного неравенства:

$$-\log_2 \log_x 2 \leqslant \frac{2\log_2 \log_2 x}{\log_2 \sqrt{x}},$$

$$\log_2 \log_2 x - \frac{4\log_2 \log_2 x}{\log_2 x} \leqslant 0,$$

$$\frac{(\log_2 x - 4)\log_2 \log_2 x}{\log_2 x} \leqslant 0.$$

Замечая, что знаменатель последней дроби положителен для всех $x > 1$, рассмотрим два возможных случая.

А. $\log_2 \log_2 x \geqslant 0$ и $\log_2 x - 4 \leqslant 0$. Отсюда $1 \leqslant \log_2 x \leqslant 4$. Решения этой системы неравенств образуют множество $[2, 16]$.

Б. $\log_2 \log_2 x \leqslant 0$ и $\log_2 x - 4 \geqslant 0$. Из первого неравенства вытекает, что $\log_2 x \leqslant 1$, но это противоречит второму неравенству. Следовательно, в этом случае решений нет.

Ответ: $[2, 16]$.

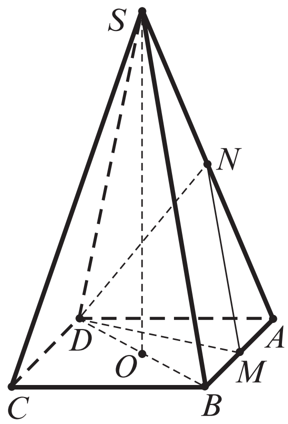

Рис. **175**

5. Объем V всей пирамиды $SABCD$ найти легко: если O — центр квадрата $ABCD$, то высота SO пирамиды по теореме Пифагора равна $\sqrt{SD^2 - SO^2} = \sqrt{27-2} = 5$, поэтому $V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 5 = \frac{20}{3}$ (рис. 175). Объем V_{SABD} треугольной пирамиды $SABD$ составит половину найденной величины, т. е. $\frac{10}{3}$, поскольку площадь ее основания в 2 раза меньше, чем у квадрата $ABCD$.

Будем рассматривать многогранник $SABD$ как пирамиду с вершиной D и основанием SAB. Высота, опущенная из вершины D на плоскость основания, у пирамид $DSAB$ и $DMNSB$ общая. Так как MN является средней линией треугольника SAB, то площадь трапеции $MNSB$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SAB. Следовательно, $V_{DMNSB} = \frac{3}{4} \cdot V_{DABS} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{2}$.

Ответ: 5/2.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** $\frac{1 \pm \sqrt{101}}{2}$. **2.** $(24k+6)\pi$; $\frac{(24n+6)\pi}{7}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $4\sqrt{6}$, $3\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть x и y — длины диагоналей ромба. Покажите, что их отношение равно отношению сторон прямоугольника. В то же время $xy = 72$, поскольку площадь ромба по условию равна 36. **4.** $\left[\frac{1}{32}, \frac{1}{2}\right]$. **5.** 5. *Указание.* Объем пирамиды $SMBC$ составляет 1/4 объема данной пирамиды, так как площадь ее основания MBC в 4 раза меньше, чем площадь квадрата $ABCD$. Если теперь рассмотреть многогранник $SMBC$ как пирамиду с вершиной M, то легко заметить, что искомый объем равен 3/4 от объема пирамиды $MBSC$, поскольку площадь трапеции $KNSC$ составляет 3/4 площади треугольника SBC.

Вариант 2.3. **1.** $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. **2.** $(60k+15)\pi$; $\frac{(60n+15)\pi}{11}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{24}{5}$. *Указание.* Пусть $2x$ и $2y$ — длины диагоналей ромба. Покажите, что их отношение равно отношению сторон прямоугольника. В то же время $x^2 + y^2 = 6$, поскольку сторона ромба по условию равна $\sqrt{6}$. **4.** $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$. **5.** 3. *Указание.* Нетрудно вычислить объем $V = 8$ треугольной пирамиды $SACD$. Тогда для пирамид $SKMN$ и $MACD$ получаем объемы соответственно $V/8$ и $V/2$, а искомый объем оставшейся части пирамиды $SACD$ составляет $3V/8$.

Вариант 2.4. **1.** $-1 \pm \sqrt{26}$. **2.** $(84k+21)\pi$; $\frac{(84n+63)\pi}{13}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $4\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $2x$ и $2y$ — длины диагоналей ромба. Тогда из условий задачи следует система уравнений $xy = 12$, $x^2 + y^2 = 25$ для определения x и y. Далее покажите, что отношение сторон прямоугольника равно отношению диагоналей ромба. **4.** $[2, 4]$. **5.** $3/2$. *Указание.* Искомый объем равен $3/4$ от объема пирамиды $BSCD$, так как площадь трапеции $MNDC$ составляет $3/4$ площади треугольника SDC.

2000

Решение варианта 1.1

1. Пусть x обозначает массу второго сплава в килограммах. Тогда общая масса нового сплава составит $(x + 20)$ кг, и в нем будет содержаться $0{,}32\,(x + 20)$ кг серебра. В то же время первый сплав содержал $0{,}4 \cdot 20 = 8$ кг серебра, и к этому количеству добавилось $0{,}2\,x$ кг серебра из второго сплава, то есть всего стало $(8 + 0{,}2\,x)$ кг. Приравнивая эти величины, получаем уравнение $0{,}32\,(x + 20) = 8 + 0{,}2\,x$ для определения x. Отсюда $0{,}12\,x = 1{,}6$, $x = 40/3$.

Ответ: $40/3$ кг.

2. Заметим, что левая и правая части неравенства определены при $x \geqslant 3$, $x \neq \frac{7}{2}$. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $x > \frac{7}{2}$. Умножим неравенство на положительную величину $2x - 7$. Поскольку оба полученных в левой и правой частях выражения будут положительными, возведем их в квадрат. В результате получим эквивалентное неравенство

$$(x^2-9) \leqslant (2x-7)^2(x-3).$$

Сократив на положительный при $x > \frac{7}{2}$ общий множитель $x-3$, приходим к квадратному неравенству $x+3 \leqslant (2x-7)^2$, или $4x^2 - 29x + 46 \geqslant 0$, которое выполняется для $x \leqslant x_1 = \frac{29-\sqrt{105}}{8}$ и для $x \geqslant x_2 = \frac{29+\sqrt{105}}{8}$. Учитывая, что $x_1 < \frac{7}{2}$, а $x_2 > \frac{7}{2}$, получаем, что в случае «А» неравенство справедливо для $x \geqslant x_2$.

Б. Пусть $3 \leqslant x < \frac{7}{2}$. Для всех указанных значений x неравенство справедливо, поскольку его левая часть отрицательна, а правая положительна для $x \in \left(3, \frac{7}{2}\right)$, а при $x=3$ они обе обращаются в 0.

Объединяя найденные решения, получаем полный ответ.

Ответ: $\left[3, \frac{7}{2}\right) \cup \left[\frac{29+\sqrt{105}}{8}, \infty\right)$.

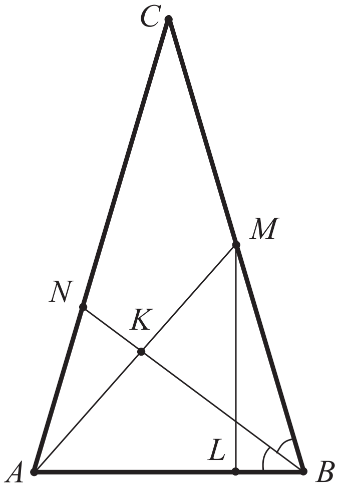

Рис. **176**

3. По свойству биссектрисы BK в треугольнике ABM справедливо равенство $AB : BM = AK : KM = 8 : 7$. Пусть $AB = 8x$, тогда $BM = 7x$. Опустим из точки M перпендикуляр ML на AB (рис. 176). Легко заметить, что $BL = \frac{1}{4}AB = 2x$, $AL = AB - BL = 6x$.

По теореме Пифагора $ML^2 = BM^2 - BL^2 = (7x)^2 - (2x)^2 = 45x^2$, $AL^2 + ML^2 = AM^2$, отсюда $45x^2 + 36x^2 = 225$, $x = 5/3$, $AB = 8x = 40/3$, $AC = BC = 2BM = 14x = 70/3$.

Ответ: $AB = 40/3$, $AC = BC = 70/3$.

4. Для того, чтобы $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} 2x$ были определены, должны выполняться ограничения:

$$\cos 2x \neq 0,\ \cos 3x \neq 0,\ \sin x \neq 0,\ \sin 2x \neq 0. \tag{1}$$

Знаменатели дробей в левой и правой частях уравнения преобразуются к виду:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x}{\cos 3x \cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 2x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x}{\sin x \sin 2x} = \frac{\sin x}{\sin x \sin 2x}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что если выполнены условия (1), то оба знаменателя определены и в нуль не обращаются. С учетом формул (2), (3) и при выполнении условий (1) приведем уравнение к виду

$$\sin 3x \sin 2x = \cos x \cos 2x.$$

Преобразуя произведения соответственно в разность и сумму косинусов, а затем полученную сумму косинусов в произведение, имеем:

$$\cos x - \cos 5x = \cos x + \cos 3x,$$
$$\cos 3x + \cos 5x = 0,$$
$$\cos 4x \cos x = 0.$$

Отсюда или $\cos x = 0$, или $\cos 4x = 0$. В первом случае $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, но тогда $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 0$ и не выполнено одно из условий (1), поэтому корнями исходного уравнения найденные числа не являются. Во втором случае $4x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Легко убедиться, что все условия (1) для указанной серии корней выполнены.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

5. Проведем плоскость α через параллельные прямые A_1D_1 и BC (рис. 177). Отрезок A_1C, точки D_1 и B лежат в плоскости α. Отсюда следует, что точка L пересечения прямой D_1K с плоскостью $ABCD$, является общей для плоскостей $ABCD$ и α, то есть принадлежит

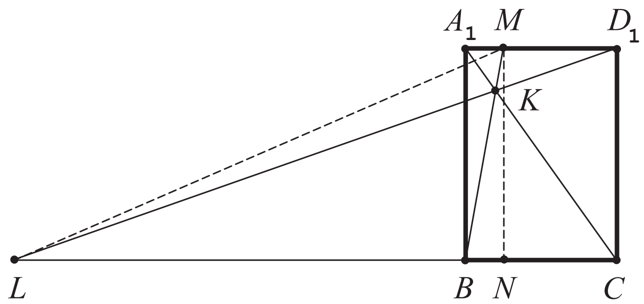

Рис. **177**

прямой BC. Аналогичным образом, заданная в условии точка M лежит на прямой A_1D_1.

Пусть $\frac{A_1K}{KC} = x$. Тогда из подобия треугольников A_1MK и CBK получаем $\frac{A_1K}{KC} = \frac{A_1M}{BC} = \frac{MK}{KB} = x$. Отсюда $A_1M = x \cdot BC = x$, так как $BC = 1$. Рассматривая теперь подобные треугольники A_1D_1K и CLK и рассуждая аналогично, находим $\frac{A_1K}{KC} = \frac{A_1D_1}{CL} = x$, $CL = \frac{A_1D_1}{x} = \frac{1}{x}$. Опустим перпендикуляр MN из точки M на BC. Ясно, что $CN = D_1M = A_1D_1 - A_1M = 1 - x$, $NL = CL - CN = \frac{1}{x} - (1-x) = \frac{1}{x} + x - 1$. В прямоугольном треугольнике MNL по условию задачи $ML = 3\sqrt{3}$; $MN = D_1C = \sqrt{2}$, так как D_1C — диагональ грани куба. По теореме Пифагора $ML^2 = MN^2 + LN^2$, отсюда получаем уравнение для определения x: $\left(\frac{1}{x} + x - 1\right)^2 + 2 = 27$, или $\left(\frac{1}{x} + x - 1\right)^2 = 25$. Поскольку по смыслу задачи $x > 0$, выполняется неравенство $\frac{1}{x} + x > 1$, поэтому $\frac{1}{x} + x - 1 = 5$, или $x^2 - 6x + 1 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ и $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Значение x_1 соответствует расположению точек M и L, указанному на рис. 177, для второго корня выполняется неравенство $MK > KB$, в этом случае точка M лежит на продолжении D_1A_1, а точка L — на отрезке BC.

Ответ: $1 : (3 + 2\sqrt{2})$ или $1 : (3 - 2\sqrt{2})$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** 3 и 7 кг. **2.** $\left[-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5+\sqrt{41}}{8}, 2\right]$. **3.** $AB = 266/11$, $BC = 76\sqrt{6}/11$, $AC = 190/11$. **4.** $\frac{k\pi}{5}$ $(k \neq 5n;\ k, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $2 : \sqrt{3}$ или $\sqrt{3} : 2$.

Вариант 1.3. **1.** 9 и 6 кг. **2.** $\left[-3, -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{97}-5}{18}, 3\right]$. **3.** $AB = 117/7$, $BC = 78/7$, $AC = 39\sqrt{5}/7$. **4.** $\frac{k\pi}{7}$ $(k \neq 7n;\ k, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $1 : (2 + \sqrt{3})$ или $1 : (2 - \sqrt{3})$.

Вариант 1.4. **1.** 15 кг. **2.** $\left[2, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{21+\sqrt{73}}{8}, \infty\right)$. **3.** $AB = 22/7$, $AC = BC = 55/7$. **4.** $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{5} : 2$ или $2 : \sqrt{5}$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть в день выпускается x ракеток и y веников. Из условия задачи следует система уравнений

$$\begin{cases} 1{,}05\,x = y + 140, \\ x - 65 = 1{,}05\,y. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 800$, $y = 700$.

Ответ: 800 ракеток, 700 веников.

2. Заметим, что $\operatorname{ctg} x$ определен, если $\sin x \neq 0$. Используя формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и умножая уравнение на $\sin x$, получаем

$$(6\cos x - 3)\cos x + 2\sin^2 x \cos x = 0.$$

Заменяя $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, приводим уравнение к виду

$$\cos x(2\cos^2 x - 6\cos x + 1) = 0.$$

Приравниваем нулю каждый из сомножителей. Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. В том случае, когда $2\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$, решаем квадратное относительно $\cos x$ уравнение. Из двух его корней, $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ и $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, первый является посторонним, поскольку он больше 1. Отсюда $\cos x = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, $x = \pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Условие $\sin x \neq 0$ выполнено для каждой найденной серии корней.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть K и L — точки пересечения прямой EM с прямыми FA и CD соответственно, Q — точка пересечения прямых FE и CD (рис. 178).

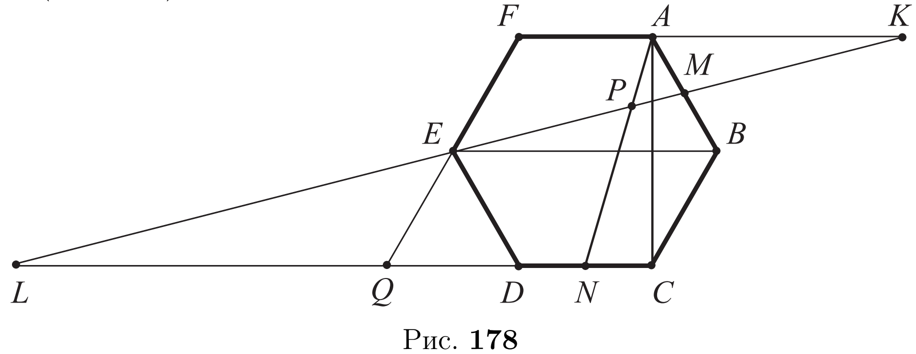

Рис. **178**

Рассматривая прямоугольный треугольник ANC, в котором $NC = 1/2$, $AC = \sqrt{3}$, находим по теореме Пифагора $AN^2 = AC^2 + NC^2 = 13/4$. Треугольник QED является правильным, поэтому $QD = QE = EF = 1$. Учитывая, что точки M и E — середины отрезков AB и FQ соответственно, нетрудно сделать вывод, что равны между собой следующие пары треугольников: AMK и BME, EFK и EQL. Из первого равенства следует, что $AK = BE = 2$, и тогда $FK = FA + AK = 3$. Из второго равенства получаем $LQ = FK = 3$, и тогда $LN = LQ + QD + DN = 9/2$. Рассмотрим теперь подобные треугольники APK и NPL, для них $\frac{AP}{PN} = \frac{AK}{LN}$. Отсюда $PN = AN \cdot \frac{LN}{AK + LN} = \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{9}{13} = \frac{9\sqrt{13}}{26}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{13}}{26}$.

4. Левая часть неравенства определена, если $x \neq 0$ и $12 - 4 \cdot 5^{-x} > 0$, то есть для $x > -\log_5 3$, $x \neq 0$. Нетрудно заметить, что $\log_{2,5} \frac{1}{5} = -\log_{0,4} \frac{1}{5}$. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $x > 0$. Умножая на x и учитывая, что $-x \log_{0,4} \frac{1}{5} = -\log_{0,4} 5^{-x}$, приводим неравенство к виду:

$$\log_{0,4} \frac{12 - 4 \cdot 5^{-x}}{5} + \log_{0,4} 5^{-x} = \log_{0,4} \frac{(12 - 4 \cdot 5^{-x}) \cdot 5^{-x}}{5} \leqslant 0.$$

Основание логарифма меньше 1, поэтому полученное неравенство выполнено, если $\frac{(12 - 4 \cdot 5^{-x}) \cdot 5^{-x}}{5} \geqslant 1$, или $4 \cdot (5^{-x})^2 - 12 \cdot 5^{-x} + 5 \leqslant 0$. Последнее неравенство выполняется, если $\frac{1}{2} \leqslant 5^{-x} \leqslant \frac{5}{2}$, то есть $\log_5 2 - 1 \leqslant x \leqslant \log_5 2$. Но $\log_5 2 - 1 < 0$, а в рассматриваемом случае $x > 0$, поэтому окончательно получаем $0 < x \leqslant \log_5 2$.

Б. Пусть теперь $-\log_5 3 < x < 0$. Умножая на x и меняя при этом знак неравенства, а затем повторяя рассуждения пункта «А», приходим к неравенству $4 \cdot (5^{-x})^2 - 12 \cdot 5^{-x} + 5 \geqslant 0$. Отсюда или $5^{-x} \leqslant \frac{1}{2}$, или $5^{-x} \geqslant \frac{5}{2}$. Неравенство $5^{-x} \leqslant \frac{1}{2}$ для рассматриваемого случая ($x < 0$) выполняться не может. Неравенство $5^{-x} \geqslant \frac{5}{2}$ выполняется для $x \leqslant \log_5 \frac{2}{5} = -1 + \log_5 2$, и с учетом ограничений пункта «Б» находим еще один промежуток: $-\log_5 3 < x \leqslant -1 + \log_5 2$.

Ответ: $(-\log_5 3,\ -1 + \log_5 2\,] \cup (\,0,\ \log_5 2\,]$.

5. Пусть SH — высота пирамиды. Поскольку ее боковые ребра SA, SB и SC равны, равными будут и их проекции AH, BH и CH на плоскость основания. Значит, точка H — центр описанной около треугольника ABC окружности, то есть H — середина его гипотенузы AC (рис. 179).

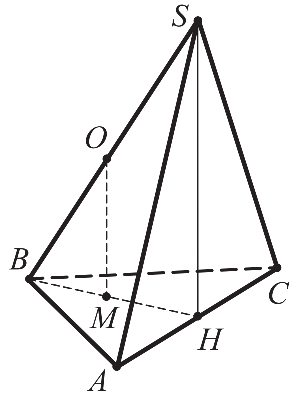

Рис. **179**

Пусть O — центр заданной сферы, M — точка ее касания с плоскостью ABC. Тогда OM и SH параллельны как перпендикуляры к плоскости основания, а треугольники BOM и BSH подобны, поэтому $\frac{SH}{SB} = \frac{OM}{OB} = \frac{OM}{SB - SO}$. Учитывая, что $SB = 13$, $OM = SO = 156/25$, находим $SH = \frac{SB \cdot OM}{SB - SO} = 12$, $BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = 5$. Отсюда $AC = 2 \cdot BH = 10$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 8$. Площадь треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 24$, а искомый объем $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = 96$.

Ответ: 96.

Ответы и указания к вариантам 2.2 – 2.4

Вариант 2.2. **1.** 100 волков, 1000 зайцев. **2.** $(-1)^k \arcsin \frac{5-\sqrt{17}}{4} + k\pi$; $n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $7\sqrt{13}/26$. *Указание.* Пусть K и Q — точки пересечения прямой FM с прямыми AB и DE соответственно, L — точка пересечения прямых AN и ED. Нетрудно найти $BK = 2$, $DL = 2/3$, $QE = 4$, $AN = \sqrt{13}/2$, $AL = \frac{4}{3}AN$. Используя подобие треугольников QPL и APK, находим сначала AP, а затем PN. **4.** $[-\log_3 2,\, 0) \cup \left[1,\, \log_3 \frac{7}{2}\right)$. **5.** 12. *Указание.* Треугольник ABC — прямоугольный, основанием высоты SH пирамиды является середина H его гипотенузы AC. Отсюда $BH = \sqrt{7}$, $SH = 3$. Пусть O — центр сферы, M — точка ее касания с плоскостью основания. Если R — искомый радиус, то $SO = OM = R$, $BO = R + 4$, и R легко найти, используя подобие треугольников OBM и SBH.

Вариант 2.3. **1.** 32 см, 80 см. **2.** $(-1)^k \arcsin \frac{3-\sqrt{5}}{2} + k\pi$; $n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $9\sqrt{13}/22$. *Указание.* Проведем через точку N прямую, параллельную BC. Пусть K и L — точки ее пересечения с прямыми AB и AM соответственно. Нетрудно найти $NK = 2$, $KL = 1/4$, $BN = \sqrt{13}/2$. Используя подобие треугольников NLP и BMP, находим $PN = \frac{BN \cdot NL}{NL + BM}$. **4.** $\left[-\frac{1}{2},\, 0\right) \cup \left[\log_4 \frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\right)$. **5.** $35/24$. *Указание.* Легко заметить, что в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC. Отсюда следует, что основанием высоты SH пирамиды является середина H его гипотенузы BC и что $SH = 5/2$. Пусть O — центр сферы, M — точка ее касания с плоскостью основания. Если R — искомый радиус, то $SO = OM = R$, $AO = \frac{7}{2} - R$, и R легко найти, используя подобие треугольников ASH и AOM.

Вариант 2.4. **1.** 90 гривен, 80 см. **2.** $\pm \arccos \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **3.** $7\sqrt{7}/22$. *Указание.* Пусть K и L — точки пересечения прямой EM с прямыми AD и BC соответственно. Нетрудно найти, что $AK = BL = 2/3$, $AN = \sqrt{7}/2$. Используя подобие треугольников NPL и APK, находим $PN = \frac{AN \cdot NL}{NL + AK}$. **4.** $(1 - \log_2 11,\, -\log_2 5\,] \cup (\,0,\, 1\,]$. **5.** $16\sqrt{2}/3$. *Указание.* Пусть O — центр сферы, M — точка ее касания с плоскостью основания, H — середина гипотенузы AB. Тогда SH — высота пирамиды, прямые SH и OM параллельны. Используя подобие треугольников SCH и OCM, легко найти, что $SH = 4$, $CH = 3$, $AB = 6$, $AC = 4\sqrt{2}$.

2001

Решение варианта 1.1

1. Левая часть уравнения определена только для тех значений x, для которых выполняется неравенство $1 - 2\cos x \geqslant 0$, или $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$. Произведение обращается в нуль, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Отсюда или $1 - 2\cos x = 0$, или $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$. В первом случае $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Во втором случае, используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, приходим к квадратному относительно $\sin x$ уравнению $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$. Его корнями являются числа 2 и $-\frac{1}{3}$. Первый корень очевидно посторонний, поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ для всех x. Остается $\sin x = -\frac{1}{3}$. Запишем решения в виде двух серий корней: $x_1 = -\arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $x_2 = \arcsin\frac{1}{3} + (2m+1)\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). Для первой серии получаем $\cos x_1 = \sqrt{1-\sin^2 x_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{2}$. Условие $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ не выполнено, поэтому корни посторонние. Для второй серии имеем $\cos x_2 = -\sqrt{1-\sin^2 x_2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}$ и нужное условие выполнено.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $\arcsin\frac{1}{3} + (2m+1)\pi$ (n, $m \in \mathbb{Z}$).

2. Правая часть неравенства определена, если $6x + 19 \geqslant 0$, то есть для $x \geqslant -\frac{19}{6}$. Перепишем неравенство в виде $3x+1 < \sqrt{6x+19}$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $3x + 1 < 0$, то есть $-\frac{19}{6} \leqslant x < -\frac{1}{3}$. Поскольку правая часть неравенства неотрицательна, все значения x из указанного промежутка будут его решениями.

Б. Пусть теперь $3x + 1 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -\frac{1}{3}$. Для таких значений x, возводя обе (неотрицательные) части неравенства в квадрат, получаем равносильное неравенство $(3x+1)^2 < 6x + 19$, которое после элементарных преобразований приводим к виду $x^2 < 2$. Его решениями будут числа $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Учитывая условие $x \geqslant -\frac{1}{3}$, получаем промежуток $\left[-\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right)$.

Объединяя найденные множества решений, находим полный ответ задачи.

Ответ: $[-19/6, \sqrt{2})$.

3. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$, отложив от точки D на луче AD отрезок DE, равный AD (рис. 180). Тогда в треугольнике ACE имеем

$$AE = 2AD = 12,$$
$$\angle ACE = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ,$$
$$\angle CEA = \angle BAE = 75^\circ.$$

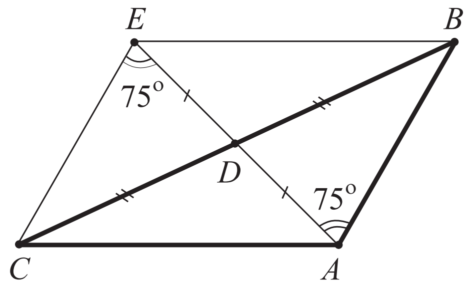

Рис. **180**

По теореме синусов $AC = AE \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}$. Вычислив

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

находим

$$AC = 12 \cdot \frac{(\sqrt{3}+1) \cdot 2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$.

4. Из второго уравнения системы получаем $y(3z - 4x - 6) = 0$. Отсюда или $y = 0$, или $3z - 4x = 6$.

Пусть $y = 0$. Тогда первое и третье уравнения исходной системы выполняются, если $xz = 0$. В свою очередь, это уравнение выполняется, если хотя бы одно из чисел x или z равно нулю. В данном случае решениями системы являются всевозможные наборы вида $(x;\ 0;\ 0)$ или $(0;\ 0;\ z)$, где x и z — любые действительные числа.

Пусть теперь $y \neq 0$, но $3z - 4x = 6$. Умножая первое уравнение исходной системы на 3 и складывая с третьим, получаем $17xy - 10yz = -31y$. Поскольку $y \neq 0$, сокращаем на y и приводим уравнение к виду $17x - 10z = -31$. В результате при $y \neq 0$ для определения x и z получаем систему:

$$\begin{cases} 3z - 4x = 6, \\ 17x - 10z = -31. \end{cases}$$

Решая ее, находим $x = -3$, $z = -2$. Подставляя эти значения в первое или третье уравнение исходной системы, определяем соответствующее им значение $y = -1/2$.

Ответ: $(-3;\ -1/2;\ -2)$, $(x;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ z)$, где $x,\ z \in \mathbb{R}$.

5. Опустим из точки C_1 перпендикуляр C_1N на прямую BM. Рассмотрим наклонную D_1N к плоскости грани BB_1C_1C. Поскольку C_1N — ее проекция на эту плоскость и $C_1N \perp BM$, по теореме о трех перпендикулярах $D_1N \perp BM$. Отсюда следует, что C_1ND_1 — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BMD_1 и BB_1C_1C (рис. 181). Если его величина φ, то, как известно, площадь S проекции грани BB_1C_1C на плоскость BMD_1 равна

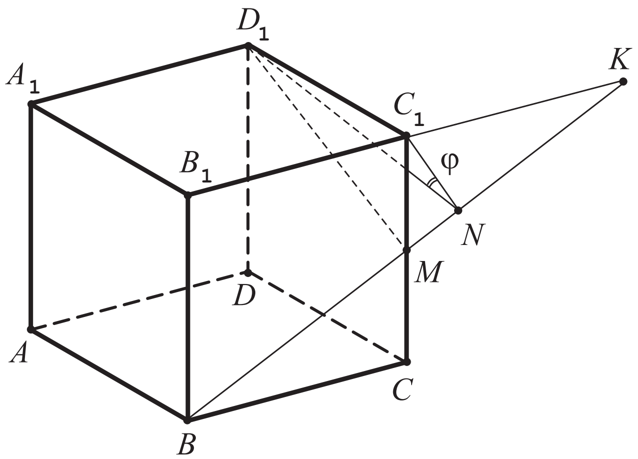

Рис. **181**

площади S_0 указанной грани, умноженной на $\cos\varphi$. Но $S_0 = 1$, поэтому искомая площадь равна $\cos\varphi$.

Пусть K — точка пересечения прямых BM и B_1C_1. Так как M — середина ребра CC_1, делаем вывод, что $C_1K = BC = 1$. Используя теорему Пифагора, находим высоту C_1N прямоугольного треугольника C_1MK:

$$C_1N = \frac{C_1M \cdot C_1K}{\sqrt{C_1M^2 + C_1K^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

а затем гипотенузу D_1N прямоугольного треугольника D_1NC_1: $D_1N = \sqrt{C_1N^2 + D_1C_1^2} = \sqrt{6/5}$. Отсюда искомая площадь $S = \cos\varphi = \frac{C_1N}{D_1N} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $1/\sqrt{6}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$; $\arccos\frac{1}{4} + 2m\pi$ $(n, m \in \mathbb{Z})$. **2.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}\right]$. **3.** $5(\sqrt{3} - 1)$. **4.** $(-2; 2; 1/6)$, $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$, где $x, y \in \mathbb{R}$. **5.** $2/3$.

Вариант 1.3. **1.** $(-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$; $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2m\pi$ $(n, m \in \mathbb{Z})$. **2.** $\left(-\sqrt{11}, \frac{10}{3}\right]$. **3.** $6(2 - \sqrt{3})$. **4.** $(1/2; 3; -2)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$, где

y, $z \in \mathbb{R}$. **5.** $\sqrt{2/3}$.

Вариант 1.4. **1.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $\arcsin\frac{1}{6} + 2m\pi$ $(n, m \in \mathbb{Z})$. **2.** $\left[-\frac{11}{12}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$. **3.** $2(\sqrt{3}+1)$. **4.** $\left(2; -\frac{1}{3}; -3\right)$, $(x; 0; 0)$, $(0; 0; z)$, где x, $z \in \mathbb{R}$. **5.** $1/3$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть в заповеднике было x белых ворон, тогда количество серых составляло $3x$, а черных было $6x$. По условию, в живых осталось $\frac{2}{3}x$ белых ворон. Значит, их было истреблено $\frac{1}{3}x$. Тогда серых ворон было уничтожено $\frac{100}{120} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{5}{18}x$, и поскольку их осталось 49, получаем уравнение $3x - \frac{5}{18}x = 49$ для определения x. Решая его, находим $x = 18$. Таким образом, белых ворон было уничтожено $\frac{1}{3}x = 6$, серых ворон $\frac{5}{18}x = 5$ и, наконец, черных ворон $\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{10}{9}x = 20$, а общее число истребленных ворон равно 31.

Ответ: 31 ворона.

2. Легко заметить, что левая и правая части уравнения определены, если $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Отсюда

$$x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

Умножая обе части уравнения на $\sin x \cdot \cos x$, последовательно получаем

$$\cos^2 x - \cos x = 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x,$$

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x - (\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sqrt{3}\sin x)(\cos x + \sqrt{3}\sin x) - (\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0,$$

$$(\cos x + \sqrt{3}\sin x)(\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1) = 0.$$

Отсюда или $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$, или $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$. В первом случае находим $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = -\frac{\pi}{6} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Условие (1) для полученных корней выполнено. Во втором случае, разделив уравнение на 2, получаем

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

Корнями последнего уравнения являются $x_2 = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $x_3 = -\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). Условие (1) выполнено только для x_3.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + n\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$ (n, $m \in \mathbb{Z}$).

2П. Воспользуемся формулой

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

и приведем уравнение к виду $6\cos^2 2x - 5\cos 2x - 4 = 0$. Корнями получившегося квадратного относительно $\cos 2x$ уравнения являются числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{3}$. Учитывая, что $|\cos 2x| \leqslant 1$, получаем $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

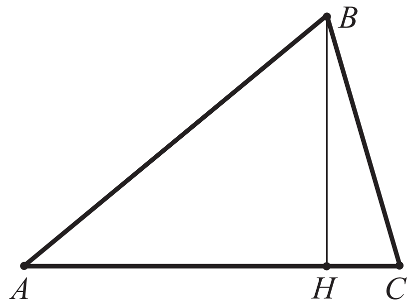

Рис. **182**

3. Пусть $BC = 2x$, тогда из условия задачи следует, что $AB = 3x$. Рассматривая прямоугольные треугольники ABH и BCH (рис. 182), по теореме Пифагора находим $BH^2 = BC^2 - CH^2 = AB^2 - AH^2$, отсюда $9x^2 - 16 = 4x^2 - 1$, $x = \sqrt{3}$. Тогда $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $BH = \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{11}$.

Площадь S треугольника ABC можно найти двумя различными способами: $S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{5}{2}\sqrt{11}$ и $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$, где P — периметр треугольника, r — радиус вписанной окружности. Поскольку $P = AB + BC + AC = 5(\sqrt{3} + 1)$, находим $r = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3} + 1}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3} + 1}$.

4. В силу известных ограничений на основание и область определения логарифмической функции, должны выполняться условия $2 - 3x > 0$, $2 - 3x \neq 1$, $1 - 3x^2 > 0$, т. е. $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Учитывая, что $2 = \log_{2-3x}(2 - 3x)^2$, перепишем неравенство в виде:

$$\log_{2-3x}(2 - 3x)^2 + \log_{2-3x} \frac{1}{1 - 3x^2} = \log_{2-3x} \frac{(2 - 3x)^2}{1 - 3x^2} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Если $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$, то основание логарифма больше единицы и неравенство (2) преобразуется к виду:

$$\frac{(2-3x)^2}{1-3x^2} \geqslant 1, \quad (2-3x)^2 \geqslant 1-3x^2, \quad 3(2x-1)^2 \geqslant 0.$$

Последнее соотношение выполнено для всех допустимых значений x, поэтому весь промежуток $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ входит в множество решений.

Если $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, то основание логарифма в (2) меньше единицы, поэтому аналогичные, как и в предыдущем случае, преобразования, приводят к противоположному неравенству $(2x-1)^2 \leqslant 0$. Это неравенство выполняется только для $x = \frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

5. Пусть E, F, K, M, N — середины ребер AD, BC, AC, AB и DC соответственно (рис. 183). Заметим, что DC и EK — перпендикуляры к плоскости ABC, так как DC является перпендикуляром к BC и AB, а прямая EK параллельна DC.

Ясно, что $EK = CN$, $FK = BM$, поскольку EK и FK средние линии треугольников ACD и ABC, а M и N — середины их соответствующих сторон DC и AB. Рассматривая прямоугольные треугольники EFK, BCM и CMN, по теореме Пифагора находим:

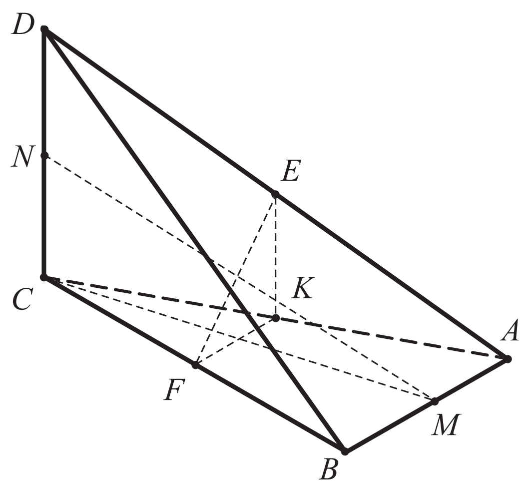

Рис. **183**

$FK^2 + KE^2 = FE^2 = 1$, $CM^2 = BC^2 + BM^2$, $NM^2 = CM^2 + CN^2 = BC^2 + BM^2 + CN^2 = 49$. Поскольку справедливо равенство $BM^2 + CN^2 = FK^2 + KE^2 = 1$, находим $BC^2 = 48$, $BC = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 405 пачек. **2.** $\frac{\pi}{3} + n\pi$; $-\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **2П.** $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{8\sqrt{14}}{7}$. **4.** $\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\, 2\right) \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$. **5.** $\sqrt{13}$.

Вариант 2.3. **1.** 45 «Мерседесов». **2.** $-\frac{\pi}{3} + n\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **2П.** $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\, 1\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$. **5.** 13.

Вариант 2.4. **1.** 105 черепашек. **2.** $\frac{\pi}{6} + n\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **2П.** $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{3\sqrt{11}}{5+\sqrt{3}}$. **4.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\, 0\right) \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$. **5.** $\sqrt{6}$.

2002

Решение варианта 1.1

1. Левая часть неравенства определена, когда $x - 1 \geqslant 0$, $x \neq 2$. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $x \in [1,\, 2)$, тогда разность $\sqrt{x-1} - 1$ отрицательна. Умножая на нее, приходим к неравенству $4\sqrt{x} \geqslant 5\sqrt{x-1}$. Возводя в квадрат, получаем $16x \geqslant 25x - 25$, $x \leqslant 25/9$. Но $25/9 > 2$, поэтому весь промежуток $[1,\, 2)$ входит в множество решений.

Б. Пусть теперь $x \in (2, +\infty)$. В этом случае $\sqrt{x-1} - 1 > 0$, а исходное неравенство приводится к виду $4\sqrt{x} \leqslant 5\sqrt{x-1}$. Его решениями будут числа $x \geqslant 25/9$.

Объединяя найденные промежутки, получаем полный ответ.

Ответ: $[1,\, 2) \cup [25/9, +\infty)$.

2. Правая и левая части уравнения определены, если

$$\cos x \neq 0, \quad \sin x \neq \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} x \neq \frac{3}{4}\,. \tag{1}$$

Умножая на знаменатели дробей и приводя подобные члены, а затем умножая на $\cos x$, приводим уравнение к виду $\sin x(5\cos x - 4) = 0$.

Отсюда или $\sin x = 0$, $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\cos x = \frac{4}{5}$. В последнем случае $x = \pm \arccos\frac{4}{5} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, но некоторые из этих корней, а именно $x_1 = \arccos\frac{4}{5} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, являются посторонними, так как $\sin x_1 = \frac{3}{5}$ и не выполняются условия (1).

Ответ: $k\pi$; $-\arccos\frac{4}{5} + 2n\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

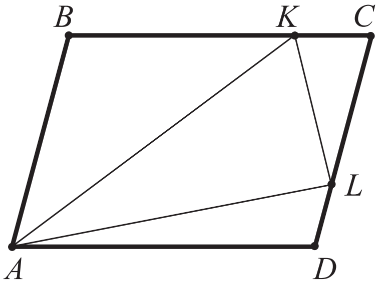

Рис. **184**

3. Пусть площадь всего параллелограмма $S_{ABCD} = 2x$, тогда площадь треугольника $S_{ABC} = x$, и поскольку $BK = \frac{3}{4}BC$, получаем, что $S_{ABK} = \frac{3}{4}x$ (рис. 184). Аналогичным образом, $S_{ADL} = \frac{2}{7}x$.

Положим $\angle KCL = \alpha$. Тогда $S_{KCL} = \frac{1}{2}KC \cdot CL \cdot \sin\alpha$, в то время как $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin\alpha = x$. Учитывая, что $KC = \frac{1}{4}BC$, $CL = \frac{5}{7}CD$, находим $S_{KCL} = \frac{5}{28}x$, $S_{AKL} = S_{ABCD} - S_{ABK} - S_{ADL} - S_{KCL} = \frac{11}{14}x = 22$, $x = 28$. Следовательно, $S_{ABCD} = 56$, $S_{KCL} = 5$, $S_{ABKLD} = S_{ABCD} - S_{KCL} = 51$.

Ответ: 51.

4. Пусть S — длина пути от дома до университета, x — скорость студента, y — скорость автобуса. Из условий задачи легко получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{S}{2x} + \dfrac{S}{2y} = 30, \\ \dfrac{S}{4x} + \dfrac{3S}{4y} = 17, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+y}{60} = \dfrac{xy}{S}, \\ \dfrac{3x+y}{68} = \dfrac{xy}{S}. \end{cases}$$

Приравнивая левые части последних двух уравнений, последовательно находим $17(x+y) = 15(3x+y)$, $2y = 28x$, $y/x = 14$.

Ответ: В 14 раз.

5. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в основания $A_1B_1C_1$ и ABC. Легко показать, что центр сферы O — середина отрезка O_1O_2, ее радиус r равен радиусу окружностей, вписанных в основания ABC и $A_1B_1C_1$, высота призмы равна $2r$. Рассмотрим сечение призмы плоскостью AA_1O. Пусть N — точка ее пересечения с ребром BC (рис. 185). Рассматривая подобные треугольники AA_1M, O_2OM и NKM, находим, что $O_2N = NM = r$, $KN = \frac{1}{2}OO_2 = \frac{r}{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике KNM имеем $MN^2 + NK^2 = KM^2$, отсюда $\frac{5}{4}r^2 = \frac{25}{4}$, $r = \sqrt{5}$. Тогда сторона основания $a = 2r\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$, его площадь $S = 15\sqrt{3}$, высота призмы $h = 2\sqrt{5}$, а ее объем $V = Sh = 30\sqrt{15}$.

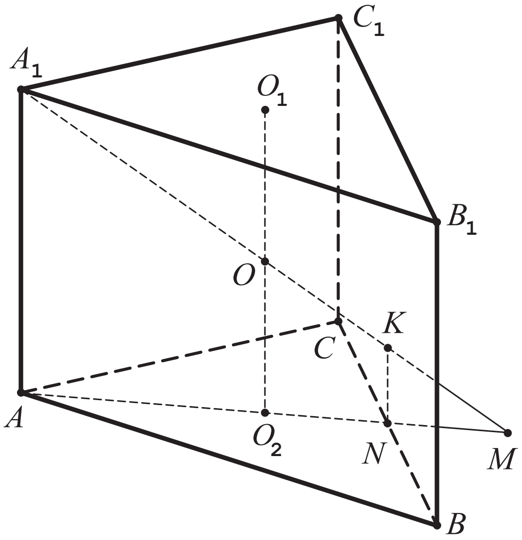

Рис. **185**

Ответ: $30\sqrt{15}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** $[1,\, 25/16] \cup (2, +\infty)$. **2.** $n\pi$; $\arccos\frac{3}{5} + 2m\pi$ ($n,\, m \in \mathbb{Z}$). **3.** 14. **4.** В 16 раз. **5.** $2\sqrt{6}$.

Вариант 1.3. **1.** $[2,\, 3) \cup [81/16, +\infty)$. **2.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $\arcsin\frac{4}{5} + 2m\pi$ ($n,\, m \in \mathbb{Z}$). **3.** 32. **4.** В 1,2 раза. **5.** $48\sqrt{3}$.

Вариант 1.4. **1.** $[2,\, 9/4] \cup (3, +\infty)$. **2.** $-\arcsin\frac{3}{5} + (2n+1)\pi$; $\frac{\pi}{2} + m\pi$ ($n,\, m \in \mathbb{Z}$). **3.** 31. **4.** В 2,5 раза. **5.** $\sqrt{7}$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x — сторона квадрата, а y и z — стороны прямоугольника. Из условия задачи легко получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2{,}2\,x = y + z, \\ 1{,}17\,x^2 = yz, \\ y^2 + z^2 = 400. \end{cases}$$

Возводя в квадрат обе части первого уравнения, вычитая из него удвоенное второе и учитывая третье, находим, что $2{,}5\,x^2 = y^2 + z^2 = 400$. Искомая площадь квадрата $x^2 = 160$.

Ответ: 160.

2. Уравнению могут удовлетворять только те значения x, для которых $\cos x \geqslant 0$. Возводя правую и левую части уравнения в квадрат и используя формулу $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$, приводим его к виду $\cos 4x - \cos 2x = 0$. Преобразовав разность косинусов в произведение, получаем $\sin x \sin 3x = 0$. Отсюда или $\sin x = 0$, $x = l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, или $\sin 3x = 0$, $x = \frac{n\pi}{3}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Вторая серия корней включает в себя первую. Условие $\cos x \geqslant 0$ выполняется при $n = 6k$, $n = 6m \pm 1$, то есть для корней $2k\pi$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$, где k, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть $BC = 3x$, $AD = 4x$; O_1 и O_2 — центры заданных окружностей. Проведем через точку C прямые, параллельные прямым O_1O_2 и AD, и обозначим точки их пересечения с диаметром AB через M и N соответственно (рис. 186). Легко убедиться, что CM — медиана треугольника BCN, $BM = MN = 2$, $CM = 4$, $CN = AD = 4x$. Положим $\angle CMB = \alpha$, тогда $\angle CMN = \pi - \alpha$. При-

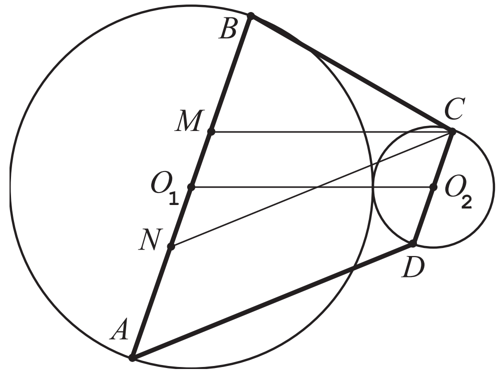

Рис. **186**

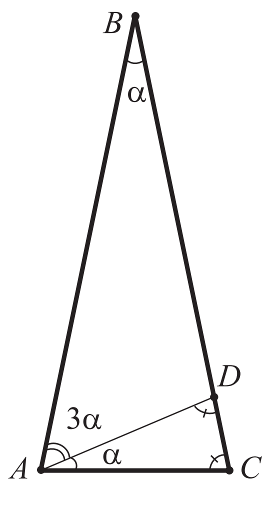

Рис. **187**

менив теорему косинусов к треугольникам BMC и NMC, запишем равенства

$$BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2\,BM \cdot CM \cdot \cos\alpha,$$

$$CN^2 = NM^2 + CM^2 - 2\,NM \cdot CM \cdot \cos(\pi - \alpha).$$

Складывая их и учитывая, что $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, получаем соотношение $BC^2 + CN^2 = BM^2 + NM^2 + 2CM^2$, из которого вытекает, что $25x^2 = 40$, $x = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, $BC = 3x = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, $AD = 4x = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ и $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

3П. Обозначим величину угла ABC через α. Равнобедренные треугольники ABC и CAD имеют общий угол C при основаниях AC и CD соответственно. Следовательно, угол при вершине A треугольника CAD равен α (рис. 187). Тогда $\angle DAB = 3\alpha$, $\angle BAC = \angle BCA = 4\alpha$. Сумма всех углов треугольника составляет 180°, отсюда $4\alpha + 4\alpha + \alpha = 9\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\angle BAC = 4\alpha = 80^\circ$.

Ответ: 80°.

4. Правая часть неравенства определена, если $\frac{x-2}{x+3} > 0$, то есть для $x \in (-\infty,\ -3) \cup (\,2,\ +\infty)$. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $x \in (-\infty,\ -3)$. Тогда $2x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$, преобразуем выражение под знаком логарифма в левой части неравенства: $|2x - 1| - |x-2| = -(2x-1) - (2-x) = -(x+3) > 0$. Используя формулу $\log_a b = \log_{a^2} b^2$, приведем неравенство к виду

$$\log_4(-x-3) \geqslant \log_4 \frac{x-2}{x+3}.$$

Отсюда вытекает, что $-(x+3) \geqslant \frac{x-2}{x+3}$. Умножая на отрицательную величину $(x+3)$, получаем $-(x+3)^2 \leqslant x - 2$, $x^2 + 7x + 7 \geqslant 0$, $x \leqslant -\frac{7+\sqrt{21}}{2}$ или $x \geqslant \frac{\sqrt{21}-7}{2}$. С учетом ограничения $x < -3$ находим промежуток решений $\left(-\infty,\ -\frac{7+\sqrt{21}}{2}\,\right]$.

Б. Пусть теперь $x \in (2,\ +\infty)$. Тогда $2x - 1 > 0$, $x - 2 > 0$, поэтому $|2x-1| - |x-2| = (2x-1) - (x-2) = (x+3) > 0$. Рассуждая аналогично, приведем исходное неравенство к виду $(x+3) \geqslant \frac{x-2}{x+3}$. Умножая на положительный знаменатель $(x+3)$, получаем

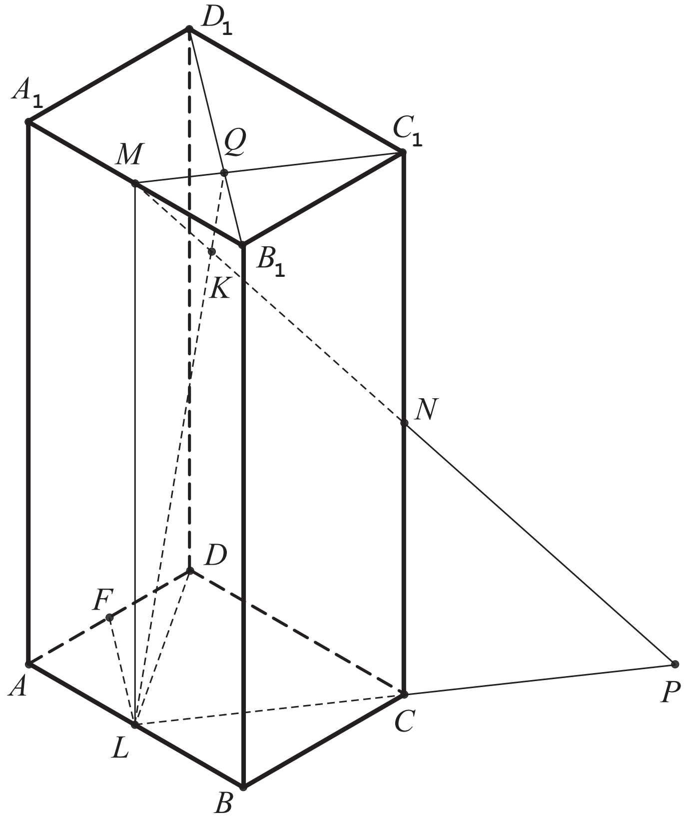

Рис. **188**

$(x+3)^2 \geqslant x-2$, $x^2+5x+11 \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо для всех x, поэтому весь промежуток $(2, +\infty)$ входит в множество решений.

Ответ: $\left(-\infty, -\frac{7+\sqrt{21}}{2}\right] \cup (2, +\infty)$.

5. Пусть L — середина ребра AB. Плоскость FB_1D_1 пересекает плоскость основания $ABCD$ по прямой, параллельной B_1D_1. Ясно, что это будет FL (рис. 188).

Обозначим через Q точку пересечения отрезков C_1M и B_1D_1. Рассматривая подобные треугольники MQB_1 и C_1QD_1, получаем, что $MQ = \frac{1}{2}C_1Q = \frac{1}{3}MC_1$. Рассмотрим теперь плоскость MCC_1. Она проходит через точку L и содержит отрезок MN. Пусть прямые

MN и LC пересекаются в точке P. Из равенства прямоугольных треугольников MC_1N и PCN вытекает, что $PC = MC_1 = CL$, $PL = 2MC_1$, $PM = 2MN$. Точка K, заданная в условии задачи, — это точка пересечения отрезков LQ и MN. В подобных треугольниках MKQ и PKL имеем $MK : MQ = PK : PL$. Отсюда следует, что

$$MK = \frac{MQ}{PL} \cdot KP = \frac{MC_1/3}{2MC_1} \cdot KP = \frac{1}{6}\, KP = \frac{1}{7}\, MP = \frac{2}{7}\, MN.$$

Значит, $KN = \frac{5}{7}\, MN$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках MB_1C_1 и MC_1N имеем: $MC_1^2 = MB_1^2 + B_1C_1^2 = 13$, $MN^2 = MC_1^2 + C_1N^2 = 49$, $MN = 7$, $KN = \frac{5}{7}\, MN = 5$.

Ответ: 5.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 490. **2.** $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $(-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$. **3П.** $36°$. **4.** $(-\infty,\, -2) \cup \left[\, \frac{11+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$. **5.** 27/4.

Вариант 2.3. **1.** 130. **2.** $n\pi$; $(-1)^m \frac{\pi}{3} + m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $6\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. **3П.** $96°$. **4.** $\left(-\infty,\, -\frac{9+\sqrt{21}}{2}\,\right] \cup (1, +\infty)$. **5.** 1.

Вариант 2.4. **1.** 250. **2.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $\pm\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(n,\, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $\sqrt{51}$. **3П.** $117°$. **4.** $(-\infty,\, -3) \cup \left[\, \frac{9+\sqrt{29}}{2},\, +\infty\right)$. **5.** 9/5.

2003

Решение варианта 1.1

1. Пусть x (км) — расстояние от А до Б, u (км/мин) — скорость пешехода, v (км/мин) — скорость автомобиля, k — искомое число процентов, тогда

$$\begin{cases} 20v = 20u + x, \\ 1{,}3 \cdot 15v = 15u + x, \\ \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot 25v = 25u + x. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $v = 10u$, $x = 180u$. Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем

$$\left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot 250u = 25u + 180u \ \Rightarrow\ 1 - \frac{k}{100} = \frac{82}{100},\ k = 18.$$

Ответ: 18 %.

2. Разделив на 2 обе части уравнения и последовательно применив формулы косинуса суммы и разности косинусов, находим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x = \cos 3x, \quad \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 3x = 0,$$

$$\sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получаем две возможности:

$$\sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0, \quad \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{12} = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}\ (k \in \mathbb{Z});$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0, \quad \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = m\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi\ (m \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$.

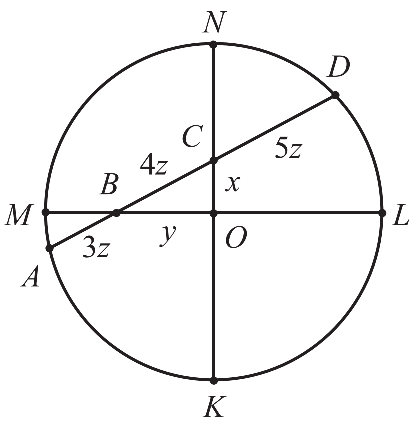

Рис. **189**

3. Пусть O и r — центр и радиус окружности; ML и NK — диаметры, на которых расположены соответственно точки B и C (рис. 189). По теореме Пифагора

$$BC^2 = OC^2 + OB^2,$$

а по теореме о пересекающихся хордах

$$AB \cdot BD = MB \cdot BL,$$

$$CD \cdot AC = NC \cdot CK.$$

Полагая $OC = x$, $OB = y$, $AB = 3z$, $BC = 4z$, $CD = 5z$, придем к системе

$$16z^2 = x^2 + y^2, \quad 3z \cdot 9z = (r - y)(r + y), \quad 5z \cdot 7z = (r - x)(r + x).$$

Складывая все три уравнения, получаем $78z^2 = 2r^2 = 234$, $z = \sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$.

4. Полагая $z = \sqrt{x-4}$, приведем исходное уравнение к виду

$$|\,16z - 25\,| = 2z^2 + 7, \quad z \geqslant 0.$$

Рассмотрим далее все возможные случаи.

А. Пусть $16z - 25 \geqslant 0$, то есть $z \geqslant \frac{25}{16}$. Тогда $16z - 25 = 2z^2 + 7$, $z^2 - 8z + 16 = 0$, $z = 4 > \frac{25}{16}$, $x = 20$.

Б. Пусть $0 \leqslant z < \frac{25}{16}$, тогда $25 - 16z = 2z^2 + 7$, $z^2 + 8z - 9 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -7$. Условию $0 \leqslant z < \frac{25}{16}$ удовлетворяет только корень z_1. Соответствующее значение x равно 5.

Ответ: 5, 20.

5. Пусть h — высота пирамиды, опущенная из точки S (рис. 190), тогда $CS = 4h$, $BS = 3h$, $BC^2 = BS^2 + CS^2 = 25h^2$,

$$S_{SBC} = \frac{1}{2}\,CS \cdot BS = 6h^2, \quad V_{SABC} = \frac{25}{3}\,S_{SBC} = 50h^2.$$

С другой стороны,

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\,h \cdot S_{ABC} =$$

$$= \frac{h}{6} \cdot BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{12}\,h^3.$$

Приравнивая найденные выражения для объема, находим

$$h = 8\sqrt{3}, \quad V_{SABC} = 50h^2 = 9600.$$

Ответ: 9600.

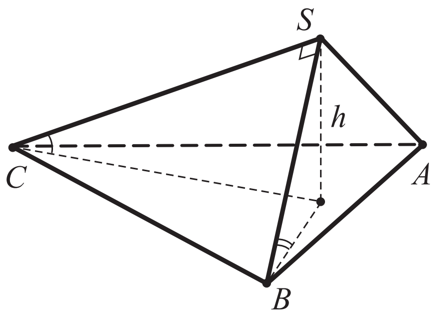

Рис. **190**

Ответы и указания к вариантам 1.2–1.4

Вариант 1.2. **1.** 40 минут. **2.** $\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3} + 2m\pi$ (k, $m \in \mathbb{Z}$). **3.** $\sqrt{53}$. **4.** $\frac{7}{2}$, $\frac{15}{2}$. **5.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Вариант 1.3. **1.** 30 минут. **2.** $\frac{2\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3} + 2m\pi$ (k, $m \in \mathbb{Z}$). **3.** 8. **4.** $-\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$. **5.** 5.

Вариант 1.4. **1.** 10 %. **2.** $-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}$, $\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ (k, $m \in \mathbb{Z}$). **3.** 6. **4.** -14, 1. **5.** $\frac{8}{27}$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть искомая сумма S выдана m купюрами номиналом 64 рубля, n купюрами в 8 рублей и k купюрами в 1 рубль. Понятно, что $n \leqslant 7$ и $k \leqslant 7$, иначе ту же сумму можно составить меньшим числом купюр, заменив восемь одинаковых купюр одной купюрой большего достоинства. Так как всего купюр 20, то $m \geqslant 6$. Заметим, что уже при $m = 8$ искомая сумма S окажется больше $64m = 512$. Следовательно, возможны лишь три случая:

$$m = 6,\ n = 7,\ k = 7,\quad S = 447;$$
$$m = 7,\ n = 6,\ k = 7,\quad S = 503;$$
$$m = 7,\ n = 7,\ k = 6,\quad S = 510.$$

Условие $S < 500$ выполняется только в первом случае.

Ответ: 447 рублей.

2. Искомое решение должно принадлежать областям определения функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 3x$, поэтому

$$\cos x \neq 0, \quad \cos 3x \neq 0. \tag{2}$$

Теперь запишем исходное уравнение в виде

$$3 \sin x \cos 3x = \sin 3x \cos x$$

и преобразуем произведения синуса и косинуса в соответствующие суммы или разности синусов. Получим:

$$3(\sin 4x - \sin 2x) = \sin 4x + \sin 2x, \quad 2 \sin 4x = 4 \sin 2x,$$
$$\sin 2x \cos 2x = \sin 2x.$$

Возможны следующие случаи.

А. $\sin 2x = 0$, $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. В силу (2) подходят только четные значения $k = 2n$, то есть $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Б. $\cos 2x = 1$, $x = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$. Эта серия корней совпадает с найденной в пункте А.

Ответ: $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть r — радиус окружности, а O — центр (рис. 191). Понятно, что $OMBN$ — квадрат со стороной r. Из подобия треугольников

AMO и ONC вытекает:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{CN}{ON} \Rightarrow \frac{r}{4} = \frac{9}{r} \Rightarrow r = 6.$$

Отсюда по теореме Пифагора находим

$$P = (AM+r)+(CN+r)+\sqrt{AM^2+r^2}+ \\ +\sqrt{CN^2+r^2} = 25+5\sqrt{13}.$$

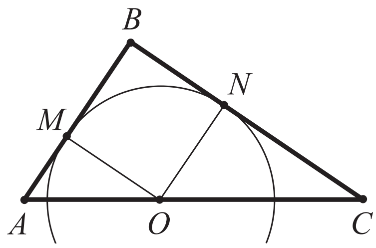

Рис. **191**

Ответ: $25+5\sqrt{13}$.

4. Рассмотрим два случая.

А. $x+1 \geqslant 0$. При этом $|x+1| = x+1$, а уравнение принимает вид

$$3^{2x+1} + 3\cdot 9^{x+1} = 10 \quad \text{или} \quad 3\cdot 9^x + 27\cdot 9^x = 10.$$

Значит, $9^x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$. Найденный корень удовлетворяет условию $x+1 \geqslant 0$.

Б. $x+1 < 0$. В данном случае $|x+1| = -x-1$, а уравнение равносильно

$$3\cdot 9^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{-x} = 10 \quad \text{или} \quad 9\cdot 9^{2x} - 30\cdot 9^x + 1 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно 9^x, находим

$$x_1 = \log_9 \frac{5+2\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = \log_9 \frac{5-2\sqrt{6}}{3}.$$

Нетрудно проверить, что условию $x+1<0$ удовлетворяет только второй корень.

Ответ: $-\frac{1}{2}$, $\log_9 \frac{5-2\sqrt{6}}{3}$.

5. Проведем плоскость SPQ, где P и Q — середины AD и BC соответственно (рис. 192). Пусть эта плоскость пересекает отрезок MN в точке R, а отрезок KL — в точке T. Понятно, что R — середина SP, причем $RT \perp SQ$ (рис. 193).

По теореме Пифагора нетрудно подсчитать, что $SP = SQ = \sqrt{6}$, значит,

$$PQ^2 = SP^2 + SQ^2 - 2\cdot SP\cdot SQ\cdot\cos\alpha,$$

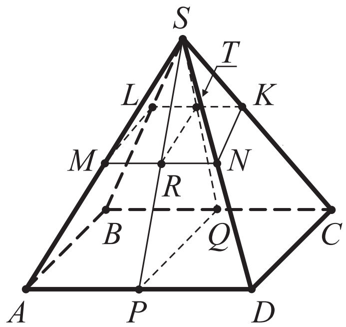

Рис. **192**

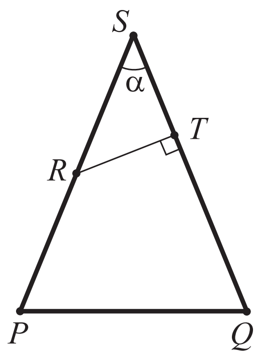

Рис. **193**

$$4 = 6 + 6 - 12\cos\alpha,\ \cos\alpha = \tfrac{2}{3},\ \sin\alpha = \tfrac{\sqrt{5}}{3},$$

$$ST = \tfrac{SP}{2}\cos\alpha = \tfrac{\sqrt{6}}{3},\ RT = \tfrac{SP}{2}\sin\alpha = \tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

В силу подобия треугольников KLS и CBS имеем

$$\frac{KL}{BC} = \frac{ST}{SQ} \Rightarrow KL = \frac{BC \cdot ST}{SQ} = \frac{2}{3}.$$

Так как ST — высота пирамиды $SMNKL$, то

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot ST \cdot S_{MNKL} = \frac{RT\cdot\sqrt{6}}{18}\cdot(MN+KL) = \frac{5\sqrt{5}}{54}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{5}}{54}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2–2.4

Вариант 2.2. **1.** 647. **2.** $\frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}$, $n\pi$ (m, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{9}{2}\sqrt{5}$. **4.** $-\frac{1}{2}$, $\log_4 \frac{5-\sqrt{21}}{4}$. **5.** $\frac{5}{16}\sqrt{5}$.

Вариант 2.3. **1.** 293. **2.** $\frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (m, $n \in \mathbb{Z}$). **3.** $3\sqrt{5}$. **4.** 2, $\log_2 \frac{7-\sqrt{37}}{2}$. **5.** $\frac{7\sqrt{7}}{288}$.

Вариант 2.4. **1.** 179. **2.** $\frac{\pi}{2}+m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). **3.** $\frac{12}{\sqrt{10}}$. **4.** $\log_3 \frac{63-3\sqrt{393}}{2}$, 3. **5.** $\frac{7\sqrt{7}}{27}$.

2004

Решение варианта 1.1

1. Пусть x, y и z очков набрано при стрельбе соответственно первым, вторым и третьим стрелками. Из условия задачи вытекает, что выполняются неравенства $x \leqslant 48$, $y \leqslant 47$ и $z \leqslant 47$. Все вместе стрелки набрали 141 очко, поэтому $x + y + z = 141$. Так как сумма правых частей неравнств равна 142, то возможны всего три случая:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad x = 47,\ y = 47,\ z = 47;\\
&\text{б)}\quad x = 48,\ y = 46,\ z = 47;\\
&\text{в)}\quad x = 48,\ y = 47,\ z = 46.
\end{aligned}
$$

Первый случай не подходит, поскольку известно, что один из стрелков победил, набрав больше всех очков. Во втором случае второй стрелок должен был бы выбить 4 девятки и одну десятку, что тоже противоречит условию. Остается третий случай, который удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 48, 47, 46.

2. Левая часть уравнения определена, если $x \in [3,\ 8]$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{8-x}$ и возведем правую и левую части в квадрат. В результате после элементарных преобразований получим уравнение $2\sqrt{(x+2)(x-3)} = 9-3x$. Для его корней должно выполняться условие $9 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 3$. На промежутке $[3,\ 8]$ существует единственное число $x = 3$, удовлетворяющее полученному неравенству. Проверка показывает, что оно является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

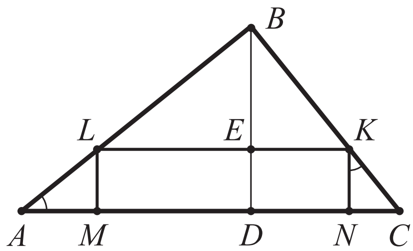

Рис. **194**

3. Пусть $LM = KN = x$, $MN = LK = y$, $BD = h$ — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B на гипотенузу AC, которая пересекает сторону LK прямоугольника в точке E (рис. 194). Прямоугольные треугольники ALM и KCN подобны как имеющие равные острые углы. Отсюда $LM \cdot KN = AM \cdot CN$, $x^2 = 6$, $x = \sqrt{6}$. По условию, площадь прямоугольника $xy = 10\sqrt{6}$, поэтому $MN = y = 10$, $AC = AM + MN + NC = 15$.

Рассмотрим теперь подобные прямоугольные треугольники ABC и LBK. Отношения их высот $BD = h$, $BE = BD - ED = h - \sqrt{6}$ и гипотенуз $AC = 15$, $LK = 10$ равны, поэтому $\frac{h-\sqrt{6}}{h} = \frac{2}{3}$, $h = 3\sqrt{6}$. Искомая площадь $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{45\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{45\sqrt{6}}{2}$.

4. Заметим, что для корней уравнения должны выполняться условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x = 2\sin x\cos x.$$

Выберем φ так, чтобы выполнялись равенства $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Можно взять $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Теперь исходное уравнение приводится к виду $\sin(\varphi - x) = \sin 2x$. Отсюда $\varphi - x + 2k\pi = 2x$, $x = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\pi + x - \varphi + 2n\pi = 2x$, $x = -\varphi + (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ для всех корней выполнены.

Ответ: $\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, где $-\varphi + (2n+1)\pi$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$.

5. Введем систему координат, поместив ее начало в вершину A куба и направив оси x, y, z соответственно вдоль лучей AB, AD и AA_1 (рис. 195). Легко заметить, что прямые BK и AA_1 пересекаются в точке M такой, что $A_1M = 1$, а прямая MN пересекает ребра AD и A_1D_1 куба соответственно в точках P и L так, что $AP = 2/3$, $A_1L = 1/3$. Прямые KL и BP лежат в заданной плоскости BKN,

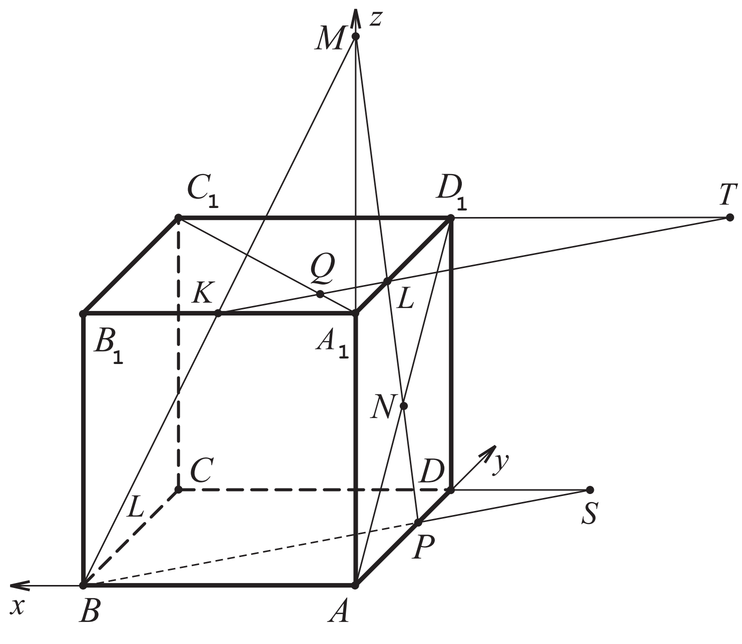

Рис. **195**

точка Q получается в результате пересечения прямых KL и A_1C_1, а точка S — прямых BP и CD.

Обозначим через T точку пересечения прямых KL и C_1D_1. Из подобия треугольников KA_1L и TLD_1 находим, что $KA_1 : D_1T = A_1L : LD_1 = 1 : 2$, $D_1T = 1$. Рассматривая подобные треугольники KA_1Q и TC_1Q, получаем $A_1Q : QC_1 = A_1K : C_1T = 1 : 4$, $A_1Q = \frac{1}{5}A_1C_1$. И наконец, из подобия ABP и DSP определяем, что $SD = AB \cdot DP/AP = \frac{1}{2}$. Теперь легко найти координаты заданных точек $S\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$ и $Q\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ 1\right)$, а затем расстояние между ними

$$QS = \sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{5}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{213}}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{213}}{10}$.

Ответы и указания к вариантам 1.2 – 1.4

Вариант 1.2. **1.** 46, 47, 48. **2.** 1. **3.** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\varphi + 2m\pi$, $-\frac{\varphi}{3} + \frac{(2n+1)\pi}{3}$, где $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\frac{\sqrt{429}}{14}$.

Вариант 1.3. **1.** 45, 46, 47. **2.** 2. **3.** $28\sqrt{3}$. **4.** $\varphi + 2k\pi$, $-\frac{\varphi}{3} + \frac{(2n+1)\pi}{3}$, где $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\frac{\sqrt{865}}{21}$.

Вариант 1.4. **1.** 47, 48, 47. **2.** 4. **3.** 45. **4.** $\frac{\varphi}{3} + \frac{(2m+1)\pi}{3}$, $-\varphi + 2n\pi$, где $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{61}}$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\frac{\sqrt{427}}{15}$.

Решение варианта 2.1

1. Пусть x и y — скорости, с которыми подают воду в бассейн соответственно первый и второй насосы (выраженные, к примеру, в л/ч). Тогда объем всего бассейна составляет $V = 4(x+y)$ л. По условию, если сначала 60 % объема заполняется первой трубой, а оставшаяся часть — второй, то потребуется $\frac{3V}{5x} + \frac{2V}{5y} = 11$ часов. Подставляя найденную величину V, получаем уравнение

$$\frac{12(x+y)}{5x} + \frac{8(x+y)}{5y} = 11.$$

Умножив на $5xy$, преобразуем его к виду $8x^2 - 35xy + 12y^2 = 0$. Поделив на y^2 и решив квадратное относительно x/y уравнение, находим, что $x = 4y$ или $x = 3y/8$. По условию $x > y$, поэтому второй случай — посторонний. Тогда $V = 4(x + y) = 20y$, а искомое время $t = \frac{V}{x} = \frac{20y}{4y} = 5$.

Ответ: 5 часов.

2. Левая часть уравнения определена, если $2x - 2 > 0$, $x^2 - 3x + 2 > 0$. Решая эти неравенства, получаем, что значения x должны принадлежать $(2, +\infty)$. Воспользуемся тем, что $\log_{1/2} a = -\log_2 a$, и преобразуем уравнение к виду $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2x - 2)$. Отсюда $x^2 - 3x + 2 = 2x - 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Второй корень является посторонним.

Ответ: 4.

3. Пусть $HL = x$, $CH = 3x$. Прямоугольные треугольники AHL и CHK подобны, поскольку их острые углы AHL и CHK равны как вертикальные (рис. 196). Следовательно, $AH \cdot HK = LH \cdot HC$, $3x^2 = 48$, $x = LH = 4$, $CH = 12$. По теореме Пифагора находим $AL = \sqrt{AH^2 - LH^2} = 4\sqrt{15}$. Из подобия треугольников AHL и ABK получаем

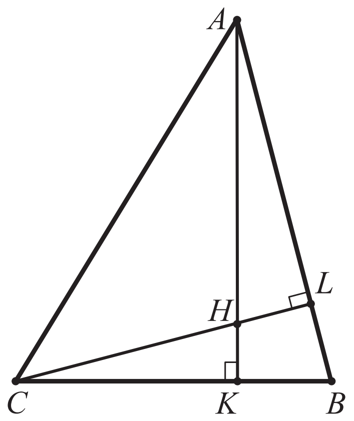

Рис. **196**

$$BK : AK = LH : AL, \; BK = \frac{AK \cdot LH}{AL} = \frac{(AH + HK) \cdot LH}{AL} = \frac{19}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\frac{19}{\sqrt{15}}$.

4. По основному свойству арифметической прогрессии сумма первого и третьего элементов равняется удвоенному второму элементу. Значит, должно выполняться уравнение $\sin 7x - \sin x = 2\sin 3x$. Преобразуем разность синусов в произведение и приведем это уравнение к виду $2\sin 3x \cos 4x = 2\sin 3x$ или $\sin 3x(\cos 4x - 1) = 0$. Отсюда либо $\sin 3x = 0$, $x = \frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$, либо $\cos 4x = 1$, $x = \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{k\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{2}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

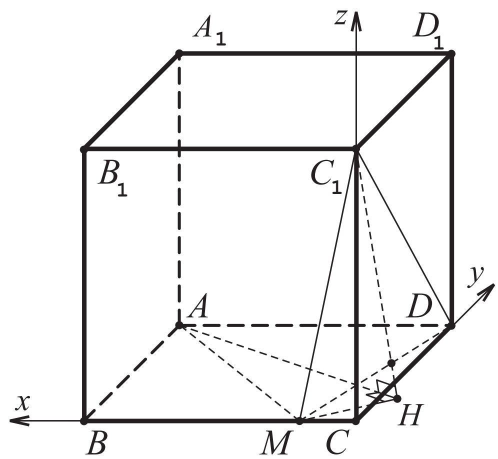

Рис. **197**

5. Введем систему координат, взяв в качестве начала вершину C и направив оси x, y, z вдоль лучей CB, CD и CC_1 (рис. 197). Легко определить координаты точек $A(4;\,4;\,0)$, $C_1(0;0;4)$, $D(0;4;0)$, $M(1;0;0)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки C_1, D и M. Подставляя их координаты в уравнение $ax + by + cz + d = 0$, получаем соотношения между коэффициентами: $4c + d = 0$, $4b + d = 0$, $a + d = 0$. Поскольку коэффициенты определяются с точностью до общего множителя, положим $d = -4$. Тогда $a = 4$, $b = c = 1$. Расстояние h от любой точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости с уравнением $ax+by+cz+d = 0$, вычисляется по формуле

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Используя эту формулу, находим $AH = \dfrac{|16 + 4 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. Искомая длина отрезка MH находится по теореме Пифагора: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 5$, $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Ответы и указания к вариантам 2.2−2.4

Вариант 2.2. **1.** 6 часов. **2.** 2. **3.** $\dfrac{11}{\sqrt{15}}$. **4.** $\dfrac{k\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{\dfrac{161}{17}}$.

Вариант 2.3. **1.** 4 часа. **2.** 3. **3.** $\sqrt{153}$. **4.** $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $\dfrac{n\pi}{4}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Вариант 2.4. **1.** 6 часов. **2.** 1. **3.** $\sqrt{297}$. **4.** $\dfrac{k\pi}{4}$, $\dfrac{2n\pi}{3}$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\dfrac{6\sqrt{66}}{11}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1986

Решение варианта 1

1. Выражая $\cos 2x$ и $\sin^2 x$ через $\cos x$, приводим данное уравнение к квадратному $3\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$ относительно $\cos x$. Из двух его корней, $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ и $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$, первый корень — посторонний, так как $\frac{1+\sqrt{7}}{3} > 1$. Отсюда $\cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$, $x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$.

2. Вычислив производную данной функции, получаем $y' = 3x^2 - 12x + 6$. Производная обращается в нуль в точках $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. Вторая из них, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, принадлежит рассматриваемому отрезку $[1, 6]$. Учитывая, что $y'(x) < 0$ при $x < x_2$, $y'(x) > 0$ при $x > x_2$ для $x \in [1, 6]$, приходим к выводу, что x_2 — точка локального минимума данной функции, убывающей на отрезке $[1, x_2]$ и возрастающей на отрезке $[x_2, 6]$. Таким образом, наибольшее значение функция принимает в одном из концов отрезка $[1, 6]$. Вычисляя значения $y(1) = 4$ и $y(6) = 39$, находим, что наибольшее значение функции равно 39 и достигается оно при $x = 6$.

Ответ: 39 (при $x = 6$).

3. По условию точка C — середина дуги AB окружности O_2, поэтому C лежит на линии центров O_1O_2. Пусть K — точка пересечения отрезка O_1O_2 с дугой AB окружности O_1. Положим $\alpha = \angle AO_1O_2$, $\beta = \angle AO_2O_1$. Тогда $\angle NBA = \beta/2$, так как он опирается на ту же дугу AC окружности O_2, что и центральный угол AO_2O_1. Учитывая, что вписанные углы NMA и NBA опираются на дугу AN окружности O_1, получаем $\angle NMA = \beta/2$. Аналогичным образом, $\angle MNB = \beta/2$ (рис. 198).

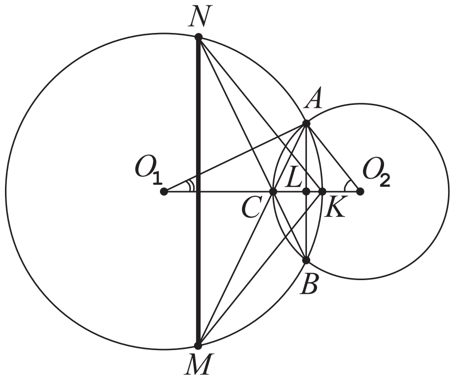

Рис. **198**

Рассмотрим теперь угол AMK, вписанный в O_1 и опирающийся на дугу AK. Поскольку центральный угол AO_1K равен α, то угол AMK равен $\alpha/2$. Аналогично, $\angle BNK = \alpha/2$. Отсюда получаем, что $\angle KMN = \angle KNM = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, и тогда $\angle NKM = \pi - 2\angle KMN = \pi - (\alpha+\beta)$. Окружность O_1 описана около треугольника MKN, ее радиус $R_1 = 5$, поэтому по теореме синусов $MN = 2R_1\sin(\pi - \alpha - \beta) = 10\sin(\alpha+\beta)$.

Пусть теперь L — точка пересечения отрезка O_1O_2 и хорды AB. Тогда L — середина AB, $AL = 2$, AB и O_1O_2 перпендикулярны, поэтому из прямоугольных треугольников O_1AL и O_2AL находим, что $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$ и, следовательно, $\cos\alpha = \sqrt{21}/5$, $\cos\beta = \sqrt{5}/3$. По формуле синуса суммы двух аргументов вычисляем $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2}{15}(\sqrt{21}+\sqrt{5})$ и, наконец, $MN = \frac{4}{3}(\sqrt{21}+\sqrt{5})$.

Ответ: $\frac{4}{3}(\sqrt{21}+\sqrt{5})$.

4. Левая часть неравенства определена при условиях $x+1>0$, $x+1\neq 1$ и $\dfrac{3x}{5x-8} > 0$. Решая эти неравенства, находим область определения $x \in (-1,\,0) \cup \left(\frac{8}{5},\,\infty\right)$. Далее рассмотрим два случая.

А. Пусть $-1 < x < 0$, т. е. $0 < x+1 < 1$. Тогда исходное неравенство эквивалентно следующему: $\dfrac{3x}{5x-8} < x+1$. Учитывая, что на рассматриваемом интервале $5x-8<0$, приходим к квадратному неравенству $5x^2-6x-8<0$, которое справедливо для $-\frac{4}{5} < x < 2$. Учитывая условие $-1 < x < 0$, получаем промежуток $-\frac{4}{5} < x < 0$.

Б. Пусть $x > \frac{5}{8}$. Тогда $x+1>1$ и данное неравенство преобразуется к виду $\dfrac{3x}{5x-8} > x+1$, но $5x-8>0$, поэтому снова приходим к квадратному неравенству $5x^2 - 6x - 8 < 0$, которое справедливо для $-\frac{4}{5} < x < 2$. Учитывая, что $x > \frac{8}{5}$, находим второй промежуток $\frac{8}{5} < x < 2$ решений исходного неравенства.

Объединяя найденные множества, получим искомый результат.

Ответ: $\left(-\frac{4}{5}, 0\right) \cup \left(\frac{8}{5}, 2\right)$.

5. Пусть N_1 — такая точка на ребре SA, что $AN_1 = 1$ (рис. 199). Так как $AN_1 = \frac{1}{3}SA$, $BN = \frac{1}{3}SB$, то прямая NN_1 параллельна прямой AB. В то же время KL — средняя линия треугольника ABC, поэтому $KL \parallel AB$. Отсюда следует, что $NN_1 \parallel KL$ и, значит, прямая NN_1 параллельна плоскости MKL, а расстояния от N_1 и N до этой плоскости равны между собой. Пирамиды $NMKL$ и N_1MKL имеют общее основание MKL и одинаковые высоты, опущенные из вершин N и N_1, поэтому объемы их равны.

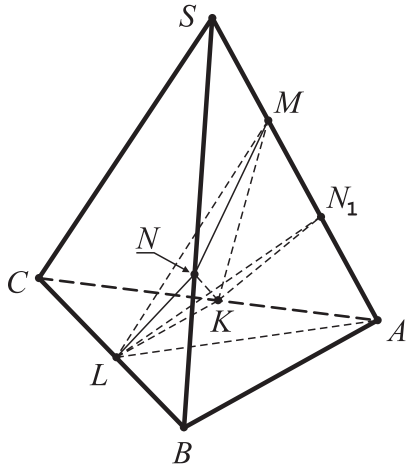

Рис. **199**

Объем пирамиды N_1MKL легко вычислить как разность объемов пирамид $MAKL$ и N_1AKL с общим основанием AKL. Поскольку KL — средняя линия и $KL = \frac{1}{2}AB$, то площадь треугольника AKL составляет $\frac{1}{4}$ площади ABC и равна $\frac{1}{8}$. Покажем, что SK — высота пирамиды $SABC$. Действительно, SAC — равнобедренный треугольник. Его медиана SK одновременно является высотой, т. е. $SK \perp AC$. С другой стороны, K — середина гипотенузы AC треугольника ABC, поэтому $KB = KC$, треугольники SKB и SKC равны по трем сторонам и, значит, $SK \perp KB$. Следовательно, SK — перпендикуляр к плоскости ABC. Его длину находим из прямоугольного треугольника SKC, где $SC = 3$, $CK = \sqrt{2}/2$, поэтому $SK = \sqrt{34}/2$.

Точки N_1 и M делят ребро SA на три равные части, следовательно, высоты пирамид $MAKL$ и N_1AKL, опущенные на основание AKL, равны соответственно $\frac{2}{3}SK$ и $\frac{1}{3}SK$, т. е. $\sqrt{34}/3$ и $\sqrt{34}/6$. Отсюда объем пирамиды $MAKL$ равен $\sqrt{34}/72$, объем N_1AKL составляет $\sqrt{34}/144$, а их разность (т. е. искомый объем $NMKL$) получается равной $\sqrt{34}/144$.

Ответ: $\sqrt{34}/144$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}-2}{3} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** -28 (при $x = 4$). **3.** $\frac{1}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{8})$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, K — точка пересечения дуги AB окружности O_1 с отрезком O_1O_2, $\angle AO_1K = \alpha$, $\angle AO_2K = \beta$. Тогда в треугольнике MNK угол MKN равен $\alpha+\beta$. **4.** $(1/4,\ 1)\cup(5/2,\ 3)$. **5.** $5\sqrt{3}/2$. *Указание.* Пусть N_1 — такая точка на ребре DC, что $DN_1 = 2$. Объем данной пирамиды $MNKL$ равен объему пирамиды DN_1KL.

Вариант 3. **1.** $\pm\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** 16 (при $x = 2$). **3.** $\frac{1}{2}(12-3\sqrt{7})$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, K — точка пересечения меньшей дуги AB окружности O_2 с прямой O_1O_2, $\angle AO_2K = \alpha$, $\angle AO_1K = \beta$. Тогда в треугольнике MNK угол MKN равен $\beta-\alpha$. **4.** $(3/2,\ 2)\cup(3,\ 4)$. **5.** $\sqrt{11}/144$. *Указание.* Пусть M_1 — точка на ребре SC, для которой $CM_1 = 2/3$. Объем данной пирамиды $MNKL$ равен объему пирамиды M_1NKL.

Вариант 4. **1.** $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-3}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **2.** 7 (при $x = -1$). **3.** 8. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, K — точка пересечения дуги AB окружности O_1 с отрезком O_1O_2, $\angle AO_1K = \alpha$, $\angle AO_2K = \beta$. Тогда в треугольнике MNK угол MKN равен $\alpha + \beta = 90^\circ$, т. е. MN — диаметр. **4.** $(1/3,\ 1) \cup (7/3,\ 3)$. **5.** $\sqrt{15}/36$. *Указание.* Объем данной пирамиды $KLMN$ совпадает с объемом пирамиды $BLMN$.

1987

Решение варианта 1

1. Заметим, что $\cos 3x = \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$. Преобразуем сумму синусов в произведение и приведем уравнение к виду $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Отсюда $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ или $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Выделим среди найденных корней те, которые удовлетворяют условию

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0. \qquad (1)$$

Период функции $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ равен 4π, поэтому сначала рассмотрим те из найденных корней, которые лежат на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ длины 4π. Для x из этого отрезка условие (1) выполнено в том случае, когда $0 < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Из первой серии корней в этот интервал попадают $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$ и $\frac{11\pi}{8}$, а из второй $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. К любому из этих значений можно добавить период 4π, умноженный на произвольное целое число, и все условия задачи останутся выполненными. Заметив, что $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{4} = \frac{10\pi}{8}$, объединим найденные корни одной формулой.

Ответ: $\frac{\pi k}{8} + 4\pi n$ $(n \in \mathbb{Z},\ k = -1, 2, 3, 7, 10, 11)$.

2. Заметим, что $x^2 - x + 1 > 0$ для всех x, но поскольку $\log_2(x^2 - x + 1)$ является знаменателем дробей, должно выполняться условие $x^2 - x + 1 \neq 1$, т. е. $x \neq 0$ и $x \neq 1$. В то же время $\log_2(x + 3)$ определен при $x > -3$. Рассмотрим два различных случая.

А. Пусть $\log_2(x^2 - x + 1) > 0$, т. е. $x^2 - x + 1 > 1$. Это верно для тех x из области определения, которые удовлетворяют условиям $-3 < x < 0$ или $x > 1$. Для таких значений x исходное неравенство эквивалентно неравенству $1 + \log_2(x^2 - x + 1) \geqslant \log_2(x + 3)$. Оно, в свою очередь, приводится к виду $2x^2 - 3x - 1 \geqslant 0$. Последнему неравенству удовлетворяют числа $x \leqslant \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$ и $x \geqslant \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$. С учетом исходных ограничений получаем для x два промежутка: $-3 < x \leqslant \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$, $x \geqslant \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$.

Б. Пусть теперь $\log_2(x^2 - x + 1) < 0$, т. е. $0 < x < 1$. В этом случае исходное неравенство эквивалентно неравенству $1 + \log_2(x^2 - x + 1) \leqslant \log_2(x + 3)$. Оно приводится к виду $2x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$ и выполняется на всем промежутке $0 < x < 1$.

Объединив все найденные промежутки изменения x, получим решение задачи.

Ответ: $\left(-3, \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right] \cup (0, 1) \cup \left[\frac{3 + \sqrt{17}}{4}, \infty\right)$.

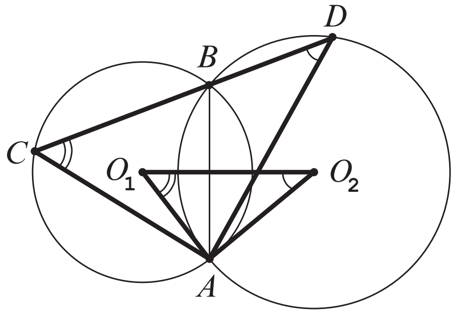

Рис. **200**

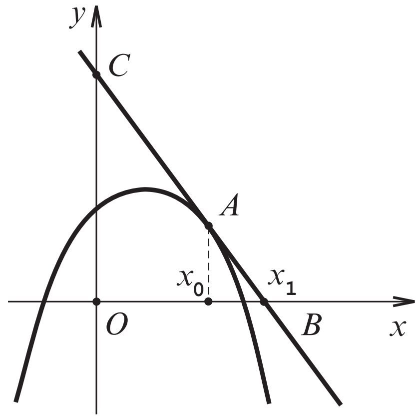

Рис. **201**

3. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 200). Заметим, что треугольник AO_1O_2 прямоугольный, так как $O_1O_2^2 = O_2A^2 + {}$ $+ O_1A^2$, его площадь равна 6. Хорда AB перпендикулярна линии центров O_1O_2, поэтому центральный угол O_1O_2A окружности O_2 опирается на половину дуги AB этой же окружности. Вписанный угол BDA измеряется половиной дуги AB, на которую опирается, поэтому $\angle BDA = \angle O_1O_2A$. Аналогичным образом доказывается, что $\angle ACB = \angle AO_1O_2$. Следовательно, треугольники ACD и AO_1O_2 подобны, коэффициент подобия $k = CD : O_1O_2 = 8/5$. Тогда отношение их площадей S_{ACD} и $S_{AO_1O_2}$ равно k^2, и поэтому $S_{ACD} = {}$ $= k^2\, S_{AO_1O_2} = 384/25$.

Ответ: $384/25$.

4. Пусть абсцисса точки касания A равна x_0, тогда ее ордината $y_0 = -x_0^2 + 2x_0 + 2$. Запишем уравнение касательной к параболе в точке $A\,(x_0;\, y_0)$. Производная $y'(x_0) = -2x_0 + 2$, и поскольку уравнение касательной в общем случае имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, мы получаем $y + x_0^2 - 2x_0 - 2 = 2(1 - x_0)(x - x_0)$, или $y = 2(1 - x_0)x + x_0^2 + 2$.

Полагая $y = 0$, находим абсциссу $x_1 = \dfrac{x_0^2 + 2}{2(x_0 - 1)}$ точки B (в случае $x_0 = 1$ касательная параллельна оси Ox и точка B отсутствует). По условию $CA = 2AB$, поэтому $x_1 = \frac{3}{2}\,x_0$ (рис. 201), и мы получаем уравнение $\frac{3}{2}\,x_0 = \dfrac{x_0^2 + 2}{2(x_0 - 1)}$ для определения x_0. Его корнями являют-

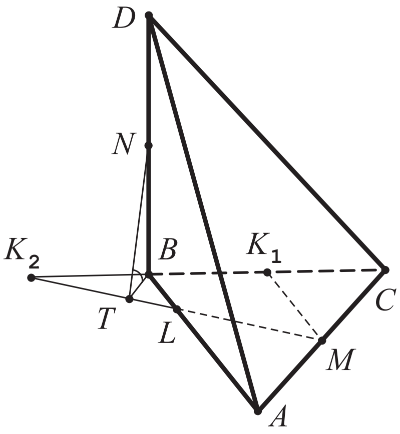

Рис. **202**

ся числа $-1/2$ и 2. Известно, что точка A лежит в первой четверти координатной плоскости, поэтому $x_0 = 2$. Тогда $y_0 = 2$ и уравнение касательной имеет вид $y = -2x + 6$.

Ответ: $y = -2x + 6$.

5. Пусть L и K — точки пересечения заданной плоскости (обозначим ее через α) с ребром AB и прямой BC соответственно, а угол, который она образует с плоскостями ABC и ABD, равен φ. Прямоугольные треугольники LNB и LKB являются проекциями треугольника LNK на плоскости ABD и ABC. Если площадь LNK равна S, то площадь каждой из проекций составляет $S\cos\varphi$, т. е. треугольники LNB и LKB равновелики. Катет LB у них общий, поэтому равны два других катета — BK и BN.

Известно, что $BN = 1$, отсюда следует, что точка K может занимать одно из двух положений: либо она совпадает с серединой ребра BC, либо лежит на продолжении BC за точку B на расстоянии 1 от B (на рис. 202 это точки K_1 и K_2). Но прямая K_1M параллельна AB, поэтому если бы заданная плоскость α проходила через точку K_1, она не могла бы пересечь ребро AB. Следовательно, плоскость α проходит через точку K_2.

Заметим, что $K_2B = K_1B$, отрезок LB является средней линией треугольника MK_2K_1, поэтому $LB = \frac{1}{2}\,MK_1 = \frac{1}{4}\,AB = \frac{1}{2}$. Опустим в прямоугольном треугольнике K_2LB перпендикуляр BT на гипотенузу LK_2. Так как прямая NB перпендикулярна плоскости ABC, то по теореме о трех перпендикулярах $NT \perp LK_2$ и, значит, угол NTB — искомый угол φ двугранного угла между плоскостями α и ABC. В треугольнике K_2LB: $BK_2 = 1$, $BL = 1/2$, поэтому гипотенуза $K_2L = \sqrt{5}/2$ и высота $BT = 1/\sqrt{5}$. Отсюда $\operatorname{tg}\varphi = NB : BT = \sqrt{5}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi k}{8} + 4\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $k = -2, -1, 3, 6, 7, 11$). **2.** $(\sqrt{2/3}, 1] \cup (\sqrt{5/3}, \infty)$. **3.** $16/\sqrt{5}$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей. Общая хорда AB является диаметром меньшей из окружностей O_2, треугольники AO_1O_2 и ADC подобны, коэффициент их подобия равен отношению биссектрис углов O_1AO_2 и DAC. **4.** $y = 6x + 9$. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$. *Указание.* Пусть K — середина ребра AB. Заданная плоскость проходит через точку N_1, которая лежит на продолжении отрезка CK за точку K на расстоянии $N_1K = NK = \sqrt{3}$.

Вариант 3. **1.** $\frac{\pi k}{8} + 4\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $k = 1, -2, -3, -7, -10, -11$). **2.** $\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. **3.** $\frac{576}{25}$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, M и N — точки их касания с общей касательной. Тогда $CD = 2MN$, треугольники ACD и AO_1O_2 подобны с коэффициентом подобия $k = CD : O_1O_2$. **4.** $y = -4x - 12$. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{17}$. *Указание.* Пусть точка N лежит на луче DA, $ND = 3$, K — середина отрезка BN. Заданная плоскость проходит через точку K.

Вариант 4. **1.** $\frac{\pi k}{8} + 4\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $k = 5, 9, 10, 13, 17, 18$). **2.** $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$. **3.** $3\sqrt{13}$. *Указание.* Пусть K и L — середины хорд AB и AC, O_2M — перпендикуляр, опущенный из центра O_2 на прямую O_1K. Тогда $O_1K = O_1M + MK$, и, выражая длины отрезков, входящих в это равенство, через радиусы окружностей, расстояние O_1O_2 и величину $x = AL$, получим уравнение для определения x. **4.** $y = 3x - 9/4$. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть точка K лежит на ребре AB, $AK = 1$. Заданная плоскость проходит через точку K.

1988

Решение варианта 1

1. Левая часть уравнения легко разлагается на множители и оно приводится к виду $\operatorname{ctg} x(1 + \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x)(1 + \frac{1}{9}\operatorname{ctg}^2 x) = 0$. Отсюда или $\operatorname{ctg} x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, или $\operatorname{ctg} x = -3$, и тогда $x = -\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

2. Разделим неравенство на 3^{2x}, поделив на 3^x каждый из сомножителей. Полагая $y = (2/3)^x$, данное неравенство можно записать в виде $(2y-3)\sqrt{y^2-8y+11} \geqslant 0$. Левая часть определена, если $y^2 - 8y + 11 \geqslant 0$, отсюда $y \leqslant 4 - \sqrt{5}$ или $y \geqslant 4 + \sqrt{5}$.

Если $y = 4 + \sqrt{5}$ или $y = 4 - \sqrt{5}$, то неравенство справедливо независимо от знака выражения $2y - 3$. В том случае, когда $y < 4 - \sqrt{5}$ или $y > 4 + \sqrt{5}$, выполняется $y^2 - 8y + 11 > 0$, поэтому должно быть $2y - 3 \geqslant 0$, т. е. $y \geqslant 3/2$. Учитывая соотношение $4 - \sqrt{5} > 3/2$, заключаем, что множество решений неравенства относительно y есть $[3/2,\, 4 - \sqrt{5}] \cup [4 + \sqrt{5},\, \infty)$.

Функция $y = (2/3)^x$ и обратная ей $x = \log_{2/3} y$ являются убывающими, поэтому множество решений исходного неравенства состоит из промежутков $x \leqslant \log_{2/3}(4 + \sqrt{5})$, $\log_{2/3}(4 - \sqrt{5}) \leqslant x \leqslant -1$.

Ответ: $(-\infty,\, \log_{2/3}(4 + \sqrt{5})] \cup [\log_{2/3}(4 - \sqrt{5}),\, -1]$.

3. Пусть L и N — точки пересечения биссектрисы угла C параллелограмма с прямой AB и отрезком DM соответственно, E — середина стороны DC. Если бы точка L принадлежала отрезку AM (рис. 203), то площадь треугольника LMN была бы меньше площади треугольника AOM, равной половине площади AMD, что противоречит условию задачи. Отсюда следует, что L принадлежит продолжению отрезка AB за точку A, а биссектриса угла C пересекает сторону AD параллелограмма в некоторой точке K (рис. 204).

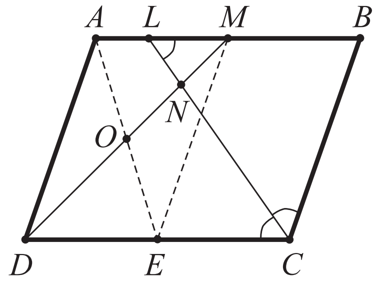

Рис. **203**

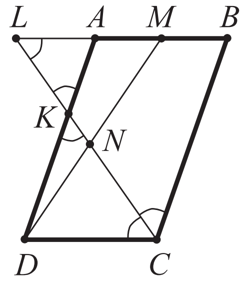

Рис. **204**

Положим $AD = x$. Каждый из углов BLC и BCL равен углу LCD, поэтому треугольник LBC равнобедренный и $BL = BC = x$. Аналогично треугольник KDC является равнобедренным, $DK = DC = 4$. Заметим, что $LM = BL - BM = x - 2$. Треугольники LMN и DNC подобны, поэтому $\frac{MN}{DN} = \frac{LM}{CD} = \frac{x-2}{4}$. Отсюда следует, что $\frac{DM}{DN} = \frac{DN + MN}{DN} = \frac{x+2}{4}$. Пусть $\angle ADN = \varphi$. Тогда площадь S_{DKN} треугольника DKN равна $\frac{1}{2}\,DK \cdot DN \cdot \sin\varphi$, а площадь S_{ADM} треугольника ADM составляет $\frac{1}{2}\,AD \cdot DM \cdot \sin\varphi$. Учитывая, что $DK = 4$, $AD = x$, $DM = \frac{1}{4}\,(x+2) \cdot DN$ и $S_{ADM} = 2S_{DKN}$, получаем уравнение $x(x+2) = 32$ для определения x. По смыслу задачи $x > 0$, поэтому из двух корней этого уравнения выбираем положительный, т. е. $x = \sqrt{33} - 1$. Неравенство $\sqrt{33} - 1 > 4$ подтверждает, что $BL > AB$ и найденное значение x соответствует геометрическому предположению, при котором проводились рассуждения.

Ответ: $\sqrt{33} - 1$.

4. Сложив неравенства системы, получим следствие $(x-y)^2 - 6(x-y) + 9 = (x-y-3)^2 \leqslant 0$, возможное только в том случае, когда $y = x-3$. Подставляя разность $x-3$ вместо y в каждое из неравенств системы, заключаем, что одновременно должны выполняться два соотношения: $x^2 - 18 \leqslant 0$ и $18 - x^2 \leqslant 0$. Это справедливо только для чисел $x_1 = 3\sqrt{2}$ и $x_2 = -3\sqrt{2}$. Им соответствуют значения $y_1 = 3\sqrt{2} - 3$ и $y_2 = -3(\sqrt{2} + 1)$.

Ответ: $(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2} - 3)$, $(-3\sqrt{2};\ -3\sqrt{2} - 3)$.

5. Пусть K — точка касания сферы с ребром AA_1, O — ее центр. Тогда OK — перпендикуляр к прямой AA_1 (рис. 205). Проведем через точку K плоскость α, перпендикулярную прямой AA_1 (а значит, и прямым BB_1 и DD_1). Она пересечет ребра BB_1 и DD_1 призмы соответственно в точках M и N.

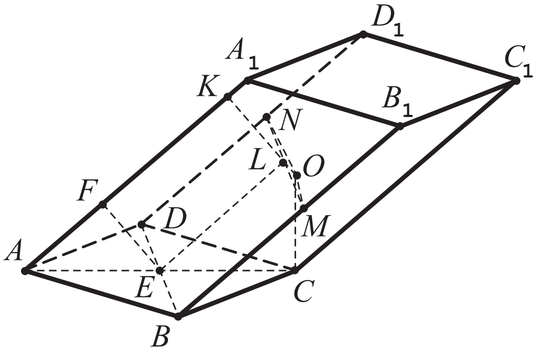

Рис. **205**

Точка O лежит в проведенной плоскости α, OM и ON перпендикулярны к прямым BB_1 и DD_1, поэтому M и N — точки касания сферы с этими прямыми. Заметим, что $AK = AC = 8$, $BM = BC = 5$, $DN = DC = 5$ как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки. Так как C — точка касания сферы с основанием, то OC — перпендикуляр к плоскости $ABCD$. Пусть E — точка пересечения AC и BD. Из прямоугольного треугольника ABE, у которого $AB = 5$, $AE = 4$, находим $BE = 3$. Следовательно, параллелограмм $DBMN$ имеет стороны $BD = 6$, $BM = 5$. Если L — середина MN, то $LM = LN = 3$, $EL = 5$, прямая EL параллельна ребрам призмы, поэтому она перпендикулярна плоскости α и, в частности, прямым MN и OL. В равнобедренном треугольнике NOM точка L — середина основания, поэтому OL — его высота. Если R — радиус сферы, то $OL = \sqrt{OM^2 - ML^2} = \sqrt{R^2 - 9}$.

Плоскость ECO перпендикулярна прямым BD и MN, поскольку BD перпендикулярна прямым EC и CO. Если P — точка пересечения этой плоскости с прямой MN, то $OP \perp MN$. Отсюда следует, что $P = L$, а прямая EL лежит в плоскости ECO. Но точка A лежит в этой же плоскости, причем $AA_1 \parallel EL$. Значит, прямая AA_1 лежит в плоскости ECO. Заметим, что OL и OK — перпендикуляры, опущенные из точки O в этой плоскости на параллельные прямые AA_1 и EL. Поэтому O, L и K лежат на одной прямой, т. е. L — точка пересечения OK и MN. Опустим, наконец, перпендикуляр EF на AK. Тогда $KF = EL = 5$, $AF = AK - KF = 3$ и из прямоугольного треугольника AFE находим $KL = EF = \sqrt{7}$. Диаметр сферы не может быть меньше MN, поэтому $R \geqslant 3$. Поскольку $KL < 3$, то $KL < OK = R$, и, значит, $KL + LO = KO$. Отсюда получаем уравнение $\sqrt{7} + \sqrt{R^2 - 9} = R$ для определения R. Решая его, находим $R = 8/\sqrt{7}$. Найденное значение R больше трех.

Ответ: $8/\sqrt{7}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** πk; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $[\log_{5/2} 2, \log_{5/2}(5 - \sqrt{5})] \cup [\log_{5/2}(5 + \sqrt{5}), \infty)$. **3.** $7 + \sqrt{17}$. **4.** $(2 - 2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $(2 + 2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$. **5.** $\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}$. *Указание.* Если N, K, L, P —

точки касания сферы соответственно с ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, то $AN = DP = \sqrt{5}$, $BK = CL = 2$ и диаметр сферы равен диагонали прямоугольника $NKLP$.

Вариант 3. **1.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \arccos(-\frac{1}{3}) + 2\pi k$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty,\, \log_{2/5}(4+\sqrt{2})\,] \cup [\,\log_{2/5}(4-\sqrt{2}),\, -1\,]$. **3.** $(5+\sqrt{17})/2$. *Указание.* Пусть D — точка пересечения отрезков CL и MK. Тогда если $AL = x \cdot AB$, то $LM = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot AB$, а отношение площадей треугольников LMD и ALC равно $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^2$. **4.** $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$. **5.** $3\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть K, L и M — соответственно точки касания сферы с ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Тогда $AK = 3$, $BL = CM = 5$, радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника KLM.

Вариант 4. **1.** πk; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k,\, n \in \mathbb{Z})$. **2.** $\left[0,\, \log_{3/2}(3-\sqrt{3})\,\right] \cup [\,\log_{3/2}(3+\sqrt{3}),\, \infty)$. **3.** $(3+\sqrt{17})/4$. *Указание.* Пусть N — точка пересечения отрезков CL и AM. Если $AL = x \cdot AB$, то $AN = \frac{2x}{2x+1} AM$. **4.** $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2};\ -3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2};\ -3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. **5.** $\sqrt{3(1+2\sqrt{3})/11}$. *Указание.* Пусть K, L, N — соответственно точки касания сферы с ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Тогда $AK = \sqrt{3}$, $BL = CN = 1$, радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника KLN.

1989

Решение варианта 1

1. Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 9. По признаку делимости на 4 число $67m1n$ кратно 4 лишь в случае, когда двузначное число $1n$ делится на 4. Следовательно, n равно либо 2, либо 6.

Если $n = 2$, то число $67m12$ будет кратно 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, то есть $m + 16$, делится на 9. Это возможно лишь при $m = 2$. Аналогично в случае $n = 6$ имеем $m = 7$.

Ответ: 67 212; 67 716.

2. Заметим, что решениями данного уравнения могут быть только те значения x, для которых $\sin x \geqslant 0$. Возводя уравнение в квадрат, приведем его к виду $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$. Получилось квадратное уравнение относительно $\cos x$ с корнями -3 и $\frac{1}{2}$. Корень -3 посторонний, так как $\cos x \geqslant -1$. Значит, $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Учитывая условие $\sin x \geqslant 0$, заключаем, что $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Отметим также, что нет необходимости проверять неотрицательность выражения $5\cos x - 1$, стоящего под знаком радикала в исходном уравнении. Найденные значения x удовлетворяют уравнению $2\sin^2 x = 5\cos x - 1$, поэтому указанное условие выполняется автоматически.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3. Достаточно найти периметр треугольника, тогда его площадь может быть вычислена по формуле $S = \frac{1}{2}Pr$, где P — периметр, r — радиус вписанной окружности.

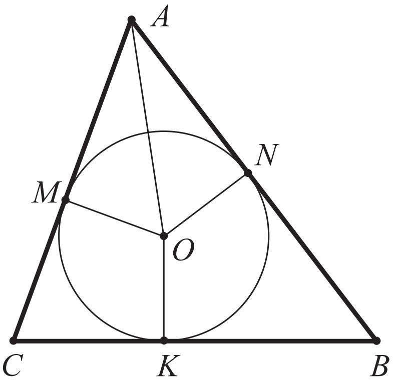

Рис. **206**

Пусть M, N и K — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, AB и BC соответственно, O — центр окружности, $\angle A = 60^\circ$ (рис. 206). Очевидно, что $AM = AN$, $BN = BK$, $CM = CK$. Следовательно, $P = (AM + AN) + (CM + BN) + (CK + BK) = 2(AN + BC)$. Длину AN легко найти из треугольника AON: $AN = r \operatorname{ctg} 30^\circ = 3$; сторону BC вычислим по теореме синусов: $BC = \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{3}} \times \sin 60^\circ = 7$. Таким образом, $P = 20$ и $S = 10\sqrt{3}$.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

4. Основание логарифма должно быть отлично от нуля и от единицы, поэтому $x \neq \frac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Переходя к основанию $|\sin x|$, запишем исходное уравнение в виде

$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \log_{|\sin x|} 25.$$

Следовательно, $0 < x^2 - 14x + 73 < 25$, так как основание логарифма

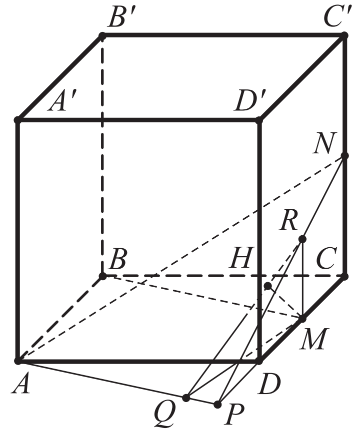

Рис. **207**

меньше 1. Решая полученные квадратные неравенства, находим $6 < x < 8$. Из этого интервала следует исключить точки вида $\frac{\pi k}{2}$, которых в нем оказывается две: 2π и $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $6 < x < 8$; $x \neq 2\pi$, $x \neq \frac{5\pi}{2}$.

5. Через прямую AN проведем плоскость α, параллельную прямой BM (рис. 207). Тогда расстояние от любой точки прямой BM до плоскости α будет искомым. Для построения α проведем прямую AP параллельно BM (точка P лежит на прямой CD). Плоскость APN и есть α. Опустим на AP перпендикуляр MQ, а также восстановим перпендикуляр к основанию куба в точке M, продолжив его до пересечения с PN в некоторой точке R. Плоскости APN и MQR перпендикулярны. Но тогда высота MH треугольника MQR и будет искомым расстоянием.

Понятно, что $ABMP$ — параллелограмм. Значит, $AB = MP = 1$. Ввиду подобия треугольников MPR и CPN имеем $MR = \frac{MP \cdot NC}{PC} = \frac{1}{3}$. Углы PMQ и MBC равны, так как их стороны попарно перпендикулярны. Следовательно, прямоугольные треугольники PQM и BCM подобны. Поэтому $MQ = \frac{MP \cdot BC}{MB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Теперь высота MH прямоугольного треугольника MQR легко выражается через катеты MR и MQ: $MH = \frac{MR \cdot MQ}{\sqrt{MR^2 + MQ^2}} = \frac{2}{\sqrt{41}}$.

Ответ: $2/\sqrt{41}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 21 570; 24 570; 27 570; 22 575; 25 575; 28 575. **2.** $-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). **3.** $(6 - 3\sqrt{3})/2$. *Указание.* Пусть ABC — данный треугольник, угол A равен $150°$, M — точка касания вписанной окружности со стороной AB, r — радиус этой окружности. Как и в первом варианте, имеем $21 = 2(BC + AM)$. Длину BC найдем по теореме синусов, а $AM = r \operatorname{ctg} 75°$. Подставив значения BC и AM

в предыдущее равенство, найдем r. **4.** $1 < x < \frac{5}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{4}$. **5.** $2\sqrt{2/91}$. *Указание.* Через прямую BM проведем плоскость α, параллельную AN. Расстояние от любой точки прямой AN до плоскости α будет искомым. Можно, например, вычислить расстояние от точки пересечения AN и BD до плоскости α.

Вариант 3. **1.** 51 750; 51 732; 51 714; 51 768; 51 786. **2.** $\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $17/\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть ABC — данный треугольник, угол A равен 45°, P — периметр треугольника, M — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Как и в первом варианте, $P = 2(BC + AM) = 2BC + 2\operatorname{ctg} 22{,}5^\circ = 2BC + 2(\sqrt{2} + 1)$. Зная радиус вписанной окружности и площадь треугольника, находим сначала $P = 36 + 2\sqrt{2}$, а затем BC. Теперь радиус описанной окружности легко вычисляется по теореме синусов. **4.** $3 < x < 5$, $x \neq \pi$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$. **5.** $\sqrt{3/115}$. *Указание.* Пусть M — середина $A'C'$, тогда искомое расстояние равно расстоянию от любой точки прямой $A'C$ до плоскости KLM. Удобно вычислять расстояние от точки C до этой плоскости.

Вариант 4. **1.** 74 430; 74 835. **2.** $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $9\sqrt{2} + 1$. *Указание.* Пусть ABC — данный треугольник, угол A равен 135°, M — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Нетрудно понять, что периметр треугольника равен $2(BC + AM) = 2BC + 2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = 40$. Отсюда находим $BC = 18 + \sqrt{2}$. Теперь радиус описанной окружности легко вычисляется по теореме синусов. **4.** $\frac{1}{2} < x < 2$, $x \neq \frac{\pi}{4}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$. **5.** $\sqrt{5/17}$. *Указание.* Через прямую AL проведем плоскость α, параллельную BK. Расстояние от любой точки BK до плоскости α будет искомым. Удобно вычислять расстояние от центра треугольника ABC до плоскости α.

1990

Решение варианта 1

1. Приведем уравнение к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$. Используя формулы $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$, получаем $2\sin^2 x - 9\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$. Значения x, при которых $\cos x = 0$, корнями этого уравнения заведомо не являются. Поэтому разделим уравнение на $\cos^2 x$ и положим $y = \operatorname{tg} x$, тогда $2y^2 - 9y - 5 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg} x_1 = 5$, $x_1 = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, или $\operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Объединяя обе серии, приходим к решению задачи.

Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n;\ \ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k\ \ (n,\, k \in \mathbb{Z})$.

2. Рассмотрим два случая.

А. Пусть $x^2 + 2x - 24 \geqslant 0$, т.е. $x \in (-\infty,\ -6\,] \cup [\,4,\ \infty)$. Тогда $|x^2+2x-24| = x^2+2x-24$, и исходное неравенство преобразуется к виду $x^2-4x-32 > 0$. Его решения образуют множество $(-\infty,\ -4) \cup (8,\ \infty)$. Учитывая исходные ограничения, получаем, что в данном случае $x \in (-\infty,\ -6\,] \cup (8,\ \infty)$.

Б. Пусть $x^2 + 2x - 24 < 0$, т.е. $x \in (-6,\, 4)$. Теперь уже $|x^2+2x-24| = 24-2x-x^2$, поэтому исходное неравенство приводится к виду $x^2+8x-16 < 0$. Полученное неравенство справедливо для $x \in (-4-4\sqrt{2},\ -4+4\sqrt{2}\,)$. Поскольку $-4-4\sqrt{2} < -6 < -4+4\sqrt{2} < 4$, пересечение исходного и найденного промежутков дает интервал $-6 < x < -4+4\sqrt{2}$.

Объединяя найденные множества и учитывая, что $(-\infty,\ -6\,] \cup (-6,\ -4+4\sqrt{2}\,) = (-\infty,\ -4+4\sqrt{2}\,)$, приходим к ответу.

Ответ: $(-\infty,\ -4+4\sqrt{2}\,) \cup (8,\ \infty)$.

3. Пусть O — центр окружности S, O_1 — центр искомой окружности, L и M — точки ее касания с AD и S (рис. 208). Так как $\angle ABC = 30°$, то $\angle AOC = 60°$ (как центральный, опирающийся на ту же дугу AC). Следовательно, AOC — правильный треугольник, $AC = R$.

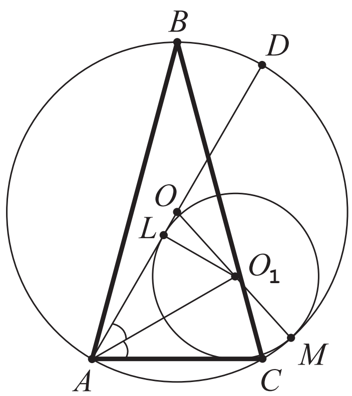

Рис. **208**

Заметим, что точки O, O_1 и M лежат на одной прямой. Если обозначить радиус O_1M искомой окружности через x, то $OO_1 = R - x$. В то же время AO_1 — биссектриса угла DAC, поэтому $\angle O_1AL = 30°$ и в прямоугольном треугольнике AO_1L: $AO_1 = LO_1/\sin 30^\circ = 2x$. Используя теорему косинусов для треугольника AOO_1 и учитывая, что $AO = R$, имеем: $OO_1^2 = AO_1^2 + AO^2 - 2AO_1 \cdot AO \cdot \cos 30^\circ$, т. е. (после элементарных преобразований) $3x^2 = 2Rx(\sqrt{3} - 1)$. Корень $x = 0$ этого уравнения является посторонним, а условию задачи удовлетворяет значение $x = \frac{2}{3}\,R(\sqrt{3} - 1)$.

Ответ: $x = \frac{2}{3}\,R(\sqrt{3} - 1)$.

4. Приравнивая нулю производную $y'(x) = x+1$ функции $y(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{13}{2}$, находим координаты вершины параболы $A\,(x_0;\, y_0)$: $x_0 = -1$, $y_0 = 6$. Пусть точка касания B имеет координаты $(x_1;\, y_1)$. Учитывая, что касательная параллельна прямой $y = 6x$, имеем $y'(x_1) = x_1 + 1 = 6$, отсюда $x_1 = 5$, $y_1 = y(x_1) = 24$.

Уравнение касательной в точке $(x_1;\, y_1)$ записывается в виде $y = y'(x_1)(x - x_1) + y_1$. Подставив значения x_1 и y_1, получаем $y = 6x - 6$. Значит, точка C пересечения касательной с осью абсцисс имеет координаты (1; 0). Пусть D и E — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на ось Ox. Их координаты равны соответственно (−1; 0) и (5; 0). В прямоугольной трапеции $ABED$ ($AD \parallel BE$) основания $AD = 6$, $BE = 24$, высота $DE = 6$, а площадь $S_{ABED} = 90$ (рис. 209). Вычитая площади прямоугольных треугольников ADC и BCE, находим искомую площадь треугольника ABC: $S_{ABC} = S_{ABED} - S_{ADC} - S_{BCE} = 90 - 6 - 48 = 36$.

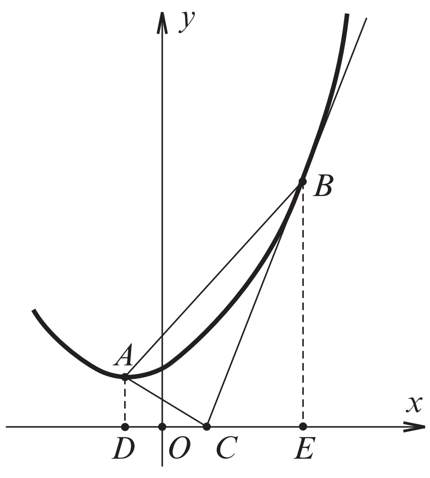

Рис. **209**

Ответ: 36.

5. Пусть SH — высота пирамиды $SABCD$; M, N и K — точки пересечения секущей плоскости α с ребрами SD, SB и SC соответственно. Поскольку пирамида правильная, H — точка пересечения диагоналей AC и BD основания.

По условию прямая BD и плоскость α параллельны, поэтому прямая MN — линия пересечения α и плоскости SBD — параллельна BD.

Обозначим через L точку пересечения α и высоты SH (рис. 210). В треугольнике SAC она является точкой пересечения медиан AK и SH, поэтому $LH = \frac{1}{3}\,SH$.

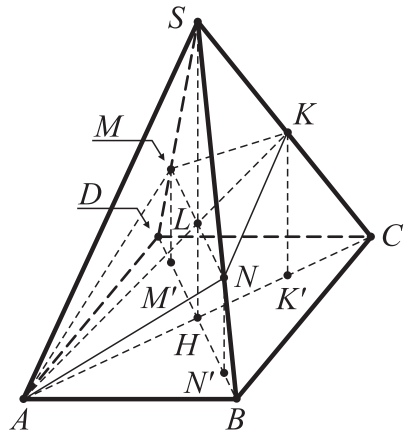

Рис. **210**

Рассмотрим проекции M', N' и K' точек M, N и K на основание $ABCD$. Заметим, что K' лежит на диагонали AC, а M и N принадлежат диагонали BD. Из подобия треугольников SHC и $KK'C$ имеем: $CK' = \frac{1}{2}\,CH = \frac{1}{4}\,AC$, тогда $AK' = \frac{3}{4}\,AC$. Аналогично, используя подобие пар треугольников SHD и $MM'D$, SHB и $NN'B$ и учитывая, что $NN' = MM' = LH = \frac{1}{3}\,SH$, находим $BN' = DM' = \frac{1}{3}\,DH = \frac{1}{6}\,BD$, отсюда $M'N' = BD - BN' - DM' = \frac{2}{3}\,BD$.

Пусть сторона основания равна x, тогда $M'N' = \frac{2}{3}\,x\sqrt{2}$, $AK' = \frac{3}{4}\,x\sqrt{2}$. Диагонали $M'N'$ и AK' четырехугольника $AM'K'N'$ перпендикулярны, поэтому его площадь $S_{AM'K'N'} = \frac{1}{2}\,M'N' \cdot AK' = \frac{x^2}{2}$. Так как $AM'K'N'$ является проекцией сечения $AMKN$ на плоскость основания, а угол между секущей плоскостью и основанием равен 60°, то $S_{AMKN} \cdot \cos 60^\circ = S_{AM'K'N'}$, следовательно, $\frac{9}{2} = \frac{x^2}{2}$, $x = 3$. Нетрудно показать, что KAC — плоский угол двугранного угла между α и $ABCD$, поэтому $LH = AH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $SH = 3LH = \frac{9\sqrt{6}}{2}$. Зная сторону основания $x = 3$ и высоту SH пирамиды $SABCD$, вычисляем искомый объем $V = 27\sqrt{6}/2$.

Ответ: $27\sqrt{6}/2$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $-\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $(n,\, k \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty,\, -2) \cup (6 - \sqrt{42},\, \infty)$. **3.** $2a(9 - 5\sqrt{3})/3$. *Указание.* Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, O_1 — центр искомой окружности. Угол A в треугольнике AOO_1 равен $15°$, и учитывая, что $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $AO_1 = x/\sin 15°$, $OO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} - x$, где x — неизвестный радиус, по теореме косинусов легко получить уравнение для определения x. **4.** 8. **5.** $72\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть K, L, N — точки пересечения секущей плоскости с ребрами SA, SC, AB соответственно; SH — высота, опущенная на основание ABC; K' и L' — проекции точек K и L на плоскость ABC. Тогда K' и L' — середины отрезков AH и CH, а площадь трапеции $MNK'L'$ равна площади сечения, умноженной на $\cos 30°$. Отсюда определяется сторона основания $AB = 12$, а затем высота пирамиды $SH = 6$.

Вариант 3. **1.** $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty, -4+\sqrt{33}) \cup (3, \infty)$. **3.** $2a(3-2\sqrt{2})$. *Указание.* Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата, O_1 — центр искомой окружности. Тогда AO_1 — биссектриса угла OAB и, значит, $\angle OAO_1 = \frac{\pi}{8}$. Если x — искомый радиус, то в треугольнике AOO_1 стороны $AO_1 = x/\sin\frac{\pi}{8}$, $O_1O = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Применяя теорему косинусов, получаем уравнение для определения x. **4.** 75/4. **5.** $8\sqrt{2}/3$. *Указание.* Проекция сечения на плоскость основания — пятиугольник $MNPKL$. Если SH — высота пирамиды, то K — середина отрезка CH, P и L принадлежат диагонали BD, причем $BP = DL = \frac{1}{8}BD$, M и N — середины ребер AD и AB. Учитывая, что площадь проекции получается умножением площади сечения на $\cos 45°$, находим сторону основания $a = 2$. Далее нетрудно показать, что секущая плоскость делит высоту SH в отношении $3:1$, считая от вершины S, отсюда $SH = 2\sqrt{2}$.

Вариант 4. **1.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$. **2.** $(-\infty, -3) \cup (4 - 3\sqrt{3}, \infty)$. **3.** $2a(3\sqrt{3} - 5)$. *Указание.* Пусть P — середина основания AD, O — центр искомой окружности. Тогда AO — биссектриса угла CAD, $\angle OAD = 15°$. Если x — неизвестный радиус, то в треугольнике AOP стороны $AO = x/\sin 15°$, $AP = a$, $OP = a - x$. Используя теорему косинусов, получаем уравнение для определения x. **4.** 9/2. **5.** $27\sqrt{3}/2$. *Указание.* Проекция сечения на плоскость $ABCD$ — шестиугольник $ABKLMN$, вершины K и N которого — середины отрезков CH и FH, L и M принадлежат соответственно отрезкам DH и EH, $DL = \frac{2}{3}DH$, $EM = \frac{2}{3}EH$. Площадь проекции равна произведению площади сечения и $\cos 30°$. Отсюда определяем сторону основания $a = 3$ и высоту $SH = 3$.

1991

Решение варианта 1

1. Согласно формуле скалярного произведения векторов косинус угла φ между двумя векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение длин. В данном случае

$$\cos\varphi = \frac{2(4x+2)-(5x+1)+(1-3x)}{25x^2+10x+6} = \frac{4}{25x^2+10x+6}.$$

Угол φ будет наименьшим, когда его косинус наибольший. В свою очередь, $\cos\varphi$ будет наибольшим, когда $25x^2+10x+6 = (5x+1)^2+5$ принимает наименьшее значение. Это значение достигается при $x = -\frac{1}{5}$ и равно 5.

Ответ: $\arccos\frac{4}{5}$.

2. Положим $2\cos x - \frac{5\pi}{4} = y$, тогда $\sqrt{2}\sin y = 1$ и $y = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Подставив ответ в исходную формулу для y, получим

$$\cos x = \frac{5\pi}{8} + (-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Модуль правой части этого уравнения должен быть не больше единицы. Этому ограничению удовлетворяют лишь значения $n = -1$ и $n = -2$. В первом случае $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, а во втором случае $\cos x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\arccos(-\frac{\pi}{4}) + 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\arccos(-\frac{\pi}{4}) + 2\pi m$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$.

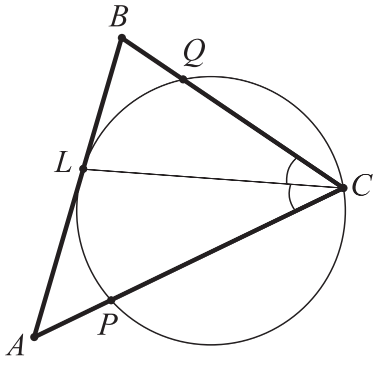

Рис. **211**

3. Пусть $AC = x$, $BC = y$ (рис. 211). По теореме о касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки, $AL^2 = AC \cdot AP = 3x$, $BL^2 = BC\times$

$\times BQ = 2y$. С другой стороны, по теореме о биссектрисе угла треугольника $AL : BL = AC : BC = x : y$. Таким образом, $\frac{3x}{2y} = \frac{x^2}{y^2}$, $3y = 2x$, $AL : BL = 3 : 2$. Разделив отрезок AB в отношении $3 : 2$, получим $AL = 9$, $BL = 6$, следовательно, $x = 27$, $y = 18$.

Ответ: $AC = 27$, $BC = 18$.

4. Разделим обе части уравнения на $35^{|x-3|}$ и положим $\left(\frac{7}{5}\right)^{|x-3|} = y$. В результате придем к квадратному уравнению $5y^2 - 11y + 2 = 0$ с корнями $y_1 = 2$, $y_2 = 1/5$. Корень y_2 — посторонний, так как неотрицательная степень числа $7/5$ не может быть меньше единицы. Следовательно, $(7/5)^{|x-3|} = 2$, $|x-3| = \log_{7/5} 2$, $x = 3 \pm \log_{7/5} 2$.

Ответ: $3 \pm \log_{7/5} 2$.

5. Центр O шара — точка пересечения KL с плоскостью $ABC'D'$, делящей пополам двугранный угол с ребром AB. Для отыскания точки O проведем LM параллельно AD. Очевидно, что прямая KL лежит в плоскости $LMB'C'$. Линия пересечения этой плоскости и $ABC'D'$ — прямая MC'. Точка пересечения KL и MC' будет искомым центром O, а перпендикуляр ON к плоскости $ABCD$ — радиусом шара (рис. 212). Ввиду подобия треугольников KOC' и MOL имеем $\frac{MO}{OC'} = \frac{ML}{KC'} = 3 : 2$. Отсюда и из подобия треугольников MNO и MCC' вытекает $\frac{ON}{CC'} = \frac{MO}{MC'} = 3 : 5$. Следовательно, $ON = CC' \cdot \frac{3}{5} = 3$.

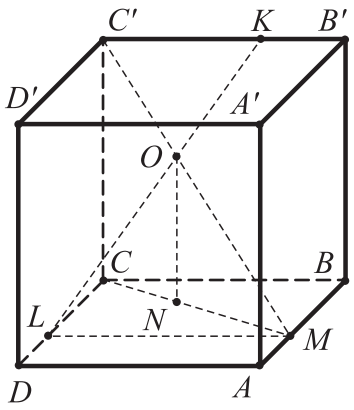

Рис. **212**

Ответ: 3.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\arccos\frac{9}{10}$. **2.** $k\pi$; $m\pi - (-1)^m \arcsin\frac{\pi}{6}$ $(k, m \in \mathbb{Z})$. **3.** $AC = 12$, $BC = 16$. *Указание.* По теореме о касательной и секущей $AC \cdot AP = AL^2$, откуда $AC = 12$. В силу теоремы Фалеса $BQ : BC = AP : AC = 1 : 4$, значит, $BC = 4BQ$. Наконец, вновь по теореме о касательной и секущей $BC \cdot BQ = BL^2$ или $BC^2/4 = 64$.

4. $-2 \pm \log_{3/2} 2$. **5.** $\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть M лежит на ребре $A'B'$, причем $A'M : MB' = 1 : 2$, K — середина QM, L — середина BC. Центр шара совпадает с точкой пересечения отрезков KL и PQ.

Вариант 3. **1.** $\arccos\frac{1}{5}$. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\arccos(-\frac{\pi}{9}) + 2\pi m$ ($k, m \in \in \mathbb{Z}$). **3.** $AB = 14$, $AC = 16$. *Указание.* По теореме о касательной и секущей $BL^2 = BC \cdot BQ$, т. е. $BL = 6$. Согласно свойству биссектрисы угла треугольника $AL : BL = AC : BC$, откуда $AC = 2AL$. Вновь обращаясь к теореме о касательной и секущей, получаем $AL^2 = = AP \cdot AC$ или $AL^2 = 8\,AL$. **4.** $2 \pm \log_{7/2} 3$. **5.** $8/5$. *Указание.* Пусть M и N — середины AD и BC соответственно, тогда плоскость SMN делит пополам двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SCD. Если P — точка пересечения MN и KC, то отрезок SP пересекает KL в центре искомого шара.

Вариант 4. **1.** $\arccos\frac{1}{10}$. **2.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\arccos(-\frac{\pi}{6}) + 2\pi m$ ($k, m \in \in \mathbb{Z}$). **3.** $AC = 16$, $BC = 8$. *Указание.* Пусть L — точка касания AB с окружностью. В силу подобия треугольников ABC и PQC имеем $AC : AB = PC : PQ$, т. е. $AC : 12 = (AC - 4) : 9$ и $AC = 16$. По теореме Фалеса $BC : BQ = AC : AP = 4$. Дважды применяя теорему о касательной и секущей, получим $AL^2 = AC \cdot AP = 64$, $BL = AB - AL = 4$. $BL^2 = BQ \cdot BC$, значит, $16 = BC^2/4$. **4.** $-3 \pm \pm \log_{4/3} 3$. **5.** $\sqrt{3}/3$. *Указание.* Пусть M — середина $A'B'$, а N — точка пересечения $A'B$ и AM. Тогда отрезки KL и NC пересекутся в центре искомого шара.

1992

Решение варианта 1

1. Пусть первый луг скошен за t минут. Тогда $t + 30$ и $t + 60$ — времена скашивания второго и третьего лугов соответственно. Обозначим через S и s площади, скашиваемые за 1 минуту на тракторе и вручную. Из условия следует:

$$tS = 3S + (t + 30 - 3)s, \qquad tS = (t + 60)s.$$

Вычитая одно уравнение из другого, находим $S = 11s$. Подставив это соотношение во второе уравнение системы, найдем $t = 6$. Следовательно, все три луга были скошены за $3t + 90 = 108$ минут.

Ответ: 108 минут.

2. Возможны два разных случая: $x > 2$ и $0 < x \leqslant 2$. В первом из них выражение $-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ отрицательно и уравнение приобретает вид $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = \sqrt{x} + 1$. Заменой $\sqrt{x} = y$ это уравнение приводится к квадратному $y^2 - 4y - 6 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 2 + \sqrt{10}$ и $y_2 = 2 - \sqrt{10}$. Так как y равняется арифметическому корню из x, то отрицательное значение y_2 — постороннее, а y_1 дает $x = (2 + \sqrt{10})^2 = 14 + 4\sqrt{10} > 2$.

Во втором случае выражение $-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ неотрицательно, а исходное уравнение приводится к виду $-\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \sqrt{x} + 1$. Оба корня соответствующего квадратного уравнения $y^2 + 4y + 2 = 0$ отрицательны и, следовательно, посторонние.

Ответ: $14 + 4\sqrt{10}$.

3. Пусть $BH = x$, $CH = y$. Тогда $AB = x + y$ (рис. 213). По теореме о хордах окружности $AH \cdot DH = BH \cdot CH$, т. е. $xy = 36$. С другой стороны, применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABH, находим $(x + y)^2 = x^2 + 81$. Отсюда и из равенства $xy = 36$ непосредственно вытекает $y^2 = 9$, или $y = 3$. Следовательно, $x = 12$, $BC = 15$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{135}{2}$.

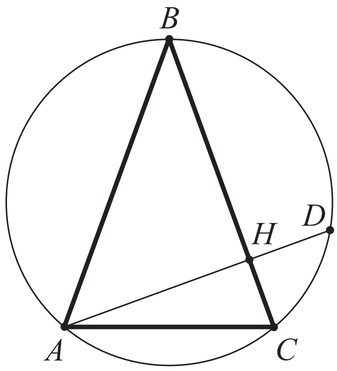

Рис. **213**

Ответ: 135/2.

4. Положим $y = \frac{13\pi}{2x^2 + 6}$. Тогда $0 < y \leqslant \frac{13\pi}{6}$, а уравнение приобретает вид $1 + 2\cos 2y = 4\sin y$. Это уравнение легко сводится к квадратному $4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0$ относительно $\sin y$. Из двух его корней, $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{2}$, один является посторонним. Решая уравнение $\sin y = 1/2$, находим $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Условию $0 < y \leqslant \frac{13\pi}{6}$ удовлетворяют лишь значения y при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$. Соответствующие значения x определяются очевидным образом.

Ответ: ± 6, $\pm 2\sqrt{6/5}$, 0.

5. Так как прямые BC' и AP параллельны, то будут параллельны и их проекции на плоскость ABC. Значит, проекция N точки P лежит на прямой, проходящей через вершину A параллельно BC (рис. 214).

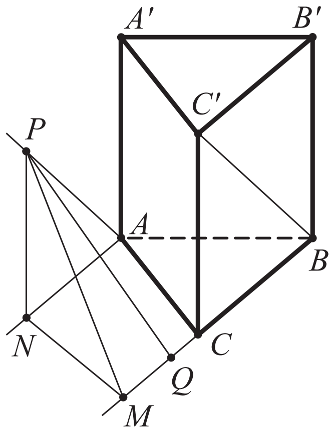

Рис. **214**

Пусть M — проекция точки P на прямую BC. По теореме о трех перпендикулярах отрезок NM также будет перпендикулярен BC. Но тогда по теореме Пифагора $PN^2 = PM^2 - NM^2 = PQ^2 - NM^2 - MQ^2 = 3 - \frac{3}{4} - MQ^2$. Из этой формулы следует, что PN принимает наибольшее значение, когда точки M и Q совпадают. При этом $PN = \frac{3}{2}$. С другой стороны, PN — высота пирамиды $PABC$, поэтому максимально возможный объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \times S_{ABC} = \sqrt{3}/8$.

Ответ: $\sqrt{3}/8$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 72. **2.** -3; $(\sqrt{17} - 15)/8$. **3.** 675/4. *Указание.* Положим $BH = x$, $CH = y$. Согласно свойству секущих, проведенных из одной точки, имеем $BH \cdot CH = AH \cdot DH$, или $xy = 18 \cdot 7$. С другой стороны, по теореме Пифагора $AB^2 = BH^2 + AH^2$, т.е. $(y - x)^2 = x^2 + 18^2$. Получилась система уравнений относительно x и y. **4.** $\pm 6/5$, $\pm\sqrt{6/7}$, 0. **5.** $\sqrt{2}/3$. *Указание.* Объем максимален, когда проекция точки S на прямую DK совпадает с точкой K.

Вариант 3. **1.** 2 минуты. **2.** $(19 + \sqrt{120})/2$. **3.** 15/2. *Указание.* Пусть $BH = x$, $CH = y$. По теореме о пересекающихся хордах $BH \cdot CH = DH \cdot AH$, т.е. $xy = 36$, а по теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$, или $(y - x)^2 = x^2 + 9$. Получилась система относительно x и y. **4.** $\pm 4/5$, $\pm\sqrt{12/35}$, 0. **5.** 2/3. *Указание.* Объем максимален, когда проекция точки N на прямую BC совпадает с M.

Вариант 4. **1.** 5 км/ч. **2.** 0; $(21-\sqrt{57})/8$. **3.** 80/3. *Указание.* Пусть $BE=x$, $CE=y$, BH — высота треугольника. По теореме о пересекающихся хордах $BE\cdot CE=AE\cdot DE$, или $xy=7\cdot 25$. Из подобия треугольников BDE и ACE вытекает $BD:AC=x:25$, а из подобия ABD и BCH следует $BD:(AC/2)=32:(x+y)$. Таким образом, $x:25=16:(x+y)$. Получилась система уравнений относительно x и y. **4.** $\pm 4/3$, $\pm\sqrt{4/5}$, 0. **5.** 1. *Указание.* Объем максимален, когда проекция точки R на прямую BC совпадает с T.

1993

Решение варианта 1

1. Воспользуемся формулой $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и преобразуем уравнение к виду $2\sin(x+2)\cos(2x-1)=\sin(x+2)$, или $\sin(x+2)\bigl(2\cos(2x-1)-1\bigr)=0$. Возможны два случая: $\sin(x+2)=0$, т. е. $x=-2+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, или $\cos(2x-1)=\frac{1}{2}$, т. е. $2x-1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $-2+\pi k$; $\frac{1}{2}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$.

2. Пусть расстояние между городом и деревней составляет S (км), скорость движения Ивана — x, Марьи — y (км/ч). Половину пути Иван прошел за $\frac{S}{2x}$ часов, Марья за это же время прошла путь $\frac{S}{2}-2$, отсюда получаем первое уравнение

$$\frac{S}{2x}=\Bigl(\frac{S}{2}-2\Bigr)\frac{1}{y}.$$

Когда расстояние между ними во второй раз составило ровно 2 км, Иван прошел путь $\frac{2S}{3}+2$, а Марья — $\frac{S}{3}$. Поскольку время движения обоих персонажей одинаково, получаем второе уравнение

$$\Bigl(\frac{2S}{3}+2\Bigr)\frac{1}{x}=\frac{S}{3y}.$$

Если теперь приравнять отношения левых и правых частей полученных уравнений (x и y при этом сокращаются), то после элементарных преобразований придем к уравнению для определения S:

$$\frac{3S}{4S+12}=\frac{3S-12}{2S}.$$

Отсюда $S^2 - 2S - 24 = 0$, $S_1 = 6$, $S_2 = -4$. Отрицательный корень является посторонним.

Ответ: 6 км.

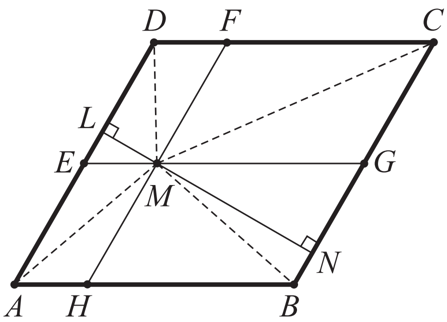

Рис. **215**

3. Проведем через точку M две прямые, параллельные AB и AD. Пусть они пересекают стороны ромба в точках E, F, G, H (рис. 215). Опустим из точки M высоты ML и MN в треугольниках ADM и BCM соответственно на стороны AD и BC. Площадь S_1 треугольника ADM равна $\frac{1}{2}LM \cdot AD$, а площадь S_2 треугольника BCM равна $\frac{1}{2}MN \cdot BC$. По условию $AD = BC = a$, $S_1 : S_2 = 1 : 4$. Отсюда вытекает, что $LM : MN = 1 : 4$. Прямоугольные треугольники EML и MNG подобны (т. к. $\angle LEM = \angle NGM$), отсюда $\frac{EM}{MG} = \frac{LM}{MN} = \frac{1}{4}$, $EM = \frac{1}{5}EG = \frac{1}{5}a$.

Проводя аналогичные рассуждения и сравнивая площади треугольников MAB и MDC, легко установить, что $MH = \frac{2}{5}FH = \frac{2}{5}a$. Таким образом, искомый отрезок AM является диагональю параллелограмма $AEMH$ со сторонами $AH = EM = \frac{a}{5}$, $MH = AE = \frac{2a}{5}$ и углами EAH и AHM в $60°$ и $120°$ соответственно. Теперь длина отрезка AM легко находится по теореме косинусов из треугольника AHM:

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 - 2AH \cdot HM \cdot \cos 120° = \frac{a^2}{25} + \frac{4a^2}{25} + \frac{2a^2}{25} = \frac{7a^2}{25},$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

4. Заметим, что $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Правая часть неравенства определена, если $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$, т. е. $x \in (3, 4) \cup (4, \infty)$. Для таких значений x выполняются неравенства $x - 2 > 1$, $x^2 - 5x + 6 > 0$, и левая часть неравенства также определена. В найденной области определения справедливы соотношения

$$\log_2(x^2 - 5x + 6) = \log_2(x-2) + \log_2(x-3), \qquad \frac{1}{\log_{x-3} 2} = \log_2(x-3),$$

$$\frac{1}{\log_{x-2} 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}\log_{x-2} 2} = \frac{2}{3}\log_2(x-2).$$

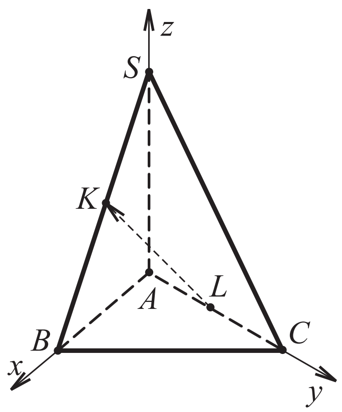

Рис. **216**

С их помощью легко преобразовать исходное неравенство к виду $\log_2(x-2) < \frac{3}{2}$. Отсюда следует, что $x - 2 < 2\sqrt{2}$, $x < 2 + 2\sqrt{2}$. Учитывая область определения и неравенство $2 + 2\sqrt{2} > 4$, получаем $x \in (3,\ 4) \cup (4,\ 2 + 2\sqrt{2})$.

Ответ: $(3,\ 4) \cup (4,\ 2 + 2\sqrt{2})$.

5. Введем систему координат, выбрав в качестве ее начала вершину A и направив оси координат x, y, z соответственно вдоль лучей AB, AC, AS (рис. 216). Легко определить координаты вершин пирамиды $B\,(1;\ 0;\ 0)$, $C\,(0;\ 2;\ 0)$, $S\,(0;\ 0;\ 4)$ и точек $K\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 2\right)$, $L\,(0;\ 1;\ 0)$, заданных в условии задачи. Уравнение плоскости, проходящей через точки B, C и S, имеет вид $ax + by + cz = d$. Подставляя координаты точек B, C и S, находим, что $a = d$, $b = \frac{d}{2}$, $c = \frac{d}{4}$. Положим $d = 4$, тогда $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$. Вектор $\vec{n} = (4;\ 2;\ 1)$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $4x + 2y + z = 4$.

Обозначив $\overrightarrow{KL} = \vec{m}$ и определив координаты $\vec{m} = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -2\right)$, находим скалярное произведение $\vec{m}\cdot\vec{n} = -2$. С другой стороны, если α — угол между векторами, то $\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\alpha$, где $|\vec{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{21}$, $|\vec{n}| = \sqrt{21}$ — длины векторов. Значит, $\cos\alpha = -\frac{4}{21}$, а угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — тупой. Пусть β — угол между прямой KL и плоскостью (рис. 217). Так как $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то справедливо равенство $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\sin\beta = -\cos\alpha = \frac{4}{21}$, $\beta = \arcsin\frac{4}{21}$.

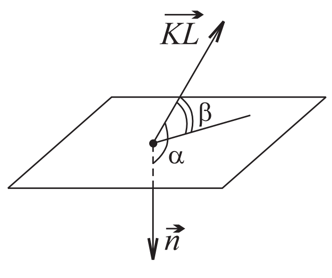

Рис. **217**

Ответ: $\arcsin\frac{4}{21}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - 1$; $3 \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ($k,\ n \in \mathbb{Z}$). **2.** 5 л/мин. **3.** $a\sqrt{21}/3$. *Указание.* Пусть N — точка пересечения отрезка AM со стороной BC треугольника ABC. Отношение площадей треугольников ABC и BMC равно $3:2$, отсюда $AN:NM = 3:2$, $AM = \frac{5}{3}AN$. В то же время $BN:NC = 4:1$, т. е. $NC = \frac{1}{5}BC = \frac{a}{5}$. Длина AN легко находится по теореме косинусов из треугольника ACN. **4.** $(2, 3) \cup (3, 9\sqrt{3} - 3)$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{13}$.

Вариант 3. **1.** $\frac{\pi k - 1}{3}$; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n - 2$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **2.** 5 км. **3.** $a\sqrt{43}/4$. *Указание.* Пусть $AKMN$ — параллелограмм с диагональю AM, вершины K и N которого лежат соответственно на лучах AB и AD. Тогда $AN = \frac{1}{4}AD = \frac{a}{4}$, $AK = \frac{3}{2}AB = \frac{3a}{2}$. Длина AM находится по теореме косинусов из треугольника ANM. **4.** $(-2, -1) \cup (-1, 4\sqrt[3]{4} - 4)$. **5.** $\arcsin\frac{2}{5}$.

Вариант 4. **1.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k - 3}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n + 1}{3}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **2.** 20 км/ч. **3.** $a\sqrt{7}/6$. *Указание.* Пусть прямая, проведенная через точку M параллельно BC, пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках K и N. Тогда $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$, $KM = \frac{1}{3}KN = \frac{a}{6}$, AM находится по теореме косинусов. **4.** $(4 - 2\sqrt{2}, 2) \cup (2, 3)$. **5.** $\arcsin\frac{1}{5}$.

1994

Решение варианта 1

1. Пусть велосипедисты поравнялись через t часов. Тогда первый проехал путь $13t$, второй — $21t$, и третий — $27t$ (км). Так как они оказались в одной точке кольцевого шоссе, то эти величины должны различаться на числа, кратные 3. Отсюда $21t - 13t = 8t = 3m$, $27t - 21t = 6t = 3n$, где m и n — натуральные числа. Из второго равенства находим $t = \frac{n}{2}$, подставляя в первое, получаем $4n = 3m$. Из этого соотношения вытекает, что $4n$ делится на 3, поэтому наименьшим возможным значением будет $n = 3$. Ему соответствует $t = 1{,}5$.

Ответ: 1,5 часа.

2. Разделив уравнение на 4^x, приведем его к виду

$$9 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{x} + a = 0.$$

Положим $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тогда для определения y получится квадратное уравнение $9y^2 - 6y + a = 0$. Оно имеет корни, если дискриминант $D = 36 - 36a \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant 1$.

Заметим, что исходное уравнение имеет единственное решение, если среди корней y_1, y_2 квадратного уравнения только один удовлетворяет условию $y > 0$. При $D = 0$, т. е. $a = 1$, квадратное уравнение имеет единственный корень $y = \frac{1}{3}$, и соответственно $x = \log_{3/2}\frac{1}{3}$ — единственный корень исходного уравнения. Если же $D > 0$, т. е. $a < 1$, то корней у квадратного уравнения два и по теореме Виета $y_1y_2 = \frac{a}{9}$, $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$. Отсюда вытекает, что при $a > 0$ оба корня одного знака и положительны, в то время как при $a \leqslant 0$ один из корней $y_1 \leqslant 0$ а второй $y_2 > 0$ и условие задачи выполняется.

Ответ: $(-\infty, 0] \cup \{1\}$.

3. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC и ACD; K, L и M — точки касания окружности O_2 со сторонами треугольника ACD; O_1N — перпендикуляр, опущенный из центра O_1 на сторону AD прямоугольника, O_2P — перпендикуляр из O_2 на отрезок O_1P (рис. 218).

Положим $CL = x$, $AK = y$. Из равенства касательных, проведенных из одной точки к окружности, вытекает, что $CM = CL = x$, $AM = AK = y$, гипотенуза $AC = x + y$. Очевидно, что O_2LDK — квадрат со стороной, равной радиусу окружности O_2, следовательно, $CD = CL+2 = x+2$, $AD = AK+2 = y+2$. По теореме Пифагора получаем первое уравнение для определения x и y:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = (x + y)^2. \qquad (1)$$

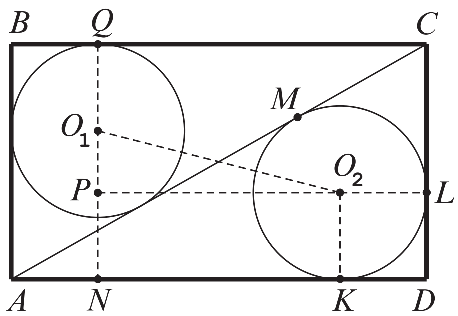

Рис. **218**

Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1O_2P. Очевидно, что $O_1P = PQ - O_1Q = CL - 2 = x - 2$, $O_2P = AK - AN = y - 2$. По условию $O_1O_2 = 5$. Еще раз используя теорему Пифагора, составляем второе уравнение для определения x и y:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25. \qquad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), получаем $x^2 + y^2 = 2xy + 9$, т. е. $(y - x)^2 = 9$. Считая, что $y > x$ (как на рис. 218), находим $y = x + 3$ и, подставляя в (2), приходим к уравнению $x^2 - x - 10 = 0$ для определения x. Его корнями являются числа $x_1 = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$. Отрицательный корень не годится по смыслу задачи. Отсюда $x = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$, $y = \frac{7+\sqrt{41}}{2}$, $AD = y + 2 = \frac{11+\sqrt{41}}{2}$, $CD = x + 2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ и $\frac{11+\sqrt{41}}{2}$.

4. Данному уравнению удовлетворяют только те значения x, для которых $\cos x \leqslant 0$. Записывая уравнение в виде $\sqrt{6\sin 2x} = -2\cos x$ и возводя обе части в квадрат, получаем $6\sin 2x = 4\cos^2 x$. Из этого равенства, в частности, вытекает, что для всех корней, которые будут найдены, условие $\sin 2x \geqslant 0$ будет выполнено. Подставляя $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получаем $3\sin x\cos x = \cos^2 x$, или $\cos x(3\sin x - \cos x) = 0$. Возможны два случая.

А. $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, все корни полученной серии удовлетворяют уравнению.

Б. $3\sin x - \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. В силу условия $\cos x \leqslant 0$ число n должно быть нечетным, т. е. $n = 2m + 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + (2m+1)\pi$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$.

5. Проведем через точку D плоскость, перпендикулярную ребру AB. Для этого опустим высоту DK на сторону AB треугольника ABD и проведем в плоскости ABC через точку K прямую l, перпендикулярную AB. Опустим также перпендикуляры CM и CN соответственно на l и AB (рис. 219). Плоскость MKD перпендикулярна ребру AB, а угол DKM — линейный угол двугранного угла между гранями ABD и ABC, равный 60°.

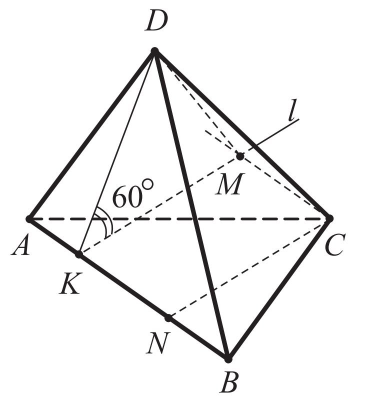

Рис. **219**

Определим теперь DK и AK. По условию, в равнобедренном треугольни-

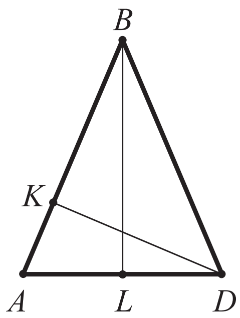

Рис. **220**

ке ABD $AB = BD = 5$, $AD = \sqrt{10}$ (рис. 220). Пусть BL — высота, опущенная на основание AD, тогда $AL = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $AK = AD\cos\angle A = \frac{AD\cdot AL}{AB} = 1$, $DK^2 = AD^2 - AK^2 = 9$. Так как равнобедренные треугольники ABD и ABC равны, то $CN = DK = 3$, $BN = AK = 1$.

По построению, $KNCM$ — прямоугольник. При этом $CM = KN = AB - AK - NB = 3$, $MK = CN = 3$, значит, $KNCM$ — квадрат. Треугольник DKM — равносторонний, поскольку $DK = KM = 3$ и $\angle DKM = 60°$, поэтому $DM = 3$. Заметим теперь, что в силу параллельности CM и AB прямая CM перпендикулярна плоскости DKM. Следовательно, треугольник DMC — прямоугольный и $CD^2 = DM^2 + CM^2 = 18$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 2,5 часа. **2.** $(-\infty,\, 2] \cup \{3\}$. **3.** 5 и 12. *Указание.* Пусть окружности O_1 и O_2 вписаны соответственно в треугольники ABC и ADC, K и M — их точки касания с диагональю AC, L и N — точки касания окружности O_2 со сторонами AD и CD ($AD > CD$). Тогда, если $AL = x$, $CN = y$, то $AC = x + y$, $AM = CN = y$, $MK = x - y$. **4.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). **5.** 5. *Указание.* По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольники ABD и ABC — прямоугольные ($AD \perp AB$, $BC \perp AB$). Если достроить треугольник ABD до прямоугольника $ABKD$, то плоскость KBC будет перпендикулярна прямой AB, а треугольник BKC — равносторонним.

Вариант 3. **1.** 0,5 часа. **2.** $(-\infty,\, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$. **3.** $\sqrt{3} + 1$ и $\sqrt{3} + 3$. *Указание.* Расстояние между точками касания окружностей с диагональю AC равно 2, далее — как в задаче 3 варианта 2. **4.** $k\pi$; $\operatorname{arctg} 3 + (2n + 1)\pi$ ($k,\, n \in \mathbb{Z}$). **5.** $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$. *Указание.* Пусть SK — высота равнобедренного треугольника ASB. Если достроить прямоугольный треугольник SKH до прямоугольника $SKHL$, то угол LHC — плоский угол двугранного угла между плоскостями ASB и

ABC, а треугольник HLC — равносторонний. Первый ответ соответствует случаю острого, а второй — случаю тупого угла BAC.

Вариант 4. **1.** 2,5 часа. **2.** $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup \{-1\}$. **3.** $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$. *Указание.* Радиусы окружностей равны $\sqrt{5}$. **4.** $\pm\arccos(-\sqrt{2/3}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{13}$. *Указание.* Если достроить прямоугольный треугольник ADC до прямоугольника $ADKC$, то треугольник BCK будет равнобедренным, $\angle BCK = 120°$.

1995

Решение варианта 1

1. Левая часть неравенства определена, если $x+3 > 0$, $x+3 \neq 1$, т. е. $x \in (-3, -2) \cup (-2, \infty)$ (заметим, что для таких x выполняется $x + 4 > 0$ и тем более $\sqrt{x+4} + 2 > 0$). Рассмотрим два случая.

А. Основание логарифма $0 < x + 3 < 1$, т. е. $x \in (-3, -2)$. Тогда данное неравенство преобразуется к виду $\sqrt{x+4} + 2 \geqslant x + 3$, или $\sqrt{x+4} \geqslant x + 1$. Правая часть отрицательна при всех $x \in (-3, -2)$, следовательно, весь интервал $(-3, -2)$ принадлежит множеству решений.

Б. Пусть $x + 3 > 1$, т. е. $x \in (-2, \infty)$. В этой области изменения x исходное неравенство приводится к виду $\sqrt{x+4} \leqslant x + 1$. Оно может быть справедливым только при условии $x \geqslant -1$, поскольку левая часть неотрицательна. После возведения в квадрат и элементарных преобразований получаем неравенство $x^2 + x - 3 \geqslant 0$, которое справедливо при $x \leqslant \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ и $x \geqslant \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. С учетом ограничения $x \geqslant -1$ решениями данного неравенства будут числа $x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \infty\right)$. Объединяя ответы для случаев «А» и «Б», получаем решение задачи.

Ответ: $(-3, -2) \cup \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \infty\right)$.

2. Пусть $A\,(x_0; y_0)$ — точка параболы, где касательная параллельна данной прямой $y = x + \frac{1}{2}$. Тогда $y'(x_0) = 2x_0 + 2 = 1$, т. е. $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = y(x_0) = \frac{5}{4}$, и уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = x + \frac{7}{4}$.

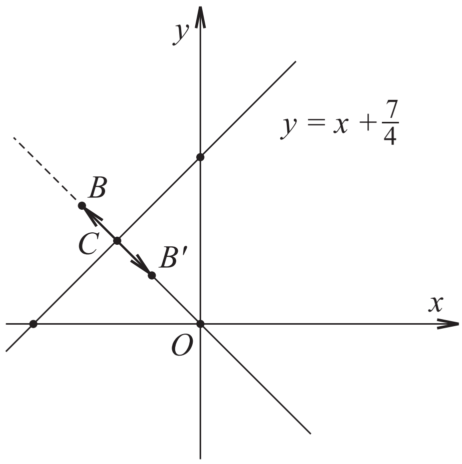

Рис. **221**

Вершина параболы находится в точке $B\,(x_1;\,y_1)$, определяемой из условий $y'(x_1)=0$, $y_1=y(x_1)$. Легко проверить, что вершиной будет точка $B\,(-1,\,1)$. Опустим из точки B перпендикуляр на касательную. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к $y=x+\frac{1}{2}$, равен -1, поэтому ее уравнение имеет вид $y-y_1=-(x-x_1)$, т. е. точка $C\,(x_2;\,y_2)$ пересечения прямых (основание перпендикуляра) имеет координаты $\left(-\frac{7}{8};\,\frac{7}{8}\right)$. Для определения координат точки B', симметричной B, достаточно найти вектор $\vec{CB}=\left(-\frac{1}{8};\,\frac{1}{8}\right)$ и рассмотреть разность векторов $\vec{OC}\,-$ $-\,\vec{CB}=\vec{OB'}=\left(-\frac{3}{4};\,\frac{3}{4}\right)$ (рис. 221).

Ответ: $\left(-\frac{3}{4};\,\frac{3}{4}\right)$.

3. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ и преобразуем данное уравнение к виду

$$2\cos 2x+\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=2.$$

Левая его часть определена, если $\cos 2x\neq -1$ (что эквивалентно условию $\cos x\neq 0$). Далее после элементарных преобразований получаем

$$\frac{(1-\cos 2x)(2\cos 2x+1)}{1+\cos 2x}=0.$$

Отсюда или $\cos 2x=1$, т. е. $x=\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, или $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Условие $\cos 2x\neq -1$ выполняется для каждой из двух найденных серий корней.

Ответ: $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$.

4. Опустим высоту DH пирамиды на основание ABC. Пусть CK — высота треугольника ABC, $CK=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AK=BK=\frac{1}{2}$. Тогда

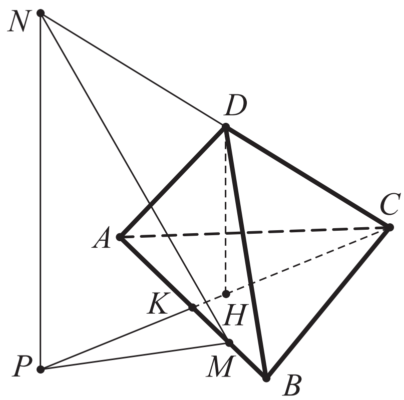

Рис. **222**

точка H (центр правильного треугольника ABC) окажется на CK, $CH = \frac{2}{3}CK = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Опустим перпендикуляр NP из точки N на плоскость ABC (рис. 222). Прямые NP и DH параллельны, поэтому точка P лежит на луче CK и из подобия треугольников DHC и NPC вытекает, что $CP = CH \cdot \frac{NC}{DC} = 3CH = \sqrt{3}$, $PK = CP - CK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По условию, $BM = \frac{1}{4}$, поэтому $KM = BK - BM = \frac{1}{4}$. Треугольники PKM, NPM и DHC — прямоугольные, отсюда $PM = \sqrt{PK^2 + KM^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $NP = \sqrt{NM^2 - PM^2} = \frac{\sqrt{387}}{4} = \frac{3\sqrt{43}}{4}$, $DH = \frac{1}{3}NP = \frac{\sqrt{43}}{4}$ и, наконец, $CD = \sqrt{DH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{145}{48}} = \frac{\sqrt{435}}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{435}}{12}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(-2, -1) \cup \left[\frac{\sqrt{11}}{2}, \infty\right)$. **2.** $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$. **3.** πk; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **4.** $\sqrt{87}/2$. *Указание.* Пусть CK — высота треугольника ABC, NP — перпендикуляр, опущенный из точки N на плоскость ABC. Тогда P лежит на отрезке CK, $CP = \frac{4}{9}CK$. Треугольники MKN, KNP и CPN — прямоугольные. Используя теорему Пифагора, можно последовательно найти KN, NP и затем CN.

Вариант 3. **1.** $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup (4, 5)$. **2.** $\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$. **3.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. **4.** $8\sqrt{2}/3$. *Указание.* Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость ABC, CK — высота треугольника ABC. Тогда P лежит на прямой CK, $CP = \frac{2}{3}CK$. Треугольники KPM и PMN — прямоугольные. Последовательно вычисляя с помощью теоремы Пифагора MP и MN, легко определить PN и затем DC.

Вариант 4. **1.** $\left(-\infty,\,-\frac{3}{2}\right]\cup(1,\,2)$. **2.** $\left(\frac{3}{4};\,-\frac{3}{2}\right)$. **3.** $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(k,\,n\in\mathbb{Z})$. **4.** 3. *Указание.* Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость ABC, CK — высота треугольника ABC. Тогда точка P лежит на луче CK, $CP=\frac{4}{3}CK$. Треугольники CNP, NMP и MPK — прямоугольные. Положим $AB=x$, тогда $CK=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $MK=\frac{3}{2}x$. Используя теорему Пифагора и выражая через x длину NP сначала из треугольника CPN, а затем последовательно MP и NP из треугольников PMK и MPN, нетрудно получить уравнение для определения x.

1996

Решение варианта 1

1. Пусть x — цена бутылки «Мартовского», y — «Жигулевского», z — «Петровского» пива. Тогда по условию

$$18x=7y+11z. \tag{1}$$

Если Роман купил t бутылок «Мартовского» пива и заплатил сумму S, то из условия задачи вытекает, что $S=tx=(t+2)y=(t-1)z$. Следовательно, $x=\frac{S}{t}$, $y=\frac{S}{t+2}$, $z=\frac{S}{t-1}$. Подставляя эти выражения в (1) и сокращая на S, получаем уравнение

$$\frac{18}{t}=\frac{7}{t+2}+\frac{11}{t-1}.$$

Отсюда $18(t+2)(t-1)=7t(t-1)+11t(t+2)$, $3t=36$, $t=12$.

Ответ: 12.

2. Заметим, что углы CAD и CBD равны, поскольку они вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу (рис. 223). Пусть $\angle CBD=\beta$, $BC=x$. По теореме синусов находим

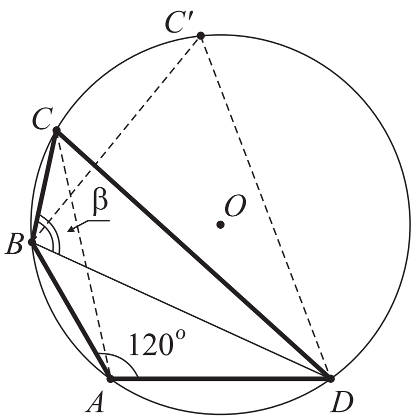

Рис. **223**

$$\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BD}{\sin 120^\circ},$$

откуда $\sin\beta = \frac{CD\cdot\sin 120^\circ}{BD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. В зависимости от того, острым или тупым является угол β, получаем $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{7}$ или $\cos\beta = -\frac{1}{7}$.

В первом случае, применяя теорему косинусов для треугольника BCD, имеем $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD\cdot BC\cdot\frac{1}{7}$, т. е. $x^2-2x-15=0$, $x_1=-3$, $x_2=5$. Первый корень — посторонний, а второй не удовлетворяет условию задачи $BC<4$ (ему соответствует треугольник $BC'D$ на рис. 223).

Во втором случае $CD^2 = BD^2 + BC^2 + 2BD\cdot BC\cdot\frac{1}{7}$, т. е. $x^2 + 2x - 15 = 0$, $x_1=-5$, $x_2=3$, и условие $BC=3<4$ выполнено. Следовательно, $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \pi - \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$.

3. Пусть x_0 — абсцисса точки касания данной параболы и прямой $y=2x+10$. Приравнивая угловые коэффициенты касательной к параболе в точке x_0 и данной прямой, получаем уравнение $y'(x_0) = 2ax_0 + b = 2$, откуда $x_0 = \frac{2-b}{2a}$. В точке касания выполняется равенство $ax_0^2 + bx_0 + 1 = 2x_0 + 10$, т. е.

$$a\left(\frac{2-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2-b}{2a}\right) + 1 = 2\left(\frac{2-b}{2a}\right) + 10.$$

После элементарных преобразований это соотношение приводится к виду

$$(b-2)^2 + 36a = 0. \qquad (2)$$

Это же уравнение можно было получить с помощью других соображений, которые мы используем, рассматривая вторую касательную $y=2-2x$. Парабола и касательная имеют единственную общую точку, следовательно, уравнение $ax^2+bx+1 = 2-2x$ имеет ровно один корень. Последнее утверждение справедливо в том и только том случае, когда дискриминант уравнения обращается в нуль, т. е.

$$(b+2)^2 + 4a = 0. \qquad (3)$$

Решая систему (2)–(3) для определения значений a и b, находим $9(b+2)^2 - (b-2)^2 = 0$, или $(4b+4)(2b+8)=0$. Отсюда $b_1=-1$, $b_2=-4$ и соответственно из (2) (или (3)) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2=-1$.

Ответ: $a_1=-\frac{1}{4}$, $b_1=-1$ или $a_2=-1$, $b_2=-4$.

4. Левая и правая части неравенства определены, если выполняются следующие условия:

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad 8 - \frac{31}{2}\,x > 0, \quad 8 - \frac{31}{2}\,x \neq 1,$$
$$8x - \frac{31}{2}\,x^2 = x\bigl(8 - \frac{31}{2}\,x\bigr) > 0.$$

Последнее неравенство является очевидным следствием предыдущих. Все условия выполнены, если $x \in \bigl(0,\, \frac{14}{31}\bigr) \cup \bigl(\frac{14}{31},\, \frac{16}{31}\bigr)$.

Положим $y = \log_x\bigl(8 - \frac{31}{2}\,x\bigr)$. Тогда левая часть исходного неравенства записывается как $1 + y$, а правая преобразуется к виду

$$\frac{1 + \log_x(8 - 31x/2)}{\frac{1}{2}\log_x(8 - 31x/2)} = \frac{2(1+y)}{y}.$$

Для определения промежутков изменения y получаем неравенство

$$1 + y \leqslant \frac{2(1+y)}{y},$$

которое можно записать следующим образом:

$$\frac{(1+y)(2-y)}{y} \geqslant 0.$$

Его решениями будут числа $y \in (-\infty,\, -1\,] \cup (0,\, 2\,]$. Рассмотрим теперь два случая.

А. $y \leqslant -1$, т. е. $\log_x\bigl(8 - \frac{31}{2}\,x\bigr) \leqslant -1$. Учитывая, что в области определения основание логарифма $x < 1$, имеем: $8 - \frac{31}{2}\,x \geqslant \frac{1}{x}$, $31x^2 - 16x + 2 \leqslant 0$, $x \in \bigl[\,\frac{8-\sqrt{2}}{31},\, \frac{8+\sqrt{2}}{31}\,\bigr]$. Весь этот промежуток входит в область определения исходного неравенства.

Б. $y \in (0,\, 2\,]$, т. е. $\log_x\bigl(8 - \frac{31}{2}\,x\bigr) > 0$ и $\log_x\bigl(8 - \frac{31}{2}\,x\bigr) \leqslant 2$. Как и ранее, основание $x < 1$. Из первого неравенства следует, что $8 - \frac{31}{2}\,x < 1$, $x > \frac{14}{31}$. Из второго вытекает: $8 - \frac{31}{2}x \geqslant x^2$, $x \in \bigl[\,-16,\, \frac{1}{2}\,\bigr]$. Пересечение двух найденных множеств дает $x \in \bigl(\frac{14}{31},\, \frac{1}{2}\,\bigr]$.

Осталось объединить решения, найденные при рассмотрении обоих случаев.

Ответ: $\bigl[\,\frac{8-\sqrt{2}}{31},\, \frac{8+\sqrt{2}}{31}\,\bigr] \cup \bigl(\frac{14}{31},\, \frac{1}{2}\,\bigr]$.

5. Пусть большим основанием усеченной пирамиды является правильный треугольник ABC, ее боковые ребра AA', BB', CC'. Достроим усеченную пирамиду до полной, продлив боковые ребра до пересечения в точке S (рис. 224). Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания ABC и обозначим через α угол между боковыми ребрами и плоскостью ABC. Тогда в прямоугольных треугольниках SOA, SOB и SOC катет SO — общий, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$. Следовательно, треугольники равны и равны их гипотенузы — боковые ребра SA, SB, SC пирамиды $SABC$, т. е. пирамида $SABC$ — правильная. Известно,

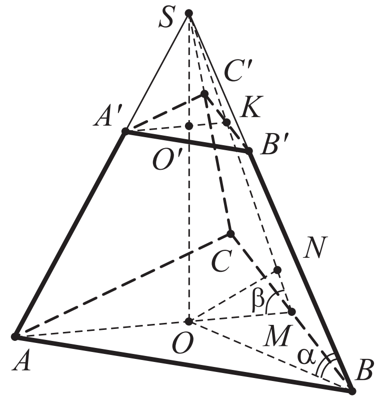

Рис. **224**

что в правильной пирамиде боковые грани образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, обозначим их через β.

Основание O перпендикуляра SO является центром вписанного в треугольник ABC круга. Проведем плоскость через ребро SA и высоту SO (рис. 225). Она пересечет ребра BC и $B'C'$ в точках M и K соответственно. Легко убедиться, что AM и $A'K$ — высоты правильных треугольников ABC и $A'B'C'$. Опустим перпендикуляр ON на SM. Плоскость ASM перпендикулярна ребру BC, поэтому $ON \perp BC$ и ON — перпендикуляр к плоскости SBC. Из треугольника ONM находим $ON = OM \cdot \sin\beta$, где OM — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Повторяя рассуждения для граней SAB и SAC, убеждаемся, что точка O равноудалена от боковых граней пирамиды и, следовательно, является центром заданной в условии сферы. Ее точкой касания с верхним основанием будет центр O' вписанной в треугольник $A'B'C'$ окружности, поскольку $OO' \perp A'B'C'$.

Пусть теперь радиус ON сферы равен R. Тогда из треугольника SON находим $SO = R/\cos\beta$, $SO' = SO - OO' = R/\cos\beta - R$. Из подобия треугольников $SO'K$ и SOM имеем $O'K : OM = SO' : SO =$

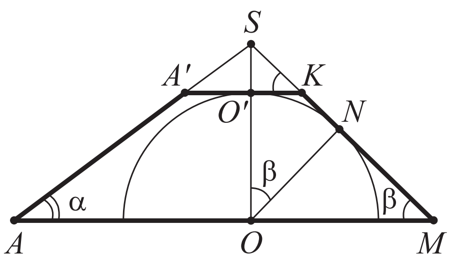

Рис. **225**

$= 1 - \cos\beta$, в то же время периметры треугольников $A'B'C'$ и ABC относятся так же, как радиусы $O'K$ и OM вписанных в них окружностей. Следовательно, $1-\cos\beta = \frac{2}{17}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} = \frac{8}{15}$. Из прямоугольных треугольников SOM и SOB находим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OB}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OM}$. В то же время $OM = OB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}OB$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{15}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{15}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{4}{15}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 184 монеты. **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$. *Указание.* Как и в задаче 2 из варианта 1, $\angle ADB = \angle ACB$. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда по теореме синусов $\sin\alpha = \frac{AB}{AC}\sin 135^\circ = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Используя теорему косинусов в треугольнике ABC, убедитесь, что условию $BC < 5$ удовлетворяет тупой угол α. **3.** $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = -1$ или $a_2 = \frac{9}{2}$, $b_2 = -9$. **4.** $\left(0, \frac{3-\sqrt{2}}{7}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{2}}{7}, \frac{5}{7}\right) \cup \left[\frac{36}{49}, \frac{6}{7}\right)$. **5.** $1+\frac{1}{\sqrt{13}}$. *Указание.* Пусть угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания равен α. Покажите, что $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$, а искомое отношение равно $\operatorname{tg}\alpha : \left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 3. **1.** 3336 км. **2.** $\pi - \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7}$ $\left(= \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$. *Указание.* Положим $AB = x$. Замечая, что $\angle ABD = 60^\circ$, и применяя теорему косинусов к треугольнику ABD, получаем квадратное уравнение $x^2 - 8\sqrt{3}x + 45 = 0$. Условию $AB > 7$ удовлетворяет только один его корень $5\sqrt{3}$. Теперь легко найти $\angle DAB$ по теореме косинусов или синусов и вычислить величину угла $\angle DCB = \pi - \angle DAB$. **3.** $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = -1$ или $a_2 = 1$, $b_2 = -4$. **4.** $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{19}{25}, \frac{5}{6}\right)$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. *Указание.* Пусть α и β — углы, образованные соответственно боковыми гранями и боковыми ребрами пирамиды с плоскостью большего основания. Покажите, что $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$, а отношение периметров оснований равно $\operatorname{tg}\alpha : \left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 4. **1.** 75, 100 и 60. **2.** $\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$. *Указание.* Заметим, что $\angle CBD = \angle CAD = 45^\circ$. Применяя теорему косинусов, находим две возможные величины стороны BD: $3\sqrt{2}$ или $4\sqrt{2}$. Условию $BD > 5$ удовлетворяет $4\sqrt{2}$. Осталось заметить, что $\angle BAC = \angle BDC$, и вычислить угол BDC по теореме косинусов или синусов из треугольника BCD. **3.** $a_1 = \frac{1}{18}$, $b_1 = -\frac{1}{3}$ или $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -3$. **4.** $\left(0,\ \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{25}{36},\ \frac{5}{6}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{21}+7}{4}$. *Указание.* Пусть α — угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью большего основания. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}30^\circ = 2/\sqrt{3}$. Покажите, что отношение периметров оснований равно $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \cos\alpha$.

1997

Решение варианта 1

1. Пусть S (км) — расстояние между начальными пунктами; t (ч) — время, прошедшее от начала движения до встречи; скорости движения Бабы-Яги и Кащея — соответственно x и y (км/ч). Из условия задачи вытекает следующая система уравнений:

$$S = (x+y)t, \quad S = 2x(t-0,25), \quad S = 2y(t+1).$$

Выражая x и y из второго и третьего уравнений и подставляя в первое, придем к уравнению

$$S = t \cdot \left(\frac{S}{2(t+1)} + \frac{S}{2(t-0,25)}\right).$$

После сокращения на S (по смыслу задачи $S \neq 0$) и умножения на $2(t+1)(t-0,25)$ получаем $2(t+1)(t-0,25) = t(2t+0,75)$, $0,75t = 0,5$, $t = 2/3$ часа, или 40 минут.

Ответ: 40 минут.

2. Логарифмируя левую и правую части уравнения по основанию 4, приходим к равносильному уравнению $3\cos 2x + 4\sin x = -1$. Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и полагая $y = \sin x$, получаем для y квадратное уравнение $3y^2 - 2y - 2 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$, $y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$. Заметим, что $y_1 > 1$, в то время как $|y_2| < 1$. Следовательно, $\sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{7}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

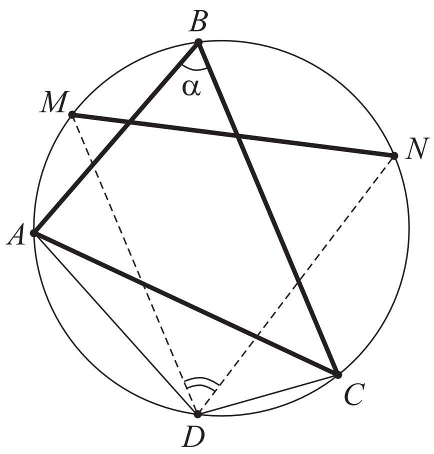

Рис. **226**

3. Пусть R — радиус окружности, α — угол ABC. Рассмотрим произвольную точку D на меньшей из дуг AC. Так как четырехугольник $ABCD$ является вписанным, то $\angle ADC = \pi - \alpha$ (рис. 226). Дуга MBN составляет половину дуги ABC, поэтому

$$\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$
$$\sin\angle MDN = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Применяя теорему синусов к треугольникам ABC и DMN, запишем равенства:

$$\begin{cases} \sqrt{11} = AC = 2R\sin\alpha = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ 3 = MN = 2R\sin\angle MDN = 2R\cos\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$, $R = \frac{MN}{2\cos(\alpha/2)} = \frac{9}{5}$.

Ответ: $9/5$.

4. Левая и правая части уравнения определены, если $x > 0$, $5x \neq 1$, $\frac{x}{\sqrt{5}} \neq 1$, т.е. $x \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \sqrt{5}\right) \cup (\sqrt{5}, \infty)$. Умножая на знаменатели дробей, преобразуем уравнение к равносильному в указанной области определения x:

$$\log_4\left(\frac{x}{25}\right)\log_4\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) = \log_2(\sqrt[4]{5}\cdot x)\log_2(5x).$$

Перейдем к логарифмам по основанию 5, тогда уравнение приобретет вид:

$$\frac{\log_5(x/25)\log_5(x/\sqrt{5})}{4\log_5^2 2} = \frac{\log_5(\sqrt[4]{5}\cdot x)\log_5(5x)}{\log_5^2 2}.$$

Далее после элементарных преобразований:

$$(\log_5 x - 2)\left(\log_5 x - \frac{1}{2}\right) = 4\left(\log_5 x + \frac{1}{4}\right)(\log_5 x + 1),\ 3\log_5^2 + \frac{15}{2}\log_5 x = 0.$$

Отсюда $\log_5 x = 0$ или $\log_5 x = -\frac{5}{2}$, $x = 1$ или $x = 5^{-5/2} = \frac{\sqrt{5}}{5^3} = \frac{\sqrt{5}}{125}$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: 1, $\sqrt{5}/125$.

5. Обозначим через N точку пересечения прямых CL и AD. В силу равенства прямоугольных треугольников ALN и LBC ($AL = LB$, углы ALN и BLC — вертикальные) получаем $AN = BC = 2$. Проведем через вершину S прямую l, параллельную прямой BC, и опустим перпендикуляр CS' на нее (рис. 227). Пусть P — середина BC. Треугольник SPC — прямоугольный (медиана SP является также высотой равнобедренного треугольника SBC). Прямоугольные треугольники SPC и $SS'C$ равны: у них общая гипотенуза SC и равные острые углы $S'SC$ и SCP. Отсюда $SS' = CP = 1$, $CS' = \sqrt{SC^2 - S'S^2} = \sqrt{5}$. Аналогично, DS' тоже является перпендикуляром к l в плоскости SAD, $DS' = CS' = \sqrt{5}$. Таким образом, прямая l перпендикулярна плоскости $S'DC$.

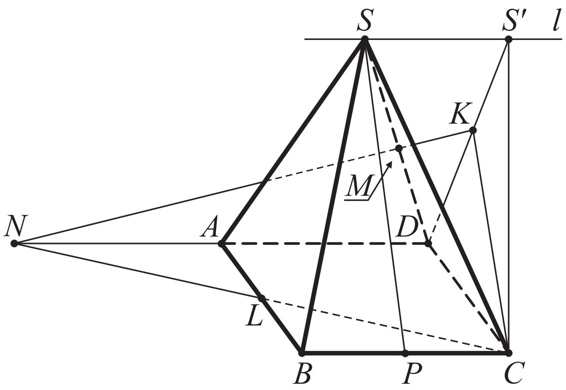

Рис. **227**

Проведем высоту CK равнобедренного треугольника $S'DC$. Прямая CK перпендикулярна прямым DS' и l плоскости ASD, следовательно, CK является перпендикуляром к этой плоскости. Рассмотрим плоскость CKN. Она содержит перпендикуляр CK к плоскости ASD, поэтому перпендикулярна плоскости ASD и, следовательно, плоскость CNK совпадает с заданной в условии задачи плоскостью α.

Найдем DK в треугольнике $S'DC$ (рис. 228). Пусть Q — середина DC. В прямоугольных треугольниках $S'DQ$ и KDC имеем $\frac{DK}{DC} = \frac{DQ}{S'D}$, отсюда $DK = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $S'K = S'D - DK = 3/\sqrt{5}$, т. е. $S'K : DK = 3 : 2$.

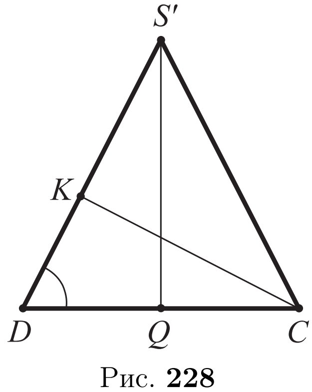

Рис. **228**

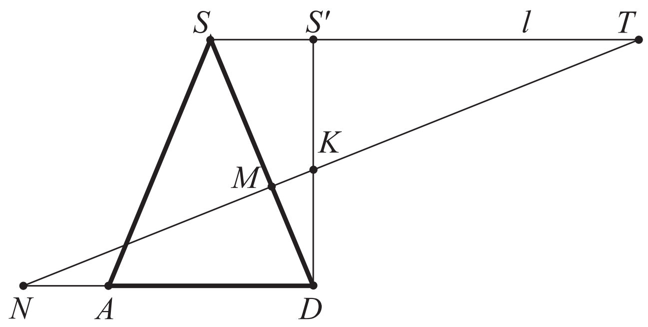

Рис. **229**

Обозначим через T точку пересечения прямых l и NK и рассмотрим в плоскости ASD треугольники NKD и $KS'T$ (рис. 229). Они подобны, поскольку $l \parallel AD$, отсюда $S'T = \frac{ND}{KD} \cdot S'K = 6$, $ST = SS' + S'T = 7$. Наконец, рассматривая пару подобных треугольников SMT и NMD, находим $\frac{SM}{MD} = \frac{ST}{ND} = \frac{7}{4}$.

Ответ: $7 : 4$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** 2 минуты 40 секунд. **2.** $\pm \arccos \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 6. **4.** 1, $\frac{1}{16}$. **5.** $3 : 2$. *Указание.* Пусть l — линия пересечения плоскостей SAD и SBC. Перпендикуляры, опущенные на l из точек A и B, имеют общее основание S', плоскость α проходит через высоту BK равнобедренного треугольника $S'AB$.

Вариант 3. **1.** 1 час. **2.** $(-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** 1, $\frac{1}{27}$. **5.** $1 : 2$. *Указание.* Пусть N — середина ребра BC. Треугольник SLN — равносторонний, плоскость α проходит через его высоту LK.

Вариант 4. **1.** 12 минут. **2.** $\pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. **3.** 2. **4.** 1, $\sqrt[3]{5}/625$. **5.** $3 : 2$. *Указание.* Пусть l — линия пересечения плоскостей SAB и SCD. Перпендикуляры, опущенные из точек B и C на l, имеют общее основание S'. Плоскость α проходит через основание K перпендикуляра LK, опущенного на боковую сторону $S'B$ равнобедренного треугольника $S'BC$ из середины L основания BC.

1998

Решение варианта 1

1. Нетрудно проверить, что подкоренное выражение $x^2 - 3x + 6$ положительно при всех x, поэтому область допустимых значений аргумента совпадает с $(-\infty,\ +\infty)$.

Так как арифметический корень неотрицателен, то неравенство заведомо выполняется, когда $2x - 6 < 0$, т. е. $x < 3$. Следовательно, полупрямая $(-\infty,\ 3)$ входит в множество решений неравенства.

Пусть $x \geqslant 3$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны и его можно возвести в квадрат. Получим стандартное квадратное неравенство

$$(2x-6)^2 \leqslant x^2 - 3x + 6 \quad \text{или} \quad 3(x^2 - 7x + 10) \leqslant 0,$$

решением которого является промежуток $[\,2,\ 5\,]$. Учитывая условие $x \geqslant 3$, находим: $x \in [\,3,\ 5\,]$.

Объединив интервалы $(-\infty,\ 3)$ и $[\,3,\ 5\,]$, получим полное решение задачи.

Ответ: $(-\infty,\ 5\,]$.

2. Сразу отметим, что на основании свойств логарифмической функции необходимы ограничения $x > 0$ и $x \neq 1$. Переходя теперь к логарифмам по основанию 5, получаем

$$\log_5 x \cdot \Big(\frac{1}{\log_5(2/5)} + 1\Big) = -\frac{\log_5 2}{\log_5 x}; \quad \frac{\log_5^2 x \cdot \log_5 2}{\log_5(2/5)} = -\log_5 2;$$

$$\log_5^2 x = -\log_5(2/5) = \log_5(5/2).$$

Таким образом, $\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5(5/2)}$, $x = 5^{\pm\sqrt{\log_5(5/2)}}$. Найденные корни удовлетворяют необходимым условиям $x > 0$ и $x \neq 1$.

Ответ: $5^{\pm\sqrt{\log_5(5/2)}}$.

3. Пусть $\angle B = \alpha$ (рис. 230). Так как треугольник BMC — равнобедренный, то $\angle MCB = \angle CMB = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ и $\angle AMC = \pi - \angle CMB = \frac{1}{2}(\pi + \alpha)$. Из треугольника AMC по теореме синусов получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi+\alpha}{2} = \sin\angle AMC = \frac{AC}{4\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

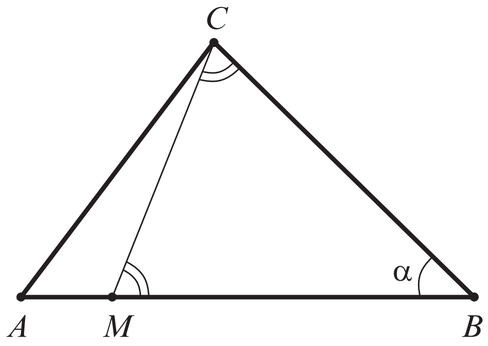

Рис. **230**

Следовательно,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16},$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Применим теперь теорему синусов к треугольнику ABC и найдем искомый радиус R описанной окружности:

$$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{15}/8} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

4. Разделив исходное уравнение на 2, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin 7x.$$

Заметим, что $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$\sin 7x = \sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Преобразуя разность синусов в произведение, получаем

$$2\cos\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Откуда находим две серии корней:

$$\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{27} + \frac{2k\pi}{9} \quad k\in\mathbb{Z};$$
$$\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6} = n\pi, \quad x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5} \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{4\pi}{27} + \frac{2k\pi}{9}$; $-\frac{2n\pi}{5}$ $(k,\, n\in\mathbb{Z})$.

5. Введем систему координат с началом в точке B', оси x, y, z которой совпадают соответственно с лучами $B'C'$, $B'A'$, $B'B$.

Через отрезок PQ проведем плоскость π, параллельную грани $AA'B'B$. Понятно, что эта плоскость пересечет плоскость грани $A'B'C'D'$ по некоторой прямой PN, параллельной $A'B'$, а плоскость грани $BB'C'C$ — по прямой QN, параллельной ребру BB' (рис. 231).

Пусть x — абсцисса точки N. Уравнение прямой $A'C'$ в плоскости xy есть $x + y = 1$. Абсцисса точки P также равна x, а ее ордината находится из этого уравнения: $y = 1 - x$. Таким образом, $P = (x;\ 1 - x;\ 0)$.

Аналогично, абсцисса точки Q равна x, уравнение прямой $B'M$ в плоскости xz есть $z = 2x$, аппликата точки Q равна $2x$ и $Q = (x;\ 0;\ 2x)$.

Из формулы для расстояния между двумя точками вытекает $PQ^2 = 4x^2 + (1 - x)^2 = 5x^2 - 2x + 1$. Значит,

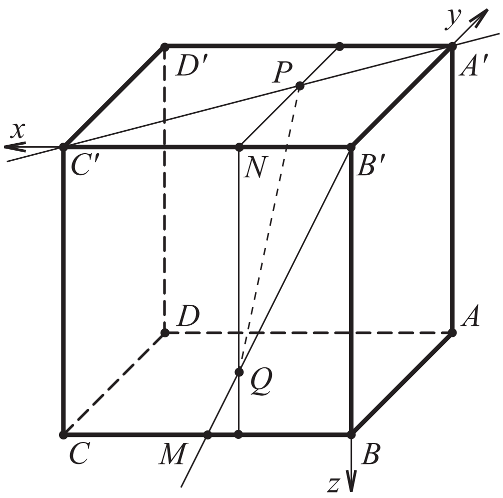

Рис. **231**

$$x_{\min} = \frac{2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5}, \quad PQ^2_{\min} = \frac{4}{25} + \frac{16}{25} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $[8, +\infty)$. **2.** $3^{\pm\sqrt{\log_3 6}}$. **3.** $2\sqrt{15}$, 2. *Указание.* По теореме синусов найдите $\sin\angle B$ в треугольнике ABC, а затем воспользуйтесь равенством $\angle ABC = 2\angle AMC$. **4.** $-\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$; $\frac{\pi}{60} + \frac{n\pi}{5}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $\sqrt{10}/5$. *Указание.* Используйте метод координат.

Вариант 3. **1.** $[0, +\infty)$. **2.** $2^{\pm\sqrt{\log_2 7}}$. **3.** 6, $12\sqrt{2}$. *Указание.* По теореме синусов найдите $\sin\angle B$ в треугольнике ABC, а затем воспользуйтесь равенством $2\angle AMC = \pi + \angle ABC$. **4.** $\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3} + n\pi$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $1/\sqrt{5}$. *Указание.* Используйте метод координат.

Вариант 4. **1.** $(-\infty, -3]$. **2.** $3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}$. **3.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$. *Указание.* По теореме синусов найдите $\sin\angle M$ в треугольнике AMC, а затем воспользуйтесь равенством $\angle ABC = 2\angle AMC$. **4.** $\frac{\pi}{66} + \frac{2k\pi}{11}$; $-\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.** $1/\sqrt{10}$. *Указание.* Используйте метод координат.

1999

Решение варианта 1

1. Рассмотрим два возможных случая.

А. Пусть $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 1$ или $x \geqslant 4$. Тогда $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$ и данное неравенство приводится к виду $x^2 - 6x + 7 > 0$. Полученное квадратное неравенство справедливо для $x \in (-\infty,\ 3-\sqrt{2}\,) \cup (3+\sqrt{2},\ \infty)$. Заметим, что $3-\sqrt{2} > 1$, $3+\sqrt{2} > 4$. Учитывая исходные ограничения, находим, что в рассматриваемом случае решения образуют множество $(-\infty,\ 1\,] \cup (3+\sqrt{2},\ \infty)$.

Б. Пусть теперь $x \in (1,\ 4)$. Тогда $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, исходное неравенство преобразуется к виду $x^2 - x + 1 < 0$, откуда $x \in (\,2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}\,)$. С учетом того, что $2 - \sqrt{3} < 1$, $2 + \sqrt{3} < 4$, для второго случая получаем множество решений $(1,\ 2 + \sqrt{3}\,)$.

Ответ: $(-\infty,\ 2 + \sqrt{3}\,) \cup (3 + \sqrt{2},\ \infty)$.

2. Для корней исходного уравнения должны выполняться условия:

$$\cos x \neq 0, \quad \cos 3x \neq 0. \tag{1}$$

Заметим, что $1 - 4\cos^2 x = 1 - 2(\cos 2x + 1) = -(1 + \cos 2x)$. Используя полученное соотношение и формулу преобразования суммы косинусов в произведение, последовательно получаем

$$(2\cos 2x + 1) \cdot \Big(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x}\Big) = 0, \qquad \frac{2\cos 2x \cos x (2\cos 2x + 1)}{\cos x \cos 3x} = 0.$$

Так как $\cos x \neq 0$, можно сократить на $\cos x$. Далее рассмотрим два случая.

А. Пусть $2\cos 2x + 1 = 0$. Тогда $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Условия (1) выполнены для всех корней найденной серии.

Б. Пусть теперь $\cos 2x = 0$. Тогда $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. И в этом случае условия (1) выполнены для всех корней.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$; $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$.

3. Пусть в условии задан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, $AM = 6$ — медиана, проведенная к боковой стороне

BC, BN — высота, опущенная на основание AC (рис. 232). Положим $BM = MC = x$, $AN = NC = y$, $\angle AMB = \alpha$.

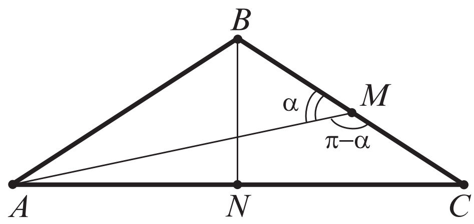

Рис. **232**

Учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, воспользуемся теоремой косинусов для треугольников AMB и AMC и запишем следующую систему равенств:

$$4x^2 = x^2 + 36 - 12x\cos\alpha, \quad 4y^2 = x^2 + 36 + 12x\cos\alpha.$$

Складывая, получаем $4(x^2 + y^2) = 2x^2 + 72$, или $x^2 = 36 - 2y^2$.

Выразим теперь площадь треугольника через x и y. Вычислив высоту $BN = \sqrt{4x^2 - y^2}$, получаем второе уравнение, связывающее неизвестные x и y:

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \sqrt{4x^2 - y^2} = 3\sqrt{15}.$$

Возводя в квадрат, приводим его к виду $y^2(4x^2 - y^2) = 135$. Заменив в этом уравнении x^2 на его выражение через y^2, получаем биквадратное уравнение $y^2(16 - y^2) = 15$ для определения y. Решая его, находим два различных положительных корня: $y = 1$ или $y = \sqrt{15}$. В первом случае $x = \sqrt{34}$, $AB = BC = 2\sqrt{34}$, $AC = 2$. Во втором случае $x = \sqrt{6}$, $AB = BC = 2\sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{15}$. Так как треугольник ABC тупоугольный, то $AB^2 + BC^2 < AC^2$. Этому условию удовлетворяет только второе решение.

Ответ: $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{15}$.

4. Заметим, что для решений системы должны выполняться неравенства $x > 0$, $y > 0$. Логарифмируя оба уравнения по основанию 10, получаем систему линейных уравнений относительно $\lg x$ и $\lg y$:

$$\begin{cases} 2\lg 2 \cdot \lg x = \lg 5 \cdot \lg y, \\ \lg^2 5 + 2\lg 2 \cdot \lg y = 4\lg^2 2 + \lg 5 \cdot \lg x. \end{cases}$$

Выразив $\lg y$ через $\lg x$ из первого уравнения системы и подставив во второе, получаем

$$\frac{(\lg^2 5 - 4\lg^2 2)\lg x}{\lg 5} = \lg^2 5 - 4\lg^2 2.$$

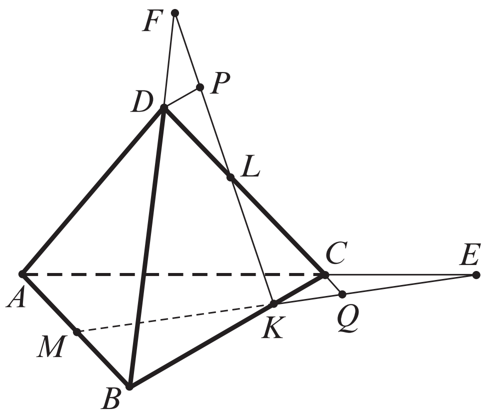

Рис. **233**

Сокращаем на ненулевой общий множитель и находим $\lg x = \lg 5$, $x = 5$, и соответственно $\lg y = 2\lg 2$, $y = 4$.

Ответ: (5; 4).

5. Пусть M — середина ребра AB, а секущая плоскость пересекает ребра BC и CD в точках K и L соответственно. Выберем на отрезках FK и ME точки P и Q так, что $DP \parallel BC$, $CQ \parallel AB$ (рис. 233). Рассмотрим две пары подобных треугольников: AME и CQE, BMK и CQK. Из их подобия вытекает, что

$$\frac{CK}{BK} = \frac{CQ}{BM} = \frac{CQ}{AM} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}.$$

Из подобия треугольников FDP и FBK, а также треугольников DPL и CKL окончательно получаем

$$DP = \frac{1}{4} \cdot BK = \frac{3}{4} \cdot CK, \quad \frac{CL}{LD} = \frac{CK}{DP} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 4 : 3, считая от вершины C.

Ответы и указания к вариантам 2–4

Вариант 2. **1.** $(3-\sqrt{2},\ 4-\sqrt{3})$. **2.** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** 6. **4.** $\left(\frac{1}{4};\ 9\right)$. **5.** 3 : 7, считая от вершины A.

Вариант 3. **1.** $(-\infty,\ \sqrt{5})\cup(2+\sqrt{5},\ \infty)$. **2.** $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$; $n\pi$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** 6, 6, 4. **4.** (7; 9). **5.** 7 : 8, считая от вершины A.

Вариант 4. **1.** $(1-\sqrt{10},\ 3-\sqrt{10})$. **2.** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; $\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(k,\ n \in \mathbb{Z})$. **3.** 10, 10, $\sqrt{22}$. **4.** $\left(\frac{1}{5};\ 4\right)$. **5.** 6 : 5, считая от вершины S.

ОГЛАВЛЕНИЕ