ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

Лектор – проф. В. А. Чуркин

Algebra_Lectures_-_Fall_2007_Semester_article.pdf

1-й семестр

Введение. Группы, кольца, поля

Истоки и предмет алгебры. Алгебраическая операция, структура, изоморфизм. Аксиоматика групп, колец, полей, примеры. Подгруппы, подкольца, подполя [1, гл. 1, § 1, 2, 3].

Поле **C** комплексных чисел: определение, единственность, существование, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней [1, гл. 1, § 5].

Кольца $\mathbf{Z}_n$ вычетов по модулю n и поля вычетов по простому модулю. Характеристика поля.

Группа подстановок: проверка аксиом, разложение на циклы, на транспозиции, декремент и четность подстановки, четность произведения, подгруппа четных подстановок [1, гл. 4, § 1, 3, 4, 6].

Кольцо квадратных матриц: проверка аксиом, алгебра матриц над полем, разложение матрицы над полем в произведение диагональной и трансвекций [1, гл. 1, § 9].

Определитель матрицы над полем: задание как функции элементов матрицы, поведение при транспонировании, полилинейность определителя как функции системы строк, определитель треугольной и полураспавшейся матриц. Определитель произведения матриц. Критерий обратимости матрицы над полем. Разложение определителя по строке. Формула для обратной матрицы и решение крамеровых систем линейных уравнений [1, гл. 2, § 4, 5].

Определитель и основные линейные группы – общая, специальная, ортогональная, унитарная [1, гл.4, § 1].

Векторные пространства

Аксиоматика, примеры [1, гл. 1, § 7]. Линейные комбинации, зависимость и независимость, эквивалентность систем векторов. Теорема о замене, базис и ранг системы векторов, равенство рангов эквивалентных систем. Базис пространства, размерность. Координаты вектора и изоморфизм конечномерного векторного пространства и пространства столбцов (строк) над полем. Замена координат вектора при замене базиса [1, гл. 2, § 2].

Подпространства конечномерного пространства, их размерность, сумма, пересечение, прямая сумма, связь между их размерностями. Фактор-пространство, его базис и размерность [1, гл. 5, § 1, гл. 9, § 3].

Системы линейных уравнений

Ранг матрицы, совпадение строчного, столбцового и минорного ранга, ранг произведения матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение. Однородные системы: пространство решений и фундаментальные системы решений. Связь между решениями неоднородных и соответствующих однородных систем. Задание линейных многообразий системами линейных уравнений. Геометрическое описание решений над **R** [1, гл. 2, § 3, 5; гл. 5, § 2]. Теоремы Фредгольма [7, § 85].

Кольца многочленов

Определение, проверка аксиом. Алгоритм деления с остатком. Корни и значения: теорема Безу, число корней и формулы Виета, производная и кратные корни, формула Тейлора, интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона [1, гл. 3, § 1; 2].

Наибольший общий делитель и алгоритм Евклида. Критерий разрешимости линейного диофантова уравнения. Свойства взаимно простых многочленов. Общее решение линейного диофантова уравнения. Единственность разложения на неразложимые множители. Пример кольца с неоднозначным разложением на множители [1, гл. 3, § 5]. Разложение на множители в кольцах многочленов **Z**[x] и **Q**[x] [1, гл. 3, § 3, 4].

Вложение целостного кольца в поле частных. Поле рациональных функций и разложение на простейшие дроби [1, гл. 3, § 10].

Гомоморфизмы, идеалы колец и фактор-кольца [1, гл. 9, § 2]. Теорема о существовании корня [1, гл. 9, § 5].

Кольцо многочленов от нескольких переменных и кольцо симметрических многочленов. Основная теорема о симметрических многочленах. Дискриминант многочлена и его вычисление с помощью определителей Вандермонда и формул Ньютона для степенных сумм. Результант пары многочленов, результант и исключение неизвестных, выражение дискриминанта через результант [1, гл. 3, § 7, 8, 9; 2, I, гл. 6, § 2].

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел [1, гл. 3, § 3, 4].

Системы полиномиальных уравнений и теорема Гильберта о базисе. Деление с остатком в кольцах многочленов от нескольких переменных. Существование однозначно редуцирующих базисов полиномиальных идеалов (базисов Гребнера--Ширшова). Алгоритм Бухбергера вычисления однозначно редуцирующих базисов. Теорема Гильберта о корнях (над полем комплексных чисел), критерий совместности и системы полиномиальных уравнений с конечным числом решений.[15; 9, гл 2, § 1-8; 11, гл. 6, § 26].

<u>Примечание:</u> Последняя тема, выделенная курсивом, читается только при наличии времени в конце семестра.

<u>В конце семестра – экзамен.</u>

2-й семестр

Линейные отображения и операторы

Определение, примеры. Теорема о свободе и матрица линейного отображения (оператора) в данной паре базисов (данном базисе), координаты образа вектора, связь между матрицами линейного отображения (оператора) в разных базисах. Алгебра линейных операторов, изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного отображения. Обратимые операторы [1, гл. 3, § 3, гл. 6, § 1; 2, II, гл. 2, § 1-3].
Инвариантные подпространства, сужение на подпространстве и индуцирование оператора на фактор-пространстве. Собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен линейного оператора, диагонализируемые операторы [1, гл. 6, § 1, 2]. Неразложимые неотрицательные вещественные матрицы и теорема Перрона–Фробениуса [10, гл. 6, § 37; 8, гл. 13, § 2; 2, II, гл. 7, § 4; 13, гл. 8, § 3-4].
Нильпотентные операторы: определение, недиагонализируемость, классификация с точностью до подобия [14].
Теорема Гамильтона–Кэли [14; 2, II, гл. 2, § 4]. Ядерно-образные разложения. Корневые подпространства и корневое разложение [14; 1, гл.6, § 4, 5].
Жорданова форма матрицы и жорданов базис пространства относительно линейного оператора, спектр которого содержится в поле скаляров. Задача о подобии матриц (линейных операторов) в этом случае. Многочлены от матриц, вычисление через минимальный многочлен и через жорданову форму матрицы. Функции от матриц, представление многочленами и ряды от матриц [14; 1, гл. 6, § 4, 5; 2, II, гл. 2, гл. 7].
Фробениусова форма и задача о подобии матриц (линейных операторов) над произвольным полем [5; 10, гл 3, § 14].

Линейные отображения и операторы евклидовых и эрмитовых пространств

Аксиоматика евклидовых и эрмитовых пространств, примеры. Длина вектора и угол между векторами: неравенство Коши--Буняковского, неравенство треугольника, тождество параллелограмма, теорема Пифагора.
Ортогональные и ортонормированные системы, процесс ортогонализации Грама—Шмидта и изоморфизмы евклидовых (эрмитовых) пространств. Ортогональное дополнение к подпространству, ортогональные разложения пространства и проекторы на подпространство, метрические пространства и расстояние от точки до подпространства в евклидовых (эрмитовых) пространствах.[1, гл. 5, § 4, 5; 2, II, гл. 3, § 1, 2].
Сопряженность линейных отображений евклидовых (эрмитовых) пространств относительно скалярного произведения, связь между их матрицами.
Симметрические и эрмитовы (самосопряженные) операторы и матрицы: определение, вещественность спектра, канонический вид, спектральное разложение и следствие для матриц.
Кососимметрические и косоэрмитовы операторы и матрицы: определение, расположение спектра, канонический вид и следствие для матриц.
Ортогональные и унитарные операторы и матрицы: определение, расположение спектра, канонический вид и следствие для матриц.
Нормальные операторы и матрицы: определение, канонический вид в и следствие для матриц. [1, гл. 6, § 3; 2, II, гл. 3, § 3].
Сингулярные числа и сингулярное разложение для линейного отображения (матрицы) . Полярное разложение линейного оператора [7, § 78, 79; 10, гл. 3, § 16].
Норма линейного отображения: определение, простейшие свойства. Норма и сингулярные числа линейного отображения, норма и спектральный радиус нормального оператора [7, § 82–83; 12, § 87–89].
Ортогональные проекторы и серия углов между двумя подпространствами евклидова пространства .

Билинейные и квадратичные формы

Определение и примеры, матрица формы в данном базисе, замена матрицы при замене базиса, ранг матрицы формы --- ее инвариант, вырожденные формы и правое (левое) ядро формы, симметрические и кососимметрические формы, разложение в их сумму, квадратичные формы, соответствие с симметрическими формами, матрицы квадратичных форм.
Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа (матричный вариант).
Сигнатура, положительная (отрицательная) определенность и полуопределенность для вещественных квадратичных форм, инвариантность сигнатуры, теорема Якоби и критерий Сильвестра [1, гл. 5, § 3; 2, II, гл. 1, § 4].
Выражение квадратичной формы на евклидовом пространстве через самосопряженный оператор и приведение ее к главным осям [1, гл. 6, § 3]. Экстремумы вещественной квадратичной формы на единичной сфере. Максимин- и минимакс-формулы для собственных значений самосопряженного оператора (теорема Куранта–Фишера) [12, § 90; 10, гл. 4, § 19, 20].
Перемежаемость спектров квадратичной формы и ее сужения на подпространство коразмерности 1.
Классификация кососимметрических билинейных форм и пар квадратичных форм, одна из которых знакоопределенная.

Линейные алгебры и группы

Разложение группы на смежные классы ее подгруппы. Действие группы на множестве – орбиты, стабилизаторы, теорема о мощности орбиты, действие на орбите и теорема Бернсайда о числе орбит. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы и фактор-группы, простые группы. Центры, коммутаторы и коммутанты, прямые произведения. Матричное и геометрическое описание групп $\mathbf{SO}_2$ и $\mathbf{SU}_2$. Простота группы $\mathbf{SO}_3$ поворотов трехмерного евклидова пространства. [1, гл. 4, § 5, 6; 10, гл. 10, § 1, 2, 3, 5]
Определение, примеры, типы алгебр: коммутативные, антикоммутативные, алгебры Ли, алгебры с делением. След и основные матричные алгебры Ли – общая, бесследных, кососимметрических и косоэрмитовых матриц. Алгебра кватернионов **H**: определение, матричное представление, норма кватерниона и обратный кватернион, мультипликативность нормы и тождество Эйлера, связь с группой $\mathbf{SU}_2$. Связь умножения кватернионов со скалярным и векторным произведением в $\mathbf{R}^3$. Централизатор кватерниона и центр алгебры кватернионов. Характеризация чисто мнимых кватернионов. Параметризация группы $\mathbf{SO}_3$ поворотов $\mathbf{R}^3$ с помощью кватернионов. Кватернионы и группа $\mathbf{SO}_4$ поворотов 4-мерного евклидова пространства [5, гл. 15, § 1–2]. Теорема Фробениуса о вещественных конечномерных ассоциативных алгебрах с делением [1, гл. 11, § 6].
В конце семестра – потоковая контрольная работа и экзамен.

Темы и типичные задачи семинаров
1-й семестр
Группы, кольца, поля

0. Множества и отображения [16, № 2.1, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.11а, б, 1.5].
1. Алгебраические операции, группы, подгруппы, порядок элемента [16, № 54.1, 55.1-55.3, 56.1, 56.7, 56.14, 56.8, 56.15а] или [17, № 1634 1)-10), 1636, 1635, 1639, 1642, 1649, 1650, 1646, 1647].
2. Кольца и поля, кольцо вычетов по модулю n [16, № 63.1, 63.3, 63.31, 63.12, 66.19, 63.11а] или [17, № 1734, 1735, 1736, 1741, 1742, 1743, 1754, 1755, 1756].
3. Поле комплексных чисел, квадратные и кубические уравнения [16, № 20.1а, 20.11б, г, 21.1а-ж, 21.9а, 28.2з (все корни), 22.8а] или [18, № 3, 4, 15а, 17а, 43, 49].
4. Группы подстановок, разложение на циклы и транспозиции [16, № 3.1а, 3.2а, 3.3а, 3.4а, 56.3а, 56.32а, 3.6а, 3.7а, 3.12, 3.14, 3.17, 3.22] или [17, № 170, 178, 153, 164, 177, 182, 184, 1658].
5. Кольцо матриц, разложение в произведение диагональной матрицы и трансвекций [16, № 18.1а, 17.1а–в, 17.4, 17.12–17.15, 17.20, 19.2, 17.22, разложить матрицу из № 18.8к] или [17, № 790, 802–805, 811, 814–818, 820–822, разложить матрицы из № 790].
6. Определитель матрицы: способы вычислений [16, № 9.1а, 9.2а, 10.1а, 10.2, 10.3, 10.4а, б, 13.1а, 13.2а] или [17, № 45, 197, 200–204, 279, 280].
7. Определитель матрицы: применение к системам линейных уравнений и обращению матриц [16, № 14.1, 8.6б, г, 18.8в, з, 18.9д, 18.10а, 18.12] или [17, № 75, 289, 299, 305, 843, 935, 864].
8. Определитель, след и матрицы специального вида [16, № 7.16, 18.13, 18.14, 19.6, 19.5, 19.7, 19.26, 19.27, 19.14, 19.19] или [17, № 839, 873, 216, 217, 888, 889, 538, 893, 894, 896, 911, 912].
9. Контрольная работа.

Векторные пространства и линейные уравнения

10. Векторные пространства, линейная зависимость, подпространства [16, № 34.1, 34.2, 34.3, 34.10а, 34.11, 34.14б, 35.1–35.4, 6.11, 6.14] или [17, № 1821, 1277, 1280, 1290–1293, 1301–1305, 651, 666, 1284, 1824, 1828].
8
11. Ранг матрицы, линейные оболочки систем векторов [16, № 7.1а, 7.2г, 35.11б, 7.5–7.8] или [17, № 608, 619, 1311, 626, 627, 629, 631, 633, 635].
12. Решения конечной системы линейных уравнений. Обратная задача [16, № 8.1а, 8.2е, 8.4а, 35.16а, 49.10а] или [17, № 690, 712, 724, 1312, 1330, 1877].
13. Применения: базисы суммы и пересечения подпространств, прямые суммы, целочисленные системы [16, № 35.15а, 35.18, 35.21, 8.24б] или [17, № 1320, 1328, 1329, 578 (найти все целочисленные решения)].
14. *Потоковая контрольная работа.*

Кольца многочленов

15. Деление с остатком, схема Руффини–Горнера, простые и кратные корни, формулы Виета, формула Тейлора, интерполяция [16, № 25.1а, 26.1б, 26.2а, 26.3а, 30.1а, 30.2, 30.3, 30.9, 30.10] или [18, № 546а, 549а, 551а, б, 570, 631а, 632а, 643].
16. Целочисленные многочлены: рациональные корни, разложение на множители над полями рациональных чисел и над полями вычетов [16, № 28.1, 28.2а, 28.8, 28.9б, г, 28.22а; разложить $x^4+4x^3+3x^2-2x-1$] или [18, № 649, 650а, 654, 658, 666d].
17. Алгоритм Евклида и НОД, решение линейных диофантовых уравнений, разложение на множители и в сумму простейших дробей [16, № 25.3а, 25.5б, 25.7а, 25.7г, 25.8б, 29.1б, 29.2а, 29.3, 29.5] или [18, № 577а, 578а, 580б, 586а, 583а, 585d, 624d, 626с, 630].
18. Распределение вещественных корней (теорема Штурма) [16, № 33.1а, 33.4, 33.1ж] или [18, № 773а, 774b, 785].

19. Распределение комплексных корней (принцип аргумента, теорема Руше) [14, № 3.7] или [16, № 33.9, 33.12, 33.16, 33.17] или [18, № 760, 761, 762, 791, 792b].
20. Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены, формулы Ньютона [16, № 31.3а, 31.9а, 31.10в, 31.15, 31.21, 31.25а] или [18, № 693а, 693h, 699, 706, 707b].
21. Дискриминант, результант, исключение неизвестных [16, № 32.1а, 32.2а, 32.3а, 32.7а, б] или [18, № 723а, 724а, 725а, 726а].
22. Гомоморфизмы колец, идеалы и фактор-кольца [16, № 64.1а, б, 64.37, 6435, 64.41в, 64.42] или [17, № 1795, 1789, 1799].
23. Базисы-делители полиномиальных идеалов, их вычисление и применения, см. [15] или [9]; найти базис-делитель для идеала **R**[x], порожденного многочленами $x^4–4x^3.+1$, $x^3.–3x^2.+1,$ а также для идеала **R**[x,p,q], порожденного многочленами x^3+px+q, $3x^2+p$ относительно лексикографических порядков $x>p>q$ и $x>q>p$.
24. Контрольная работа.
25. *Зачет.*

2-й семестр

Линейные отображения и операторы

1. Линейные отображения, операторы и их матрицы [16, № 39.1, 39.4, 39.15, 39.16, 39.22, 39.20, 39.17] или [17, № 1456, 1434, 1435, 1436, 1445, 1450, 1449, 1453, 1458].
2. Образ и ядро линейного отображения [16, № 41.10б (найти образ и ядро), 39.5, 39.6, 39.7, 39.10, 39.11] или [17, № 1531 (найти образ и ядро), 1833, 1834, 1490–1493].
3. Собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен [16, № 40.1а, б, 40.10, 40.15б, 40.16а, 40.6, 40.1в, 40.3, 40.19, 40.11, 40.12, 40.8] или [17, № 1070, 1466, 1475–1479, 1495, 1484, 1487].
4. Неотрицательные матрицы. Примеры прикладных задач на собственные векторы и значения: марковские процессы, колебания и т. п. (см., например, Г. Стренг, *Линейная алгебра и ее применения*. М.: Мир, 1980, гл. 5). [16, № 42.34а, в, г, 42.32]
5. Нильпотентные операторы [16, № 41.8, 41.1ж, 41.17, 39.1ж, 41.10б] или [17, № 1531, 1536, 1108, 1123].
6. Инвариантные подпространства. Ядерные и корневое разложения [18, № 40.23, 40.22, 4029, 40.35а, 41.27б] или [17, № 1496, 1500, 1501, 1519, 1520, 1509, 1537, 1538, 1485, 1524, 1504].
7. Жорданов базис и задача о подобии [16, № 41.1а, б, 41.10, 41.2, 41.3б, 41.30] или [17, № 1530, 1532, 1120, 1067, 1535].
8. Применения: функции от матриц, коммутирующие матрицы и матричные уравнения [16, № 41.22а, 41.27б, 41.21а, 17.10а, 17.11а, 42.8, 42.9, 42.10] или [17, № 1164, 1169, 1172, 1171], [19, № 4.17].
9. Контрольная работа, коллоквиум.

Линейные операторы евклидовых и эрмитовых пространств

10. Скалярные произведения, процесс ортогонализации, расстояния, углы [16, № 43.28а, 43.33, 43.15а, 43.16а, 43.19а, 43.25, 43.41, 43.45] или 10
[17, № 1394, 1395, 1363, 1360, 1369, 1370, 1376, 1415, 1427, 1385, 1420, 1421].
11. Сопряженность линейных отображений относительно скалярного произведения [16, № 36.11, 44.3--44.8, 44.9а] или [17, № 1852, 1845, 1540, 1541, 1544, 1546–1548, 1555].
12. Симметрические, эрмитовы, кососимметрические и косоэрмитовы операторы [16, № 45.4б, 45.5, 45.7б, 45.17, 44.30, 44.31, 44.32, 46.19] или [17, № 1585, 1588, 1601, 1611, 1612, 1844, 1843].
13. Ортогональные, унитарные и нормальные операторы [16, № 46.3, 46.5, 46.6а, 46.7а, б, 46.8, 46.11, 46.30] или [17, № 1564, 1574, 1842, 1590].
14. Сингулярное разложение и норма линейного отображения (матрицы), полярное разложение оператора, углы между подпространствами евклидова пространства [16, № 46.16а (найти сингулярное, полярное разложение, геометрическое описание и норму), № 46.26, 43.42,43.43] или [17, № 1598] (то же самое), [17, № 1405, 1406].
15. Канонизация квадратичных и билинейных форм, пар форм [16, № 38.18а, 38.19б, 45.19г, 38.11а, 38.15а] или [17, № 1180, 1201, 1251, 1225, 1867].
16. Контрольная работа.

Линейные группы и алгебры

17. Группы: действие на множестве, орбиты, стабилизаторы, классы сопряженности [16, № 56.34в, б, 57.1, 57.3, 57.5, 57.9, 57.14, 57.12, 57.13, 57.22, 57.35] или [17, № 1659б, в, 1662]; [19, № 6.1–6.5, 6.7].
18. Группы: гомоморфизмы, нормальные подгруппы и фактор-группы, центры, коммутанты, прямые произведения [16, № 58.27а, б, 58.2, 58.3, 58.23а, д, 58.24, 58.29, 60.1, 60.4, 62.1а, 62.7а, б] или [17, № 1681б, д, 1690]; [14, № 6.6, 6.8а, 6.9].
19. Алгебра кватернионов и группа поворотов $\mathbf{R}^3$ [16, № 63.23а, г; 14, № 6.17], найти неподвижную ось и

угол поворота линейного оператора $q\longrightarrow sqs^{-1}$, где $q \in \mathrm{R}^3$, $s=\sqrt{2}+ i + j - 2k$ [16, № 73.11а, б].

20. Структурные константы, матричные представления и типы алгебр [16, № 63.18, 63.19; 14, № 6.10–6.13].

21. Потоковая контрольная работа.
22. *Зачет.*

Библиографический список

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 2003.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. I. Основы алгебры, II. Линейная алгебра, III. Основные структуры алгебры, М.: Физматлит, 2000.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
5. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
6. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1977.
7. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
9. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
10. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, Физматлит, 1996.
11. Прасолов В.В., Многочлены. М.: МЦНМО, 2000.
12. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. Чуркин В. А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1991.
15. Чуркин В. А. Системы полиномиальных уравнений и идеалы (методическая разработка), на сайте ММФ НГУ в разделе Программы кафедры алгебры и математической логики, 2001.
16. Сборник задач по алгебре /Под ред. Кострикина А. И. М.: Физмат-лит, 2001.
17. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.
18. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Лань, 1998..
19. Чуркин В. А. Задания по алгебре для 1 курса ММФ / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1994.
20. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О., Линейная алгебра и геометрия, М., Физматлит, 2009.