Программа специального курса «Теория групп»

1. Организационно-методический раздел.

1.1. Название курса – «Теория групп». Настоящий курс реализуется в рамках специальности «Математика» и относится к разделу математических дисциплин. Относится к вузовской компоненте.

1.2. Цели и задачи курса.

Специальный курс «Теория групп» предназначен для того, чтобы студенты механико-математического факультета НГУ овладели основами теории групп, необходимыми для применения в других разделах алгебры, топологии, дискретной математики и других математических дисциплинах. Для достижения поставленной цели выделяются следующие основные задачи курса:

1) Освоение основных теоретико-групповых конструкций – прямого, декартова и свободного произведений, расширений и сплетений, подгрупп и факторгрупп, действий групп на множествах и пространствах.

2) Изучение техники работы в основных классах групп – конечных, разрешимых, нильпотентных, группах автоморфизмов, изучение линейных, подстановочных и других представлений групп.

3) Овладение основами техники алгебраической топологии – фундаментальными группами пространств и графов групп, накрывающими отображениями, клеточными комплексами, теорией групп, действующих на деревьях и гиперболических пространствах.

1.3. Требования к уровню освоения содержания курса.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен:

1) Иметь представление о задачах, которыми занимаются основные разделы современной теории групп и используемых методах.

2) Знать основные теоремы курса.

3) Уметь применять полученные знания для решения задач по теории групп.

1.4. Формы контроля.

Итоговый контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен.

Текущий контроль. В течение учебного года во время курса даются задачи для самостоятельного решения и проводятся устные опросы по основным понятиям и формулировкам.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Новизна курса – курс дает основы теории групп и алгебраической топологии, необходимые для студентов ММФ НГУ, специализирующихся на кафедре «Алгебра и математическая логика».

2.2. Тематический план (распределение часов)

	Количество часов		
Разделы и темы	Лекции	Самостоятельная работа	Всего
Основные объекты и понятия теории групп	6	6	12
Отображения групп, групповые конструкции	6	6	12
Действия групп на множествах	6	6	12
Конечные группы	6	6	12
Нильпотентные группы	6	6	12
Разрешимые и периодические группы	4	4	8
Свободные группы. Копредставления групп.	6	6	12
Графы и комплексы. Фундаментальные группы	10	10	20
Накрытия	10	10	20
Группы, действующие на деревьях	8	8	16

2.3. Содержание разделов и тем.

1. Понятие группы, аксиомы, примеры: циклические группы, линейные группы, группы подстановок, группы симметрий, квазициклические группы, группы кватернионов, фундаментальные группы топологических пространств. Подгруппы, подгруппы, порождённые множеством элементов. Подгруппы циклических и квазициклических групп. Порождающие множества, порождающие множества линейных групп, квазициклических групп, симметрических и знакопеременных групп, порождаемость симметрической группы множеством транспозиций. Порождающие и непорождающие элементы групп. Подгруппа Фраттини. Подгруппы Фраттини циклических, симметрических, квазициклических групп, группы рациональных чисел. Порядок элемента группы. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа и факторгруппа. Простая группа, простота знакопеременной группы ([КМ, $ 13]). Сопряжение в группе, классы сопряжённых элементов в симметрических и линейных группах. Нормализатор и централизатор множества элементов группы. ([КМ, $ 1-3])
2. Гомоморфизм, изоморфизм, теоремы о гомоморфизмах. Конструкции прямого и декартова произведений групп, внешнее и внутреннее определения. Поддекартовы произведения групп, теорема Ремака. ([КМ, $ 4])
3. Понятие субнормального и нормального рядов в группе, секция группы. Полициклические группы. Теоремы Шрайера и Гёльдера об уплотнениях рядов в группах. ([КМ, $ 4])
4. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп. Автоморфизмы циклических групп, группы рациональных чисел. Характеристические подгруппы. Внешние автоморфизмы. Расширения посредством групп автоморфизмов, голоморф. Совершенные группы, башня автоморфизмов. Критерий совершенности группы автоморфизмов – характеристичность группы внутренних автоморфизмов в группе всех автоморфизмов. Конструкции прямого и декартова сплетений групп, теорема Фробениуса о вложении произвольного расширения в сплетение. ([КМ, $ 5-6])
5. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы точек, неподвижные точки элементов. Ядро действия, точные и регулярные действия. Теорема о смежных классах по стабилизатору элемента, о мощности фактормножества по действию. Примитивность и транзитивность, блоки. Подстановочное представление группы, степень представления.

Теоремы о подстановочных представлениях ([КМ, $ 12]). Точные представления степени шесть симметрической группы на пяти элементах. Теорема об индексе примитивной подгруппы симметрической группы.(Wielandt, Groups of permutations).
6. Силовские подгруппы конечных групп, теорема Силова. Силовские подгруппы симметрических групп. Группы порядка pq. Подгруппа, содержащая нормализатор силовской подгруппы ([КМ, $ 11]).
7. Нильпотентные группы. Верхний и нижний центральный ряды в группе. Нильпотентность конечных p-групп. Тождество нильпотентности. Факторы и подгруппы нильпотентных групп. Коммутаторные тождества. Теоремы о нильпотентных группах: подгруппа Фраттини, подгруппа элементов конечного порядка, нильпотентные группы без кручения и извлечение корней, факторы верхнего центрального ряда нильпотентных групп без кручения. Теорема Фиттинга и подгруппа Фиттинга. Конечные нильпотентные группы, теоремы Бернсайда - Виланда и Фраттини. Конечнопорождённые нильпотентные группы. ([КМ, $ 16-17, до т.17.2.5]).
8. Разрешимые группы. Тождество разрешимости. Холловы подгруппы конечных разрешимых групп, теорема Холла. ([КМ, $19-20 до т.20.1.4]) Теорема Миллера-Морено о разрешимости конечных групп, все собственные подгруппы которых абелевы.
9. Периодические группы. Свободные бернсайдовы группы. Теоремы Бернсайда и Санова о конечности свободных бернсайдовых групп периодов 2, 3 и 4 конечного ранга. ([Холл, $ 18.1-18.3]).
10. Свободные группы. Несократимые слова над алфавитом, конкатенация, свободный базис. ([КМ, $ 14 до т. 14.5 включительно, и ЛШ, гл.1, $ 1]). Представления групп в терминах порождающих и определяющих соотношений. Эквивалентность конечных представлений, преобразования Тице и теорема Тице. ([ЛШ, гл.2, $1-2 по стр.130]). Подгруппы свободных групп, метод Нильсена (ЛШ, гл.1, $ 2).
11. Фундаментальные группы графов. Морфизмы и накрытия графов. Теорема об антиизоморфизме решётки подгрупп свободной группы и множеством накрытий графа. Ранг фундаментальной группы и эйлерова характеристика графа. Реализация подгруппы через накрытие. Подгруппы свободных групп. Подгруппы свободных групп конечного индекса. Клеточные 2-комплексы, представления их фундаментальных групп. Триангуляция и барицентрическое продразбиение. Теорема о накрытиях 2-комплексов. Переписывающий процесс Райдемастера – Шрайера. (ЛШ, гл.3, $ 1-3 по предл.3.4 и гл.2, $ 4).
12. Конструкция свободного произведения с объединением и свободного расширения групп. Несократимая и нормальная форма записи элемента. (ЛШ, гл.4, $ 1,2 по т.2.1). Граф групп, фундаментальная группа графа групп. Комплекс Кэли графа групп. Действие фундаментальной группы графа групп на дереве Басса – Серра.(S; Б, гл.2; Хр)
13. Действия групп на деревьях, фундаментальная область, теорема Макбета. Представление группы, действующей на дереве, в виде фундаментальной группы графа групп. Подгруппы фундаментальных групп графов групп.(S; Ч)

ЛИТЕРАТУРА.

[Б] О.В.Богопольский, Введение в теорию групп.-Москва-Ижевск, 2002.
[КМ] М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп. – М.: Наука, 1982.

[ЛШ] Р.Линдон, П.Шупп, Комбинаторная теория групп.- М.: Мир, 1980.
[Х] М.Холл, Теория групп. – М.: Иностранная литература, 1962.
[Хр] Д.Г.Храмцов, Вложения почти свободных групп и клеточные комплексы, препринт 122, ИМ СОРАН, 2003.
[Ч] В.А.Чуркин, Алгебра и логика, 22(2),1983, 218-225.
[S] J.P.Serre, Trees. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1980.
[W] Wielandt, Groups of permutations. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1958.

Задачи и упражнения к курсу

1. Найти все конечные группы а) с двумя, б) с тремя классами сопряжённых элементов.
2. Найти подгруппы Фраттини групп $S_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_{p^\infty}$.
3. Вычислить башню групп автоморфизмов группы D_∞.
4. Найти ступень нильпотентности прямого сплетения групп $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_p$.
5. Описать строение силовских подгрупп симметрической группы S_n.
6. Доказать, что группа S_n содержит элемент порядка $N = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{i=s} (p_i^{a_i} - p_i^{a_i - 1}) \le n$.
7. Доказать, что конечнопорождённая группа содержит конечное количество подгрупп данного конечного индекса.
8. Реализовать подгруппы $\langle x, yxy^{-1} \rangle, \langle x^2, xy, y^2 \rangle, [F, F]$ свободной группы $F_2(x, y)$ в виде накрытия графа R_2.
9. Перечислить подгруппы индексов 2 и 3 в свободной группе ранга 2. Указать среди них нормальные.
10. Привести пример максимальной подгруппы бесконечного индекса в свободной группе конечного ранга.
11. Охарактеризовать все подгруппы свободной группы F_n, ранг которых больше ранга любой их надгруппы.
12. Охарактеризовать все подгруппы свободной группы F_n, ранг которых меньше ранга любой их надгруппы.
13. Найти пересечение подгрупп $\langle x^2, xy, y^2 \rangle \cap \langle x, yxy^{-1} \rangle$ свободной группы $F_2(x, y)$.
14. Найти количество различных подгрупп индекса 2 в фундаментальной группе S_g ориентируемой поверхности рода g. Доказать, что они тоже являются фундаментальными группами поверхностей, найти их род.
15. Доказать, что автоморфизм 2-комплекса поднимается до автоморфизма его универсального накрывающего.
16. Используя переписывающий процесс Райдемастера-Шрайера доказать, что декартова подгруппа свободного произведения групп является свободной.