Программа годового спецкурса
«Теория групп»
кафедры алгебры и математической логики ММФ НГУ, 2013-2014 уч. год
Лектор: к.ф.-м.н. Д.Г.Храмцов

1. Понятие группы, аксиомы, примеры: циклические группы, линейные группы, группы подстановок, группы симметрий, квазициклические группы, группы кватернионов, фундаментальные группы топологических пространств. Подгруппы, подгруппы, порождённые множеством элементов. Порождающие и непорождающие элементы групп. Подгруппа Фраттини. Подгруппы Фраттини циклических, симметрических, квазициклических групп, группы рациональных чисел. Порядок элемента группы. ([3], гл.1, §1-2)

2. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Порядки элементов конечной группы. Нормальная подгруппа и факторгруппа. Нормальное замыкание. Простая группа. Сопряжение в группе, классы сопряжённых элементов в симметрических и линейных группах. Нормализатор и централизатор множества элементов группы. Центр, коммутант. .([3], гл.1, §2-3)

3. Гомоморфизм групп, изоморфизм, четыре основных теоремы о гомоморфизмах. Конструкции прямого и декартова произведений групп, внешнее и внутреннее определения, их эквивалентность. Поддекартовы произведения групп, теорема Ремака. ([3], гл.2, §4)

4. Конечно порождённые абелевы группы. Примарное разложение. .([3], гл.3, §7-8)

5. Субнормальный и нормальный ряды в группе, секция группы. Класс полициклических групп, его замкнутость относительно взятия подгрупп, факторгрупп и расширений. Теоремы Шрайера и Гёльдера об уплотнениях рядов в группах. Композиционный ряд. .([3], гл.2, §4) Решётка субнормальных подгрупп, теорема Виланда.([9], гл.2, §7)

6. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп. Автоморфизмы циклических групп, группы рациональных чисел. Характеристические подгруппы. Внешние автоморфизмы. Совершенные группы. Расширения посредством групп автоморфизмов, голоморф. башня автоморфизмов. Башня автоморфизмов бесконечной циклической группы. Критерий совершенности группы автоморфизмов. Конструкции прямого и декартова сплетений групп. .([3], гл.2, §5-6) Теорема Смирнова- Баумслага. .([6], гл.4, §4, теор.4.8)

7. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы точек, неподвижные точки элементов. Ядро действия, точные и регулярные действия. смежные классы по стабилизатору элемента, мощности фактор множества. Примитивность и транзитивность, блоки. Представление Кэли. Подстановочное представление группы, степень представления. ([3], гл.4, §12)

8. Теорема Силова. Силовские подгруппы симметрических групп и линейных групп над конечными полями. .([3], гл.4, §11) Теорема Бохерта об индексе примитивной подгруппы симметрической группы. .([13], гл.??, §??)

9. Нильпотентные группы. Верхний и нижний центральный ряды в группе. Нильпотентность конечных p-групп. Группы максимального класса. Тождество нильпотентности. Факторы и подгруппы нильпотентных групп. Коммутаторные тождества. Теоремы о нильпотентных группах: подгруппа Фраттини, подгруппа элементов конечного порядка, нильпотентные группы без кручения и извлечение корней. Теорема Фиттинга и подгруппа Фиттинга. Конечные нильпотентные группы, теоремы Бернсайда - Виланда и Фраттини. Конечнопорождённые нильпотентные группы без кручения. .([3], гл.6, §16-17)

10. Разрешимые группы. Тождество разрешимости. Холловы подгруппы конечных разрешимых групп, теорема Холла. Разрешимые группы. Теорема Миллера-Морено. .([3], гл.7, §19-20)

11. Периодические группы. Свободные Бернсайдовы группы. Теорема Ван-Дер_Вардена о конечности конечно порождённых групп периода 3 и Санова о конечности конечно порождённых групп периода 4. Теорема Новикова – Адяна и результаты Ольшанского.([8])

12. Свободные группы. Несократимые слова над алфавитом, конкатенация, свободный базис, корректность определения ранга. Единственность свободной группы данного ранга и хопфовость свободной группы конечного ранга Финитная аппроксимируемость и линейность свободных групп. ([6], гл.3, §1, [3], гл.5, §14) Представления групп в терминах порождающих и определяющих соотношений.

Проблемы изоморфизма, тривиальности, равенства в конечных представлениях. ([6], гл.2, §1-2, [7], гл.1, §1-5, [2], гл.2, §1-8)

14. Фундаментальные группы графов. Их свобода, ранг фундаментальной группы и эйлерова характеристика графа. Морфизмы и накрытия графов. Реализация подгруппы через накрытие. Теорема об антиизоморфизме решётки подгрупп свободной группы и множества накрытий графа. Подгруппы свободных групп - свободны. Подгруппы конечного индекса свободных групп. Проблема вхождения в подгруппу свободной группы. Свойство Хопфа для свободных групп. ([6], гл.3, §1-3, [2], гл.2, §1-8,так же в [10-12])

Примеры экзаменационных вопросов по курсу «Теория групп».

1. Понятие группы: аксиоматика, примеры
2. Подгруппы, порождённые множеством элементов. Порождающие и непорождающие элементы групп, примеры. Подгруппа Фраттини. Теорема Фраттини.
3. Порядок элемента группы, его свойства. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.
4. Сопряжение в группе, классы сопряжённых элементов в симметрических и линейных группах. Нормализатор и централизатор множества элементов группы. Теорема о мощности класса сопряжённых элементов.
5. Гомоморфизм, изоморфизм, теоремы о гомоморфизмах.
6. Конструкции прямого и декартова произведений групп, внешнее и внутреннее определения.
7. Поддекартовы произведения групп, теорема Ремака.
8. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп.
9. Субнормальный и нормальный ряды в группе, секция группы. Класс полициклических групп.
10. Теоремы Шрайера и Жордана - Гёльдера об уплотнениях рядов в группах.
11. Решётка субнормальных подгрупп. Теорема Виланда.
12. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп. Автоморфизмы циклических групп, группы рациональных чисел. Характеристические подгруппы. Внешние автоморфизмы.
13. Расширения посредством групп автоморфизмов, голоморф. Совершенные группы, башня автоморфизмов.
14. Теорема Смирнова- Баумслага.
15. Критерий совершенности группы автоморфизмов.
16. Конструкции прямого и декартова сплетений групп.
17. Теорема Фробениуса,
18. Действие группы на множестве. Орбиты. Примитивность и транзитивность.
19. Подстановочное представление группы, степень представления. Теоремы о подстановочных представлениях.
20. Точные представления степени шесть симметрической группы на пяти элементах.
21. Теорема Бохерта об индексе примитивной подгруппы симметрической группы.
22. Нильпотентные группы. Верхний и нижний центральный ряды в группе. Совпадение их длин.
23. Нильпотентность конечных p-групп.
24. Тождество нильпотентности. Факторы и подгруппы нильпотентных групп. Коммутаторные тождества.
25. Теоремы о подгруппе Фраттини в нильпотентной группе.
26. Теоремы о подгруппе элементов конечного порядка в нильпотентной группе.
27. Теоремы о извлечение корней в нильпотентных группах без кручения.

28. Факторы верхнего центрального ряда нильпотентных групп без кручения.
29. Пополнение нильпотентной группы без кручения.
30. Теорема Фиттинга и подгруппа Фиттинга.
31. Конечные нильпотентные группы, теорема Бернсайда – Виланда.
32. Конечные нильпотентные группы, теорема Фраттини.
33. Разрешимые группы. Тождество разрешимости.
34. Холловы подгруппы конечных разрешимых групп, теорема Холла.
35. Теорема Миллера-Морено.
36. Теорема Жордана – Диксона о простоте линейных групп над полями, простота знакопеременных групп.
37. Теоремы Ван Дер Вардена и Санова о группах периодов 3 и 4.
38. Свободные группы. Несократимые слова над алфавитом, конкатенация, свободный базис. Категорное определение. корректность определения ранга. Финитная аппроксимируемость и линейность свободных групп.
39. Эквивалентность двух определений свободной группы. Единственность свободной группы данного ранга и хопфовость свободной группы конечного ранга.
40. Финитная аппроксимируемость и линейность свободных групп, теорема Санова.
41. Представления групп в терминах порождающих и определяющих соотношений.
42. Эквивалентность конечных представлений групп в терминах порождающих и определяющих соотношений. Преобразования Тице и теорема Тице.
43. Основные алгоритмические проблемы, связанные с представлениями групп в терминах порождающих и соотношений.
44. Фундаментальные группы графов. Их свобода, ранг фундаментальной группы и эйлерова характеристика графа.
45. Морфизмы и накрытия графов. Теорема об антиизоморфизме решётки подгрупп свободной группы и множества накрытий графа.
46. Реализация подгруппы через накрытие. Подгруппы свободных групп - свободны. Подгруппы свободных групп конечного индекса. Проблема вхождения в подгруппу свободной группы.
47. Нормализатор подгруппы свободной группы.

Типовые задачи и упражнения к курсу. Приведенные ниже задачи типичны, но имеют заметно различную сложность. Несколько последних задач выходят за рамки курса данного учебного года. Широкий набор дополнительных задач и упражнений можно найти в задачниках [1] и [5].

1) Доказать единственность нейтрального элемента группы.
2) Доказать, что группа порядка 3 является циклической.
3) Доказать, что группа порядка 4 является абелевой.
4) Доказать, что группа, в которой все неединичные элементы имеют порядок 2, коммутативна.
5) Пусть в группе G существует единственный элемент порядка 2. Доказать, что он перестановочен со всеми элементами группы.
6) Пусть на группе G определено новое умножение по правилу $a * b=ba$, где в правой части стоит произведение элементов b и a в смысле старой операции на G. Будет ли новая алгебраическая структура группой? Будет ли она изоморфна G ?
7) Доказать, что подгруппа индекса 2 произвольной группы нормальна.
8) Докажите, что конечная подполугруппа в группе является подгруппой.

9) Доказать, что в любой конечной группе G подгруппа индекса p, где p - минимальный простой делитель порядка G, всегда нормальна.

10) Доказать, что бесконечная группа всегда содержит бесконечное множество подгрупп.

11) Верно ли, что, если подгруппа H группы G такова, что $|A:A\cap H|<\infty$ для любой конечно порождённой $A<H$, то $|G:H|<\infty$?

12) Доказать, что множество элементов, не лежащих в произвольной фиксированной подгруппе группы G, порождают всю G.

13) Найти группу симметрий правильного n - угольника. Построить таблицы умножений групп D_3 и D_4.

14) Найти все подгруппы групп D_4 и S_3.

15) Доказать, что группа, порождённая двумя элементами порядка 2, изоморфна группе D_n при некотором n, или группе D_∞.

16) Пусть A и B - подгруппы конечной группы G и $|G:A|=3, B\not\subset A$. Доказать, что $|B:A\cap B|=3$.

17) Доказать, что группа не может быть объединением двух своих собственных подгрупп.

18) Доказать, что элементы двух нормальных подгрупп, пересекающихся по единице, попарно перестановочны.

19) Доказать, что группа, среди любых трёх элементов которой всегда найдётся пара перестановочных, абелева.

20) Приведите пример неабелевой группы, среди любых четырёх элементов которой всегда найдётся пара перестановочных.

21) Доказать, что пересечение субнормальных подгрупп является субнормальной подгруппой.

22) Описать классы сопряжённости в группах S_n и $GL_n(C)$

23) Найти все конечные группы а) с двумя, б) с тремя классами сопряжённых элементов.

24) Доказать, что количество классов сопряжённости элементов конечной группы не превосходит 5/8 её порядка, и эта оценка точна.

25) Доказать, что аддитивная группа рациональных чисел является объединением возрастающей цепи бесконечных циклических групп.

26) Доказать, что аддитивная группа рациональных чисел не содержит максимальных подгрупп.

27) Доказать, что всякая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.

28) Привести примеры групп, изоморфных своим факторгруппам.

29) Привести примеры групп, изоморфных своим прямым степеням.

30) Найти подгруппы Фраттини следующих групп: симметрической группы S_n конечного ранга n, бесконечной циклической группы Z, конечной циклической группы $Z_{n.}$ порядка n, аддитивной группы рациональных чисел Q, аддитивной группы рациональных чисел с примарными знаменателями Q_p, квазициклической группы C_{p^∞} по простому основанию p.

31) Пусть *A*- конечная абелева группа такая, что, если некоторая конечная группа *B* содержит подгруппу, изоморфную *A,* то любой автоморфизм этой подгруппы продолжается до автоморфизма *B*. Доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда *A* – циклическая.

32) Доказать, что, если n делит порядок конечной абелевой группы A, то A содержит подгруппу порядка n.

33) Доказать, что, если A,B,C -конечнопорождённые абелевы группы и $A\times C\simeq B\times C$, то

.

34) Опишите все конечнопорождённые абелевы группы, все собственные факторгруппы которых цикличны.

35) Докажите, что множество элементов бесконечного порядка абелевой группы (если они есть), порождают всю группу.

36) Доказать, что для произвольных групп A,B из $A\times Z_p\simeq B\times Z_p$ следует $A\simeq B$.

37) Пусть конечная группа G разлагается в прямое произведение подгрупп A и B , порядки которых взаимно просты. Доказать, что произвольная подгруппа группы G имеет вид $A_1\times B_1$, где $A_1\leq A,B_1\leq B$.

38) Вычислить башню групп автоморфизмов группы D_∞ .

39) Найти все конечно порождённые группы с циклической группой автоморфизмов.

40) Доказать, что произвольный автоморфизм группы S_n является внутренним.

41) Докажите, что группы S_3,S_4,D_n являются разрешимыми.

42) Найти ступень нильпотентности прямого сплетения групп Z_p и Z_p .

43) Какие из следующих тождеств выполнены на группе S_3 : а) $x^6=1$, б) $[x^2,y^2]=1$, в) $[[x,y],z]=1$?

44) Описать строение силовских подгрупп симметрической группы S_n .

45) Доказать, что конечная группа порождается своими силовскими подгруппами.

46) Доказать, что число силовских p –подгрупп, содержащих фиксированную p – подгруппу конечной группы G , сравнимо с 1 по модулю p .

47) Найти с точностью до изоморфизма все группы порядка 15.

48) Доказать, что количество элементов данного простого порядка в конечной группе сравнимо с -1 по модулю этого порядка.

49) Доказать, что группа S_n содержит элемент порядка $N=p_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{a_s}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{i=s} p_i^{a_i}\leq n$.

50) Доказать, что транзитивная подгруппа конечной симметрической группы содержит регулярный элемент.

51) Доказать, что конечнопорождённая группа содержит конечное количество подгрупп данного конечного индекса.

52) Доказать, что в конечнопорождённой группе из любого порождающего множества можно выбрать конечное порождающее подмножество.

53) Доказать, что любая конечная группа порядка, не превосходящая 1000, может быть порождена не более, чем 9 элементами.

54) Доказать, что группа порядка 385 порождается двумя элементами.

55) Доказать, что для произвольной конечной группы G минимальная мощность порождающего множества группы $G^n=G\times G\times\ldots\times G$ (n раз) неограниченно растёт с ростом n .

56) Доказать, что коммутант общей линейной группы матриц над полем более, чем из двух элементов, совпадает со специальной линейной группой.

57) Описать орбиты естественного действия общей линейной группы $GL_n(F)$ над полем F на векторном пространстве F^n .

58) Описать орбиты естественного действия треугольной линейной группы $T_n(F)$ над полем

F на векторном пространстве F^n .

59) Описать орбиты естественного действия диагональной линейной группы $D_n(F)$ над полем F на векторном пространстве F^n .

60) Описать орбиты естественного действия ортогональной группы $O_n(F)$ над полем F на векторном пространстве F^n .

61) Доказать, что произвольная конечная группа G может быть вложена в некоторую конечную группу $\overline{G}$ так, что любые две изоморфные подгруппы G сопряжены в $\overline{G}$.

62) Докажите, что группы порядков 15, 35, 1001 – цикличны.

63) Докажите, что группы порядков $p^2 q$ и $p^2 q^2$, где p и q - различные простые числа, не просты.

64) Пусть G - бесконечная группа такая, что что любые её два бесконечных подмножества X,Y содержат пару коммутирующих элементов $x \in X, y \in Y$. Докажите, что G - абелева.

65) Доказать, что факторгруппа неабелевой группы по центру не может быть циклической.

66) Доказать, что факторгруппа нильпотентной группы по коммутанту не может быть циклической.

67) Докажите, что индекс центра группы конечен тогда и только тогда, когда любое её бесконечное подмножество содержит пару различных перестановочных элементов.

68) Докажите однозначность извлечения корней в нильпотентной группе без кручения.

69) Докажите хопфовость конечно порождённой нильпотентной группы.

70) Доказать, что две свободных группы изоморфны тогда и только тогда, когда их ранги равны.

71) Реализовать подгруппы $x,yxy^{-1}>,<x^2,xy,y^2>,[F,F]$ свободной группы $F_2(x,y)$ в виде накрытия графа R_2 .

72) Доказать, что в подгруппе свободной группы элемент минимальной длины всегда можно включить в свободный базис подгруппы.

73) Перечислить подгруппы индексов 2 и 3 в свободной группе ранга 2. Указать среди них нормальные и характеристические.

74) Найти число подгрупп индекса 2 в свободной группе произвольного ранга n .

75) Доказать, что нормальная подгруппа неабелевой свободной группы конечно порождена тогда и только тогда, когда она имеет конечный индекс.

76) Покажите, что коммутант неабелевой свободной группы имеет бесконечный ранг. Укажите явно его свободный базис.

77) Укажите алгоритм, решающий проблему вхождения в конечнопорождённую подгруппу неабелевой свободной группы

78) Показать, что фундаментальная группа подграфа выделяется свободным множителем в фундаментальной группе графа.

79) Пусть H – подгруппа в F_n , порождённая квадратами всех элементов. Доказать, что факторгруппа F_n по H изоморфна группе Z_{2^n} .

80) Исследовать действие группы автоморфизмов свободной группы ранга 3 на множествах её подгрупп индексов 2 и 3.

81) Привести пример максимальной подгруппы бесконечного индекса в свободной группе конечного ранга.

82) Докажите, что свободная группа а) финитно аппроксимируема, б)аппроксимируема конечными *p* – группами для любого *p*.

83) Построить в конечнопорождённой свободной группе подгруппу бесконечного индекса, содержащую некоторые степени всех элементов группы.

84) Охарактеризовать все подгруппы свободной группы F_n , ранг которых больше ранга любой их надгруппы.

85) Охарактеризовать все подгруппы свободной группы F_n , ранг которых меньше ранга любой их надгруппы.

86) Доказать, что подгруппы свободных групп являются не дистортными.

87) Найти пересечение подгрупп $x,yxy^{-1}>,<x^2,xy,y^2>$¿ ¿¿ свободной группы $F_2(x,y)$.

88) Найти количество различных подгрупп индекса 2 в фундаментальной группе S_g ориентируемой поверхности рода g. Доказать, что они тоже являются фундаментальными группами поверхностей, найти их род.

89) Доказать, что подгруппы бесконечного индекса в фундаментальной группе S_g ориентируемой поверхности рода g являются свободными группами.

90) Доказать, что автоморфизм 2-комплекса поднимается до автоморфизма его универсального накрывающего.

91) Используя переписывающий процесс Райдемастера-Шрайера доказать, что декартова подгруппа свободного произведения групп является свободной.

92) Используя переписывающий процесс Райдемастера-Шрайера доказать, что прямоугольная артинова группа, отвечающая циклическому графу с 4 вершинами, содержит подгруппу индекса 2, не являющуюся прямоугольной Артиновой.

93) Докажите, что расширение конечноопределённой группы при помощи конечно определённой группы является конечно определённой группой.

94) Доказать конечно определённость полициклических групп.

95) Показать, что разрешимость проблем равенства и сопряжённости переносится на прямые произведения

96) Показать, что конечная группа не может быть задана числом определяющих соотношений меньшим, чем число порождающих.

97) Докажите, что группа S_n задаётся следующим копредставлением:

$$S_n=<x_1,\dots,x_n|(x_i x_{i+1})^2=1, i=1,..,n-1, x_i x_j=x_j x_i, |i-j|>1>$$¿

¿

¿ ¿¿ .

98) Докажите, что группа не может нетривиально раскладываться одновременно в прямое и свободное объединение.

99) Докажите, что свободное произведение финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда его сомножители финитно аппроксимируемы.

100) Опишите с точность до изоморфизма все подгруппы свободного произведения циклических групп порядков 2 и 3.

101) Докажите, что единственная группа, раскладывающаяся в нетривиальное свободное произведение и удовлетворяющая нетривиальному тождеству – это бесконечная диэдральная группа.

102) Докажите, что свободное произведение имеет разрешимую проблему равенства и сопряжённости тогда и только тогда, когда соответствующие проблему разрешимы в сомножителях.

103) Доказать, что ядро естественного гомоморфизма свободного произведения групп на их прямое произведение является свободной подгруппой. Как вычислить её ранг, если сомножители конечны?

104) Докажите, что граф Петерсена не может быть графом Кэли ни какой группы.

105) Докажите, что каждая почти циклическая группа является расширением конечной группы при помощи циклической либо бесконечной диэдральной групп.

. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. В.А.Белоногов, *Задачник по теории групп.-* Москва, Наука, 2000.
2. О.В.Богопольский, *Введение в теорию групп.-* Москва, Ижевск, 2002.
3. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, *Основы теории групп.* – Москва, Санкт-Петербург, Лань, 2009.
4. А.Г.Курош, *Теория групп.-* Москва, Санкт-Петербург, Краснодар, Лань, 2005.
5. Крылов, Туганбаев, Чехлов, *Сборник задач по группам и кольцам.-* Томск, 2008.
6. Р.Линдон, П.Шупп, *Комбинаторная теория групп.* –Москва, Мир, 1980.
7. В.Магнус,А.Каррас,Д.Солитэр, *Комбинаторная теория групп.* –Москва, Наука, 1974.
8. М.Холл, *Теория групп.* –Москва: Иностранная литература, 1962.
9. Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп*. Москва, Наука, 1978.
10. J.P.Serre, *Trees.* -Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1980.
11. J.P.Serre,*Arbres, amalgams et SL_2,* Notes College De France, 1969.
12. J.Stallings, *Topology of finite graphs,* Invent. Math.,v.71,1983,555-565.
13. B.Wielandt, *Groups of permutations.-* Berlin-Heidelberg-New-York: Springer, 1958.