



Иерархические матрицы и их применения

Ричард Гржибовский,
Университет Саарланда, Германия

2 лекции для студентов, аспирантов и сотрудников, интересующихся теорией быстрых численных методов. НГУ, 27 марта, 3 апреля, 10-45, ауд. 313

При рассмотрении многих задач прикладной математики (таких как безсеточная интерполяция, дискретизация интегральных уравнений, и т.п.) возникают плотные матрицы. Квадратичная сложность их вычисления, так же как и квадратичный порядок необходимой памяти для их хранения, накладывают серьёзные практические ограничения на дискретизацию и, как следствие, на точность приближенного решения.

Так как сами матрицы часто не представляют практического интереса, можно их не генерировать, а вместо этого вычислять их произведение с вектором всякий раз, когда это требуется. Каждое такое вычисление также имеет второй порядок сложности. Искомое произведение можно вычислить приближенно, используя так называемые методы быстрого суммирования (например, метод мультиполей). В таком случае сложность операции будет близка к линейной, что даёт возможность значительно повысить эффективность процедуры решения задачи.

Будет представлен альтернативный подход к проблеме повышения эффективности методов работы с полными матрицами. Основная идея этого подхода состоит в том, что полную матрицу можно определённым образом разбить на блоки, которые, в свою очередь, могут быть аппроксимированы блоками с малым рангом. Таким образом строится блочно-малоранговое приближение к исходной матрице с любой наперёд заданной точностью. Причём разбиение и малоранговые приближения могут быть выполнены таким образом, что и сложность всей процедуры, и количество необходимой для неё памяти будет почти линейной (с точностью до логарифмических множителей). В настоящее время пользуются популярностью методы разбиения матрицы на блоки, имеющие иерархическую структуру. Поэтому построенные такими методами блочно-малоранговые матрицы принято называть иерархическими матрицами (\mathcal{H} -matrix).

Особое внимание будет уделено подробному разбору примеров применения блочно-малоранговых приближений. В частности, будет описан переход от классического метода граничных элементов для уравнений Лапласа и Ляме к его ускоренному варианту. В качестве прямого приложения будет также рассмотрен ускоренный метод безсеточной интерполяции радиальными функциями.