Ведение в математическое моделирование

Курс лекций Коновалова А.Н.

1.	Криволинейные координаты. Ковариантные и контрвариантные компоненты вектора.	Стр. 1
2.	Тензор. Диада. Инвариантное представление тензора. Метрический тензор.	Стр. 6
3.	Отображение $V \to V$. Линейный оператор. Матрица оператора. Тензорная алгебра.	Стр. 11
4.	Ковариантное дифференцирование. Тензорный анализ.	Стр. 22
5.	Сплошная среда. Закон сохранения массы.	Стр. 33
6.	Закон сохранения импульса. Тензор истинных напряжений. Закон сохранения момента импульса.	Стр. 41
7.	Тензор деформаций. Математические модели «линейной» теории упругости.	Стр. 49
8.	Условия совместности (сплошности) деформаций.	Стр. 57

§ 1. Криволинейные координаты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора

Пусть R^3 обычное(точечное) трехмерное евклидово пространство. Введем в R^3 прямоугольную декартову систему координат: x_1, x_2, x_3, ортами которой являются $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Каждой точке $M(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ можно поставить в соответствие радиус-вектор этой точки

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3 = x_i q_i. \tag{1.1}$$

Здесь и далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. По определению $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$ — символ Кронекера и поэтому из (1.1) имеем

$$x_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ из (1.1) можно рассматривать как элемент трехмерного векторного пространства V, за базис которого приняты линейно независимые орты $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Тогда соотношения (1.2) определяют компоненты вектора $\mathbf{r}$ в базисе $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

Точку $M(x_1, x_2, x_3) = M(\mathbf{r})$ евклидова пространства R^3 можно определить также и с помощью криволинейных координат y_1, y_2, y_3. Связь между x_i и y_j будем задавать в виде

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3), \quad y_j = y_j(x_1, x_2, x_3). \tag{1.3}$$

Указанное соответствие будем предполагать взаимно однозначным, так что якобиан преобразования (1.3) отличен от нуля

$$|D| = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \neq 0.$$

Геометрическое место точек $y_i = \mathrm{const}$. есть поверхность, которую назовем i-ой координатной поверхностью. Координатные поверхности $y_i = \mathrm{const}$. и $y_j = \mathrm{const}$. пересекаются по линии, вдоль которой меняется лишь третья координата $y_k (i \neq j \neq k)$. Эта линия суть k-я координатная линия. В силу (1.3) $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r}(y_1, y_2, y_3)$ и векторы

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_3} \tag{1.4}$$

определяют направления касательных к координатным линиям в точке M.

Поскольку $|D| \neq 0$, то векторы $\mathbf{e}_i$ из (1.4) некомпланарны, т. е.

$$W = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0. \tag{1.5}$$

Действительно, W из (1.5) задает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Поэтому $W = 0$ влечет за собой линейную зависимость векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е.

$$\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3 = 0, \quad \lambda, \mu, \nu - \mathrm{const}. \neq 0. \tag{1.6}$$

С другой стороны, (1.4) можно переписать следующим образом

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j} = \frac{\partial x_1}{\partial y_j}\mathbf{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_j}\mathbf{q}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_j}\mathbf{q}_3 = \frac{\partial x_m}{\partial y_j}\mathbf{q}_m.$$

Поэтому координатная запись векторного равенства (1.6) дает

$$(D)(\lambda, \mu, \nu)' = 0,$$

где (D) — матрица преобразования (1.3): $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3)$, а $(\lambda, \mu, \nu)'$ — столбец, так что $'$ – символ транспонирования. Из $|D| \neq 0$ вытекает $\lambda = \mu = \nu = 0$, т. е. линейная независимость векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, определяемых из (1.4). Эти векторы задают *базис* криволинейной системы координат y_1, y_2, y_3. В связи с (1.3) этот базис часто называют *естественным*. Отметим, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в общем случае не являются единичными и взаимно ортогональными.

Наряду с базисом $\mathbf{e}_j$ введем в рассмотрение *кобазис* (взаимный базис), векторы которого определим следующим образом

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \tag{1.7}$$

Итак, в силу (1.7): $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Это означает, что вектор $\mathbf{e}^1$ ортогонален векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, следовательно, параллелен вектору $\mathbf{e}_1$. Но тогда $\mathbf{e}^1 = \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ и $1 = \mathbf{e}_1 \cdot \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$. Отсюда получаем $\alpha = [\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)]^{-1}$. Тем самым мы приходим к эквивалентному (1.7) определению векторов кобазиса $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{W}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{W}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{W}. \tag{1.8}$$

Здесь W дается формулой (1.5). Теперь очевидно, что векторы кобазиса $\mathbf{e}^i$ ортогональны к соответствующим координатным поверхностям $y_i = \text{const}$. Поэтому векторы $\mathbf{e}^i$ не компланарны и, следовательно, являются линейно независимыми.

С каждой точкой $M \in R^3$ мы связали тройку линейно независимых векторов базиса $\mathbf{e}_j$ (1.4) и кобазиса $\mathbf{e}^i$ (1.7). Поэтому произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ допускает разложение как по системе $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{u} = u^j \mathbf{e}_j = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + u^3 \mathbf{e}_3, \tag{1.9}$$

так и по системе $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u_1 \mathbf{e}^1 + u_2 \mathbf{e}^2 + u_3 \mathbf{e}^3. \tag{1.10}$$

При этом в силу (1.7) для компонент u^j, u_i будем иметь (сравни с (1.2)):

$$u^j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^j, \quad u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{1.11}$$

Компоненты u^j называют *контравариантными*, компоненты u_i — *ковариантными*.

Пусть y_1, y_2, y_3 – "старая" система криволинейных координат; z_1, z_2, z_3 — "новая" система криволинейных координат. Пусть векторы $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ и $\hat{\mathbf{e}}_i$, $\hat{\mathbf{e}}^i$ задают базис и кобазис в этих системах. Преобразование "старой" системы координат в "новую" можно определять как соотношениями типа (1.3)

$$y_j = y_j(z_1, z_2, z_3), \quad z_j = z_j(y_1, y_2, y_3), \tag{1.12}$$

так и соотношениями между "старыми" и "новыми" векторами базиса (кобазиса)

$$\hat{\mathbf{e}}_j = a^i_j \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = b^j_i \hat{\mathbf{e}}_j. \tag{1.13}$$

Первая из формул (1.13) задает прямое преобразование, вторая — обратное. Будем предполагать, что преобразование $y_i \longrightarrow z_j$ является обратимым.

Для вектора $\mathbf{u} \in V$ в "старой" и "новой" системах координат справедливы разложения
$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = \hat{u}^j \hat{\mathbf{e}}_j.$$
Поэтому
$$\hat{u}^j \mathbf{e}_j = u^i b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j.$$
Следовательно, в силу линейной независимости векторов $\hat{\mathbf{e}}_j$
$$\hat{u}^j = b_i^j u^i. \tag{1.14}$$
Итак, *прямое* преобразование *контравариантных* компонент вектора $\mathbf{u}$ выполняется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования векторов базиса.

Из (1.11), (1.13) имеем
$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot b_i^j \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j b_i^j = \hat{u}_j b_i^j.$$
Поэтому
$$u_i = b_i^j \hat{u}_j \tag{1.15}$$
и *обратное* преобразование *ковариантных* компонент вектора $\mathbf{u}$ осуществляется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования векторов базиса.

Далее заметим, что (1.13) влечет за собой
$$\hat{\mathbf{e}}_j = a_j^m b_m^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \mathbf{e}_i = a_m^\alpha b_i^m \mathbf{e}_\alpha.$$
Но системы векторов $\hat{\mathbf{e}}_j$, $\mathbf{e}_i$ линейно независимы, следовательно,
$$a_j^m b_m^\alpha = \begin{cases} 0, & j \neq \alpha \\ 1, & j = \alpha \end{cases}, \quad a_m^\alpha b_i^m = \begin{cases} 0, & \alpha \neq i \\ 1, & \alpha = i \end{cases}, \tag{1.16}$$
В качестве следствия из (1.15), (1.16) получаем
$$a_j^i u_i = a_j^i \hat{u}_j b_i^j = a_j^i b_i^j \hat{u}_j = \hat{u}_j$$
или
$$\hat{u}_j = a_j^i u_i. \tag{1.17}$$
Поэтому *прямое* преобразование *ковариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования векторов базиса.

И, наконец, из (1.14), (1.16) получаем
$$a_j^i \hat{u}^j = a_j^i b_i^j u^i = u^i$$
или
$$u^i = a_j^i \hat{u}^j. \tag{1.18}$$
Таким образом, *обратное* преобразование *контравариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования векторов базиса.

В качестве полезного следствия из (1.16) стоит отметить, что
$$\hat{\mathbf{e}}^j = b_i^j \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^i = a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j, \tag{1.19}$$
т. е. *прямое* преобразование *кобазиса* осуществляется с помощью коэффициентов *обратного* преобразования *базиса*. *Обратное* преобразование *кобазиса* осуществляется с помощью коэффициентов *прямого* преобразования *базиса*. Действительно,
$$a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j = a_j^i b_i^j \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i, \quad b_i^j \mathbf{e}^i = b_i^j a_j^i \hat{\mathbf{e}}^j = \hat{\mathbf{e}}^j,$$

что и дает (1.19).

Сказанное выше позволяет утверждать, что при переходе от одной системы криволинейных координат — (y_1, y_2, y_3) к другой — (z_1, z_2, z_3) *преобразования*

— векторов базиса $\mathbf{e}_i$ и контравариантных компонент u^i,

— векторов кобазиса $\mathbf{e}^j$ и ковариантных компонент u_j

являются взаимно обратными.

Формулы преобразования ковариантных и контравариантных компонент вектора $\mathbf{u}$ в "старой" и "новой" системах криволинейных координат мы связали с коэффициентами a^i_j, b^j_i прямого и обратного преобразования векторов базиса (1.13). Соотношения (1.16) устанавливают связь между этими коэффициентами. Сами коэффициенты могут быть реально вычислены с помощью (1.12). Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_j &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial z_j} = \mathbf{e}_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j}, \quad \hat{\mathbf{e}}_j = a^i_j \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = \hat{\mathbf{e}}_j \frac{\partial z_j}{\partial y_i}, \quad \mathbf{e}_i = b^j_i \hat{\mathbf{e}}_j. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Следовательно,

$$a^i_j = \frac{\partial y_i}{\partial z_j}, \quad b^j_i = \frac{\partial z_j}{\partial y_i}. \tag{1.21}$$

С учетом (1.20), (1.21) формулы (1.14), (1.17) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j} = u_i \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \\ \hat{u}^j &= u \cdot \hat{\mathbf{e}}^j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = u^i \frac{\partial z_j}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Теперь мы имеем все необходимое для аналитического определения вектора.

Определение. *Вектором* $\mathbf{u}$ *назовем объект, определяемый тремя компонентами* u_1, u_2, u_3 *или* u^1, u^2, u^3, *которые при смене системы координат (1.12) преобразуются по формулам (1.22).*

Хотя это определение достаточно формализовано, но оно полностью отражает сущность объекта, называемого вектором, ибо:

1. В этом определении присутствует система координат, порождающая базис $\mathbf{e}_i(M)$ (кобазис $\mathbf{e}^j(M)$).
2. В этом определении присутствуют числа (числовые функции точки $M \in R^3$) $u^i(M)$, $u_j(M)$, которые зависят от системы координат.
3. Базис $\mathbf{e}_i$ (кобазис $\mathbf{e}^j$) и числа u^i (или u_j) порождают новый объект

   $$\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}^j = u^i \mathbf{e}_i,$$

   который мы и назвали вектором.
4. *Инвариантность* этого объекта связана с тем, что преобразования базисных векторов $\mathbf{e}_i$ и компонент u^i (или $\mathbf{e}^j$ и u_j) при смене системы координат являются взаимно обратными.

Свойство инвариантности вектора как объекта в "формульной" записи можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{u}^j \hat{\mathbf{e}}_j = b^j_i u^i a^i_j \mathbf{e}_i = b^j_i a^i_j u^i \mathbf{e}_i = u^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{u} &= \hat{u}_j \hat{\mathbf{e}}^j = a^i_j u_i b^j_i \mathbf{e}^i = a^i_j b^j_i u_i \mathbf{e}^i = u_i \mathbf{e}^i. \end{aligned} \tag{1.23}$$

В (1.23) вместо коэффициентов прямого a_j^i и обратного b_i^j преобразований можно использовать их значения из (1.21). В этом случае следует переписать (1.16) в такой форме

$$\frac{\partial y_m}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_\alpha}{\partial y_m}=\delta_j^\alpha,\quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial z^m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial y_i}=\delta_i^\alpha. \tag{1.24}$$

Справедливость соотношений (1.24) легко устанавливается и непосредственно из (1.12). Действительно, пусть

$$y_\alpha=y_\alpha(z_1(y_1,y_2,y_3),z_2(y_1,y_2,y_3),z_3(y_1,y_2,y_3))$$
$$z_\alpha=z_\alpha(y_1(z_1,z_2,z_3),y_2(z_1,z_2,z_3),y_3(z_1,z_2,z_3)).$$

Тогда

$$\delta_i^\alpha=\frac{\partial y_\alpha}{\partial y_i}=\frac{\partial y_\alpha}{\partial z^m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial y_i},\quad \delta_j^\alpha=\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_j}=\frac{\partial z_\alpha}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial z_j},$$

что и приводит к (1.24). Коэффициенты a_j^i прямого преобразования являются элементами матрицы Якоби

$$(D)=\left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j}\right)=(a_j^i)=(A). \tag{1.25}$$

Здесь и далее контравариантный индекс соответствует номеру строки, ковариантный — номеру столбца. Коэффициенты b_i^j обратного преобразования являются элементами матрицы

$$\left(\frac{\partial z_j}{\partial y_i}\right)=(b_i^j)=(B), \tag{1.26}$$

которая является обратной для матрицы Якоби (1.25). В самом деле

$$(A)(B)=(a_j^i)(b_m^j)=\left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial y_m}\right)=\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_m}\right)=(\delta_m^i)=(E).$$

В процессе рассуждений, приводящих к аналитическому определению вектора, использовалось такое казалось бы, наглядное понятие как "радиус-вектор". Векторы естественного базиса (1.4) определяются именно с помощью "радиуса-вектора" (1.1). Строго говоря, в такой наглядности нет особой необходимости, ибо на самом деле *постулируется* лишь возможность каждой точке $M\in R^3$ поставить в соответствие упорядоченную тройку вещественных чисел (y_1,y_2,y_3), называемых координатами. В этой связи возникают такие геометрические понятия как "координатная поверхность", "координатные линии", которые допускают аналитическое описание. Пусть точка M имеет координаты y_1,y_2,y_3, а "бесконечно близкая" точка N – координаты $y_1+dy^1,y_2+dy^2,y_3+dy^3$. На координатных линиях, проходящих через точку M зафиксируем точки $N_1(y_1+dy^1,y_2,y_3)$, $N_2(y_1,y_2+dy^2,y_3)$, $N_3(y_1,y_2,y_3+dy^3)$. Упорядоченная пара точек M и N определяет новый объект

$$d\mathbf{R}=\overrightarrow{MN}, \tag{1.27}$$

с которым можно связать направление: от M к N. Такую же "направленную" природу имеет и объект

$$\alpha d\mathbf{R},\quad \alpha=\mathrm{const}\,.\neq 0, \tag{1.28}$$

при $\alpha > 0$ направления объектов (1.27), (1.28) совпадают, при $\alpha < 0$ – противоположны. Как и в (1.27), (1.28) можно ввести направленные объекты $\overrightarrow{MN}_i$, $\alpha_i \overrightarrow{MN}_i$, а также при $\alpha_i = (dy^i)^{-1}$ объекты

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_i} = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.29}$$

которые назовем векторами базиса. Эти векторы, как нетрудно понять, направлены по касательным к координатным линиям, проходящим через точку M. Точка N является произвольной и

$$d\mathbf{R} = dy^1 \mathbf{e}_1 + dy^2 \mathbf{e}_2 + dy^3 \mathbf{e}_3. \tag{1.30}$$

Величины dy^i назовем контравариантными компонентами объекта $d\mathbf{R}$ в базисе $\mathbf{e}_i$. Контравариантный характер компонент dy^i следует из формул преобразования дифференциала dz^j (сравни с (1.22))

$$dz^j = \frac{\partial z_j}{\partial y_i} dy^i.$$

Хотя очень часто для координат используется обозначение y^i, все же следует подчеркнуть, что контравариантный характер имеют не сами координаты y^i, а только их дифференциалы dy^i. Векторы базиса $\mathbf{e}_i$ (1.29) в криволинейной системе координат (y_1, y_2, y_3) с началом в точке M и координатными поверхностями $y_i = \text{const}$. имеют компоненты $\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3$. Радиус-вектор произвольной точки $M(x^i, x^2, x^3)$ можно теперь (сравни с (1.1)) определить как вектор $\mathbf{r}$, имеющий декартовы компоненты x_i в декартовом базисе $\mathbf{q}_i$.

И в заключение этого параграфа отметим, что координаты точки M можно рассматривать в качестве векторного аргумента скалярной функции $f(M) = f(y_1, y_2, y_3)$. Тогда по определению

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial y_1} dy^1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} dy^3.$$

Поскольку каждой точке M можно поставить в соответствие произвольную бесконечно близкую точку N, то определен направленный объект $\overrightarrow{MN}$. Поэтому определена и векторная функция векторного аргумента, для которой в соответствии с (1.27)–(1.30) имеем

$$\overrightarrow{MN} = d\mathbf{R}(M) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_1} dy^1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_2} dy^2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_3} dy^3.$$

Инвариантный характер векторного объекта $d\mathbf{R}$ является естественным обобщением известного из анализа свойства инвариантности формы первого дифференциала $df(M)$ при допустимых ($|D| = \left|\frac{\partial y_i}{\partial z_j}\right| \neq 0$) преобразованиях $z_j \longleftrightarrow y_i$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_j} dz^j = \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial y_i} dy^i = \frac{\partial f}{\partial y_i} dy^i.$$

§ 2. Тензор. Диада. Инвариантное представление тензора. Метрический тензор

Векторы являются частным случаем более общих математических объектов, которые обладают свойством инвариантности относительно смены системы координат. Подобного рода объекты называются *тензорами*.

Пусть, например, некоторый объект в какой-либо "старой" системе криволинейных координат y_1, y_2, y_3 задается компонентами разных типов T_{ij} или T^{ij}. Пусть посредством (1.12) введена "новая" система криволинейных координат z_1, z_2, z_3, в которой тот же объект также задается компонентами разных типов: $\hat{T}_{ij}$, $\hat{T}^{ij}$. Пусть при этом

$$\hat{T}_{ij} = T_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j}, \quad \hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}. \tag{2.1}$$

В этом случае объект, задаваемый компонентами T_{ij}, T^{ij} (или $\hat{T}_{ij}$, $\hat{T}^{ij}$) называется тензором ранга два. Ранг тензора определяется количеством индексов у соответствующих компонент. В соответствии с (1.22) вектор $\mathbf{u}$ следует называть тензором ранга один. Иногда, в зависимости от типа задаваемых компонент (T_{ij} или T^{ij}) тензор называют ковариантным или контравариантным.

Понятие тензора ранга два тесно связано с диадным (тензорным) произведением векторов. А именно, паре векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ поставим в соответствие тензор T, который обозначим через

$$T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \tag{2.2}$$

и определим с помощью равенства

$$T\mathbf{a} \equiv (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{a} \in V. \tag{2.3}$$

Для объекта (2.2), (2.3) употребляется термин *диада*. По определению

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u^i \mathbf{e}_i) \otimes (v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.4}$$

Совокупность чисел $T^{ij} = u^i v^j$ определяет контравариантные компоненты диады. Для компонент T^{ij} естественно использовать матричную форму записи

$$(T^{ij}) = (u^i v^j), \tag{2.5}$$

где i – номер строки, j – столбца.

Перейдем в (2.4) к новой системе координат с базисом $\hat{\mathbf{e}}_i$. Тогда в силу инвариантности вектора как объекта

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \hat{u}^i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{v}^j \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{T}^{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j).$$

С другой стороны,

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = T^{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) = T^{\alpha\beta} (b^i_\alpha \hat{\mathbf{e}}_i \otimes b^j_\beta \hat{\mathbf{e}}_j) =$$
$$= T^{\alpha\beta} b^i_\alpha b^j_\beta (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j).$$

Следовательно,

$$\hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}. \tag{2.6}$$

Поэтому в соответствии с определением (2.1) компоненты T^{ij} являются контравариантными компонентами тензора ранга два $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ в *диадном базисе* $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$.

Итак, мы приходим к инвариантному представлению контравариантного тензора ранга два

$$T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.7}$$

При этом
$$T^{ij} = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i. \tag{2.8}$$
Действительно,
$$T^{ij} = u^i v^j = v^j u^i = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i,$$
что и дает (2.8). Как и для вектора $\mathbf{u}$ (1.23) инвариантность объекта (2.7) обеспечивается тем, что преобразования компонент T^{ij} и диад $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ в (2.7) осуществляются с помощью взаимнообратных преобразований
$$\hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta}, \quad \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta).$$

Вместо базисных диад $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ в инвариантном представлении (2.7) тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ ранга два можно использовать базисные диады $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)$, $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j)$. Тогда наряду с (2.7) будем иметь
$$T = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T_{i\cdot}^{\cdot j}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{\cdot j}^{i\cdot}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j), \tag{2.9}$$
где
$$T_{ij} = u_i v_j, \quad T_{i\cdot}^{\cdot j} = v^j u_i, \quad T_{\cdot j}^{i\cdot} = u^i v_j. \tag{2.10}$$
Величины T_{ij} определяют ковариантные компоненты тензора T, а величины $T_{i\cdot}^{\cdot j}$, $T_{\cdot j}^{i\cdot}$ – смешанные компоненты в соответствующих диадных базисах (2.9). Точка внизу или вверху позволяет определить место базисного или кобазисного вектора в диаде. Что касается матричного представления компонент тензора T, то для (T^{ij}), (T_{ij}) первый индекс соответствует номеру строки. Для матриц $(T_{i\cdot}^{\cdot j})$, $(T_{\cdot j}^{i\cdot})$ смешанных компонент первым индексом считается контравариантный. Аналогично формуле (2.8) для тензорных компонент (2.10) получаем
$$T_{ij} = u_i v_j = v_j u_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \tag{2.11}$$
$$T_{i\cdot}^{\cdot j} = v^j u_i = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i \tag{2.12}$$
$$T_{\cdot j}^{i\cdot} = u^i v_j = v_j u^i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i. \tag{2.13}$$
Из (2.8), (2.11)–(2.13) вытекает, что для произвольного тензора ранга два его компоненты любого типа определяются базисом $\mathbf{e}_i$, кобазисом $\mathbf{e}^i$ и действием тензора на векторы базиса $T\mathbf{e}_j$, кобазиса $\mathbf{e}^j$. Отсюда, в частности, вытекает правомерность употребления термина "диадный базис". Действительно, $T = 0$ влечет за собой
$$T^{ij} = T_{ij} = T_{i\cdot}^{\cdot j} = T_{\cdot j}^{i\cdot} = 0,$$
т. е. линейную независимость диад:
$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j), \quad (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j).$$

Существенную роль для дальнейшего играет *фундаментальный (метрический)* тензор. Компоненты этого тензора определяются следующим образом
$$\begin{gathered} g_{mi} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i, \quad g^{mi} = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i \\ g_i^m = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m, \quad g_m^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^i. \end{gathered} \tag{2.14}$$
Нетрудно установить тензорный характер величин g_{mi}, g^{mi} из (2.14). В силу (1.22)
$$\hat{\mathbf{e}}^m = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha}, \quad \hat{\mathbf{e}}_m = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m}$$

и поэтому

$$\hat{g}_{mi} = \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m} \cdot \mathbf{e}_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial z_i} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_m} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_i}$$

$$\hat{g}^{mi} = \hat{\mathbf{e}}^m \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}^\beta \frac{\partial z_i}{\partial y_\beta} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial z_m}{\partial y_\alpha} \frac{\partial z_i}{\partial y_\beta}.$$

Теперь остается обратиться к определению тензора (2.1).

Матрицы ковариантных (g_{mi}) и контравариантных (g^{mi}) компонент метрического тензора G являются симметричными $(g_{mi} = g_{im})$, $(g^{mi} = g^{im})$, матрицы смешанных компонент – единичными и

$$G = g_{mi}(\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) = (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i) = g^{mi}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_i). \tag{2.15}$$

Из (2.14) вытекает, что

$$\mathbf{e}^m = g^{mi}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_m = g_{mi}\mathbf{e}^i. \tag{2.16}$$

Учтем теперь (1.11). Тогда

$$\mathbf{u} = u^\beta \mathbf{e}_\beta = u^\beta g_{\beta\alpha} \mathbf{e}^\alpha = u_\alpha \mathbf{e}^\alpha = u_\alpha g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta,$$

следовательно,

$$u^m = u_\alpha g^{\alpha m}, \quad u_m = u^\beta g_{\beta m}. \tag{2.17}$$

Аналогичные формулы можно получить и для разноименных компонент тензора T ранга два. Действительно,

$$T = T_{\alpha\beta}(\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta) = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta m} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = T^{\alpha\beta}(\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) =$$
$$= T^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta m} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^m) = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\beta) = T^{i\cdot}_{\cdot\beta}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\beta).$$

Поэтому разноименные компоненты одного и того же тензора связаны следующим образом

$$T^{ij} = T_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta j}, \quad T_{ij} = T^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad T^{i\cdot}_{\cdot j} = T_{\alpha j} g^{\alpha i}. \tag{2.18}$$

Для (2.16)–(2.18) часто употребляется словосочетание "формулы жонглирования индексами". Подобное жонглирование применимо для компонент тензора любого ранга. Общее правило здесь таково: ковариантный индекс поднимается в соответствии с первой формулой (2.17), контравариантный индекс опускается в соответствии со второй формулой (2.17).

В качестве следствия из (2.16) получаем

$$\delta_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = g^{j\alpha} g_{i\beta} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j\alpha} g_{i\beta} \delta_\alpha^\beta = g^{j\alpha} g_{i\alpha},$$

т.е.

$$g_{i\alpha} \cdot g^{j\alpha} = \delta_i^j. \tag{2.19}$$

Поэтому матрица ковариантных компонент метрического тензора (g_{im}) является обратной к матрице контравариантных компонент (g^{jm}), т. е. $(g_{im})(g^{jm}) = E$. Если $g = \det(g_{im})$, $\bar{g} = \det(g^{jm})$, то

$$g\bar{g} = \det(g_{im} g^{mj}) = \det(\delta_i^j) = 1.$$

Далее мы рассмотрим результат действия фундаментального тензора G на произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$. Согласно (2.15) тензор G можно задать в различных диадных базисах. Соответственно и вектор $\mathbf{u}$ можно определить как ковариантными, так и контравариантными компонентами. Будем считать, что

$\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$, а $G = (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha) = (\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha)$. С помощью (2.16)–(2.18) к этим двум случаям сводятся все остальные. Итак,

$$G\mathbf{u} = (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha)u^i\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^\alpha)u^i\mathbf{e}_\alpha = u^i\mathbf{e}_i = \mathbf{u}$$
$$G\mathbf{u} = (\mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha)u^i\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\alpha)u^i\mathbf{e}^\alpha = g_{i\alpha}u^i\mathbf{e}^\alpha.$$

Для $g_{i\alpha}u^i\mathbf{e}^\alpha$ формулы жонглирования (2.16), (2.17) дают

$$\mathbf{u} = u_\alpha\mathbf{e}^\alpha = g_{i\alpha}u^i\mathbf{e}^\alpha = u^i\mathbf{e}_i = \mathbf{u}.$$

Поэтому в любом случае

$$G\mathbf{u} = \mathbf{u} \tag{2.20}$$

и мы имеем все основания определить фундаментальный тензор G как тождественный (единичный) оператор при отображении $V \longrightarrow V$.

Скалярное произведение векторов определено пока только для векторов базиса $\mathbf{e}_i$ и кобазиса $\mathbf{e}^j$. Для произвольных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ это действие лишь формально обозначено. Задание метрического тензора G (2.14) позволяет ввести операцию $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ для общего случая. По определению

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i\mathbf{e}_i \cdot v^j\mathbf{e}_j = u^iv^jg_{ij} = u^iv_i = u_jv^j = u_jv_ig^{ij}. \tag{2.21}$$

Тогда для квадрата длины вектора $\mathbf{u}$ получим

$$|\mathbf{u}|^2 = g_{ij}u^iu^j = g^{ij}u_iu_j = u^iu_i. \tag{2.22}$$

Если $(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ – угол между направленными объектами (векторами) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, то по определению

$$\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}. \tag{2.23}$$

Отсюда, в частности, вытекает одна из аксиом скалярного произведения $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, известная как неравенство Шварца.

Пусть $\mathbf{r}(M)$ – радиус-вектор точки $M(y_i)$, $\mathbf{r}(N)$ – радиус-вектор бесконечно близкой точки $N(y_i + dy^i)$, а векторы $\mathbf{e}_i(M)$ в соответствии с (1.29) задают базис. Учитывая (2.14) можно вычислить квадрат расстояния между парой M, N:

$$\begin{aligned}|d\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}(N) - \mathbf{r}(M)|^2 = |\mathbf{r}(y_i + dy^i) - \mathbf{r}(y_i)|^2 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y_i}dy^i\right|^2 = \\ = |\mathbf{e}_i \cdot dy^i|^2 = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta dy^\alpha dy^\beta = g_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Квадратичная форма (2.24) задает метрику пространства V, скалярное произведение в котором определено с помощью (2.21). Что касается (2.21), (2.22), то как нетрудно понять

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot G\mathbf{v}, \quad |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot G\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2_G \tag{2.25}$$

Если бесконечно близкая точка N_i лежит на координатной линии, исходящей из M и вдоль которой меняется только координата y_i, то для N_i имеем $dy^i \neq 0$, $dy^j = 0$, $j \neq i$. Поэтому в соответствии с (2.24)

$$|d\mathbf{r}| = |d\mathbf{r}_i| = \sqrt{g_{ii}}dy^i, \quad \text{по } i \text{ не суммировать.} \tag{2.26}$$

Угол между i -ой ($dy^i \neq 0$, $dy^j = 0$, $dy^k = 0$) и j -ой ($dy^i = 0$, $dy^j \neq 0$, $dy^k = 0$) координатными линиями ($i \neq j \neq k \neq i$) определяется как угол между направленными элементами $d\mathbf{r}_i = \overrightarrow{MN}_i$, $d\mathbf{r}_j = \overrightarrow{MN}_j$. Тогда в соответствии с (2.23)

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}_i, d\mathbf{r}_j}) = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}, \quad \text{по } i,j \text{ не суммировать.} \tag{2.27}$$

Поэтому диагональные элементы матрицы ковариантных компонент (g_{ij}) метрического тензора G "отвечают за растяжение" независимых дифференциалов вдоль i -ой координатной линии. Внедиагональные элементы "отвечают за углы" между соответствующими координатными линиями.

Рассмотрим, наконец, заданную параметрически пространственную кривую $y_i = y_i(t)$, проходящую через бесконечно близкие точки $M(y_i)$, $N(y_i + dy^i)$. Если s – длина дуги, то в силу (2.24)

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta dt^2, \quad \xi_i = \frac{dy^i}{dt}$$

и для длины дуги между точками $P(y_i(t_1))$, $Q(y_i(t_2))$ будем иметь

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta}dt. \tag{2.28}$$

Таким образом, с помощью метрического тензора G (2.14) определяется скалярное произведение (2.21) в V, фундаментальная квадратичная форма (2.24) и все метрические соотношения, связанные с элементами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$.

§ 3. Отображение $V \longrightarrow V$. Линейный оператор. Матрица оператора. Тензорная алгебра

Итак, базис $\mathbf{e}_i$ и кобазис $\mathbf{e}^j$ порождают новые объекты — диады

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \tag{3.1}$$

и для любого диадного тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ однозначно определяются его компоненты в любом из диадных базисов

$$T = T^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T_{i\cdot}^{\cdot j}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{\cdot j}^{i\cdot}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j). \tag{3.2}$$

При этом

$$T^{ij} = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i, \quad T_{ij} = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad T_{i\cdot}^{\cdot j} = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i, \quad T_{\cdot j}^{i\cdot} = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i). \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекает, что матрица любых (ковариантных, контравариантных, смешанных) компонент тензора T определяется базисом (кобазисом) и действием тензора на векторы базиса (кобазиса).

Рассмотрим действие тензора $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ на векторы базиса

$$\begin{gathered} T\mathbf{e}_j = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = (\mathbf{e}_j \cdot v_m\mathbf{e}^m)u^i\mathbf{e}_i = \\ = v_j u^i \mathbf{e}_i = T_j^i \mathbf{e}_i = \mathbf{p}_j \in V. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из (3.4), (3.3) следует

$$T_j^i = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = T_{\cdot j}^{i\cdot}. \tag{3.5}$$

Если $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in V$, то с помощью этой же матрицы (T_j^i) осуществляется отображение $T : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$. В самом деле,

$$\begin{gathered} T\mathbf{a} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = a^m(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = a^m v_j(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^j)\mathbf{u} = \\ = a^j v_j u^i \mathbf{e}_i = T_j^i a^j \mathbf{e}_i = b^i \mathbf{e}_i = \mathbf{b} \in V \end{gathered}$$

или

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = (T^i_j) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (T^{i\cdot}_{\cdot j}) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Матрицу (T^i_j) из (3.4)–(3.6) называют *матрицей тензора T в базисе* $\mathbf{e}_j$.

Совершенно аналогично определяется *матрица* (T^j_i) *тензора T в кобазисе* $\mathbf{e}^j$

$$T\mathbf{e}^j = v^j u_i \mathbf{e}^i = T^j_i \mathbf{e}^i, \quad T^j_i = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = T^{\cdot j}_{i \cdot}. \tag{3.7}$$

С помощью этой матрицы преобразуются ковариантные компоненты вектора при отображении $T : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (T^j_i) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (T^{\cdot j}_{i \cdot}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Как это следует из (3.5), (3.7) преобразования базиса $\mathbf{e}_j$ и кобазиса $\mathbf{e}^j$ при отображении $T : V \longrightarrow V$ осуществляются с помощью транспонированных матриц $(T^i_J)'$, $(T^j_i)'$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (T^i_j)' \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = (T^j_i)' \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Формально до сих пор речь шла о конкретном диадном тензоре $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. На самом деле подобная конкретность не имеет существенного значения, если говорить о тензоре T как о линейном отображении $T : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$. Действительно, пусть на V задана линейная векторнозначная функция векторного аргумента

$$\mathbf{b} = F(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V. \tag{3.10}$$

Тогда

$$\mathbf{b} = F(\mathbf{a}) = F(a^m \mathbf{e}_m) = a^m F(\mathbf{e}_m) = a^m p_m \mathbf{e}_m = p_m (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m =$$
$$= p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \mathbf{a} = \Big(\sum_{m=1}^{3} p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \Big) \mathbf{a} = \tilde{T} \mathbf{a}.$$

Очевидно, что

$$b^i = \Big(\sum_{m=1}^{3} p_m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) \Big)^j_i a^j = \tilde{T}^i_j a^j, \quad \tilde{T}^i_j = \tilde{T} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i.$$

Если теперь положить $p_m \mathbf{e}_m = \mathbf{u}_m$, то

$$\tilde{T} = \sum_{m=1}^{3} (\mathbf{u}_m \otimes \mathbf{e}^m). \tag{3.11}$$

Поэтому (3.10) можно рассматривать как результат действия суммы трех диад (3.11), т. е. тензора ранга два на вектор $\mathbf{a}$. Случай $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{v}_i$ сводится к только что рассмотренному, ибо

$$(\mathbf{w}_i \otimes \mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i \otimes v_{mi} \mathbf{e}^m) = (v_{mi} \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{e}^m) =$$
$$= (\mathbf{u}_m \otimes \mathbf{e}^m), \quad \mathbf{u}_m = v_{mi} \mathbf{w}_i, \quad m = 1, 2, 3.$$

Следовательно, произвольный тензор T ранга два задает некоторое линейное отображение $V \longrightarrow V$.

Определение. *Линейное отображение T векторного пространства V в себя называется тензором ранга два.*

Вместо термина "линейное отображение" T часто используется термин "линейный оператор" $T : V \longrightarrow V$. Соответствие

$$T \longleftrightarrow (T^i_j), \quad T^i_j = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i \text{ или } T \longleftrightarrow (T^j_i), \quad T^j_i = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i$$

позволяет существенную часть тензорной алгебры отождествить с алгеброй матриц.

Пусть T, L — линейные операторы, которым в одном и том же базисе $\mathbf{e}_m$ соответствуют матрицы (T^i_j), (L^i_j). Произведение (композиция) операторов T, L определяется следующим образом. Если $L : \mathbf{a} \to \mathbf{w}$, $T : \mathbf{w} \to \mathbf{b}$, то $M = TL : \mathbf{a} \to \mathbf{b}$. Представим матрицу (T) в виде набора строк: $T = (\dots T^i \dots)$, матрицу (L) в виде набора столбцов $L = (\dots L_j \dots)$. Тогда

$$(M) = (TL) = (\dots T^i \dots)(\dots L_j \dots), \quad M^i_j = T^i_\alpha L^\alpha_j \tag{3.12}$$

в соответствии с правилом умножения "строка на столбец". В общем случае $TL \neq LT$, в противном случае операторы T и L называют *коммутативными*. Если в (3.12) $M^i_j = \delta^i_j$, то $(M) = (TL) = (E)$ и оператор $L = T^{-1}$ называется *обратным* к T. Очевидно, что $TT^{-1} = T^{-1}T$ и $(T^{-1}) = (T)^{-1}$.

Пусть $\mathbf{e}_m$ — старый базис, $\hat{\mathbf{e}}_m$ — новый и, например,

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = a^i_\alpha \mathbf{e}_i, \quad a^i_\alpha = \frac{\partial y_i}{\partial z_\alpha}, \quad (A)^i_\alpha = a^i_\alpha. \tag{3.13}$$

Пусть также (T) — матрица оператора T в старом базисе $\mathbf{e}_m$, $(\hat{T})$ — в новом $\hat{\mathbf{e}}_m$. В соответствии с (3.13), (3.4)

$$T\hat{\mathbf{e}}_m = Ta^\alpha_m \mathbf{e}_\alpha = a^\alpha_m T\mathbf{e}_\alpha = a^\alpha_m T^i_\alpha \mathbf{e}_i = (AT)^i_m \mathbf{e}_i.$$

С другой стороны, из (3.5) вытекает, что $\hat{T}^\alpha_m = T\hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}^\alpha$ и поэтому

$$T\hat{\mathbf{e}}_m = \hat{T}^\alpha_m \hat{\mathbf{e}}_\alpha = \hat{T}^\alpha_m a^i_\alpha \mathbf{e}_i = (\hat{T}A)^i_m \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, $(\hat{T}A)^i_m = (AT)^i_m$, т. е.

$$(\hat{T}) = (A)(T)(A)^{-1}, \quad (A)^i_\alpha = \Big(\frac{\partial y_i}{\partial z_\alpha}\Big). \tag{3.14}$$

Если переход к новому базису определять с помощью матрицы (B) преобразования контравариантных компонент вектора $\mathbf{u} \in V$

$$\hat{u}^\alpha = b^\alpha_i u^i, \quad b^\alpha_i = \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}, \quad (B)^\alpha_i = b^\alpha_i,$$

то в силу (1.24) $(B) = (A)^{-1}$ и (3.14) можно переписать следующим образом

$$(\hat{T}) = (B)^{-1}(T)(B), \quad (B)^\alpha_i = \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}. \tag{3.15}$$

Итак, *матрицы линейного оператора (тензора ранга два) в различных базисах подобны.*

Как это следует из рассуждений, приводящих к (3.14), в качестве (A) в (3.14) можно выбрать любую невырожденную матрицу (C), задающую в какой-либо форме переход от старого базиса к новому. Поэтому каждому линейному оператору $T : V \longrightarrow V$ соответствует класс матриц $(\hat{T})$, связанных с (T) соотношениями подобия.

Оператор (тензор) T^* называется *сопряженным* к оператору (тензору) T, если

$$T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot T^*\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{3.16}$$

Оператор (тензор) T называется *самосопряженным (симметричным)*, если $T = T^*$. Для любого линейного оператора T существует единственный сопряженный оператор T^*. Действительно, для любого $\mathbf{u} \in V$ справедливо разложение $\mathbf{u} = u^m \mathbf{e}_m = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^m)\mathbf{e}_m$ и поэтому, если T^* существует, то в соответствии с (3.16)

$$T^*\mathbf{v} = (T^*\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^m)\mathbf{e}_m = (\mathbf{v} \cdot T\mathbf{e}^m)\mathbf{e}_m = (\mathbf{e}_m \otimes T\mathbf{e}^m)\mathbf{v}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что *заданный* линейный оператор T порождает единственный линейный оператор T^*. Понятно также, что эквивалентным определению T^* из (3.16) будет являться определение T^* с помощью (3.17). Ясно, наконец, что если $T : V \longrightarrow V$, то и $T^* : V \longrightarrow V$. Однако здесь уместны некоторые комментарии.

Множество векторов $\mathbf{a} \in V$, для которых $T\mathbf{a} = 0$, называется *ядром оператора* T : $\ker T$. Множество векторов $\mathbf{b} \in V$ таких, что $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$ хотя бы для одного вектора $\mathbf{a} \in V$, называется *образом оператора* T : $\mathrm{im} A$. Разложим V в прямую сумму подпространств

$$V = D_T \dot{+} \ker T, \tag{3.18}$$

где D_T дополнение ядра до V. В соответствии с (3.18) для любого $\mathbf{a} \in V$ будем иметь

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_1 \in D_T, \quad \mathbf{a}_2 \in \ker T.$$

Если задан линейный оператор T такой, что $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, то

$$\mathbf{b} = T\mathbf{a} = T\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2 = T\mathbf{a}_1.$$

Поэтому любой вектор $\mathbf{b} \in \mathrm{im} T$ имеет хотя бы один прообраз из D_T. Этот прообраз является единственным, так как общим для подпространств D_T и $\ker T$ является только нулевой вектор. Таким образом, линейный оператор T устанавливает взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между векторами подпространств D_T и $\mathrm{im} T$. Если размерность (число линейно независимых векторов) пространства V есть $n = \dim V$, то теперь из (3.18) следует

$$n = \dim(\mathrm{im} T) + \dim(\ker T). \tag{3.19}$$

Оператор T называется *невырожденным* если $\dim(\ker T) = 0$. Такой оператор любой базис V переводит в базис V, каковым можно считать систему векторов $T\mathbf{e}^m$ из (3.17). Невырожденность линейного оператора T влечет за собою невырожденность оператора T^*, ибо в противном случае из (3.17) вытекало бы существование ненулевого вектора $\mathbf{v} \in V$, ортогонального всем векторам базиса V. Итак, для невырожденного оператора T $\dim(\mathrm{im} T) = \dim(\mathrm{im} T^*) = n$.

Пример вырожденного ($\dim \ker T \neq 0$) оператора доставляет диадный оператор $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Действительно, по определению

$$T\mathbf{a} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

и оператор T отображает произвольный вектор $\mathbf{a} \in V$ в одномерное подпространство, натянутое на вектор диады $\mathbf{u}$. Поэтому

$$\mathbf{a} \in \ker T \longleftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \dim(\ker T) = n - 1, \quad \dim(\mathrm{im} T) = 1.$$

Поскольку

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}\cdot\mathbf{p} = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}) = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{p}\cdot\mathbf{w},$$

то в силу (3.16) сопряженным к $T = \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ будет диадный оператор $T^* = \mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$. Этот оператор также является вырожденным и

$$\mathbf{a}\in\ker T^* \longleftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \dim(\ker T^*) = n-1, \quad \dim(\mathrm{im}T^*) = 1.$$

Линейная комбинация диадных операторов $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$ приводит к вырожденному оператору

$$\tilde{T}\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}, \quad \alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0.$$

В этом случае $\ker\tilde{T}$ есть одномерное подпространство, натянутое на вектор ортогональный плоскости векторов $\mathbf{u},\mathbf{v}$. На сей раз

$$\dim(\ker\tilde{T}) = \dim(\ker\tilde{T}^*) = 1, \quad \dim(\mathrm{im}\tilde{T}) = \dim(\mathrm{im}\tilde{T}^*) = n-1.$$

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы уточнить разложение (3.18). Итак, пусть задан линейный оператор $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, $T : V \longrightarrow V$. Тогда

$$T\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot T^*\mathbf{b}.$$

Если $\mathbf{a}\in\ker T$, то $T\mathbf{a} = 0$ и $\mathbf{a}\cdot T^*\mathbf{b} = 0$. Это означает, что $\mathrm{im}T^*$ есть подпространство, ортогональное к $\ker T$. В свою очередь подпространство $\mathrm{im}T$ ортогонально к $\ker T^*$. И, наконец, так как $\dim(\ker T) = \dim(\ker T^*)$, то (3.19) вместе с только что сказанным позволяет утверждать

$$V = \mathrm{im}T \oplus \ker T^* = \mathrm{im}T^* \oplus \ker T. \tag{3.20}$$

Фигурирующие в (3.20) ортогональные подпространства, порождаемые линейными операторами T, T^* играют важную роль в теории линейных операторных уравнений

$$T\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u},\mathbf{f}\in V. \tag{3.21}$$

Именно в терминах этих подпространств обычно формулируется классическая

Теорема Фредгольма. *Необходимым и достаточным условием разрешимости (совместности) линейного операторного уравнения (3.21) является ортогональность* $\mathbf{f}$ *к ядру оператора* T^*.

Таким образом, для совместной задачи (3.21) $\mathbf{f}\in\mathrm{im}T$, т. е. $(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}) = 0$, $\forall\boldsymbol{\varphi} : T^*\boldsymbol{\varphi} = 0$ и если $\dim(\ker T^*) = 0$, то задача (3.21) однозначно разрешима. Если $\mathbf{f}\in\mathrm{im}T$, но $\dim(\ker T^*)\neq 0$, то решение задачи (3.21) существует и определяется с точностью до произвольного элемента ядра оператора T (решение неединственно). Если же $\mathbf{f}\,\bar{\in}\,\mathrm{im}T$, то задачу (3.21) называют *несовместной*, решение такой задачи в обычном смысле и не существует.

Как уже установлено, из невырожденности оператора T вытекает невырожденность оператора T^*, т. е. существование T^{-1} влечет за собой существование $[T^*]^{-1}$. Связь между двумя последними операторами (тензорами) задается следующим образом

$$[T^*]^{-1} = [T^{-1}]^*. \tag{3.22}$$

Действительно, если $\mathbf{b},\mathbf{v}\in V$ — произвольные векторы, то *единственным* образом определяются векторы $\mathbf{a},\mathbf{u}\in V$ такие, что $T\mathbf{a} = \mathbf{b}, T^*\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Поэтому

$$\mathbf{b}\cdot[T^{-1}]^*\mathbf{v} = T^{-1}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot T^*\mathbf{u} = T\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{b}\cdot[T^*]^{-1}\mathbf{v}. \tag{3.23}$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ (3.22) следует теперь из (3.23). Далее, для произвольных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ по определению (3.16) имеем

$$\mathbf{u} \cdot [TL]^*\mathbf{v} = TL\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = L\mathbf{u} \cdot T\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot L^*T^*\mathbf{v}$$

или

$$[TL]^* = L^*T^*. \tag{3.24}$$

Соотношения (3.22), (3.24) можно было бы записать в виде

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*, \quad (TL)^* = (L^*T^*),$$

используя, как обычно, круглые скобки при обозначении матрицы оператора (тензора ранга два) в отображении $V \longrightarrow V$. Однако, пока не определена матрица (T^*) как матрица оператора (тензора ранга два) T^* в конкретном базисе (кобазисе).

Если речь идет о матрицах ковариантных или контравариантных компонент тензора T^* в диадных базисах $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, то совершенно очевидно, что

$$(T^*)_{ji} = (T)_{ij}, \quad (T^*)^{ji} = (T)^{ij},$$

т. е. матрицы одноименных компонент тензоров T и T^* связаны между собою операцией транспонирования. Иная ситуация имеет место для матриц $T^{i\cdot}_{\cdot j}$, $T^{\cdot j}_{i\cdot}$ смешанных компонент тензора в диадных базисах $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$, которые собственно и определяют матрицы тензора (оператора) T в базисе или кобазисе. Пусть (t_{ij}) матрица оператора (тензора) T в базисе, матрица $(\tilde{t}_{ij})$ — в кобазисе. В соответствии с (3.3), (3.5), (3.16) имеем

$$(t_{ij}) = T^{i\cdot}_{\cdot j} = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_j \cdot T^*\mathbf{e}^i = T^*\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = T^{*\cdot i}_{\ j\cdot}.$$

Если вместо (3.5) принять во внимание (3.7), то совершенно аналогично

$$(\tilde{t}_{ij}) = T^{\cdot j}_{i\cdot} = T\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}^j \cdot T^*\mathbf{e}_i = T^*\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = T^{*j\cdot}_{\ \cdot i}.$$

Поэтому

$$(t_{ij}) = (\tilde{t}^*_{ji}), \quad (\tilde{t}_{ij}) = (t^*_{ji}). \tag{3.25}$$

Таким образом, если оператор (тензор) T в базисе (кобазисе) задан матрицей (T), то оператор (тензор) T^* в кобазисе (базисе) задан матрицей $(T)'$, транспонированной к (T).

Базис $\mathbf{e}_j$ совпадает с кобазисом $\mathbf{e}^j$ тогда и только тогда, если он ортонормированный. В этом случае матрицы (t_{ij}) и $(\tilde{t}_{ij})$ не различаются и вместо (3.25) будем иметь $(T) = (T^*)'$.

Итак, если для тензора T ранга два

$$T = (T)^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (T)_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = (T)^{\cdot j}_{i\cdot}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = (T)^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j),$$

а для сопряженного тензора T^*

$$T^* = (T^*)^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(T^*)_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = (T^*)^{\cdot j}_{i\cdot}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = (T^*)^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j),$$

то

$$(T^*)^{ij} = (T)^{ji}, \quad (T^*)_{ij} = (T)_{ji}, \quad (T^*)^{\cdot j}_{i\cdot} = (T)^{j\cdot}_{\cdot i}, \quad (T^*)^{i\cdot}_{\cdot j} = (T)^{\cdot i}_{j\cdot}. \tag{3.26}$$

Тензор T называется *симметричным*, если $T = T^*$ и *антисимметричным (кососимметричным)*, если $T = -T^*$. Произвольный тензор T единственным образом представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров

$$T = C + D = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*), \quad C = C^*, \quad D = -D^*. \tag{3.27}$$

Если (c_{ij}), (d_{ij}) — матрицы тензоров C, D в одном и том же базисе $\mathbf{e}_m$, то $c_{ij} = c_{ji}$, $d_{ij} = -d_{ji}$. Отсюда, в частности, вытекает, что для кососимметричного тензора $d_{ii} = 0$. Кроме того,

$$D\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot D^*\mathbf{u} = -\mathbf{u}\cdot D\mathbf{u} \longrightarrow D\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Поэтому

$$T\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = C\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}, \tag{3.28}$$

где тензор C определен в (3.27).

Для произвольной квадратной матрицы $(A) = (a_{ij})$ *след матрицы*: $\mathrm{tr}(A)$ определяется следующим образом

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}. \tag{3.29}$$

След диадного тензора $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ по определению

$$\mathrm{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}. \tag{3.30}$$

Но

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^i v_i = T^i{}_i = T^{i\cdot}_{\cdot i} = u_i v^i = T_i{}^i = T^{\cdot i}_{i\cdot}. \tag{3.31}$$

Из (3.29)–(3.31) вытекает, что для произвольного тензора T ранга два

$$\mathrm{tr}\,T = T^i{}_i = \mathrm{tr}(T^{i\cdot}_{\cdot j}) = T_i{}^i = \mathrm{tr}(T^{\cdot i}_{j\cdot}) = \mathrm{tr}\,T^*. \tag{3.32}$$

Таким образом, след тензора T совпадает со следом любой из матриц смешанных компонент в диадных базисах $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_i$.

Пусть далее тензор $T = ML$, где M – симметричный тензор $M = M^*$, L – кососимметричный $L = -L^*$. Пусть также (t_{ij}), (m_{ij}), (l_{ij}) – матрицы тензоров T, M, L в одном и том же базисе. Тогда в соответствии с (3.12) $t_{ii} = m_{i\alpha}l_{\alpha i}$. Но $m_{i\alpha}l_{\alpha i} = m_{\alpha i}l_{\alpha i} = -m_{i\alpha}l_{i\alpha}$. Поэтому

$$0 = m_{\alpha i}l_{\alpha i} + m_{i\alpha}l_{i\alpha} = m_{\alpha i}l_{\alpha i} + m_{\beta k}l_{\beta k} = 2m_{\alpha i}l_{\alpha i} = 2m_{i\alpha}l_{\alpha i} = 2t_{ii}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathrm{tr}\,T = \mathrm{tr}\,ML = \sum_i t_{ii} = 0, \quad M = M^*, \quad L = -L^*. \tag{3.33}$$

С помощью операции tr можно ввести *скалярное произведение тензоров*

$$T\cdot M = \mathrm{tr}(TM^*) = \sum_{i,j} T^{i\cdot}_{\cdot j} M^{j\cdot}_{\cdot i} = M\cdot T. \tag{3.34}$$

Тогда для "*квадрата длины тензора* T" будем иметь

$$|T|^2 = T\cdot T = \mathrm{tr}(TT^*) = \sum_{i,j} t_{ij}^2 > 0. \tag{3.35}$$

Каждый тензор ранга два можно интерпретировать как n^2–мерный вектор, где $n = \dim V$. Тогда (3.34) при соответствующем введении базиса превращает множество тензоров ранга два в n^2–мерное векторное евклидово пространство.

Пусть задан линейный оператор (тензор ранга два) $Q : V \longrightarrow V$. Если при отображении $\mathbf{v} = Q\mathbf{u}$ сохраняется длина вектора $\mathbf{u}$, т. е.

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2, \tag{3.36}$$

то линейный оператор (тензор) Q называется *ортогональным.* Для ортогонального оператора Q условие (3.36) дает

$$QQ^* = Q^*Q = E, \quad Q^* = Q^{-1}. \tag{3.37}$$

Если существует Q^{-1}, то за определение ортогонального оператора можно принять второе из соотношений (3.37). Из (3.35) вытекает, что

$$|Q|^2 = \mathrm{tr}(QQ^*) = \mathrm{tr}(Q^*Q) = \mathrm{tr}(E) = n.$$

Если $\tilde{T} = QT$, то из (3.35) вытекает также и

$$|\tilde{T}|^2 = \tilde{T} \cdot \tilde{T} = \mathrm{tr}(\tilde{T}^*\tilde{T}) = \mathrm{tr}(T^*Q^*QT) = \mathrm{tr}(T^*T) = T \cdot T = |T|^2.$$

Роль ортогональных операторов (тензоров) в приложениях трудно переоценить уже хотя бы по той причине, что для линейного операторного уравнения (3.21) при $T = Q$, $Q^*Q = E$ имеем

$$Q\mathbf{u} = \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{u} = Q^*\mathbf{f}. \tag{3.38}$$

В качестве достаточно простого примера ортогонального оператора приведем оператор *отражения*

$$H = E - 2\frac{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} \in V. \tag{3.39}$$

Очевидно, что оператор H самосопряженный, т. е. $H = H^*$. Далее

$$H\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

и тогда

$$H\mathbf{u} \cdot H\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})^2} - 4\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Таким образом, $H = H^*$ и $H^*H = E$. Термин "отражение" применительно к H из (3.39) употребляется в соответствии с геометрическим смыслом отображения $\mathbf{v} = H\mathbf{u}$. Если P — гиперплоскость в V с вектором нормали $\mathbf{w}$, а вектор $\mathbf{u} \bar{\in} P$, то отражение $\mathbf{u}$ относительно P дает вектор $\mathbf{v}$. Широкое практическое использование преобразования отражения (3.39) в различных вычислительных алгоритмах линейной алгебры обусловлено следующим. Если $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ и в (3.39) $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, то $\mathbf{v} = H\mathbf{u}$. Действительно,

$$H\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v})}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Поэтому, например, произвольный вектор $\mathbf{u} \in V_m \subseteq V$, $m = \dim V_m \leq n = \dim V$ с компонентами $u^1, \ldots, u^m$ можно с помощью (3.39) перевести в "нужный" вектор $\mathbf{v} \in V_m$ с компонентами $v^1 = \pm\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, $v^j = 0$, $j \neq 1$. Вектор $\mathbf{w}$ из (3.39) в этом случае задается компонентами $u^1 = \mp\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}, u^2, \ldots, u^m$.

Определим, наконец, операцию *свертки*, которая специфична именно для тензорных объектов. Суть этой операции заключается в том, что у компонент тензорных объектов приравниваются разноименные индексы, в результате последние становятся индексами суммирования. Операция свертки приводит к новому тензорному объекту меньшего ранга. Например (см. (2.17), (2.18)),

$$\begin{aligned} u_\beta g^{\alpha m} &\longrightarrow u_\alpha g^{\alpha m} = u^m \longleftrightarrow G\mathbf{u} = \mathbf{u} \ \ - \ \text{вектор}, \\ T_{\beta j} g^{\alpha i} &\longrightarrow T_{\alpha j} g^{\alpha i} = T^i_j \longleftrightarrow GT = T \ \ - \ \text{тензор}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Таким образом, жонглирование индексами есть результат умножения некоторого тензора на метрический тензор и дальнейшей свертке по паре индексов различных типов. Далее (см. (2.21), (3.34)),

$$\begin{aligned} u_i v^j &\longrightarrow u_i v^i = c \longleftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = c \ \ - \ \text{скаляр}, \\ T^\beta_{\ \alpha} M^j_{\ i} &\longrightarrow T^i_{\ j} M^j_{\ i} = d \longleftrightarrow T \cdot M = \mathrm{tr}(TM^*) = d \ \ - \ \text{скаляр}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Поэтому скалярное произведение тензорных объектов, заданных "смешанными" компонентами, можно рассматривать как результат умножения этих объектов и последующего свертывания. Если перемножаются тензорные объекты, заданные компонентами одного типа, то в соответствии с (3.40) это умножение следует дополнить умножением на метрический тензор и провести свертку по паре индексов. Сказанное позволяет рассматривать свертку только для разноименной пары ковариантных и контравариантных индексов. И, наконец, приведем здесь формулы (3.6), (3.12), которые уже не нуждаются в комментариях

$$\begin{aligned} T^i_{\ \alpha} a^j &\longrightarrow T^i_{\ j} a^j = b^i \longleftrightarrow T\mathbf{a} = \mathbf{b} \ \ - \ \text{вектор}, \\ T^i_{\ \beta} L^\alpha_{\ j} &\longrightarrow T^i_{\ \alpha} L^\alpha_{\ j} = M^i_{\ j} \longleftrightarrow TL = M \ \ - \ \text{тензор}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Соотношения (3.41), (3.42) позволяют сформулировать достаточно общий

Тензорный критерий. *Пусть свертывание каких-либо индексных величин $A(\alpha_i)$ с компонентами тензора $B(\beta_j)$ приводит к компонентам тензора $C(\gamma_m)$. Тогда рассматриваемые величины $A(\alpha_i)$ являются компонентами тензора. Тип этих компонент (ковариантный, контравариантный, смешанный) определяется типом индексов.*

Практическое использование этого критерия проиллюстрируем на простейшем примере первой группы соотношений из (3.41). Пусть v^j – контраваринтные компоненты вектора (тензора ранга один). Поскольку c – тензор нулевого ранга, то в соответствии с критерием величины u_i являются ковариантными компонентами вектора. В самом деле,

$$u_i v^i = c = \hat{u}_j \hat{v}^j = \hat{u}_j b^j_i v^i.$$

Следовательно, $u_i = b^j_i \hat{u}_j = \dfrac{\partial z_j}{\partial y_i}\hat{u}_j$ или $\hat{u}_j = a^i_j u_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial z_j} u_i$, т. е. при смене координат индексные величины u_i действительно преобразуются как ковариантные компоненты вектора.

Если рассматривать тензор ранга два T как линейный оператор T при отображении $V \longrightarrow V$, то особый интерес представляют такие векторы $\boldsymbol{\varphi}$, которые тензором T преобразуются в векторы, отличающиеся от исходных только числовым множителем λ, т. е.

$$T\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} \neq 0. \tag{3.43}$$

Векторы $\boldsymbol{\varphi}$ из (3.43) называют *главными* (собственными) векторами тензора T, а соответствующие им числа λ – главными (*собственными*) значениями. Соотношение (3.43), которое можно переписать в виде $(T-\lambda G)\boldsymbol{\varphi}=0$ порождает четыре различных по форме уравнения

$$\begin{aligned} &\det(T_{\beta m}-\lambda g_{\beta m})=0, \quad \det(T_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}-\lambda g_{\beta}^{\alpha})=0 \\ &\det(T^{\beta m}-\lambda g^{\beta m})=0, \quad \det(T_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}-\lambda g_{\alpha}^{\beta})=0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Однако в силу (2.18), (2.19)

$$T_{\beta m}g^{m\alpha}=T_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}, \quad g_{\beta m}g^{m\alpha}=g_{\beta}^{\alpha}$$

и поэтому

$$(T_{\beta m}-\lambda g_{\beta m})g^{m\alpha}=T_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}-\lambda g_{\beta}^{\alpha}. \tag{3.45}$$

Так как

$$T^{\beta m}g_{m\alpha}=T_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}, \quad g^{\beta m}g_{m\alpha}=g_{\alpha}^{\beta},$$

то и

$$(T^{\beta m}-\lambda g^{\beta m})g_{m\alpha}=T_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}-\lambda g_{\alpha}^{\beta}. \tag{3.46}$$

И, наконец,

$$T_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}-\lambda g_{\beta}^{\alpha}=g_{\beta m}(T_{\cdot i}^{m\cdot}-\lambda\delta_{i}^{m})g^{im}. \tag{3.47}$$

Матрицы $(T_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}-\lambda g_{\beta}^{\alpha})$ и $(T_{\cdot i}^{m\cdot}-\lambda\delta_{i}^{m})$ в (3.47) подобны, следовательно, из (3.45)–(3.47) вытекает, что уравнения (3.44) имеют одинаковые корни. Для определенности под матрицей тензора $T-\lambda G$ будем понимать его матрицу в базисе, что соответствует заданию собственного вектора $\boldsymbol{\varphi}$ контравариантными компонентами и характеристическому уравнению

$$\det(T_{\alpha}^{\beta}-\lambda\delta_{\alpha}^{\beta})=|T_{\alpha}^{\beta}-\lambda\delta_{\alpha}^{\beta}|=0. \tag{3.48}$$

Основным для дальнейшего будет случай, когда $\dim V=3$ и $T=T^{*}$. Последнее означает, что корни характеристического уравнения (3.48) вещественны. Раскрывая (3.48) по степеням λ, получим

$$\lambda^3-J_1\lambda^2+J_2\lambda-J_3=0, \tag{3.49}$$

где

$$J_1=\mathrm{tr}(T), \quad J_2=\frac{1}{2}(T_{\alpha}^{\alpha}T_{\beta}^{\beta}-T_{\alpha}^{\beta}T_{\beta}^{\alpha}), \quad J_3=\det(T)$$

или, по теореме Виета

$$J_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \quad J_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3, \quad J_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Как мы уже убедились, корни характеристического уравнения λ_i не зависят от базиса, в котором тензор T представлен матрицей (T). Поэтому скалярные величины J_1, J_2, J_3 не зависят от системы координат, т. е. являются инвариантами тензора T. Сказанное не означает, что от выбора базиса не зависит структура матрицы тензора T. Более того, естественно даже поставить задачу об отыскании базиса (*канонического*), в котором (T) имеет наиболее простую структуру.

Пусть в (3.49) $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$. Если $T\boldsymbol{\varphi}_i=\lambda\boldsymbol{\varphi}_i$, $T\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j$, то в силу $T=T^{*}$ $(\lambda_i-\lambda_j)\boldsymbol{\varphi}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_j=0$. Поэтому главные (собственные) векторы симметричного тензора T, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. В рассматриваемом случае это влечет за собой линейную независимость системы

$\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$ ибо из $\alpha\boldsymbol{\varphi}_1 + \beta\boldsymbol{\varphi}_2 + \gamma\boldsymbol{\varphi}_3 = 0$ немедленно следует $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Выберем $\boldsymbol{\varphi}_i$ за базис и вычислим матрицу (T) в этом базисе. Если $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, то

$$T\mathbf{a} = Ta^i\boldsymbol{\varphi}_i = a^i\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i = b^i\boldsymbol{\varphi}_i,$$

что в матричной записи означает (сравни с (3.6))

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (T^{i\cdot}_{\cdot j})\mathbf{a} = (T)\mathbf{a} \tag{3.50}$$

Если $\boldsymbol{\varphi}_i$ – базис, то кобазис $\boldsymbol{\varphi}^j$ однозначно определяется условиями $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j = \delta_i^j$. По предположению $T = T^*$, поэтому, как мы видели $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j = 0$. Если дополнительно считать векторы $\boldsymbol{\varphi}_i$ единичными: $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = 1$, то базис $\boldsymbol{\varphi}_i$ и кобазис $\boldsymbol{\varphi}^j$ не различаются. Базис, составленный из единичных собственных (главных) векторов тензора T называется *каноническим.* Матрица (T) тензора T в этом базисе — диагональная, т. е. $(T) = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$. Кроме того,

$$(T_{ij}) = (T^{ij}) = (T^{i\cdot}_{\cdot j}) = (T^{\cdot j}_{i\cdot}) = \Lambda,$$

а тензор T в диадном базисе представляется следующим образом

$$T = \lambda_i(\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \boldsymbol{\varphi}_i), \quad T\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i, \quad T = T^*, \quad \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij}. \tag{3.51}$$

Пусть снова $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, но $T \neq T^*$. И в этом случае система главных векторов тензора T является линейно независимой. Действительно, если $\mathbf{u} = \lambda\boldsymbol{\varphi}_i + \beta\boldsymbol{\varphi}_2 + \gamma\boldsymbol{\varphi}_3 = 0$, то $T\mathbf{u} = 0$, $TT\mathbf{u} = 0$, или

$$(A)\begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{\varphi}_1 \\ \beta\boldsymbol{\varphi}_2 \\ \gamma\boldsymbol{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda 3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{\varphi}_1 \\ \beta\boldsymbol{\varphi}_2 \\ \gamma\boldsymbol{\varphi}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{\varphi}_i \neq 0$, а $\det(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$, то $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Поэтому за базис можно принять систему главных векторов тензора T. За кобазис $\boldsymbol{\varphi}^j$ примем систему главных векторов тензора $T^* : T^*\boldsymbol{\varphi}^j = \mu_j\boldsymbol{\varphi}^j$, что соответствует стандартному определению $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j = \delta_i^j$. В самом деле,

$$\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^i = T\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^i = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot T^*\boldsymbol{\varphi}^i = \mu_i\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j$$

и поэтому $\mu_i = \lambda_i$. Системы векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$, $\boldsymbol{\varphi}^j$ определены с точностью до нормировки. Можно считать, что $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^i = 1$. Далее,

$$0 = T\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j - \boldsymbol{\varphi}_i \cdot T^*\boldsymbol{\varphi}^j = (\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j.$$

Следовательно, действительно $\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}^j = \delta_i^j$. Матрицы тензора T в базисе $(T^{i\cdot}_{\cdot j})$ и в кобазисе $(T^{\cdot j}_{i\cdot})$ являются диагональными: $(T^{i\cdot}_{\cdot j}) = \Lambda = (T^{\cdot j}_{i\cdot})$, а для диадного представления тензора T будем иметь

$$T = \lambda_i(\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \boldsymbol{\varphi}^i) = \lambda_i(\boldsymbol{\varphi}^i \otimes \boldsymbol{\varphi}_i). \tag{3.52}$$

В случае кратных собственных значений приведем здесь только диадные представления симметричного тензора T. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, то

$$T = \lambda_1(\boldsymbol{\varphi}_1 \otimes \boldsymbol{\varphi}_1) + \lambda_2[(\boldsymbol{\varphi}_2 \otimes \boldsymbol{\varphi}_2) + (\boldsymbol{\varphi}_3 \otimes \boldsymbol{\varphi}_3)], \quad \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij}. \tag{3.53}$$

Если, наконец, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то

$$T = \lambda_1(\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \boldsymbol{\varphi}_i), \tag{3.54}$$

Но тогда для произвольного $\mathbf{u} \in V$ $T\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$, т. е. $\mathbf{u}$ является собственным вектором тензора T. В этом случае симметричный тензор называют *шаровым.* Для такого тензора справедливо представление $T = \lambda G$, где λ – скаляр, G – метрический тензор.

§ 4. Ковариантное дифференцирование. Тензорный анализ

Пусть задана криволинейная система координат y_1, y_2, y_3 с естественным базисом $\mathbf{e}_i$ и кобазисом $\mathbf{e}^i$. Если $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i$, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}(u^i \cdot \mathbf{e}_i) = \frac{\partial u^m}{\partial y_j}\mathbf{e}_m + u^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}(u_i \cdot \mathbf{e}^i) = \frac{\partial u_m}{\partial y_j}\mathbf{e}^m + u_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} \tag{4.2}$$

Символы Кристоффеля (второго рода) определим следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} = \Gamma^m_{ij}\mathbf{e}_m, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^m = \Gamma^m_{ij}. \tag{4.3}$$

Так как

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_j}(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta) = \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^\beta + \frac{\partial \mathbf{e}^\beta}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{\beta j},$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} = -\Gamma^i_{mj}\mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}_m = -\Gamma^i_{mj}. \tag{4.4}$$

Итак, по определению, символы Кристоффеля второго рода задают коэффициенты разложения производной векторов базиса (кобазиса) по векторам базиса (кобазиса). Теперь из (4.1)–(4.4) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial u^m}{\partial y_j}\mathbf{e}_m + u^i \Gamma^m_{ij}\mathbf{e}_m = \underline{\left(\frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma^m_{ij}\right)}\mathbf{e}_m \equiv \nabla_j u^m \mathbf{e}_m \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial u_m}{\partial y_j}\mathbf{e}^m - u_i \Gamma^i_{mj}\mathbf{e}^m = \underline{\left(\frac{\partial u_m}{\partial y_j} - u_i \Gamma^i_{mj}\right)}\mathbf{e}^m \equiv \nabla_j u_m \mathbf{e}^m. \tag{4.6}$$

Подчеркнутые в (4.5), (4.6) выражения определяют ковариантные производные по y_i контравариантных $\nabla_j u^m$ или ковариантных $\nabla_j u_m$ компонент вектора $\mathbf{u}$. Итак

— компоненты производной вектора $\mathbf{u}$ по y_j в базисе $\mathbf{e}_m$ равны ковариантным производным по y_j контравариантных компонент вектора $\mathbf{u}$,

— компоненты производной вектора $\mathbf{u}$ по y_j в кобазисе $\mathbf{e}^m$ равны ковариантным производным по y_j ковариантных компонент вектора $\mathbf{u}$.

По определению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}^m \leftrightarrow \nabla_j u^m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m \leftrightarrow \nabla_j u_m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}_m \tag{4.7}$$

Именно введение ковариантного дифференцирования позволяет сохранить неизменным правило дифференцирования вектора. В криволинейной системе координат y_1, y_2, y_3 это правило (4.7) такое же, как и в прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Действительно, хотя в системе x_1, x_2, x_3 $u^m = u_m$, а базисные орты $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}^m$ постоянны, тем не менее

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u^m}{\partial x_j}\mathbf{q}_m \leftrightarrow \frac{\partial u^m}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \cdot \mathbf{q}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\mathbf{q}^m \leftrightarrow \frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \cdot \mathbf{q}_m. \tag{4.8}$$

Теперь остается сравнить (4.7) и (4.8).

Способ фактического вычисления ковариантной производной ∇_j компонент вектора $\mathbf{u}$ дают формулы

$$\nabla_j u^m = \frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma_{ij}^m, \quad \nabla_j u_m = \frac{\partial u_m}{\partial y_j} - u_i \Gamma_{mj}^i. \tag{4.9}$$

Ковариантную производную ∇_j векторов $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}^\beta$ можно определить из (4.9), подставив вместо ковариантной u_α (контравариантной u^β) компоненты $\mathbf{u}$ вектор базиса $\mathbf{e}_\alpha$ (кобазиса $\mathbf{e}^\beta$). Тогда в силу определения символов Кристоффеля (первая группа формул (4.3), (4.4)) получим

$$\nabla_j \mathbf{e}^m = \frac{\partial \mathbf{e}^m}{\partial y_j} + \mathbf{e}^i \Gamma_{ij}^m = 0, \quad \nabla_j \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial y_j} - \mathbf{e}_i \Gamma_{mj}^i = 0, \tag{4.10}$$

т. е. *ковариантные производные векторов базиса и кобазиса равны нулю*

$$\nabla_j \mathbf{e}^m = 0, \quad \nabla_j \mathbf{e}_m = 0. \tag{4.11}$$

Для произвольного $\mathbf{u} \in V$ это дает

$$\nabla_j \mathbf{u} = \nabla_j (u^m \mathbf{e}_m) = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m + u^m (\nabla_j \mathbf{e}_m) = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}$$

$$\nabla_j \mathbf{u} = \nabla_j (u_m \mathbf{e}^m) = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m + u_m (\nabla_j \mathbf{e}^m) = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}$$

Поэтому при дифференцировании вектора $\mathbf{u} \in V$ символы ∇_j, $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ можно не различать.

Точно также не различаются эти символы и при дифференцировании скалярной функции $\varphi(M) = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$, ибо по определению

$$\nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \tag{4.12}$$

В (4.12) мы имеем дело с индексными объектами. Какова их природа? Поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \longleftrightarrow \nabla_j \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \nabla_i \varphi(\mathbf{x}),$$

то в соответствии с аналитическим определением вектора индексные величины (4.12) являются ковариантными компонентами некоторого вектора. Этот вектор называют *градиентом* $\varphi(M)$ (градиентом скалярного поля $\varphi(M)$) и используют обозначения $\nabla\varphi$ или grad φ:

$$\nabla \varphi \equiv \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \mathbf{e}^i = \nabla_i \varphi \mathbf{e}^i. \tag{4.13}$$

Особо отметим, что если $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$, то отображение $\operatorname{grad} : R^3 \longrightarrow V$ повышает ранг тензорного поля.

Обратимся снова к (4.5), (4.6)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_m \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m. \tag{4.14}$$

В (4.14) один и тот же вектор $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j}$ можно рассматривать:

— либо как результат свертки индексной величины $\nabla_j u_\alpha$ с вектором $\mathbf{e}^m$ $(m = \alpha)$,

— либо как результат свертки индексной величины $\nabla_j u^\alpha$ с вектором $\mathbf{e}_m$ $(m = \alpha)$.

Поэтому в соответствии с тензорным критерием величины $\nabla_j u_m$ и $\nabla_j u^m$ задают ковариантные и смешанные компоненты одного и того же тензора ранга два

$$T = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \otimes \mathbf{e}^j = \nabla_j u_m (\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^j) = \nabla_j u^m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^j). \tag{4.15}$$

Итак, в (4.15) $T_{mj} = \nabla_j u_m$, $T^{m\cdot}_{\cdot j} = \nabla_j u^m$. В силу (2.18) (правило жонглирования индексами) имеем

$$T^{m\cdot}_{\cdot j} = \nabla_j u^m = g^{m\alpha} T_{\alpha j} = g^{m\alpha} \nabla_j u_\alpha.$$

С другой стороны, в силу (2.17) (опять то же правило жонглирования)

$$u^m = g^{m\alpha} u_\alpha.$$

Следовательно,

$$\nabla_j (g^{m\alpha} u_\alpha) = g^{m\alpha} \nabla_j u_\alpha.$$

Это означает, что

$$\nabla_j g^{m\alpha} = 0. \tag{4.16}$$

Аналогичные рассуждения приводят к

$$\nabla_j g_{m\alpha} = 0, \quad \nabla_j g^m_\alpha = 0. \tag{4.17}$$

Соотношения (4.16), (4.17) означают, что *ковариантная производная метрического тензора равна нулю.* Итак, (4.11), (4.16), (4.17) позволяют сделать вывод, что *при ковариантном дифференцировании* $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}^\alpha$, $g_{m\alpha}$, g^m_α, $g^{m\alpha}$ *следует рассматривать как постоянные.*

Что касается (4.15), то тензор T ранга два с компонентами $T_{mj} = \nabla_j u_m$ или $T^{m\cdot}_{\cdot j} = \nabla_j u^m$ называют *градиентом вектора* $\mathbf{u}$ (градиентом векторного поля $\mathbf{u}$) и используют обозначения $\operatorname{grad} \mathbf{u}$ или $\nabla \mathbf{u}$:

$$T = \operatorname{grad} \mathbf{u} \equiv \nabla \mathbf{u} = \nabla_j u_m (\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^j) = \nabla_j u^m (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^j) \tag{4.18}$$

Матрица $(\nabla_j u^m)$ задает матрицу тензора T в базисе $\mathbf{e}_m$ при отображении $T : V \longrightarrow V$. Как и в (4.13) отображение $\operatorname{grad} : \mathbf{u} \longrightarrow T$ повышает на единицу ранг тензорного поля.

Сказанного о ковариантном дифференцировании уже достаточно для того, чтобы формализовать нужное для наших целей понятие "дифференцирование". Пусть φ – некоторая функция с аргументом $u \in R^n$ (n-мерное евклидово пространство) и значениями $\varphi \in R^m$ (m-мерное евклидово пространство). В этом случае принято говорить о *векторном поле* φ, заданном на R^n и использовать обозначение $\varphi : R^n \longrightarrow R^m$.

Говорят, что векторное поле $\varphi(u)$ дифференцируемо в точке $u \in R^n$, если существует линейный оператор L, отображающий R^n в R^m и такой, что для любого $v \in R^n$

$$\varphi(u + v) - \varphi(u) = Lv + o(v), \tag{4.19}$$

где $|o(v)|$ величина более высокого порядка малости, чем $|v|$, т.е.

$$\frac{|o(v)|}{|v|} \longrightarrow 0, \quad \text{при } \ v \longrightarrow 0. \tag{4.20}$$

Отображение (линейный оператор) $L : R^n \longrightarrow R^m$ называют *градиентом векторного поля* $\varphi(u)$ и используют обозначения $\operatorname{grad}\varphi(u)$, $\nabla\varphi(u)$, $\varphi'(u)$. Отметим, что термин *отображение* полностью соответствует существу дела. Левая часть в (4.19) является элементом из R^m, а в правой части (4.19) $u \in R^n$. Поэтому с точностью до бесконечно малых элементов $o(v)$ $L : R^n \longrightarrow R^m$. Из (4.20) также вытекает, что само определение L связано с метрикой в R^n. Для $R^n = V$ метрика задается посредством (2.22), (2.24).

Если оператор L из (4.19), (4.20) существует, то с точки зрения его непосредственного вычисления более приемлемым является определение L посредством равенства

$$Lv = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(u+tv)|_{t\,=\,0}. \tag{4.21}$$

Как уже говорилось, введение системы координат в R^n позволяет отождествить точечное пространство $M(y_1,\dots,y_n) \in R^n$ (точнее, его часть) с n-мерным векторным евклидовым пространством $\mathbf{u} \in V$. Поэтому, определяя функцию φ на V можно считать ее функцией координат вектора. Для упрощения записи можно также считать, что декартовы координаты точки M в базисе $\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_m$ определяют контравариантные компоненты вектора $\mathbf{x} : \varphi(M) = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^1,...,x^n)$.

Пусть теперь в (4.19)–(4.21) $n > m = 1$. В этом случае φ – скалярная функция векторного аргумента $\mathbf{x}$, а $L\mathbf{v}$ – линейная вещественная функция (линейный функционал) аргумента $\mathbf{v}$. По теореме Рисса существует единственный вектор $\mathbf{w} \in V$ такой, что

$$L\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}. \tag{4.22}$$

Именно этот вектор называют градиентом функции φ в точке $\mathbf{x} \in V$ $(M \in R^n)$ и обозначают как $\mathbf{w} = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Формула (4.21) дает

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{v} &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\mathbf{x}+t\mathbf{v})-\varphi(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x}+t\mathbf{v})|_{t\,=\,0} =\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x^1+tv^1,\dots,x^n+tv^n)|_{t\,=\,0} = \sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}v^i.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Итак, если $n > m = 1$, то в декартовом базисе $\nabla\varphi(\mathbf{x})$ есть вектор с компонентами $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, т. е. $\nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}\mathbf{q}_i$. Второй член в (4.23) можно интерпретировать как производную $\varphi'(\mathbf{x})$ в направлении вектора $\mathbf{v}$. Последний всегда можно считать единичным. Но тогда в силу (2.23)

$$\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\cos(\widehat{\mathbf{w},\mathbf{v}}).$$

Поэтому максимум производной $\varphi'(\mathbf{x})$ достигается при $\cos(\widehat{\mathbf{w},\mathbf{v}}) = 0$, т. е. в направлении $\operatorname{grad}\varphi$. Это направление соответствует направлению наибольшего роста функции $\varphi(M) = \varphi(x^1,\dots,x^n)$, противоположное – направлению наибольшего убывания.

Другой важный в приложениях случай – это $n = m$. Тогда мы имеем дело с векторной функцией векторного аргумента и в декартовом базисе

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi^i(\mathbf{x})\mathbf{q}_i.$$

Как нетрудно понять, теперь L – тензор ранга два и в соответствии с (4.21)

$$(L\mathbf{v})^i = \frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(x^1+tv^1,\dots,x^n+tv^n)|_{t\,=\,0} = \sum_j\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}v^j.$$

Поэтому тензору $L = \nabla\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\mathbf{q}_m$ соответствует матрица смешанных компонент

$$(L) = (L^{i\cdot}_{\cdot j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Эту матрицу часто называют матрицей Якоби системы функций $\varphi^i(\mathbf{x})$.

Еще раз отметим, что в обоих случаях: $n > m = 1$ и $n = m$ декартово описание применяется лишь для максимального упрощения записи в (4.21). Если при описании отображения $L : R^n \longrightarrow R^m$ использовать естественный базис $\mathbf{e}_m$ и кобазис $\mathbf{e}^m$, связанные с криволинейной системой координат $y_1, \dots, y_n$, то (4.21) дает

$$n > m = 1 : L = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\mathbf{e}^i, \quad \text{формула (4.13)},$$

$$n = m : L = \operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi} = \nabla_j\varphi^i(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j), \quad \text{формула (4.18)},$$

где ∇_j – символ ковариантного дифференцирования (см. (4.5), (4.6), (4.14)). И, наконец, вместо (4.24) будем иметь

$$(L) = (L^{i\cdot}_{\cdot j}) = \begin{pmatrix} \nabla_1\varphi^1 & \dots & \nabla_n\varphi^1 \\ \dots & & \\ \nabla_1\varphi^n & \dots & \nabla_n\varphi^n \end{pmatrix}$$

Как это следует из (4.9), ковариантное дифференцирование компонент вектора $\mathbf{u}$ связано с нахождением символов Кристоффеля второго рода. Формально эти символы заданы соотношениями (4.3), которые можно положить в основу при их вычислении. Однако существует более простой способ определения Γ^m_{ij}, непосредственно через компоненты метрического тензора G.

Прежде всего отметим, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам. Действительно,

$$\Gamma^m_{ij} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial y_j} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y_i}\Big) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y_j}\Big) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial y_i} = \Gamma^m_{ji}. \tag{4.25}$$

По определению $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ и поэтому

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_i.$$

В силу (4.3)

$$\frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma^m_{i\alpha}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma^m_{i\alpha}g_{mj}$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_i = \Gamma^m_{j\alpha}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i = \Gamma^m_{j\alpha}g_{mi}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{i\alpha}g_{mj} + \Gamma^m_{j\alpha}g_{mi}. \tag{4.26}$$

Совершенно аналогично

$$\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{\alpha i}g_{jm} + \Gamma^m_{ji}g_{m\alpha}, \quad \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_\alpha} = \Gamma^m_{\alpha j}g_{im} + \Gamma^m_{ij}g_{\alpha m}. \tag{4.27}$$

Поскольку $g_{m\alpha} = g_{\alpha m}$, то (4.25)–(4.27) дают

$$2\Gamma^m_{ij} g_{m\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha}. \tag{4.28}$$

Следует теперь свернуть (4.28) с $\dfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}$ и учесть (2.19): $g_{\alpha m} g^{\alpha\beta} = \delta^\beta_m$, чтобы получить нужный результат

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha m}\Big(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial y_i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial y_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_\alpha}\Big). \tag{4.29}$$

Для ортогональной криволинейной системы координат $y_1, \ldots, y_n$ существенно упрощаются преобразования, приводящие к (4.29), так что в этом случае будем иметь (по i, j не суммировать)

$$\Gamma^j_{jj} = \frac{1}{2} g^{jj}\frac{\partial g_{jj}}{\partial y_j}, \quad \Gamma^j_{ji} = \frac{1}{2} g^{jj}\frac{\partial g_{jj}}{\partial y_i}, \quad \Gamma^j_{ii} = -\frac{1}{2} g^{jj}\frac{\partial g_{ii}}{\partial y_j}. \tag{4.30}$$

В заключение отметим, что индексные величины Γ^m_{ij} (символы Кристоффеля) не являются тензорными компонентами. Действительно, в цилиндрической системе координат (ортогональная система):

$$\begin{gathered} x_1 = y_1 \cos y_2, \quad x_2 = y_1 \sin y_2, \quad x_3 = y_3, \\ g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{y_1^2}, \quad g^{33} = 1, \quad g^{im} = 0, \quad i \neq m, \\ g_{11} = 1, \quad g_{22} = y_1^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{im} = 0, \quad i \neq m \end{gathered} \tag{4.31}$$

существуют отличные от нуля символы Кристоффеля. Их легко вычислить с помощью (4.30) – это $\Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{y_1}$, $\Gamma^1_{22} = -\dfrac{1}{y_1}$. С другой стороны, в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 все символы Кристоффеля равны нулю. Согласно определению (2.1) тензорные компоненты подобным свойством обладать не могут.

Итак, задание метрического тензора G полностью определяет $\nabla_j u^m$, $\nabla_j u_m$. Очевидно, что

$$\nabla_j(\alpha u^m + \beta v^m) = \alpha\nabla_j u^m + \beta\nabla_j v^m, \quad \alpha = \text{const}., \quad \beta = \text{const}.$$

Отметим также, что правило ковариантного дифференцирования произведения $\nabla_j(v^i u^m)$ такое же, как и при обычном дифференцировании $\dfrac{\partial}{\partial y_j}(v^i u^m)$. Действительно, индексные величины $v^i u^m$ можно рассматривать (см. (2.4)) в качестве контравариантных компонент некоторого тензора ранга два: $T = T^{im}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m)$. Тогда (сравни с (4.1), (4.2))

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y_j} &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im}\Big(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \otimes \mathbf{e}_m\Big) + T^{im}\Big(\mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial y_j}\Big) = \\ &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im}\Gamma^\beta_{ij}(\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_m) + T^{im}\Gamma^\beta_{mj}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_\beta) = \\ &= \frac{\partial T^{im}}{\partial y_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{\beta m}\Gamma^i_{\beta j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) + T^{i\beta}\Gamma^m_{\beta j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = \\ &= \Big(\frac{\partial T^{im}}{\partial y_j} + T^{\beta m}\Gamma^i_{\beta j} + T^{i\beta}\Gamma^m_{\beta j}\Big)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m). \end{aligned} \tag{4.32}$$

С одной стороны, (4.32) приводит к определению ковариантной производной контравариантных компонент тензора ранга два

$$\frac{\partial T}{\partial y_j} = \Big(\frac{\partial T^{im}}{\partial y_j} + T^{\beta m}\Gamma^i_{\beta j} + T^{i\beta}\Gamma^m_{\beta j}\Big)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = \nabla_j T^{im}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m), \tag{4.33}$$

а с другой стороны, задает правило ковариантного дифференцирования, произведения, ибо в силу $T^{im} = v^i u^m$

$$\begin{gathered}\nabla_j(v^i u^m) = \frac{\partial}{\partial y_j}(v^i u^m) + v^\beta u^m \Gamma^i_{\beta j} + v^i u^\beta \Gamma^m_{\beta j} = \\ = \Big(\frac{\partial v^i}{\partial y_j} + v^\beta \Gamma^i_{\beta j}\Big)u^m + \Big(\frac{\partial v^m}{\partial y_j} + u^\beta \Gamma^m_{\beta j}\Big)v^i = u^m \nabla_j v^i + v^i \nabla_j u^m\end{gathered} \tag{4.34}$$

Свойство симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам (4.25) предполагает, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_j \partial y_i}. \tag{4.35}$$

Как известно из анализа, законность изменения порядка дифференцирования в (4.35) обеспечивается непрерывностью смешанных производных. Как обстоит дело при ковариантном дифференцировании? Если воспользоваться (4.9), то можно получить

$$\nabla_j \nabla_i u^m - \nabla_i \nabla_j u^m = \Big(\frac{\partial \Gamma^m_{\alpha i}}{\partial y_j} - \frac{\partial \Gamma^m_{\alpha j}}{\partial y_i} + \Gamma^m_{\beta j}\Gamma^\beta_{\alpha i} - \Gamma^m_{\beta i}\Gamma^\beta_{\alpha j}\Big)u^\alpha. \tag{4.36}$$

Из аналитического определения тензора (2.1) вытекает, что левая часть в (4.36) задает компоненты тензора ранга три: $T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot m} = (\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j)u^m$. Эти тензорные компоненты получены в результате свертывания ($\alpha = \gamma$) индексных величин

$$R_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m} = \frac{\partial \Gamma^m_{\gamma i}}{\partial y_j} - \frac{\partial \Gamma^m_{\gamma j}}{\partial y_i} + \Gamma^m_{\beta j}\Gamma^\beta_{\gamma i} - \Gamma^m_{\beta i}\Gamma^\beta_{\gamma j} \tag{4.37}$$

с компонентами вектора u^α. На основании тензорного критерия заключаем, что величины $R_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m}$ являются компонентами тензора четвертого ранга. Его называют *тензором Римана-Кристоффеля*. Таким образом вопрос о законности изменения порядка ковариантного дифференцирования связан с вопросом об условиях обращения в нуль тензора Римана-Кристоффеля.

Термин ”евклидово пространство” употреблялся уже не один раз. Первоначально речь шла об арифметизации точечного пространства посредством введения координат и отождествлении его с векторным пространством $V(\mathbf{u})$:

$$R^n(M) \longleftrightarrow R^n(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow R^n(y_1, \ldots, y_n) \longleftrightarrow V(\mathbf{u}).$$

Затем речь шла о метрике пространства $V(\mathbf{u})$. Введенная с помощью фундаментального тензора G метрика (2.24) зависит от точки M, ибо $G = G(M)$. Однако определение естественного базиса (кобазиса) основано на предположении о существовании системы координат, в которой G не зависит от M. Таковой для нас являлась декартова прямоугольная система координат $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому, говоря об евклидовом пространстве, мы постулируем существование в этом пространстве метрического тензора G, для которого $g_{im} = \delta_{im}$. Для такого пространства в силу (4.29), (4.37) тензор Римана-Кристоффеля равен нулю.

Завершая рассмотрение свойств ковариантного дифференцирования, приведем правила вычисления градиента от произведения функций векторного аргумента со значениями различных типов: φf, $\varphi\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{f}$. Итак,

$$\begin{gathered}\nabla(\varphi f) = f\nabla\varphi + \varphi\nabla f, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{y}), \quad f = f(\mathbf{y}),\\ \nabla(\varphi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\otimes\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{f}, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{f} = f(\mathbf{y}),\\ \nabla(\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{f}) = [\nabla\boldsymbol{\varphi}]^*\mathbf{f} + [\nabla\mathbf{f}]^*\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{f} = f(\mathbf{y}).\end{gathered} \tag{4.38}$$

Наряду с операцией градиент: $\operatorname{grad}(\cdot) \equiv \nabla(\cdot)$ введем в рассмотрение операцию *дивергенция*: $\operatorname{div}(\cdot)$, которая также связана с ковариантным дифференцированием. Если $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$– векторная функция векторного аргумента, то по определению

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{tr}(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = \nabla_m\varphi^m. \tag{4.39}$$

В (4.39) $\nabla_m\varphi^m$ – скаляр, так что операция div понижает ранг векторного поля. Дивергенция тензорного поля T ранга два определяется следующим образом:

$$(\operatorname{div}T)\cdot\mathbf{a} = \operatorname{div}(T^*\mathbf{a}), \quad \forall\mathbf{a}\in V, \tag{4.40}$$

где $\mathbf{a}$ – произвольный, но постоянный вектор. В правой части (4.40) $T^*\mathbf{a}$ – вектор, операция div от которого определена в (4.39). Зададим тензор T контравариантными компонентами T^{im}. Тогда

$$(T^*\mathbf{a})^i = \sum_{m=1}^n T^{mi}a_m.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}(T^*\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \nabla_i \sum_{m=1}^n T^{mi}a_m = \sum_{m=1}^n\sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi}a_m.$$

Учитывая теперь определение (4.40) и произвольность вектора $\mathbf{a}$ в этом определении, получаем

$$(\operatorname{div}T)^m = \sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi}, \quad \operatorname{div}T = \Big(\sum_{i=1}^n \nabla_i T^{mi}\Big)\mathbf{e}_m. \tag{4.41}$$

Итак, $\operatorname{div}T$ – вектор, контравариантные компоненты которого заданы в (4.41). Для вычисления $\nabla_i T^{mi}$ следует использовать формулу (4.32), так что

$$\nabla_i T^{mi} = \frac{\partial T^{mi}}{\partial y_i} + T^{\beta i}\Gamma^m_{\beta i} + T^{m\beta}\Gamma^i_{\beta i}. \tag{4.42}$$

Отметим, что как и в случае (4.39), операция $\operatorname{div}T$ понижает ранг тензорного поля. Отметим также, что если тензор T в (4.40) задать ковариантными компонентами T_{ij}, то вместо (4.41) будем иметь

$$(\operatorname{div}T)_j = \sum_{i=1}^n \nabla_i T_{ji}, \quad \operatorname{div}T = \Big(\sum_{i=1}^n \nabla_i T_{ji}\Big)\mathbf{e}^j. \tag{4.43}$$

Что же касается фактического вычисления $\nabla_i T_{ji}$, то все сведется к (4.42), ибо в соответствии с (2.18) и (4.17)

$$T_{ji} = g_{\alpha j}g_{\beta i}T^{\alpha\beta}, \quad \nabla_i T_{ji} = g_{\alpha j}g_{\beta i}\nabla_i T^{\alpha\beta}.$$

Приведем далее правила вычисления дивергенции от произведения функций векторного аргумента со значениями различных типов. Если $\varphi = \varphi(\mathbf{y})$, а $\mathbf{f} = f(\mathbf{y})$, то

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{f}. \tag{4.44}$$

Если же $T = \varphi(\mathbf{y})$, а $\mathbf{f} = f(\mathbf{y})$, то

$$\operatorname{div}(T\mathbf{f}) = (\operatorname{div}T^*)\cdot\mathbf{f} + \operatorname{tr}(T\operatorname{grad}\mathbf{f}). \tag{4.45}$$

Для симметричного тензора $T = T^*$ обычно используется иная форма записи (4.45). По определению, $\operatorname{grad}\mathbf{f}$ является тензором с компонентами $\nabla_j f^i$. Но

$$\nabla_j f^i = \frac{1}{2}(\nabla_j f^i + \nabla_i f^j) + \frac{1}{2}(\nabla_j f^i - \nabla_i f^j) = L^i_j + M^j_i, \tag{4.46}$$

что соответствует стандартному представлению (3.27) произвольного тензора в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров

$$\operatorname{grad}\mathbf{f} = L + M, \quad L = L^*, \quad M = -M^*.$$

Тогда в силу (3.33), (3.34)

$$\operatorname{tr}(T\operatorname{grad}\mathbf{f}) = \operatorname{tr}(TL) = T\cdot L.$$

Поэтому для $T = T^*$ правая часть (4.45) записывается в виде суммы двух скалярных произведений и

$$\operatorname{div}(T\mathbf{f}) = \operatorname{div}T\cdot\mathbf{f} + T\cdot L, \tag{4.47}$$

где L – симметричная часть тензора $\operatorname{grad}\mathbf{f}$. В случае прямоугольной декартовой системы координат (4.44) и (4.47) сводятся к хорошо известным из анализа формулам дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi f^j) = f^j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \varphi\frac{\partial f^j}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ji}f^i) = f^i\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + T_{ji}\frac{\partial f^i}{\partial x_j}.$$

В случае $n = 3$ кососимметричный тензор $T = -T^*$, где $T = 2M$, а M определен в (4.46) порождает новый векторный объект: $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, для которого принята следующая символическая форма записи

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{f} = \nabla\times\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ f^1 & f^2 & f^3 \end{vmatrix} \tag{4.48}$$

Раскрывая определитель в (4.48), получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = (\nabla_2 f^3 - \nabla_3 f^2)\mathbf{e}_1 + (\nabla_3 f^1 - \nabla_1 f^3)\mathbf{e}_2 + (\nabla_1 f^2 - \nabla_2 f^1)\mathbf{e}_3 = v^i\mathbf{e}_i. \tag{4.49}$$

Сразу же отметим, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{f} = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{4.50}$$

Действительно, поскольку пространство R^3 является евклидовым, то в силу (4.49)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla_i v^i = \nabla_1(\nabla_2 f^3 - \nabla_3 f^2) + \nabla_2(\nabla_3 f^1 - \nabla_1 f^3) + \nabla_3(\nabla_1 f^2 - \nabla_2 f^1) =$$

$$= (\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)f^3 + (\nabla_3\nabla_1 - \nabla_1\nabla_3)f^2 + (\nabla_2\nabla_3 - \nabla_3\nabla_2)f^1 = 0.$$

Далее, градиент скалярного поля $\varphi(\mathbf{y})$ задается ковариантными компонентами $\nabla_j = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_j}$ (см. (4.12)). Поэтому при определении векторного объекта $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ следует в (4.48) строку из векторов базиса $\mathbf{e}_i$ заменить на строку из векторов кобазиса $\mathbf{e}^i$, а строку f^1, f^2, f^3 следует заменить на строку $\nabla_1\varphi$, $\nabla_2\varphi$, $\nabla_3\varphi$. Теперь, чтобы убедиться в справедливости второго из соотношений (4.50), остается раскрыть преобразованный указанным образом определитель (4.48). Тогда

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = (\nabla_2\nabla_3 - \nabla_2\nabla_3)\varphi\mathbf{e}^1 + (\nabla_1\nabla_3 - \nabla_1\nabla_3)\varphi\mathbf{e}^2 + (\nabla_1\nabla_2 - \nabla_1\nabla_2)\varphi\mathbf{e}^3 = 0.$$

С помощью дифференциальных операций первого порядка: $\mathrm{grad}\,(\cdot)$, $\mathrm{div}\,(\cdot)$, $\mathrm{rot}\,(\cdot)$ можно определить дифференциальные операции более высокого порядка. Например, если $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ – скалярная функция векторного аргумента, то в декартовой системе координат

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi \equiv -\Delta\varphi. \tag{4.51}$$

Оператор $-\mathrm{div}\,\mathrm{grad} : R^1 \longrightarrow R^1$ в (4.51) называют *оператором Лапласа*. В декартовой прямоугольной системе координат этот оператор является простейшим примером дифференциального *эллиптического оператора второго порядка*:

$$\Delta \equiv -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\; = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Рассмотрим далее более общий случай. Пусть K – симметричный $K = K^*$, положительно определенный $K\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0$ тензор ранга два, заданный в декартовом базисе матрицей $(K) = (k_{ij})$. По определению, $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$ – вектор с ковариантными компонентами $u_j = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. Если $\mathbf{w} = K\mathbf{u}$, то $w_i = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}u_j$. Поэтому

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w} = \mathrm{div}\,K\mathbf{u} = \mathrm{div}\,K\mathrm{grad}\,\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big) \equiv -A\varphi. \tag{4.52}$$

Условия $K = K^* > 0$ позволяют говорить о том, что в (4.51), как и в (4.52) определен дифференциальный *эллиптический оператор второго порядка*:

$$A = -\mathrm{div}\,K\mathrm{grad}\; = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big).$$

В только что рассмотренных простейших примерах операторы Δ, A заданы на элементах $\varphi(M) \in H$. Под H можно понимать линейное пространство скалярных функций векторного аргумента $\varphi(M) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, определенных в ограниченной области D, $M \in D$ евклидова пространства R^n с границей S. Поскольку $\Delta : H \longrightarrow H$, $A : H \longrightarrow H$, то формально могут быть поставлены задачи о нахождении решений операторных уравнений

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = f \in H, \quad \mathrm{div}\,K\mathrm{grad}\,\varphi = g \in H, \quad M \in D. \tag{4.53}$$

Бескоординатная форма записи операторов Δ, A позволяет говорить о *факторизованной структуре* операторных уравнений (4.53).

И в заключение этого параграфа остановимся на некоторых интегральных операциях тензорного анализа. В их основе лежит хорошо известная формула Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_D \frac{\partial \varphi_j(M)}{\partial y_i} dV = \int\limits_S \varphi_j(M') \cos(\widehat{\mathbf{n}, y_i}) dS. \tag{4.54}$$

Здесь $D \subset R^n$ – некоторая область в R^n с достаточно гладкой границей S, $\mathbf{n}$ – орт внешней нормали к S, $\varphi_j(M)$ – непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторного аргумента. В качестве почти очевидных следствий из (4.54) имеем

$$\int\limits_D \operatorname{rot} \mathbf{v} dV = \int\limits_S (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) dS, \tag{4.55}$$

а также

$$\int\limits_D \operatorname{grad} \varphi dV = \int\limits_S \mathbf{n} \varphi dS, \tag{4.56}$$

$$\int\limits_D \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int\limits_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS. \tag{4.57}$$

В дальнейшем нам понадобится тензорный аналог интегрального соотношения (4.57). Пусть $\mathbf{a}$ – произвольный постоянный вектор и T – непрерывно дифференцируемая тензорная функция векторного аргумента. Из (4.57) и определения (4.40) получаем

$$\int\limits_D (\operatorname{div} T) \cdot \mathbf{a} dV = \int\limits_D \operatorname{div} (T^* \mathbf{a}) dV = \int\limits_S T^* \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int\limits_S \mathbf{a} \cdot T \mathbf{n} dS.$$

Поэтому в силу произвольности $\mathbf{a}$

$$\int\limits_D \operatorname{div} T dV = \int\limits_S T \mathbf{n} dV. \tag{4.58}$$

Другая группа следствий из (4.54) связана с возможностью такого определения дифференциальных операций первого порядка: $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{u}$, $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ и т.д., которое не зависит от конкретного выбора системы координат. Точке $M \in D$ поставим в соответствие некоторый "малый объем" $D(M) \subset D$, границей которого является замкнутая поверхность $S(M)$ и $M \in D(M)$. Применим теперь к (4.56) интегральную теорему о среднем

$$(\operatorname{grad} \varphi(M)) D(M) = \int\limits_{S(M)} \mathbf{n} \varphi dS + \varepsilon \cdot D(M).$$

Из $D(M) \longrightarrow 0$ следует $\varepsilon \longrightarrow 0$. Поэтому

$$\operatorname{grad} \varphi(M) = \lim_{D(M) \to 0} (D(M))^{-1} \int\limits_{S(M)} \mathbf{n} \varphi dS. \tag{4.59}$$

Совершенно аналогично

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(M) = \lim_{D(M) \to 0} (D(M))^{-1} \int\limits_{S(M)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS, \tag{4.60}$$

$$\operatorname{div} T(M) = \lim_{D(M)\to 0} (D(M))^{-1} \int\limits_{S(M)} T\mathbf{n} dS, \tag{4.61}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(M) = \lim_{D(M)\to 0} (D(M))^{-1} \int\limits_{S(M)} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) dS. \tag{4.62}$$

И, наконец, особо отметим интегральные следствия соотношений (4.44) и (4.47):

$$\int\limits_D \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dV + \int\limits_D (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi) dV = \int\limits_S \varphi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS, \tag{4.63}$$

$$\int\limits_D \operatorname{div} T \cdot \mathbf{u} dV + \int\limits_D T \cdot L dV = \int\limits_S \mathbf{n} \cdot T\mathbf{u} dS, \tag{4.64}$$

В (4.64) L – симметричная часть тензора $\operatorname{grad} \mathbf{u}$, т.е. $(L^i_j) = \dfrac{1}{2}(\nabla_j u^i + \nabla_i u^j)$.

§ 5. Сплошная среда. Закон сохранения массы.

Говоря о *сплошной* среде, мы интуитивно представляем, что речь идет о некоторой части *пространства*, в которую целиком, т.е. без пустот, помещено некоторое тело (твердое, жидкое, газообразное и т.д.). "Природа не терпит пустоты", поэтому "пустота" допускается лишь как существование другой сплошной среды, которая отлична от рассматриваемой. С другой стороны, признавая за объективную реальность атомы и молекулы, мы, тем самым, признаем и приближенность представления о сплошной среде.

Все дело в степени приближения. Пусть для некоторой среды (назовем ее первой) характерное расстояние между частицами среды (атомы, молекулы) есть l_1, а для второй среды – l_2. Пусть также характерный масштаб (размер) изучаемого явления для первой среды есть L_1, а для второй среды – L_2. Если $l_1/L_1 \simeq l_2/L_2$, то следует признать либо сплошность обеих сред, либо – нет.

Коль скоро сплошная среда помещена в некоторое пространство, то под последним можно понимать точечное эвклидово пространство R^3. Поскольку *движение* сплошной среды всегда определено лишь по отношению к некоторой системе отсчета, то в R^3 (или в некоторой интересующей нас части R^3) будем считать заданной криволинейную систему координат y_1, y_2, y_3. Будем также считать, что существует возможность измерять время t, т.е. определять продолжительность каждого события, связанного с изучаемой сплошной средой.

Отдельные части рассматриваемой среды могут под действием "внешних или внутренних сил" перемещаться друг относительно друга, так что сплошной среде изначально предписывается свойство *деформируемости*. Пусть некоторая материальная частица в начальный момент времени t_0 имеет координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3, а в текущий момент времени t – координаты y_1, y_2, y_3. По определению, переход $\xi \longrightarrow y$ приводит к деформации сплошной среды, каждая точка которой получает перемещение, определяемое вектором $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i$. Следовательно, в момент времени t

$$y_i = \xi_i + u_i(\boldsymbol{\xi}, t). \tag{5.1}$$

Обычно предполагается, что для любого $t > t_0$ компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат ξ_i.

В изучаемых процессах искомыми функциями будут являться некоторые параметры сплошной среды, такие, например, как скорость, температура и т.д. При *описании процесса по Лагранжу* мы интересуемся изменением параметров среды каждой индивидуальной материальной частицы: независимыми переменными являются t, ξ_1, ξ_2, ξ_3. При *описании Эйлера* мы интересуемся изменением параметров среды в фиксированной точке пространства: независимыми переменными являются t, y_1, y_2, y_3. Следует предположить, что соотношения (5.1) между y_i и ξ_i являются взаимнооднозначными, так что каждой материальной частице до деформации соответствует только одна материальная частица в деформированном состоянии. Это обеспечивает равноправность обоих подходов при изучении сплошной среды.

Движение j-ой материальной частицы сплошной среды считается заданным (относительно выбранной системы координат), если известны координаты этой частицы как функции времени t: $y_{1j}(t)$, $y_{2j}(t)$, $y_{3j}(t)$. Формально, движение сплошной среды можно описать следующим образом

$$m_j \frac{d^2\mathbf{y}_j}{dt^2} = \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{y}_j(t_0) = \boldsymbol{\xi}_j, \quad \frac{d\mathbf{y}_j}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_{j0}. \tag{5.2}$$

Здесь m_j – масса j-ой частицы, которая содержится в изучаемом объеме V, $\mathbf{f}_j$ – вектор заданных сил, а векторы $\boldsymbol{\xi}_j$, $\mathbf{v}_{j0}$ определяют положение и скорость j-ой частицы в начальный момент времени t_0. К сожалению, число "реальных" материальных частиц в сколько-нибудь реальном объеме V слишком велико. Сложности возникают и при задании $\mathbf{f}_j$, поскольку следует учитывать взаимодействие "соседних" частиц с рассматриваемой.

Обычно предполагается, что в каждой точке $M \in V_* \subseteq V$ параметры (макрохарактеристики) сплошной среды можно получить с помощью операции осреднения по объему V_*. Материальной j-ой частице из V_* изначально приписывается масса m_j, скорость $\mathbf{v}_j$ и внутренняя энергия U_j. С их помощью определяются величины

$$\tilde{m} = \sum_j m_j, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \sum_j \tilde{m}\mathbf{v}_j \text{ – импульс.}$$

Далее вычисляются *средняя плотность* $\rho_* : \rho_* V_* = \tilde{m}$, *средняя скорость* $\mathbf{v}_* : \mathbf{v}_*\tilde{m} = \tilde{\mathbf{k}}$, полная внутренняя энергия $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} = \sum_j \Big(\frac{1}{2} m_j |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_*|^2 + U_j\Big)$$

и *средняя внутренняя энергия* $U_* : U_* V_* = \tilde{U}$. Макрохарактеристики объема V: m – масса, $\mathbf{k}$ – импульс, E – полная энергия определяются через средние величины

$$m = V\rho_* \quad \mathbf{k} = V\rho_*\mathbf{v}_*, \quad E = V\Big(\frac{1}{2}\rho_*|\mathbf{v}|^2 + U_*\Big),$$

а предположение о существовании при $V \longrightarrow 0$ пределов

$$\rho = \lim \rho_*, \quad \mathbf{v} = \lim \mathbf{v}_*, \quad U = \lim U_* \tag{5.3}$$

позволяет приписать каждой точке $M \in V$ предельные средние в качестве параметров сплошной среды.

Математическую модель какого-либо физического явления будем связывать с описанием изменения параметров сплошной среды (5.3) в результате внешних и внутренних воздействий на рассматриваемый объем V. Для изучаемых физических явлений связь между параметрами сплошной среды задают *законы сохранения* (массы, импульса, момента импульса, полной энергии), определяющие соотношения и уравнения состояния. Если не оговорено противное, то в дальнейшем используется эйлерово описание изучаемых процессов и декартова прямоугольная система координат. Эйлерово (пространственное) описание процессов характерно для задач, в которых для всех $t > t_0$ *фиксирована* пространственная область изменения параметров в изучаемой задаче. Таким образом, при описании используются неизменные пространственные координаты, а параметры сплошной среды, как уже говорилось, рассматриваются как функции точки $M(x_1, x_2, x_3) \in V$ и времени t.

Пусть $D \subset V$ и S – "достаточно гладкая" граница области D. Изменение массы вещества в объеме D за время $\Delta t = t_2 - t_1$ есть

$$J_1 = \int\limits_D \rho(M, t_2) dV - \int\limits_D \rho(M, t_1) dV = \int\limits_D \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt.$$

С другой стороны, это изменение должно равняться количеству вещества, протекающему за то же время Δt через границу S внутрь (изнутри) области D, т.е.

$$J_2 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt.$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к S. Очевидно, что $J_1 = J_2$ и поэтому

$$\int\limits_D \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt = 0. \tag{5.4}$$

Второй член в (5.4) преобразуем с помощью формулы Гаусса-Остроградского (4.57). Тогда

$$\int\limits_D \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_D \mathrm{div} \rho \mathbf{v} dV dt = 0. \tag{5.5}$$

В особых комментариях дальнейшие преобразования по-видимому не нуждаются, ибо законность (обоснованность) этих и предыдущих преобразований очевидно предполагает соответствующую гладкость подинтегральных выражений в (5.4)–(5.5), а также и границы S. В силу произвольности D из (5.5) имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_D \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \mathbf{v} \Big) dV dt = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \mathbf{v} = 0. \tag{5.6}$$

Итак, нами записан *закон сохранения массы* в интегральной (5.4) и дифференциальной (5.6) формах.

Попытаемся сразу же применить этот закон для построения математической модели какой-нибудь конкретной задачи. Обратимся, например, к задаче *фильтрации*. Под фильтрацией понимают движение жидкости (газа) в пористой среде. Среда считается пористой, если она содержит значительное число пустот, размеры которых малы по сравнению с характерными размерами рассматриваемой среды. Количественной характеристикой пористости служит отношение объема пор к общему объему: $m = V_{\text{пор.}}/V_{\text{общ.}}$. Таким образом, пористость m – величина безразмерная.

Учет пористости очевидным образом приводит к тому, что *уравнение неразрывности* (5.6) для сплошного потока однородной жидкости (газа) примет вид

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0. \tag{5.7}$$

В одно уравнение (5.7) входят несколько подлежащих определению величин: ρ, $\mathbf{v}$, так что математическая модель (5.7) не является замкнутой. Обычный способ замыкания модели (5.7) является достаточно типичным, чтобы быть здесь упомянутым. Предполагается, что для однородной фильтрующейся фазы справедлив *экспериментально установленный* закон Дарси:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p. \tag{5.8}$$

Здесь p – давление, μ –динамическая вязкость, k – проницаемость, т.е. проводимость пористой среды по отношению к данной фильтрующейся фазе. Проницаемость k обратно пропорциональна сопротивлению, которое испытывает данная жидкость (газ) при течении сквозь данную пористую среду.

Скалярный закон сохранения массы (5.7) и векторное определяющее соотношение (5.8) связывают пять неизвестных параметров: ρ, p и три компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$. Число уравнений меньше числа определяемых параметров: математическая модель (5.7), (5.8) опять не является замкнутой. Если считать, что рассматриваемый процесс не зависит от температуры (изотермическая фильтрация), то система уравнений (5.7), (5.8) замыкается *уравнением состояния*

$$p = p(\rho). \tag{5.9}$$

Характерным для рассмотренной замкнутой математической модели (5.7)–(5.9) является следующее. Наряду с "точным" законом сохранения массы (5.7) эта модель содержит и приближенные, экспериментально установленные соотношения (5.8), (5.9). Но тем самым устанавливается и область применимости модели. Она связана с областью изменения параметров ρ, p, $\mathbf{v}$, для которой с той или иной точностью справедлив как закон Дарси (5.8), так и уравнение состояния (5.9).

Только что изложенная схема замыкания модели (5.7) может считаться удовлетворительной лишь в первом приближении. Дело в том, что закон Дарси (5.8) является, вообще говоря, следствием *закона сохранения импульса* (о нем речь впереди). Кроме того, не может быть произвольным уравнение состояния (5.9), поскольку должны выполняться некоторые дополнительные (*термодинамические*) условия на функцию $p(\rho)$. Последнее особенно важно, поскольку из натурных экспериментов эта функция известна лишь для дискретного набора значений ρ_i.

Существенное упрощение замкнутой модели (5.7)–(5.9) может быть получено в предположении о *несжимаемости* фильтрующейся фазы. В этом случае рассматриваемый процесс следует считать *стационарным* и вместо (5.7)–(5.9) будем иметь

$$\mathrm{div}\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p. \tag{5.10}$$

Как уже отмечалось, при эйлеровом описании фиксирована пространственная область изменения искомых параметров изучаемой сплошной среды. В данном случае в конкретной пространственной области D с границей S давление $p(M)$, $M \in D$ определяется как решение первого уравнения (5.10), затем $\mathbf{v}(M)$ находится из второго уравнения (5.10). Искомое решение $p(M)$ следует подчинить какому-либо из нижеприведенных краевых условий:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)} p(N) = \varphi(N), \quad N \in S; \\
&\text{б)} v^m(N) n_m(N) = \psi(N), \quad N \in S; \\
&\text{в)} S = S_1 + S_2; \ \ p(N) = \varphi(N), \, N \in S_1; \ \ v^m(N) n_m(N) = \psi(N), \, N \in S_2.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Тем самым для давления $p(M)$ сформулирована *краевая задача* (5.10), (5.11). Краевые условия (5.11) допускают простое физическое истолкование. Случай (5.11а) соответствует заданию на границе S давления, а случай (5.11б) – заданию расхода фильтрующейся фазы.

Итак, для конкретного физического процесса построена замкнутая математическая модель (5.10), (5.11). Однако прежде чем использовать какой-либо метод фактического нахождения искомых параметров модели (аналитический, численный) следует убедиться, что краевая задача (5.10), (5.11) поставлена *корректно.* Безотносительно к конкретному предмету исследования, корректность той или иной задачи обычно предполагает, что решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Изучение этих вопросов составляет один из важнейших разделов *математической физики* и здесь, безусловно, требуется отдельное изложение.

Мы же сделаем лишь несколько замечаний относительно возникающей из (5.10), (5.11) краевой задачи для *эллиптического уравнения*

$$\mathrm{div}\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p = 0. \tag{5.12}$$

Из (5.10), (5.12) и формулы Гаусса-Остроградского (4.57) вытекает, что

$$0 = \int\limits_D \mathrm{div}\mathbf{v}dV = \int\limits_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}dS.$$

Поэтому в задаче (5.11б), (5.12) функция $\psi(N)$ не может задаваться произвольно, а необходимо должна удовлетворять условию

$$\int\limits_S \psi(N)dS = 0. \tag{5.13}$$

Сразу и отметим, что если в рассматриваемой области D заданы источники (стоки) фильтрующейся фазы $f(M)$, то вместо (5.12) будем иметь

$$\mathrm{div}\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}p = f(M), \tag{5.14}$$

а для краевой задачи (5.11б), (5.14) вместо (5.13) получим

$$\int\limits_D f(M)dV = \int\limits_S \psi(N)dS. \tag{5.15}$$

Условия (5.13), (5.15) имеют простой физический смысл: для стационарного процесса фильтрации в замкнутой области D сумма внутренних источников (стоков) фильтрующейся фазы равна расходу этой фазы через границу S.

Отметим также, что в предположении о разрешимости краевой задачи (5.11), (5.12) или (5.11), (5.14) достаточно простым является вопрос о единственности. Действительно, если p_1, p_2 какие-либо различные решения одной и той же задачи, то $\tilde{p} = p_1 - p_2$ удовлетворяет уравнению (5.12) с *однородными* краевыми условиями (5.11). Но тогда

$$
\begin{aligned}
0 = \int\limits_D \tilde{p}\mathrm{div}\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}\tilde{p}dV = \sum_i \int\limits_D \tilde{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{k}{\mu}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}\Big)dV = \\
= -\sum_i \int\limits_D \frac{k}{\mu}\Big(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}\Big)^2 dV, \quad \frac{k}{\mu} > 0.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Теперь в случае краевых условий (5.11а) (задача Дирихле) из (5.16) получаем $\tilde{p} = 0$. Если в (5.11в) $\mathrm{mes}S_1 \neq 0$ (смешанная краевая задача), то (5.16) снова дает $\tilde{p} = 0$. Для краевых условий (5.11б) (задача Неймана) выполнение (5.16) возможно и при $\tilde{p} = \mathrm{const} \neq 0$. Поэтому решение краевой задачи Неймана (5.11б), (5.12) или (5.11б), (5.14) не является единственным, а определяется с точностью до произвольной постоянной. Для выделения единственного решения разрешимой задачи Неймана достаточно либо указать уровень отсчета давления: в некоторой точке $M_0 \in \bar{D}$ задать $p(M_0)$, либо указать функциональное пространство, в котором искомое решение единственно, например,

$$
\int\limits_D p dV = 0 \longleftrightarrow (p, 1)_D = 0. \tag{5.17}
$$

Что касается условия (5.17), то оно связано с ортогональным разложением (3.20) соответствующего функционального пространства, порождаемого линейным оператором $A = -\mathrm{div}(k/\mu)\mathrm{grad}$ и означает, что $p \bar{\in} \ker A$.

Снова вернемся к закону сохранения массы и на его примере более подробно остановимся на различиях при эйлеровом и лагранжевом описании изменения параметров сплошной среды. Вывод уравнения неразрывности (5.6) основан, по существу, на предположении(аксиоме):

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV = \int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{5.18}
$$

При эйлеровом описании в (5.18) $V = D$ – фиксированный объем в R^3, поэтому $\partial/\partial t$ можно внести под знак интеграла. В дальнейшем следует учесть, что изменение массы в объеме D за время Δt в точности равно количеству вещества, протекающему за то же время Δt через границу S. Именно такой подход реализован при выводе (5.6).

При лагранжевом описании мы фиксируем некоторый объем V_0 при $t = t_0$ – *начальное* состояние и следим за изменением параметров индивидуальных частиц в этом объеме для $t > t_0$. Тогда $V_0 \longrightarrow V$ и для *текущего* (актуального) состояния $V = V(t)$.

Получим закон сохранения массы (уравнение неразрывности) в лагранжевом описании. Пусть в начальном состоянии $t = t_0$ материальные частицы

$\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, начальная плотность которых есть $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ заполняют элементарный объем $dV_0 = d\boldsymbol{\xi}_1 \cdot (d\boldsymbol{\xi}_2 \times d\boldsymbol{\xi}_3)$. Масса среды в элементарном объеме dV_0 равна

$$dm = \rho_0(\boldsymbol{\xi})dV_0.$$

В текущий момент времени $t > t_0$ материальная частица $\boldsymbol{\xi}$ будет иметь координаты $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и

$$dm = \rho(\mathbf{x}, t)dV, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t),$$

где $dV = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3)$. Так как $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j$. то

$$dV = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) dV_0 = J dV_0$$

и соотношение

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}, 0) = \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)J \tag{5.19}$$

задает закон сохранения массы в лагранжевом описании.

Величины

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_\alpha \cdot (\mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\gamma); \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{123} = \sqrt{\det(g_{im})} \tag{5.20}$$

в силу (1.20) определяют ковариантные компоненты тензора ранга три, который принято называть тензором Леви-Чевиты, а также дискриминантным или альтернирующим. В (5.20) $\mathbf{e}_i$ – векторы базиса, g_{im} – ковариантные компоненты метрического тензора G (2.14). Скалярно-векторное произведение $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ меняет знак при перестановке любых двух векторов, а отличными от нуля будут лишь компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, которые не имеют совпадающих индексов. Поэтому

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = \sqrt{\det(g_{im})}.$$

Для используемой декартовой прямоугольной системы координат $\varepsilon_{123} = 1$. С помощью тензора Леви-Чевиты закон сохранения массы (5.19) переписывается следующим образом

$$\rho_0 = \rho J = \rho \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) = \rho\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_\beta}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_\gamma} = \rho\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}. \tag{5.21}$$

Скорость изменения со временем любого параметра в индивидуальной частице движущейся сплошной среды называют *полной* (индивидуальной, материальной, субстанциональной) *производной по времени этого параметра.* Полную производную можно представить как скорость изменения изучаемого параметра во времени для наблюдателя, который двигается вместе с индивидуальной частицей. Но само местонахождение частицы в момент времени $t > t_0$ также является параметром (свойством) этой частицы. Полная производная по времени от положения частицы есть ее *мгновенная скорость*:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}. \tag{5.22}$$

Если $Q(\boldsymbol{\xi}, t)$ – какой-либо параметр среды (скалярный, векторный, тензорный) в лагранжевом описании, то

$$\dot{Q}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}. \tag{5.23}$$

Если же $Q(\mathbf{x},t)$ – параметр среды в эйлеровом описании, то

$$\dot{Q}(x,t)=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial t}+v_i\frac{\partial Q}{\partial x_i}=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)Q. \tag{5.24}$$

Теперь в качестве иллюстрации равноправности лагранжева и эйлерова описаний получим из (5.19) закон сохранения массы (5.6) в эйлеровом описании. Из (5.21) в соответствии с правилом дифференцирования определителя имеем

$$\frac{dJ}{dt}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big(\frac{da_{1\alpha}}{dt}a_{2\beta}a_{3\gamma}+a_{1\alpha}\frac{da_{2\beta}}{dt}a_{3\gamma}+a_{1\alpha}a_{2\beta}\frac{da_{3\gamma}}{dt}\Big).$$

Но

$$\frac{da_{1\alpha}}{dt}=\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha},\qquad \frac{da_{2\beta}}{dt}=\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\beta},\qquad \frac{da_{3\gamma}}{dt}=\frac{\partial v_3}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\gamma}.$$

Поэтому

$$\frac{dJ}{dt}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_i}a_{i\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}+\frac{\partial v_2}{\partial x_i}a_{12}a_{i\beta}a_{3\gamma}+\frac{\partial v_3}{\partial x_i}a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3i}\Big). \tag{5.25}$$

Из девяти определителей в (5.25) только три отличны от нуля, так что справедлива *формула Эйлера*:

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}J+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}J+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}J=J\mathrm{div}\mathbf{v}. \tag{5.26}$$

Далее, в силу (5.24) для ρ из (5.19) имеем

$$\dot{\rho}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\rho. \tag{5.27}$$

Наконец, продифференцируем (5.19) по t и воспользуемся (5.26), (5.27) и (4.44). Тогда

$$\begin{aligned}0=&\frac{d\rho}{dt}J+\frac{dJ}{dt}\rho=J\Big(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\mathbf{v}\Big)=\\ =&J\Big(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\mathrm{grad}\rho+\rho\mathrm{div}\mathbf{v}\Big)=J\Big(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{v}\Big).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Поскольку $J\neq 0$, то из (5.28) немедленно вытекает (5.6), т.е. закон сохранения массы в эйлеровом описании.

И в заключение этого параграфа следует специально отметить, что закон сохранения массы можно постулировать, т.е. принять в качестве одной из аксиом механики сплошной среды:

– *для любого движущегося объема $V(t)$ его масса постоянна*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)}\rho dV=0. \tag{5.29}$$

Из (5.29) вытекает как закон сохранения массы (5.6) в эйлеровом описании, так и закон сохранения массы (5.19) в лагранжевом описании. Действительно,

$$\begin{aligned}0=&\frac{d}{dt}\int\limits_V\rho dV=\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0}\rho J dV_0=\int\limits_{V_0}\frac{d}{dt}(\rho J)dV_0=\\ =&\int\limits_{V_0}\Big(\frac{d\rho}{dt}J+\rho\frac{dJ}{dt}\Big)dV_0=\int\limits_V\Big(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{v}\Big)dV,\end{aligned}$$

что в точности совпадает с (5.6). Далее,

$$m = \int\limits_{V_0} \rho_0(\boldsymbol{\xi}, 0) dV_0 = \int\limits_{V} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int\limits_{V_0} \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J dV_0 = \int\limits_{V_0} \rho(\boldsymbol{\xi}, t) J dV_0,$$

что в силу произвольности V_0 немедленно приводит к (5.19).

Можно принять за аксиомы и остальные законы сохранения:

— для любого движущегося объема$V(t)$ скорость изменения импульса равна главному вектору сил

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int\limits_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV = \int\limits_{S(t)} \mathbf{p}_n dS, \tag{5.30}$$

— для любого движущегося объема $V(t)$ скорость изменения момента импульса равна главному моменту сил

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int\limits_{V(t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int\limits_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) dS, \tag{5.31}$$

— для любого движущегося объема $V(t)$ скорость изменения полной энергии равна сумме мощности массовых сил, вносимой мощности напряжений и притока тепла

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + U) dV = \int\limits_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV + \int\limits_{S(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n dS + \int\limits_{S(t)} \mathbf{q}_n dS. \tag{5.32}$$

Далее мы перейдем к более подробному рассмотрению закона сохранения импульса (5.30), закона сохранения момента импульса (5.31) и закона сохранения полной энергии (5.32). В этой связи придется уточнить ряд используемых понятий.

§ 6. Закон сохранения импульса. Тензор истинных напряжений. Закон сохранения момента импульса.

В формулировке закона сохранения импульса (5.30) принимают участие два типа сил: поверхностные $\mathbf{p}_n$ и массовые. Последние иногда называют объемными, поскольку их проявление связано с каждой материальной точкой, принадлежащей заданному объему. Обычно это силы, вызываемые действием гравитационного или температурного поля. Массовой является также и сила инерции.

Пусть V – изучаемый материальный объем, M – точка внутри этого объема и S_i – поверхность, проходящая через точку M и разделяющая V на две части: V_1 и V_2. Взаимодействие объемов V_1 и V_2 происходит через поверхность S_i. С точкой M свяжем элементарную площадку ΔS_i с единичным вектором нормали $\mathbf{n}_i$. Среднюю результирующую силу в точке M, отнесенную к единице площади ΔS_i зададим величиной $\Delta \mathbf{p}_i / \Delta S_i$.

Предполагается (принцип напряжений Коши), что существует

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{p}_{n_i} = \mathbf{p}_n(M).$$

В (6.1) важно, что *вектор напряжений* $\mathbf{p}_n$ зависит от ориентации площадки ΔS_i, т.е. от $\mathbf{n}_i$, но существует при любой ориентации. Очевидно, что

$$-\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{-n}. \tag{6.2}$$

В (6.2) записан известный закон Ньютона о равенстве действия и противодействия.

В точке M аналогично предыдущему можно было бы определить и вектор момента напряжений $\mathbf{Q}_{n_i}$. Здесь мы будем предполагать, что

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}_i}{\Delta S_i} = \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_n(M) = 0.$$

Итак, сделанные предположения сводятся к следующим:

— воздействие одной части среды V_1 на другую V_2 осуществляется только через поверхность контакта S_i;

— действие всех сил, приложенных к ΔS_i эквивалентно действию главного вектора сил и главного момента этих сил, приложенных в "центре" M площадки ΔS_i;

— действием главного момента сил можно пренебречь.

С формальной точки зрения напряженное состояние в точке M, обусловленное взаимодействием объемов V_1 и V_2, определяется бесконечным набором пар $\mathbf{p}_{n_i}, \mathbf{n}_i$. На самом деле все сводится к набору трех пар: $\mathbf{p}_{n_1}, \mathbf{n}_1$; $\mathbf{p}_{n_2}, \mathbf{n}_2$; $\mathbf{p}_{n_3}, \mathbf{n}_3$. Три избранные направления $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ естественным образом можно связать с выбором системы координат, которая используется при описании изучаемого явления. Такой выбор нами уже сделан – это декартова прямоугольная система координат.

Рассмотрим тетраэдр с вершиной $M(x_1, x_2, x_3)$, боковые стороны которого параллельны ортам $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, а боковые грани являются прямоугольными треугольниками со сторонами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Пусть $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль основания, а $\mathbf{p}_{x_1}, \mathbf{p}_{x_2}, \mathbf{p}_{x_3}, \mathbf{p}_n$ –векторы напряжений (6.1), действующие на грани рассматриваемого тетраэдра. Запишем условие равенства нулю главного вектора сил, действующего на материальный объем V тетраэдра:

$$\mathbf{p}_n dS + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{-x_1}\Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{p}_{-x_2}\Delta x_1 \Delta x_3 + \mathbf{p}_{-x_3}\Delta x_1 \Delta x_2) + \frac{1}{6}\mathbf{F}\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0.$$

Здесь dS – площадь основания тетраэдра, $\mathbf{F}$ – главный вектор массовых сил, участвующих в рассмотрении. Если учесть (6.2), то

$$\mathbf{p}_n dS - \mathbf{p}_{x_1} dS_1 - \mathbf{p}_{x_2} dS_2 - \mathbf{p}_{x_3} dS_3 + \mathbf{F} dV = 0. \tag{6.3}$$

Так как

$$\frac{dS_i}{dS} = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_i}),$$

то переход в (6.3) к пределу при $\Delta x_i \longrightarrow 0$ дает

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1}\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_1}) + \mathbf{p}_{x_2}\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_2}) + \mathbf{p}_{x_3}\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}_3})$$

или

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1}\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_1}) + \mathbf{p}_{x_2}\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_2}) + \mathbf{p}_{x_3}\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_3}). \tag{6.4}$$

Итак, чтобы определить вектор напряжений $\mathbf{p}_n$ на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n}$ достаточно знать векторы напряжений $\mathbf{p}_{x_1}, \mathbf{p}_{x_2}, \mathbf{p}_{x_3}$.

Векторное равенство (6.4) эквивалентно трем скалярным

$$(p_n)_j = p_{x_i x_j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, x_i}) = \sum_i p_{x_i x_j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, x_i}). \tag{6.5}$$

Введем обозначение $p_{x_i x_j} = p_{ij}$ – напряжение в направлении x_i на площадке перпендикулярной направлению x_j. Девять величин p_{ij} в (6.5) полностью определяют напряженное состояние в точке $M \in V$. Тензорный характер величин p_{ij} легко устанавливается либо с помощью аналитического определения тензора (2.1), либо с помощью тензорного критерия из § 3. Итак, определен тензор $\mathscr{P}$ ранга два с матрицей компонент

$$(\mathscr{P}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Тензор $\mathscr{P}$ из (6.6) называют *тензором истинных напряжений* или тензором Эйлера. В силу (5.1) он определен для деформированного состояния материального объема V и $p_{ij} = p_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Тензор истинных напряжений (6.6) введен О.Коши. Говоря о тензоре Эйлера, лишь подчеркивают, что $\mathscr{P}$ из (6.6) соответствует эйлерову описанию процесса. Для дальнейшего существенно, что (6.5) можно переписать в таком виде

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\mathscr{P} \longleftrightarrow (\mathbf{p}_n)^* = \mathscr{P}^*(\mathbf{n})^*. \tag{6.7}$$

Здесь $\mathscr{P}^*$ – тензор сопряженный к $\mathscr{P}$, $(\mathbf{p}_n)^*$, $(\mathbf{n})^*$ –векторы-столбцы, $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{n}$ – векторы-строки.

С помощью (6.7) и формулы Гаусса-Остроградского (4.58) закон сохранения импульса (5.30) преобразуется следующим образом

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\mathbf{f}dV + \int\limits_V \mathrm{div}\mathscr{P}dV. \tag{6.8}$$

Дальнейшие преобразования левой части в (6.8) являются стандартными и уже использовались в § 5 при получении уравнения неразрывности в эйлеровом описании (5.6) из постулируемого закона сохранения массы (5.29). Итак,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} \rho\mathbf{v}JdV_0 = \int\limits_{V_0} \frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v}J)dV_0 =$$

$$= \int\limits_{V_0} \Big(\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v} + \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v}\Big)JdV_0 = \int\limits_V \Big(\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v} + \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v}\Big)dV.$$

В силу аксиомы сохранения массы (5.29) справедливо (5.6), т.е.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\mathrm{div}\mathbf{v}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV$$

и закон сохранения импульса (6.8) можно представить так

$$\int\limits_V \left[\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f})\right]dV = 0, \tag{6.9}$$

что в силу произвольности V дает

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f}. \tag{6.10}$$

Одним из искомых параметров в (5.6), (6.10) является скорость $\mathbf{v}$, которая определена с помощью формулы (5.22)

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \longleftrightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}.$$

При эйлеровом описании изучаемых процессов искомые параметры являются параметрами деформированного состояния, которое определено в (5.1) следующим образом

$$x_i = \xi_i + u_i \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор перемещения. Поэтому наряду с (5.22) эквивалентным будет и такое определение скорости $\mathbf{v}$:

$$v_i = \frac{du_i}{dt} \longleftrightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}. \tag{6.11}$$

Дальнейшее зависит от того какому из описаний соответствует вектор перемещений $\mathbf{u}$. Если $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$ – лагранжево описание, то как и в (5.23)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}. \tag{6.12}$$

Если же $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – эйлерово описание, то в соответствии с (5.24)

$$v_j = \dot{u}_j = \frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + v_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{6.13}$$

Полная производная по времени от скорости есть $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ – ускорение и в эйлеровом описании

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + v_i\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}, \quad a_j = \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \tag{6.14}$$

Поэтому дифференциальную форму записи закона сохранения импульса (6.10) можно представить в виде

$$\rho\mathbf{a} = \mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f}, \quad \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f}. \tag{6.15}$$

Очевидно, что $\rho\mathbf{a} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$ в (6.15) есть *сила инерции*, которая, как и $\rho\mathbf{f}$ является массовой (объемной).

Далее мы приведем другой, менее формальный вывод (6.10). Пусть деформированная среда, занимающая объем V и подвергающаяся действию объемных и поверхностных сил, находится в состоянии равновесия. Пусть dV – элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, а длины равны соответственно $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Главным моментом сил, действующим на dV будем пренебрегать. Будем также считать, что объемные силы приложены к центру тяжести dV, а поверхностные силы – к центру тяжести соответствующей грани. Запишем условие равенства нулю главного вектора внешних сил, действующих на элементарный параллелепипед dV:

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_{-x_1}\Delta x_2\Delta x_3 + (\mathbf{p}_{x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_1}}{\partial x_1}\Delta x_1)\Delta x_2\Delta x_3 + \\ +\mathbf{p}_{-x_2}\Delta x_1\Delta x_3 + (\mathbf{p}_{x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_2}}{\partial x_2}\Delta x_2)\Delta x_1\Delta x_3 + \\ +\mathbf{p}_{-x_3}\Delta x_1\Delta x_2 + (\mathbf{p}_{x_3} + \frac{\partial \mathbf{p}_{x_3}}{\partial x_3}\Delta x_3)\Delta x_1\Delta x_2 + \\ +\mathbf{F}\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 = 0.\end{gathered} \tag{6.16}$$

В (6.16) $\mathbf{F}$ – вектор объемных сил. Учтем теперь (6.2) и перейдем в (6.16) к пределу при $\Delta x_i \longrightarrow 0$. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{x_i}}{\partial x_i} + \mathbf{F} = 0 \longleftrightarrow \mathrm{div}\mathscr{P} + \mathbf{F} = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{6.17}$$

Достаточно теперь положить в (6.17)

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{f} - \rho\mathbf{a}, \tag{6.18}$$

чтобы получить (6.10) или (6.15). В переходе от (6.17), (6.18) к (6.10) реализован хорошо известный в механике *принцип Даламбера.*

Статическими (квазистатическими) процессами в механике сплошных сред называют процессы, в которых характерное время изменения заданных нагрузок мало по сравнению с характерным временем распространения возмущений в сплошной среде. Для таких процессов с достаточной степенью точности можно пренебречь силами инерции и считать, что массовая сила $\rho\mathbf{f}$ либо не зависит от t (статический процесс), либо зависит от t параметрически (квазистатический процесс). В этих случаях (6.17) означает, что воздействие массовых сил $\rho\mathbf{f}$ в любом элементарном объеме dV уравновешивается реакцией $\mathrm{div}\mathscr{P}$. В соответствии с только что сказанным (6.17) называют *уравнением равновесия.* Если статическое равновесие не имеет места, то для каждой материальной точки $M \in dV$ определено движение, задаваемое вектором $\mathbf{v}$ из (5.22), а в каждый момент времени t сила $\rho\mathbf{f}$ и реакция $\mathrm{div}\mathscr{P}$ уравновешиваются силой инерции $\rho\mathbf{a}$ (принцип Даламбера). Поэтому в (6.17)

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \rho\mathbf{f} \ \text{ – для статических процессов,} \\ (\rho\mathbf{f} - \rho\mathbf{a}) \ \text{ – для динамических процессов.} \end{cases} \tag{6.19}$$

Учитывая вышесказанное, постулируемый в (5.31) закон сохранения момента импульса можно сформулировать следующим образом: для любого $t > t_0$

$$\int\limits_V (\mathbf{x} \times \mathbf{F})dV + \int\limits_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n)dS = 0. \tag{6.20}$$

Дальнейшее свяжем с преобразованием поверхностного интеграла в (6.20). Имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n)dS = \int\limits_S (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_i}\cos(\widehat{\mathbf{n}, x_i}))dS = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x} \times \mathbf{p}_{x_i})dV = \\ = \int\limits_V \Big(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \times \mathbf{p}_{x_i}\Big)dV + \int\limits_V \Big(\mathbf{x} \times \frac{\partial \mathbf{p}_{x_i}}{\partial x_i}\Big)dV = \\ = \int\limits_V (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j)p_{ji}dV + \int\limits_V (\mathbf{x} \times \mathrm{div}\mathscr{P})dV.\end{gathered} \tag{6.21}$$

Подстановка (6.21) в (6.20) дает

$$\int\limits_V [\mathbf{x} \times (\mathrm{div}\mathscr{P} + \mathbf{F})] dV + \int\limits_V (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) p_{ji} dV = 0. \tag{6.22}$$

Поскольку

$$(\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_i) = 0, \quad (\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) = -(\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_i),$$

то

$$(\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j) p_{ji} = (\mathbf{q}_i \underset{j<i}{\times} \mathbf{q}_j)(p_{ji} - p_{ij}). \tag{6.23}$$

Остается подставить (6.23) в (6.22), чтобы получить окончательный результат

$$\int\limits_V [\mathbf{x} \times (\mathrm{div}\mathscr{P} + \mathbf{F})] dV + \int\limits_V (\mathbf{q}_i \underset{j<i}{\times} \mathbf{q}_j)(p_{ji} - p_{ij}) dV = 0. \tag{6.24}$$

Итак, закон сохранения момента импульса (6.20) является следствием уравнений (6.17), (6.19) и предположения о симметричности тензора истинных напряжений: $\mathscr{P} = \mathscr{P}^*$. Если же симметричность $\mathscr{P}$ в (6.17) заранее не предполагается, то соотношение $\mathscr{P} = \mathscr{P}^*$ является следствием (6.17), (6.19) и закона сохранения момента импульса (6.20).

Можно также отметить, что заключение о симметричности тензора истинных напряжений $\mathscr{P}$ в (6.17) вытекает из условия равенства нулю моментов сил, действующих на гранях элементарного объема dV. Действительно, по определению момента это означает, что

$$\det\left[\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ \Delta x_1 & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix} \Delta x_2 \Delta x_3 + \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ 0 & \Delta x_2 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_3 + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ 0 & 0 & \Delta x_3 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \Delta x_1 \Delta x_2 \right] = 0.$$

Поделив это равенство на $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ и раскрывая определители, получаем

$$(-\mathbf{q}_2 p_{13} + \mathbf{q}_3 p_{12}) + (\mathbf{q}_1 p_{23} + \mathbf{q}_3 p_{21}) + (-\mathbf{q}_1 p_{32} + \mathbf{q}_2 p_{31}) = 0$$

или

$$(p_{23} - p_{32})\mathbf{q}_1 + (p_{31} - p_{13})\mathbf{q}_2 + (p_{12} - p_{21})\mathbf{q}_3 = 0. \tag{6.25}$$

Теперь остается учесть, что в (6.17) и в (6.25) величины p_{ij} являются компонентами одного и того же тензора $\mathscr{P}$.

Уравнение неразрывности, соответствующее закону сохранения массы (5.29) можно записать как в дивергентной форме (5.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

так и в недивергентной

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{6.26}$$

Эквивалентность этих уравнений следует из (4.44) и определения полной производной по времени при эйлеровом описании (5.24). Выбор той или иной формы записи в каждой конкретной ситуации может быть обусловлен различными причинами. При использовании *метода сеток* (разностных методов) для численного решения задач механики сплошной среды практически общепринятой является точка зрения о предпочтительности дивергентной формы записи законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Именно в этой связи представим здесь закон сохранения импульса (5.30) в дивергентной дифференциальной форме.

Будем исходить из уравнения движения (6.10)

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f}, \quad \mathscr{P} = \mathscr{P}^*.$$

Прежде всего отметим очевидные тождества

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{6.27}$$

$$\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - v_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \tag{6.28}$$

и компонентную запись дивергентного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \tag{6.29}$$

Кроме того, по определению

$$\rho\frac{dv_i}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{6.30}$$

Если теперь сложить (6.27) и (6.28), то с учетом (6.29), (6.30) получим

$$\rho\frac{dv_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j).$$

Отсюда немедленно следует дивергентная дифференциальная форма уравнения движения в компонентной записи

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ji} - \rho v_i v_j) + \rho f_i, \quad p_{ij} = p_{ji}. \tag{6.31}$$

В соответствии с тензорным критерием из § 3 величины $v_i v_j$ являются компонентами симметричного диадного тензора $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})$ ранга два и тогда

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} = \mathrm{div}[\mathscr{P} - \rho(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})] + \rho\mathbf{f}, \quad \mathscr{P} = \mathscr{P}^*. \tag{6.32}$$

И в заключение этого параграфа обратимся к дифференциальным математическим моделям механики сплошной среды, которые основаны на законах сохранения массы (5.29) и импульса (5.30). Для эйлерова описания имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ &\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} = \mathrm{div}[\mathscr{P} - \rho(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})] + \rho\mathbf{f}, \quad \mathscr{P} = \mathscr{P}^*. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Четыре уравнения в (6.32) связывают *десять* искомых параметров: $\rho(\mathbf{x},t)$, $v_i(\mathbf{x},t)$, $p_{ij}(\mathbf{x},t)$. Число уравнений меньше числа искомых параметров, дифференциальная модель (6.23) не является замкнутой.

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение, называется *идеальной.* Для идеальной жидкости тензор истинных напряжений Эйлера (6.6) является шаровым, т.е.

$$\mathscr{P} = -pG. \tag{6.34}$$

В (6.34) G – метрический тензор, задаваемый смешанными компонентами $g_{.j}^{\,i}$, так что для рассматриваемой системы координат $g^{i}_{.j} = \delta_{ij}$. Скалярная функция $p = p(\mathbf{x}, t)$ в (6.34) называется *давлением.* Для идеальной жидкости вместо (6.32) будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ &\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Теперь *четыре* уравнения в (6.35) связывают пять искомых параметров: $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, $v_i(\mathbf{x}, t)$. Для замыкания математической модели (6.35) достаточно задать уравнение состояния

$$p = p(\rho). \tag{6.36}$$

Сплошную среду с определяющим соотношением (6.34) и уравнением состояния (6.36) принято называть *баротропной.* Для замыкания математической модели (6.35) достаточно также предположить, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой. Это предположение записывается в виде $\dot{\rho} = 0$ и в силу (6.26) позволяет вместо (6.35) получить замкнутую модель (*уравнения Эйлера*)

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho = \mathrm{const} \\ &\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f} \longleftrightarrow \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

В связи с уравнениями Эйлера вернемся к математической модели фильтрации несжимаемой жидкости (5.10), которую перепишем здесь в таком виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad \rho = \mathrm{const}\,. \tag{6.38}$$

Сравнение (6.37) и (6.38) показывает, что с точностью до объемных сил закон сохранения импульса для идеальной несжимаемой жидкости в математической модели фильтрации (6.38) представлен в форме закона Дарси.

Закон сохранения импульса в задачах механики сплошной среды имеет универсальный характер. С другой стороны, в теории фильтрации закон Дарси (5.8) часто постулируется в качестве экспериментально установленного. Поэтому полезно хотя бы в самых общих чертах иметь представление о тех допущениях, которые позволяют перейти от закона сохранения импульса к закону Дарси.

Поскольку $\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{a}$, то первое допущение очевидно: в фильтрационном течении силами инерции можно пренебречь. Пористую среду в первом приближении можно представить себе как совокупность сообщающихся поровых каналов, заключенных в твердый скелет. При течении жидкости (газа) в такой среде возникает сила трения на границе раздела скелет – жидкость. Поскольку поверхность поровых каналов достаточно велика, то силу трения можно считать распределенной по всему объему течения и рассматривать как объемную. Таков смысл второго допущения. Третье допущение состоит в том, что сила трения пропорциональна скорости фильтрации $\mathbf{v}$ с некоторым коэффициентом пропорциональности λ. Допустим, наконец, что действием всех иных объемных сил на фильтрационное течение можно пренебречь.

С учетом сделанных допущений закон сохранения импульса преобразуется к виду

$$\mathrm{grad}p = \rho\lambda\mathbf{v}. \tag{6.39}$$

Достаточно теперь в (6.39) положить $\lambda = -\mu/k\rho$, чтобы получить обычную запись (5.8) закона Дарси для однородной несжимаемой жидкости. Из уравнений Эйлера давление p определяется с точностью до произвольной постоянной p_0, которая задает уровень отсчета давления. Если в (6.37) $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ и ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$ постоянно по объему, то

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathrm{grad}p = \rho\mathbf{g} \longleftrightarrow \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathrm{grad}\Phi = 0, \tag{6.40}$$

где

$$\Phi = p - p_0 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \tag{6.41}$$

Скалярную функцию Φ из (6.40), (6.41) обычно называют модифицированным давлением или потенциалом. Использование потенциала в уравнениях Эйлера позволяет в рамках предыдущих допущений сформулировать закон Дарси следующим образом

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}\Phi.$$

Нетрудно понять, что все сказанное в § 5 о математической модели фильтрации однородной несжимаемой жидкости (5.10), (5.11) остается справедливым и для математической модели

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \rho = \mathrm{const}., \quad M \in D,\\ &\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}\Phi, \quad \Phi = p - p_0 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

с краевым условием (5.11). В случае краевого условия (5.11б) единственное решение $\Phi(M)$ выделяется с помощью задания p_0 или с помощью условия $(\Phi, 1)_D = 0$.

§ 7. Тензор деформации. Математические модели "линейной" теории упругости.

В общем случае для замыкания дифференциальной математической модели, основанной на законах сохранения (5.29)–(5.31)

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\\ &\rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathrm{div}\mathscr{P} + \rho\mathbf{f}, \quad \mathscr{P} = \mathscr{P}^* \end{aligned} \tag{7.1}$$

нам потребуется введение новых объектов, основным из которых является *тензор деформации*. Напомним, что мы рассматриваем сплошную среду, материальные частицы которой в начальный момент (до воздействия каких-либо сил) имеют координаты ξ_i (лагранжевы координаты), а в текущий момент x_i – эйлеровы. При деформации среды ее материальные частицы перемещаются относительно друг друга и если $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения, то

$$\begin{aligned} &x_i = \xi_i + u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u},\\ &\xi_i = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Формулы (7.2) устанавливают взаимнооднозначное соответствие $\boldsymbol{\xi} \longleftrightarrow \mathbf{x}$ и показывают, что описание процесса деформации в терминах x_i или ξ_i неизбежно различается.

Пусть материальная частица недеформированной сплошной среды находилась в точке $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv A(\xi_i)$, а в результате деформации переместилась в точку $A^*(x_i)$. Для "близкой соседней" материальной частицы будем иметь $B(\xi_i + d\xi_i) \longrightarrow B^*(x_i + dx_i)$. Тогда

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (ds)^2 = \sum_i d\xi_i^2, \quad |\overrightarrow{A^*B^*}|^2 = (ds^*)^2 = \sum_i dx_i^2.$$

Из (7.2) имеем

$$dx_i = d\xi_i + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \tag{7.3}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
dx_1^2 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\
&+ 2\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 + 2\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\right)\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_3 + 2\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} d\xi_2 d\xi_3, \\
dx_2^2 &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\
&+ 2\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} d\xi_1 d\xi_3 + 2\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} d\xi_2 d\xi_3, \\
dx_3^2 &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2^2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right)^2 d\xi_3^2 + \\
&+ 2\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 + 2\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_3 + 2\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 d\xi_3.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Следовательно,

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\hat{\varepsilon}_{\xi_i \xi_k} d\xi_i d\xi_k = 2\hat{\varepsilon}_{ik} d\xi_i d\xi_k, \tag{7.5}$$

где в соответствии с (7.4)

$$2\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}, \quad i, k, j = 1, 2, 3. \tag{7.6}$$

Сразу же отметим, что $\hat{\varepsilon}_{ik} = \hat{\varepsilon}_{ki}$.

Шесть коэффициентов симметричной квадратичной формы (7.5) в силу определения (2.1) (или тензорного критерия из § 3) являются компонентами симметричного тензора ранга два. Этот тензор носит название *тензора конечных деформаций Грина* и соответствует лагранжеву описанию процесса деформации.

При эйлеровом описании процесса деформации следует вместо (7.3) использовать

$$d\xi_i = dx_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

и тогда вместо (7.5) будем иметь

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\tilde{\varepsilon}_{x_i x_k} dx_i dx_k = 2\tilde{\varepsilon}_{ik} dx_i dx_k,$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ik} = \tilde{\varepsilon}_{ki}$ – компоненты *тензора конечных деформаций Альманси*:

$$2\tilde{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{7.7}$$

Предположим теперь, что рассматриваемая сплошная среда является *упругой.* Эквивалентными определениями такого свойства являются следующие:

1. Между тензорами деформаций и напряжений имеет место взаимнооднозначное соответствие.
2. Работа деформации по любому замкнутому циклу равна нулю.

В дальнейшем речь пойдет именно об упругих средах. В этой связи здесь стоит отметить, что только для таких сред справедлив упомянутый в § 6 принцип Даламбера.

При выбранном здесь эйлеровом описании соотношения "деформации – перемещения" (7.7) и предположение о том, что изучаемая среда является упругой достаточны для замыкания математической модели (7.1). Действительно, определение 1 предполагает *существование* шести соотношений "напряжения – деформации": $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \longleftrightarrow p_{ik}$. Число искомых параметров такой модели: ρ, v_i, u_i, $\tilde{\varepsilon}_{ik}$, p_{ik} равно числу уравнений, связывающих эти параметры. Только что сказанное, безусловно, относится и к лагранжеву описанию. Здесь следует предварительно ввести какой-либо симметричный лагранжев тензор напряжений $\hat{\mathscr{P}}$ (такие существуют), перейти в (7.1) к лагранжеву описанию, а вместо (7.7) использовать (7.6). Тогда опять-таки в силу определения 1 *существуют* шесть соотношений "напряжения – деформации": $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \hat{p}_{ik}$.

Теперь следует конкретизировать соотношения "напряжения – деформации" для упругой среды. Будем считать, что изучаемые процессы происходят без обмена тепла с внешней средой (*адиабатические процессы*). В специальных разделах механики сплошной среды показывается, что свойство "упругость" в смысле определения 2 приводит к следующим соотношениям "напряжения – деформации" (формулы Мурнагана):

$$p_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho}(\delta_{ij} - 2\tilde{\varepsilon}_{ik})\frac{\partial U}{\partial \tilde{\varepsilon}_{kj}}. \tag{7.8}$$

В (7.8) $U = U(J_1, J_2, J_3) \geq 0$ – удельная внутренняя энергия; J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора конечных деформаций Альманси (7.7), так что (см.(3.49))

$$J_1 = tr(\tilde{\mathscr{E}}), \quad J_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{kk} - \tilde{\varepsilon}_{ik}^2), \quad J_3 = \det(\tilde{\varepsilon}_{ik}). \tag{7.9}$$

Из (7.8) вытекает, что без каких-либо дополнительных предположений относительно упругой среды, зависимость между тензорами $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{E}}$ не сводится только к линейной.

Пусть между тензором истинных напряжений $\mathscr{P}$ и тензором конечных деформаций Альманси имеет место какая-либо зависимость типа

$$\mathscr{P} = \sum_m \alpha_m \tilde{\mathscr{E}}^m, \quad \tilde{\mathscr{E}}^0 = G, \quad g_k^i = \delta_{ik}, \tag{7.10}$$

где α_m – скалярные функции инвариантов тензора деформации, а $\tilde{\mathscr{E}}^m$ понимается как m-кратная композиция тензора $\tilde{\mathscr{E}}$. Компоненты тензора $\tilde{\mathscr{E}}^m$ могут быть вычислены с помощью (3.12). В силу теоремы Кэли–Гамильтона каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Поэтому

$$\tilde{\mathscr{E}}^3 = J_1\tilde{\mathscr{E}}^2 - J_2\tilde{\mathscr{E}} + J_3G. \tag{7.11}$$

Соотношение (7.11) позволяет исключить из (7.10) $\tilde{\mathscr{E}}^m$ для $m \geq 3$ и представить (7.10) в таком виде

$$\tilde{\mathscr{P}} = \beta_0G + \beta_1\tilde{\mathscr{E}} + \beta_2\tilde{\mathscr{E}}^2, \tag{7.12}$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – скалярные функции инвариантов J_1, J_2, J_3.

Сплошная среда V называется *однородной*, если ее свойства одинаковы для каждой материальной точки $M \in V$. *Изотропной* называют такую среду, свойства которой одинаковы во всех направлениях. Если U, β_i являются функциями только инвариантов J_1, J_2, J_3, то сплошная среда, которой приписано свойство (7.8) или (7.11) по определению является однородной и изотропной. Это, в свою очередь, означает, что тензор $\tilde{\mathscr{E}}$ определен, вообще говоря, с точностью до ортогонального тензора.

Дальнейшее свяжем с линеаризацией замкнутой модели (7.1), (7.7), (7.12). Будем считать, что первые производные перемещений по пространственным переменным малы по сравнению с единицей, а произведениями и квадратами первых производных можно пренебречь по сравнению с первыми производными, т.е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ll 1 \longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = O(\delta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} = O(\delta^2). \tag{7.13}$$

Это предположение позволяет:

— перейти в (7.7) от тензора Альманси к *тензору малых деформаций* $\mathscr{E}$

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \tag{7.14}$$

— с точностью до членов $O(\delta^2)$ представить (7.12) следующим образом

$$\mathscr{P} = \lambda J_1(\mathscr{E})G + 2\mu\mathscr{E}, \quad \lambda = \mathrm{const}. > 0, \quad \mu = \mathrm{const}. > 0. \tag{7.15}$$

Константы λ, μ в (7.15) называют константами Ламе, а само соотношение (7.15) – *законом Гука*. Принципиальным для (7.15) является тот факт, что константы Ламе можно выразить через некоторые другие константы, которые, в свою очередь, непосредственно измеряются в достаточно простых экспериментах.

Рассмотрим, например, одноосное напряженное состояние, для которого матрицы компонент тензоров $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ имеют вид

$$(\mathscr{P}) = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathscr{E}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Такое напряженное состояние с достаточной точностью реализуется, если соосный с $\mathbf{q}_1$ прямой круговой цилиндр длины l с площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$, $r < l$ растягивать (сжимать) силами F, нормально и равномерно распределенными на торцах. Под F понимается сила, отнесенная к единице площади. Боковую поверхность цилиндра следует считать свободной от напряжений. Из (7.15), (7.16) получим

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$p_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}, \tag{7.17}$$

где

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{7.18}$$

Итак, при одноосном напряженном состоянии (7.16) p_{11} пропорционально ε_{11}, *модуль Юнга* E задает коэффициент пропорциональности. Первое из соотношений (7.17) Р.Гук сформулировал так: "ut tensio sic vis – какова сила, таково удлинение". В рассматриваемом случае $p_{11} = F/S$ и если Δl – изменение длины, то $\varepsilon_{11} = \Delta l/l$. Поэтому модуль Юнга можно вычислить, исходя из реально измеряемых величин: $E = Fl/S\Delta l$.

В рассматриваемом примере при растяжении (сжатии) элементарного объема dV в направлении $\mathbf{q}_1$ возникают сжатия (растяжения) в направлениях $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$. Количественной мерой относительных сжатий (растяжений) является *коэффициент Пуассона* ν из (7.17), (7.18). Если радиус поперечного сечения изменяется на Δr, то относительное поперечное сжатие (растяжение) равно $\Delta r/r$ и коэффициент Пуассона также вычисляется через реально измеряемые величины: $\nu = -l\Delta r/r\Delta l$.

Из (7.15) вытекает, что первые инварианты тензора $\mathscr{P}$, $\mathscr{E}$ связаны соотношением

$$J_1(\mathscr{P}) = tr(\mathscr{P}) = (3\lambda + 2\mu)tr(\mathscr{E}). \tag{7.19}$$

Предположения (7.13) позволяют перейти от (7.12) к закону Гука (7.15). В рамках этих предположений закон сохранения массы $\rho_0 = \rho J$ переходит в

$$1 - \frac{\rho}{\rho_0} = J_1(\mathscr{E}). \tag{7.20}$$

Поэтому $J_1(\mathscr{E}) < 0$ соответствует сжатию элементарного объема $dV, J_1(\mathscr{E}) > 0$ – расширению, $J_1(\mathscr{E}) = 0$ – несжимаемой сплошной среде. Если $p_{11} = p_{22} = -p$, $p > 0$, то из (7.19) получаем

$$-p = KJ_1(\mathscr{E}), \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{7.21}$$

Коэффициент K в (7.21) называется *модулем объемного сжатия*. Чтобы измерить K достаточно реализовать напряженно-деформированное состояние, для которого тензоры $\mathscr{E}$, $\mathscr{P}$ – шаровые и $p_{ii} = -p$.

И, наконец, рассмотрим опыт по определению напряженно-деформированного состояния прямоугольного параллелепипеда V_0, боковые ребра которого параллельны $\mathbf{q}_1$. Пусть нижняя грань ($\xi_3 = x_3 = 0$) закреплена, а в каждой точке верхней грани ($\xi_3 = x_3 = a$) приложена сила F в направлении $\mathbf{q}_2$. Под F понимается сила, отнесенная к единице площади, так что на грани $\xi_3 = x_3 = a$ задан вектор напряжений с компонентами $p_{13} = 0$, $p_{23} = F$, $p_{33} = 0$. Остальные грани: $x_1 = \xi_1 = 0$, $x_1 = \xi_1 = l$, $x_2 = \xi_2 = 0$ и $x_2 = \xi_2 = l$ – свободны от напряжений. С достаточной степенью точности можно считать, что в таком опыте осуществляется отображение недеформированного *прямоугольного* параллелепипеда $V_0(\boldsymbol{\xi})$ в деформированный параллелепипед $V(\mathbf{x})$, все поперечные сечения которого – параллелограммы. Отображение $V_0 \longrightarrow V$ поворачивает плоские сечения $\xi_2 = \text{const}.$, $0 \le \xi_2 \le a$ на угол φ в направлении $\mathbf{q}_2$: реализуется *простой сдвиг*. Мерой этого сдвига служит угол φ, а *модуль сдвига* $\alpha = F/\varphi$ определяется реально измеряемыми величинами.

В силу (7.2) отображение $V_0(\boldsymbol{\xi}) \longrightarrow V(\mathbf{x})$ можно охарактеризовать вектором перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, так что при простом сдвиге

$$u_1 = 0, \quad u_2 = x_3 \operatorname{tg} \varphi \simeq x_3 \varphi, \quad u_3 = 0.$$

Все компоненты тензора малых деформаций $\mathscr{E}$ равны нулю за исключением $2\varepsilon_{23} = \varphi$. Равны нулю и все компоненты тензора $\mathscr{P}$, кроме $p_{23} = F$. Поэтому, учитывая (7.15), $F/\varphi = \alpha = p_{23}/2\varepsilon_{23} = \mu$.

Можно считать экспериментально установленным фактом, что $K > 0$, $\mu > 0$. Тогда из (7.18), (7.21) вытекает: $E > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \nu < 1/2$. Это дает возможность записать закон Гука (7.15) используя любую пару упругих констант. Например,

$$\mathscr{P} = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathscr{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} J_1(\mathscr{E}) G \right].$$

Итак, если изучаемая сплошная среда является однородной, изотропной и упругой, то предположение (7.13) позволяет конкретизировать замкнутую математическую модель, основанную на законах сохранения массы, импульса и момента импульса:

$$\begin{gathered} \rho(\mathbf{x}, t) \simeq \rho_0(\boldsymbol{\xi})[1 - J_1(\mathscr{E})] = \rho(\mathbf{x}, t_0)[1 - J_1(\mathscr{E})], \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathscr{P} + \rho \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \varepsilon_{ik} \simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad p_{ik} \simeq \lambda J_1(\mathscr{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{gathered} \tag{7.22}$$

Символом $\simeq$ отмечены те из соотношений в (7.22), при получении которых использовались предположения (7.13).

Дальнейшие упрощения (7.22) свяжем с дополнительным предположением о "малости" самих перемещений. Именно, будем считать, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \ll l^2$, где l – характерный линейный размер рассматриваемого упругого тела. Вместе с (7.13) это дает

$$u_i = O(\delta), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = O(\delta). \tag{7.23}$$

Условия (7.23) позволяют не различать тензоры малых деформаций Грина и Альманси. Кроме того, векторное поле малых перемещений $u_i = O(\delta)$ в силу $\mathbf{u} = \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2)$ порождает векторное поле малых мгновенных скоростей $v_i = O(\delta)$ и тогда

$$\begin{gathered} v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + O(\delta^2). \\ a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + O(\delta^2). \end{gathered}$$

В силу (6.12)–(6.14) это означает, что условия (7.23) позволяют не различать векторные поля перемещений, скоростей и ускорений в эйлеровом и лагранжевом описаниях. С той же степенью точности можно не различать $(\operatorname{div}\mathscr{P})_{\mathbf{x}}$ и $(\operatorname{div}\mathscr{P})_{\boldsymbol{\xi}}$. Поэтому условия (7.23) и выбор лагранжева описания ($\rho = \rho_0$) приводят к линейной замкнутой модели

$$\begin{gathered} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathscr{P} + \rho_0 \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \\ 2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}, \quad p_{ik} = \lambda J_1(\mathscr{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{gathered} \tag{7.24}$$

Параметрами модели являются: $u_i, v_i, \varepsilon_{ik}, p_{ik}$.

Из (7.24) нетрудно получить

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \mathrm{graddiv} \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} \equiv A\mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}. \tag{7.25}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, определенный в (4.51), а для оператора A из (7.25) принято название: *оператор Ламе.* Переход от (7.24) к (7.25) по существу определяет способ реализации и *порядок определения* искомых параметров замкнутой модели (7.24). Именно,

$$\mathbf{v} \longleftarrow \mathbf{u} \longrightarrow \varepsilon_{ik} \longleftrightarrow p_{ik}. \tag{7.26}$$

Этап $\mathbf{u} \longrightarrow \varepsilon_{ik}$ реализуется с помощью соотношений перемещения – деформации

$$2\varepsilon_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i}, \tag{7.27}$$

а этап $\varepsilon_{ik} \longrightarrow p_{ik}$ – с помощью соотношений деформации – напряжения

$$p_{ik} = \lambda J_1(\mathscr{E})\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}. \tag{7.28}$$

Понятно, что этапы (7.27) и (7.28) можно объединить.

Пусть $D(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = D(M)$ – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $S(N)$, $\mathbf{n}$ – вектор-столбец внешней нормали. Изучаемую упругую деформируемую сплошную среду будем связывать с D, а нестационарный (динамический) процесс упругого деформирования – с цилиндром $Q = \{D \times [t_0 \le t \le t_1]\}$. В соответствии с (7.24)–(7.28) для *динамической задачи линейной теории упругости* в цилиндре Q следует искать вектор перемещений $\mathbf{u}(M, t)$ как решение уравнения (7.25), удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Будем считать, что на боковой поверхности $\{S \times [t_0 \le t \le t_1]\}$ цилиндра Q искомое решение подчинено одному из нижеприведенных краевых условий:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\mathbf{u}(N,t) = 0, \quad N \in S;\\
&\text{б)}p_{im}n_m(N,t) = 0, \quad N \in S;\\
&\text{в)}S = S_1 \cup S_2; \quad \mathbf{u}(N,t) = 0, \quad N \in S_1; \quad p_{im}n_m(N,t) = 0, \quad N \in S_2.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Краевые условия (7.29) имеют прозрачный физический смысл. Если граница S упругого тела D закреплена, то мы приходим к (7.29а). Если же граница S упругого тела D свободна от напряжений, то имеет место (7.29б). Будем также считать, что каким-либо способом можно задать

$$\mathbf{u}(M, t_0) = \boldsymbol{\varphi}(M), \quad \mathbf{v}(M, t_0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(M, t_0) = \boldsymbol{\psi}(M). \tag{7.30}$$

Тем самым для определения вектора перемещений $\mathbf{u}(M,t)$ поставлена *смешанная задача Коши* (начально-краевая задача).

В стационарной (статической) модели (7.24), где силами инерции можно пренебречь, вместо (7.25) получим

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \mathrm{draddiv} \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} \equiv A\mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} = 0, \quad M \in D. \tag{7.31}$$

Статическая краевая задача для вектора перемещений $\mathbf{u}(M)$ заключается в отыскании решения векторного уравнения (7.31), удовлетворяющего одному из стационарных краевых условий (7.29). Параметры стационарной модели (7.24) $\varepsilon_{ik}(M)$, $p_{ik}(M)$ определяются затем из (7.27), (7.28).

Говоря о *постановке* линейных задач теории упругости *в перемещениях* обычно имеют в виду (7.25), (7.31) и указанный в (7.26) порядок определения параметров модели (7.24).

Как уже говорилось, движение сплошной среды считается заданным, если указано взаимно-однозначное соответствие между эйлеровыми и лагранжевыми координатами

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t_0) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t_0). \tag{7.32}$$

Соответствие (7.32) можно определить либо заданием поля перемещений $\mathbf{u}$ (что кажется наиболее естественным), либо заданием поля скоростей. Связь между этими полями и (7.32) устанавливают соотношения (5.1), (5.22) и (6.11)–(6.14). Если, как это фактически было сделано, за эйлеровы координаты принять $\mathbf{x}$ – координаты точек пространства, в котором движется сплошная среда, то за $\boldsymbol{\xi}$ следует принять вектор $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, который отмечает положение материальной частицы в начальный момент времени t_0. Тогда в (7.30) $\mathbf{u}(M, t_0) = \mathbf{u}_0 = 0$, а тензор малых деформаций $\mathscr{E}(M, t)$ выступает в качестве меры сравнения двух состояний сплошной среды: в начальный момент времени t_0 и в текущий момент времени t. При этом отображению

$$0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(M, t_0) \longrightarrow \mathbf{u}(M, t)$$

соответствует отображение

$$0 = \mathscr{E}(\mathbf{u}_0) = \mathscr{E}(M, t_0) \longrightarrow \mathscr{E}(\mathbf{u}(M, t)) = \mathscr{E}(M, t).$$

Введем в рассмотрение *вектор жесткого перемещения*

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – постоянные векторы. По определению

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 + (b_2 x_3 - b_3 x_2), \\ w_2 &= a_2 + (b_3 x_1 - b_1 x_3), \\ w_3 &= a_3 + (b_1 x_2 - b_2 x_1). \end{aligned} \tag{7.33}$$

Очевидно, что $\mathscr{E}(\mathbf{w}) = 0$, поэтому $\mathscr{E}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) = 0$. Это означает, что начальное (недеформированное) состояние $\mathscr{E}(M, t_0)$ всегда определено с точностью до вектора жесткого перемещения (7.33). Следовательно, выбор $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_0$ фиксирует "вмороженную" в упругое тело систему координат $\mathbf{x}$, которая используется при описании движения.

Пусть $\mathbf{u}(M, t_0) = \boldsymbol{\varphi}(M)$. Если $2\varepsilon_{ik}(M, t_0) = \varphi_{i,k} + \varphi_{k,i}$, то соотношения "перемещения-деформации" (7.27) можно переписать в эквивалентной форме

$$2\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = v_{i,k} + v_{k,i}. \tag{7.34}$$

Это приводит к замкнутой динамической модели теории упругости, которая не содержит параметр $\mathbf{u}(M, t)$:

$$\begin{gathered} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathscr{P} + \rho_0 \mathbf{f} \\ 2\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial v_k}{\partial \xi_i}, \quad p_{ik} = \lambda J_1(\mathscr{E}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{gathered} \tag{7.35}$$

Параметрами модели (7.35) служат: v_i, ε_{ik}, p_{ik}. Поскольку $\varepsilon_{ik} \longleftrightarrow p_{ik}$, то с (7.5) обычно связывают постановку динамических задач теории упругости в "*скоростях–напряжениях*".

§ 8. Условия совместности (сплошности) деформаций.

Основой для введенных в предыдущем параграфе тензоров деформаций $\hat{\mathscr{E}}$ (7.6) и $\tilde{\mathscr{E}}$ (7.7) служат соотношения (7.2):

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longleftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u} \\ \xi_i &= x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Эти соотношения изначально предполагают, что в динамической или статической модели упругого деформирования сплошной среды можно ввести такой параметр как вектор перемещений $\mathbf{u}$. Иными словами, предполагается, что такой параметр *существует*.

С другой стороны, само понятие деформации по существу связано с описанием *отображения* недеформированного состояния упругой сплошной среды в деформированное. Такое описание можно дать и без привлечения параметра $\mathbf{u}$.

Изучаемую сплошную упругую среду "до деформации" свяжем с материальным объемом D и локальной криволинейной системой координат $(\mathbf{y})$. Это означает, что в каждой материальной точке $M \in D$, $M = M(\mathbf{y})$ определен базис $\mathbf{e}_i$ (кобазис $\mathbf{e}^i$) и метрический тензор $G = G(\mathbf{y})$, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. В силу (1.3) задание локального базиса предполагает существование *отсчетной* системы координат $(\mathbf{x}) : x_i = x_i(\mathbf{y}) \longleftrightarrow y_i = y_i(\mathbf{x})$.

Процесс деформирования можно представить себе как непрерывный переход от системы координат $(\mathbf{y})$ (до деформации) к системе координат $(\mathbf{z})$ (после деформации). С материальной точкой $M \in D$, $M = M(\mathbf{z})$ свяжем локальный базис $\hat{\mathbf{e}}_i$ и метрический тензор $\hat{G} = \hat{G}(\mathbf{z})$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$. Будем считать, что проходящие через точку M координатные линии до деформации (касательные направления $\mathbf{e}_i$) и координатные линии после деформации (касательные направления $\hat{\mathbf{e}}_i$) состоят из одних и тех же материальных точек. Определение $\hat{\mathbf{e}}_i$ связано с заданием отсчетной системы $(\hat{\mathbf{x}})$. Равноправие выбора: $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x})$, либо $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{y})$ обеспечивается взаимооднозначным соответствием $(\mathbf{x}) \longleftrightarrow (\mathbf{y})$. Для определенности можно считать, что $(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x})$.

Здесь важно отметить, что коль скоро зафиксирована отсчетная система координат $(\mathbf{x})$, то только одна из систем $(\mathbf{y})$ или $(\mathbf{z})$ может быть произвольной. Именно, если задана система $(\mathbf{y})$, то $(\mathbf{z})$ определится деформацией и наоборот. В отсчетной системе $(\mathbf{x})$ материальная точка $M \in D$ до и после деформации имеет разные координаты. Поэтому в системе $(\mathbf{x})$ деформацию можно описать и как отображение $D(\mathbf{y})$ (до деформации) в $\hat{D}(\mathbf{z})$ (после деформации).

Недеформированному состоянию (система $(\mathbf{y})$) соответствует фундаментальная квадратичная форма (2.24):

$$|d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta. \tag{8.2}$$

Задание $g_{\alpha\beta}$ в (8.2) позволяет измерять расстояния ds_i между бесконечно близкими материальными точками, принадлежащими i–ой координатной линии (формула(2.26)), а также углы между $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ (формула(2.27)). Для деформированного состояния (система $(\mathbf{z})$):

$$|d\hat{\mathbf{r}}|^2 = d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dz^i dz^j. \tag{8.3}$$

Поэтому иными будут как расстояния вдоль координатных линий $d\hat{s}_i \neq ds_i$, так и углы между $\hat{\mathbf{e}}_i$ и $\hat{\mathbf{e}}_j$. Именно различие этих шести величин определяет деформацию в бесконечно малой окрестности материальной точки $M \in D$.

В соответствии с формулами преобразования контравариантных компонент (1.22) имеем

$$dz^i = \frac{\partial z_i}{\partial y_\alpha} dy^\alpha, \quad dz^j = \frac{\partial z_j}{\partial y_\beta} dy^\beta, \quad dy^\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} dz^i, \quad dy^\beta = \frac{\partial y_\beta}{\partial y_j} dz^j$$

Тогда либо

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 - ds^2 &= \hat{g}_{ij} dz^i dz^j - g_{ij} dy^i dy^j = \\ &= (\hat{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial z_\beta}{\partial y_j} - g_{ij}) dy^i dy^j = (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) dy^i dy^j, \end{aligned} \tag{8.4}$$

либо

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 - ds^2 &= \hat{g}_{ij} dz^i dz^j - g_{ij} dy^i dy^j = \\ &= \Big(\hat{g}_{ij} - g_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial z_j}\Big) dz^i dz^j = (\hat{g}_{ij} - \tilde{g}_{ij}) dz^i dz^j. \end{aligned} \tag{8.5}$$

В (8.4) определен симметричный ковариантный тензор ранга два $\hat{\mathscr{E}}$ – тензор конечных деформаций Грина, а в (8.5) – тензор конечных деформаций Альманси $\tilde{\mathscr{E}}$, так что

$$2\hat{\varepsilon}_{ij} = \bar{g}_{ij} - g_{ij}, \quad \hat{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j), \tag{8.6}$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij} = \hat{g}_{ij} - \tilde{g}_{ij}, \quad \tilde{\mathscr{E}} = \tilde{\varepsilon}_{ij} (\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j). \tag{8.7}$$

Из (8.4), (8.6) вытекает, что

$$d\hat{s}^2 = ds^2 + 2\hat{\varepsilon}_{ij} dy^i dy^j.$$

Поэтому

$$\frac{d\hat{s}_i}{ds_i} = \sqrt{1 + \frac{2\hat{\varepsilon}_{ii}}{g_{ii}}}, \quad \text{по } i \text{ не суммировать.}$$

Следовательно, относительное удлинение l_i бесконечно малого линейного элемента ds_i вдоль $\mathbf{e}_i$ после деформации равно

$$l_i = \frac{d\hat{s}_i - ds_i}{ds_i} = \sqrt{1 + \frac{2\hat{\varepsilon}_{ii}}{g_{ii}}} - 1. \tag{8.8}$$

Если φ_{ij} – угол между направлениями $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$, то в соответствии с (2.27)

$$\cos\varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}, \quad \text{по } i, j \text{ не суммировать.}$$

Для $\cos\hat{\varphi}_{ij}$ в соответствии с (2.23), (2.26) и (8.4) получим

$$\cos\hat{\varphi}_{ij} = \frac{\hat{g}_{ij} dz^i dz^j}{d\hat{s}_i d\hat{s}_j} = \frac{g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} \dfrac{\partial z_\beta}{\partial y_i} dy^i dy^j}{\sqrt{\bar{g}_{ii} \bar{g}_{jj}} dy^i dy^j} = \frac{\bar{g}_{ij}}{\sqrt{\bar{g}_{ii} \bar{g}_{jj}}}.$$

Но по определению (8.6): $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + 2\hat{\varepsilon}_{ij}$. Поэтому

$$\cos\hat{\varphi}_{ij} = \frac{g_{ij} + 2\hat{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{(g_{ii} + 2\hat{\varepsilon}_{ii})(g_{jj} + 2\hat{\varepsilon}_{jj})}}. \tag{8.9}$$

Итак, изменение шести величин: $ds_i, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ в результате деформации бесконечно малой окрестности материальной точки $M \in D$ полностью описывается в терминах ковариантных компонент (параметров) тензора $\hat{\mathscr{E}}$ (8.6). Отсутствие деформации: $\hat{\mathscr{E}} = 0$ в силу (8.8), (8.9) приводит к $e_i = 0$ и $\varphi_{ij} = \hat{\varphi}_{ij}$. Этот вывод справедлив и при $\tilde{\mathscr{E}} = 0$.

Теперь предстоит сделать весьма существенное предположение. Именно, будем предполагать, что материальный объем D до деформации находится в евклидовом пространстве R^3, а процесс деформации не выводит из этого пространства. Иными словами

$$D(\mathbf{y}) \subset R^3, \quad \hat{D}(\mathbf{z}) \subset R^3. \tag{8.10}$$

Это означает, что для $(\mathbf{y})$ и $(\mathbf{z})$ можно выбрать единую отсчетную систему координат $(\mathbf{x})$. Если теперь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор материальной точки $M(\mathbf{y}) \in D$, до деформации, а $\hat{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор той же материальной точки $M(\mathbf{z}) \in \hat{D}$ после деформации, то базисы $\mathbf{e}_i$ в D и $\hat{\mathbf{e}}_i$ в $\hat{D}$ можно определить как естественные, т.е.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dy^i \longleftrightarrow \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}, \quad d\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_i dz^i \longleftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial z_i} \tag{8.11}$$

Как уже неоднократно отмечалось, точечное евклидово пространство R^3 можно отождествить с векторным пространством $V(\mathbf{w})$ и тогда в силу (8.10)

$$\mathbf{r} \in V(\mathbf{w}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in V(\mathbf{w}).$$

Поэтому *существует* вектор $\mathbf{u} \in V(\mathbf{w})$ такой, что

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{u}. \tag{8.12}$$

Следовательно, появляется возможность описать деформацию как отображение $(\mathbf{y}) \longrightarrow (\mathbf{z})$ в терминах вектора перемещений $\mathbf{u}$. Предварительно приведем аналитическую формулировку условий (8.10). Эти формулировки предполагают простые, но достаточно громоздкие выкладки. Здесь они опущены, а приведены лишь нужные для понимания промежуточные и окончательные результаты.

Как уже отмечалось в § 4, условия (8.10) равносильны следующим

$$R_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m} = 0, \quad \hat{R}_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m} = 0, \tag{8.13}$$

где $R_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m}$, $\hat{R}_{ij\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot m}$ – смешанные компоненты тензора Римана-Кристоффеля (4.37). Эти компоненты вычисляются с помощью (4.29) по известным $g_{\alpha\beta}$, $\hat{g}_{\alpha\beta}$. От (8.13) можно перейти (жонглирование индексами) к ковариантным компонентам и тогда

$$R_{ij\gamma m} = 0, \quad \hat{R}_{ij\gamma m} = 0, \tag{8.14}$$

Используемые в (8.14) компоненты задают ковариантный *тензор кривизны Римана*. Для этого тензора справедливы следующие свойства симметрии

$$\begin{gathered} R_{ij\gamma m} = -R_{ji\gamma m} \longrightarrow R_{ii\gamma m} = 0, \quad R_{ij\gamma m} = -R_{ijm\gamma} \longrightarrow R_{ij,\gamma\gamma} = 0, \\ R_{ij\gamma m} = R_{\gamma mij}, \quad R_{ij\gamma m} + R_{imj\gamma} + R_{i\gamma mj} = 0. \end{gathered} \tag{8.15}$$

Тензор кривизны в R^n имеет n^4 компонент, которые связаны соотношениями (8.15). Простой подсчет показывает, что все n^4 компонент могут быть выражены через $N(n) = n^2(n^2-1)/12$ "независимых" компонент. Для $n = 2$ $N(2) = 1$, а $N(3) = 6$. Эти шесть компонент в R^3 можно каким либо образом зафиксировать. Для отличных от нуля компонент $R_{ij\gamma m}$ в силу (8.15) имеем

$$\begin{aligned} &R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \\ &R_{2323} = -R_{3223} = -R_{2332} = R_{3232} \\ &R_{3131} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{1313} \\ &R_{1213} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = R_{3121} = R_{2131} \\ &R_{2321} = -R_{3221} = -R_{2132} = R_{2123} = R_{1232} = R_{3212} \\ &R_{3132} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = R_{2313} = R_{1323}. \end{aligned} \tag{8.15$'$}$$

Поэтому достаточно зафиксировать индексы первого столбца в только что приведенных соотношениях

$$ij\gamma m: \ 1212,\ 2323,\ 3131,\ 1213,\ 2321,\ 3132. \tag{8.16}$$

В первом уравнении (8.14) используется метрика g_{ij}, во втором – $\hat{g}_{ij}$. Связь между ними и $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ задают соотношения (8.6), (8.7). Поэтому от (8.14) можно перейти либо к

$$\bar{R}_{ij\gamma m} - R_{ij\gamma m} = 0, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \tag{8.17}$$

либо к

$$\hat{R}_{ij\gamma m} - \tilde{R}_{ij\gamma m} = 0, \quad \tilde{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} + 2\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}. \tag{8.18}$$

Из (8.17) и (4.37) окончательно получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\hat{\varepsilon}_{im}}{\partial y_j \partial y_\gamma} + \frac{\partial^2\hat{\varepsilon}_{j\gamma}}{\partial y_i \partial y_m} - \frac{\partial^2\hat{\varepsilon}_{jm}}{\partial y_i \partial y_\gamma} - \frac{\partial^2\hat{\varepsilon}_{i\gamma}}{\partial y_j \partial y_m} + 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\Gamma^\beta_{mi}\Gamma^\alpha_{\gamma j} - \Gamma^\beta_{i\gamma}\Gamma^\alpha_{mj}) + \\ +2(\Gamma^\beta_{j\gamma}N_{im\beta} + \Gamma^\beta_{mi}N_{j\gamma\beta} - \Gamma^\beta_{jm}N_{i\gamma\beta} - \Gamma^\beta_{i\gamma}N_{jm\beta}) = 0.\end{gathered} \tag{8.19}$$

Здесь

$$2N_{j\gamma\beta} = \frac{\partial\hat{\varepsilon}_{\gamma\beta}}{\partial y_j} + \frac{\partial\hat{\varepsilon}_{\beta j}}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial\hat{\varepsilon}_{j\gamma}}{\partial y_\beta},$$

$$ij\gamma m: \ 1212,\ 2323,\ 3131,\ 1213,\ 2321,\ 3132,$$

а символы Кристоффеля второго рода Γ^i_{mj} вычисляются с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$ из (4.29). Если же вместо (8.17) исходить из (8.18), то в (8.19) следует заменить $(\mathbf{y})$ на $(\mathbf{z})$, $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ на $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, а символы Кристоффеля вычислять с помощью метрики $\hat{g}_{\alpha\beta}$.

Остается добавить, что для (8.10) *условия совместности деформаций* (8.19) являются необходимыми и достаточными. Иногда о (8.19) говорят и как об *условиях сплошности деформаций*. Последнее название обычно связывают с существованием векторного поля перемещений $\mathbf{u}$ из (8.12).

Итак, пусть

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y_i}, \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial z_i}. \tag{8.20}$$

Из (8.20) получаем

$$\mathbf{e}_i + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i} = \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial y_i} = \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial z_\alpha}\frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i} = \hat{\mathbf{e}}_\alpha\frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}. \tag{8.21}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial z_\beta}{\partial y_j} = \bar{g}_{ij} &= \Big(\mathbf{e}_i + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i}\Big)\cdot\Big(\mathbf{e}_j + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j}\Big) = \\ &= g_{ij} + \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j} + \mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j},\end{aligned}$$

или

$$\bar{g}_{ij} - g_{ij} = 2\hat{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j} + \mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j}. \tag{8.22}$$

По определению(4.7):

$$\mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_i, \quad \mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y_i} = \nabla_i u_j. \tag{8.23}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} = \nabla_i u_m \mathbf{e}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u^m \mathbf{e}_m.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \tag{8.24}$$

Подстановка (8.23), (8.24) в (8.22) дает

$$2\hat{\varepsilon}_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \tag{8.25}$$

Сравнение с (7.6) показывает, что в (8.25) определен тензор конечных деформаций Грина, представленный в локальной криволинейной системе координат $(\mathbf{y})$ с естественным базисом (8.20). Если вместо (8.21) воспользоваться соотношением

$$\hat{\mathbf{e}}_i - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_i}, \tag{8.26}$$

то предыдущие рассуждения приводят к тензору конечных деформаций Альманси (7.7) в локальной криволинейной системе координат $(\mathbf{z})$ с естественным базисом (8.20):

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u_m \nabla_j u^m. \tag{8.27}$$

Особо следует отметить, что помимо знака перед квадратичными членами, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ отличается от $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и определением ковариантной производной, ибо в (8.27) вместо (8.23) положено

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \nabla_j u_i, \quad \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} = \nabla_i u_j. \tag{8.28}$$

Также следует отметить, что соотношения (8.25) (или (8.27)) для ковариантных компонент тензора деформации $\hat{\mathscr{E}}$ (или $\tilde{\mathscr{E}}$) справедливы только тогда, когда существует вектор перемещений $\mathbf{u}$. В то же время $\hat{\mathscr{E}}$ (или $\tilde{\mathscr{E}}$) определяется только метриками $\hat{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, независимо от предположения о существовании $\mathbf{u}$. Можно показать, что при $\hat{\varepsilon}_{ij}$ из (8.25) условия совместности деформаций (8.19) удовлетворяются тождественно, поэтому соотношениями (8.25) заданы интегралы уравнений совместности деформаций (8.19), т.е. общие решения этих уравнений, зависящие от трех "произвольных" функций u_i. Необходимые разъяснения относительно меры такой "произвольности" будут даны ниже при рассмотрении *геометрически линейных моделей* упругой сплошной среды.

С формальной точки зрения такая среда характеризуется предположениями (7.23). При деформации $D(\mathbf{y}) \longrightarrow \hat{D}(\mathbf{z})$ и $S(\mathbf{y}) \longrightarrow \hat{S}(\mathbf{z})$. Существенно, как будет показано ниже, что при этом должна сохраняться *ориентация*, т.е. деформации типа инверсии следует каким-либо способом исключить. В конкретных задачах динамики или статики $\hat{S}$ – поверхность деформируемого тела, на которой задаются граничные условия (7.29). Эта поверхность заранее неизвестна (приятным исключением являются задачи с краевым условием (7.29а)) и должна определяться в процессе решения исходной задачи. В предположениях (7.23): $z_i \simeq y_i$, поэтому, в частности, $\hat{S}(\mathbf{z}) \simeq S(\mathbf{y})$. Следовательно, пренебрегая величинами второго порядка малости, можно считать, что граничные условия (7.29) выполняются на недеформированной (известной) границе S. Далее, в тех же предположениях (7.23) можно считать, что

$$\mathbf{r} = y_i \mathbf{e}_i \simeq z_i \mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{r}} = z_i \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Поэтому с той же степенью точности можно не различать операторы ковариантного дифференцирования в (8.25) и в (8.27). И, наконец, предположения (7.23) позволяют как в (8.25), так и в (8.27) пренебречь квадратичными по $|\mathbf{u}|$ членами. Тем самым мы приходим к *тензору малых деформаций* $\mathscr{E}$ (сравни с (7.14)):

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{8.29}$$

Для этого тензора существенно упрощаются условия совместности деформаций (8.19) и мы приведем здесь их вывод. Сами условия (8.19) будем интерпретировать как необходимые для существования вектора перемещений $\mathbf{u}$. Именно в этой связи рассмотрим классическую задачу об определении вектора $\mathbf{u}$ по известному тензору малых деформаций $\mathscr{E}$ (8.29).

Введем в рассмотрение ковариантный кососимметричный (антисимметричный) тензор ранга два

$$2\omega_{ij} = \nabla_j u_i - \nabla_i u_j, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \tag{8.30}$$

Этому тензору (см. (4.48)) соответствует вектор $2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$ с ковариантными компонентами

$$\omega_1 = \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{31} = -\omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21}.$$

Соотношения (8.29), (8.30) дают

$$\nabla_j u_i = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \tag{8.31}$$

Теперь заметим, что в силу (7.32)

$$\mathbf{u}(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} dy^j + O(\delta^2).$$

Поэтому

$$du_\alpha \mathbf{e}^\alpha = d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} dy^j = \frac{\partial}{\partial y_j}(u^i \mathbf{e}_i) dy^j.$$

По определению (4.7):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}(u^i \mathbf{e}_i) = \nabla_j u^i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно,

$$du_i = \nabla_j u_i dy^j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dy^j. \tag{8.32}$$

Совершенно аналогично

$$d\omega_i = \nabla_j \omega_i dy^j. \tag{8.33}$$

Если теперь учесть (8.31), (8.32) и (4.48), то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = \nabla_j u_i \mathbf{e}^i = \varepsilon_{ji} \mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j. \tag{8.34}$$

Итак, если известен тензор ω_{ij} (или вектор $\boldsymbol{\omega}$), то вектор перемещений $\mathbf{u}$ определяется либо с помощью квадратур

$$u_i(M) = u_i(M_0) = \int\limits_{M_0}^{M} (\varepsilon_{i\alpha} + \omega_{i\alpha}) d\xi^\alpha, \tag{8.35}$$

либо, что в сущности одно и то же, интегрированием системы уравнений (8.34).

Как известно, необходимые условия интегрируемости системы (8.34) задаются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha}(\varepsilon_{ji}\mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\varepsilon_{\alpha i}\mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\alpha),$$

которые в покомпонентной записи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\nabla_3(\varepsilon_{i2}+\omega_{i2}) - \nabla_2(\varepsilon_{i3}+\omega_{i3}) = 0,\\
&\nabla_1(\varepsilon_{i3}+\omega_{i3}) - \nabla_3(\varepsilon_{i1}+\omega_{i1}) = 0,\\
&\nabla_2(\varepsilon_{i1}+\omega_{i1}) - \nabla_1(\varepsilon_{i2}+\omega_{i2}) = 0.
\end{aligned}\tag{8.36}$$

При заданном векторе $\boldsymbol{\omega}$ формулы (8.35) дают решение задачи об определении $\mathbf{u}$ по $\mathscr{E}$ в том случае, когда интеграл в (8.35) не зависит от пути интегрирования M_0M. Последнее возможно лишь тогда, когда du_i из (8.32) является полным дифференциалом. Необходимые условия полного дифференциала $d\mathbf{u} = du_i\mathbf{e}^i$ сводятся к (8.36).

Девять соотношений (8.36) содержат шесть компонент $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ и три компоненты ω_m. Исключение ω_m из (8.36) должно привести (и приводит!) к *шести* условиям, связывающим ε_{ij} (*условия совместности деформаций*). Далее мы покажем, что независимо от способа исключения ω_m из (8.36) шесть условий совместности деформаций определяются однозначно.

Как мы убедились, первоначальная задача о нахождении $\mathbf{u}$ по $\mathscr{E}$ свелась к задаче о нахождении $\boldsymbol{\omega}$ по $\mathscr{E}$. По определению (4.7)

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial y_j} = \nabla_j\omega_m\mathbf{e}^m. \tag{8.37}$$

Необходимыми условиями интегрируемости системы (8.37) являются

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\nabla_\alpha\omega_m\mathbf{e}^m) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(\nabla_j\omega_m\mathbf{e}^m). \tag{8.38}$$

Соотношения (8.38) совпадают с условиями полного дифференциала $d\boldsymbol{\omega}$:

$$d\boldsymbol{\omega} = d\omega\mathbf{e}^m, \quad d\omega_m = \nabla_j\omega_m dy^j, \quad m = 1,2,3.$$

Выпишем эти условия

$$\begin{aligned}
&\nabla_2\nabla_3\omega_m = \nabla_3\nabla_2\omega_m, \quad \nabla_3\nabla_1\omega_m = \nabla_1\nabla_3\omega_m,\\
&\nabla_1\nabla_2\omega_m = \nabla_2\nabla_1\omega_m, \quad m = 1,2,3.
\end{aligned}\tag{8.39}$$

Но, как нетрудно проверить,

$$\nabla_\alpha\omega_{km} = \nabla_m\varepsilon_{k\alpha} - \nabla_k\varepsilon_{\alpha_m}. \tag{8.40}$$

Соотношения (8.40) вместе с $\omega_1 = \omega_{23}$, $\omega_2 = \omega_{31}$, $\omega_3 = \omega_{12}$ позволяют записать условия (8.39) в терминах ковариантных компонент тензора малых деформаций $\mathscr{E}$. Итак, при $m = 1$ из (8.39), (8.40) имеем

$$\begin{aligned}
2\nabla_2\nabla_3\varepsilon_{23} &= \nabla_3\nabla_3\varepsilon_{22} + \nabla_2\nabla_2\varepsilon_{33}, && (1)\\
\nabla_3\nabla_3\varepsilon_{21} + \nabla_1\nabla_2\varepsilon_{33} &= \nabla_1\nabla_3\varepsilon_{23} + \nabla_3\nabla_2\varepsilon_{13}, && (2)\\
\nabla_2\nabla_2\varepsilon_{13} + \nabla_1\nabla_3\varepsilon_{22} &= \nabla_2\nabla_3\varepsilon_{21} + \nabla_1\nabla_2\varepsilon_{23}. && (3)
\end{aligned}$$

Аналогично при $m = 2$

$$
\left.
\begin{aligned}
\nabla_3\nabla_3\varepsilon_{21} + \nabla_2\nabla_1\varepsilon_{33} &= \nabla_3\nabla_1\varepsilon_{32} + \nabla_2\nabla_3\varepsilon_{31}, \quad (4)\\
2\nabla_1\nabla_3\varepsilon_{31} &= \nabla_1\nabla_1\varepsilon_{33} + \nabla_3\nabla_3\varepsilon_{11}, \qquad\quad (5)\\
\nabla_1\nabla_1\varepsilon_{32} + \nabla_2\nabla_3\varepsilon_{11} &= \nabla_2\nabla_1\varepsilon_{31} + \nabla_1\nabla_3\varepsilon_{21}. \quad (6)
\end{aligned}
\right. \tag{8.41}
$$

И, наконец, (8.39), (8.40) при $m = 3$ дают

$$
\begin{aligned}
\nabla_2\nabla_2\varepsilon_{13} + \nabla_3\nabla_1\varepsilon_{22} &= \nabla_3\nabla_2\varepsilon_{12} + \nabla_2\nabla_1\varepsilon_{32}, \quad (7)\\
\nabla_1\nabla_1\varepsilon_{32} + \nabla_3\nabla_2\varepsilon_{11} &= \nabla_1\nabla_2\varepsilon_{13} + \nabla_3\nabla_1\varepsilon_{12}, \quad (8)\\
2\nabla_1\nabla_2\varepsilon_{12} &= \nabla_1\nabla_1\varepsilon_{22} + \nabla_2\nabla_2\varepsilon_{11}. \qquad\quad (9)
\end{aligned}
$$

Поскольку $\nabla_i\nabla_j(\cdot) = \nabla_j\nabla_i(\cdot)$ (евклидовость!) и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, то в (8.41) *совпадают* соотношения: (2) и (4), (3) и (7), (6) и (8). Конкретный выбор тройки (2), (3), (6) или (4), (7), (8) не имеет существенного значения. Поэтому за условия совместности малых деформаций можно принять (см. также (8.15′)):

$$
\begin{aligned}
&\nabla_j\nabla_m\varepsilon_{ik} - \nabla_i\nabla_m\varepsilon_{kj} - \nabla_j\nabla_k\varepsilon_{im} + \nabla_i\nabla_k\varepsilon_{mj} = 0\\
&ikjm : 1213, 2323, 3131, 1213, 3132, 2321.
\end{aligned} \tag{8.42}
$$

Условия (8.42) являются также и достаточными для интегрируемости уравнений (8.37). Поэтому существует вектор $\boldsymbol{\omega}$, для компонент которого выполнено (8.40). Но тогда превращаются в тождества соотношения (8.36) – условия полного дифференциала $d\mathbf{u}$. Действительно, в силу (8.40) для первого соотношения (8.36) будем иметь

$$
\begin{aligned}
\nabla_3(\varepsilon_{i2} + \omega_{i2}) - \nabla_2(\varepsilon_{i3} + \omega_{i3}) &= \nabla_3\varepsilon_{i2} - \nabla_2\varepsilon_{i3} + \nabla_3\omega_{i2} - \nabla_2\omega_{i3} =\\
&= \nabla_3\varepsilon_{i2} - \nabla_2\varepsilon_{i3} + \nabla_2\varepsilon_{i3} - \nabla_i\varepsilon_{32} - \nabla_3\varepsilon_{i2} + \nabla_i\varepsilon_{23} = 0.
\end{aligned}
$$

Проверка тождественности двух оставшихся соотношений (8.36) проводится аналогично.

Если выполнены условия (8.42), то мы имеем все необходимое, чтобы представить решение задачи об определении вектора перемещений $\mathbf{u}$ по тензору малых деформаций $\mathscr{E}$ в явном виде. Пусть $d\xi^j = -d(y_j - \xi_j)$. Тогда формула интегрирования по частям дает

$$
\int\limits_{M_0}^{M} \omega_{ij} d\xi^j = \omega_{ij}(M_0)(y_i - y_j^0) + \int\limits_{M_0}^{M} \nabla_\alpha\omega_{ij}(y_i - \xi_j) d\xi^\alpha.
$$

Теперь следует учесть (8.40), чтобы из (8.35) получить *формулы Чезаро*:

$$
\begin{aligned}
u_i(M) = &u_i(M_0) + \omega_{ij}(M_0)(y_j - y_j^0) +\\
&+ \int\limits_{M_0}^{M} [\varepsilon_{i\alpha} + (y_j - \xi_j)(\nabla_j\varepsilon_{i\alpha} - \nabla_i\varepsilon_{\alpha j})] d\xi^\alpha.
\end{aligned} \tag{8.43}
$$