МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВВЕДЕНИЕ В КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Специальный курс

Авторы асс. ГОНЧАРОВ М.Е., доц. ЖЕЛЯБИН В.Н.

Новосибирск — 2014

Основные понятия

$1. Определение и примеры алгебр Ли

1.1. Определение алгебры. Векторное пространство A над полем F с бинарной операцией (умножением) $A \times A \mapsto A$, обозначаемой $(a, b) \mapsto ab$ называется алгеброй над полем F, если имеют место следующие аксиомы:

(Д) $(a + b)c = ab + bc$, $a(b + c) = ab + bc$ — (правая и левая дистрибутивность).

Алгебра A над полем F называется ассоциативной, если в ней выполняется следующая аксиома:

(Acc) $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность.

Примеры. Пусть V — векторное пространство над полем F. Обозначим через $\mathrm{End}(V)$ множество линейных преобразований пространства V. Тогда векторное пространство $\mathrm{End}(V)$ — ассоциативная алгебра относительно операции суперпозиции линейных преобразований. Напомним определение операции суперпозиции $(\phi \circ \psi)(v) = \phi(\psi(v))$.

Пусть размерность $\dim_F V = n$ и F_n — векторное пространство матриц размера порядка $n \times n$. Зафиксируем, некоторый базис пространства V. Тогда каждому линейному преобразованию ϕ пространства V можно сопоставить матрицу $[\phi]$ из F_n, при этом $[\phi \circ \psi] = [\phi][\psi]$, где $[\phi][\psi]$ — обычное произведение матриц. Таким образом, множество матриц F_n является ассоциативной алгеброй относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Зафиксируем числа i, j такие, что $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Тогда через e_{ij} будем обозначать матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит 1, а в остальных 0. Матрицы e_{ij} называютя матричными единицами.

1.2. Определение алгебры Ли. Алгебра L над F с умножением $(a, b) \mapsto [a, b]$ называется алгеброй Ли над полем F, если имеют место следующие аксиомы:

(L1) $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для всех $x, y, z \in L$. Данная аксиома называется тождеством Якоби.

Если в аксиому (L1) подставить $x + y$ вместо x, то из (Д) следует аксиома антикоммутативности:

(L1$'$) $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in L$.

Обратно, из аксиомы (L1$'$) получаем, что $2[x, x] = 0$. Поэтому, если характеристика поля F отлична от 2 ($char\, F \neq 2$), то из аксиомы (L1$'$) следует (L1).

Векторное подпространство K алгебры Ли L называется подалгеброй, если для всех $x, y \in K$ имеет место $[x, y] \in K$.

Примеры алгебр Ли. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F. Определим на векторном пространстве A новую операцию

$$[a, b] = ab - ba,$$

где ab — произведение элементов a, b в алгебре A. Тогда (проверить в качестве упражнения) векторное пространство A с операцией $[\,,]$ является алгеброй Ли, которую мы обозначим через A^-.

Таким образом, $\mathrm{gl}(V) = \mathrm{End}(V)^-$ — алгебра Ли. Она называется *полной линейной* алгеброй Ли. Если вместо алгебры $\mathrm{End}(V)$ мы рассмотрим алгебру матриц F_n над полем F, то алгебру Ли F_n^- обозначают через $\mathrm{gl}(n, F)$. Любая подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$ называется линейной алгеброй.

Теперь приведем примеры классических серий A_n, B_n, C_n, D_n ($n \geq 1$) алгебр Ли.

A_n: Рассмотрим $\mathrm{sl}(n + 1, F)$ подпространство матриц из F_{n+1} с нулевым следом, т.е.

$$\mathrm{sl}(n + 1, F) = \{x \in F_{n+1} | Tr(x) = 0\}.$$

Поскольку $Tr(xy) = Tr(yx)$, то $\mathrm{sl}(n+1, F)$ — подалгебра в $\mathrm{gl}(n+1, F)$. Алгебра $\mathrm{sl}(n+1, F)$ называется *специальной* алгеброй Ли.

Ясно, что $e_{ij} \in \mathrm{sl}(n+1, F)$ для $i \neq j$ и $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1} \in \mathrm{sl}(n+1, F)$ $(1 \leq i \leq n)$. Число таких матриц равно соответственно $(n+1)^2 - (n+1)$ и n. Поскольку матрицы e_{ij}, h_i, $i \neq j, 1 \leq i, j \geq n$, линейно независимы, то

$$\mathrm{dim}_F \mathrm{sl}(n+1, F) \geq (n+1)^2 - (n+1) + n = (n+1)^2 - 1 = \mathrm{dim}_F F_{n+1} - 1.$$

Следовательно, $\mathrm{dim}_F \mathrm{sl}(n+1, F) = n^2 + 2n$.

C_n: В алгебре матриц F_{2n} зафиксируем матрицу $s = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Рассмотрим

$$\mathrm{sp}(2n, F) = \{x \in F_{2n} | sx = -x^\top s\},$$

где $x^\top$ — матрица транспонированная к x. Нетрудно заметить (проверить в качестве упражнения), что $\mathrm{sp}(2n, F)$ подалгебра в $\mathrm{gl}(2n, F)$. Алгебра $\mathrm{sp}(2n, F)$ называется *симплектической* алгеброй Ли. Поскольку каждый элемент $x \in \mathrm{sp}(2n, F)$ можно представить матрицой $\begin{pmatrix} m & l \\ p & q \end{pmatrix}$, где $m, l, p, q \in F_n$, то из равенства $sx = -x^\top s$ получаем, $l^\top = l$, $p^\top = p$, $m^\top = -q$. Из последнего равенства следует, что $Tr(x) = 0$ для всех $x \in \mathrm{sp}(2n, F)$. Поэтому $\mathrm{sp}(2n, F)$ — подалгебра в $\mathrm{sl}(2n, F)$ Ясно, что матрицу $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in \mathrm{sp}(2n, F)$ можно записать в виде линейной комбинации матриц из $\mathrm{sp}(2n, F)$, а именно $e_{ii} - e_{i+n,i+n}$ $(1 \leq i \leq n)$ и $e_{ij} - e_{j+n,i+n}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$. Подматрицу l можно записать в виде линейной комбинации матриц из $\mathrm{sp}(2n, F)$, а именно $e_{i,i+n}$ $(1 \leq i \leq n)$ и $e_{i,j+n} + e_{j,i+n}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$. Число таких матриц равно $n + \frac{1}{2}n(n-1)$. С учетом матрицы p получаем, что

$$\mathrm{dim}_F \mathrm{sp}(2n, F) = n + n^2 - n + 2(n + \frac{1}{2}n(n-1)) = 2n^2 + n.$$

B_n: В алгебре матриц F_{2n+1} зафиксируем матрицу $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим

$$o(2n+1, F) = \{x \in F_{2n+1} | sx = -x^\top s\}.$$

Тогда $o(2n+1, F)$ подалгебра в $\mathrm{gl}(2n+1, F)$ и называется *ортогональной* алгеброй Ли. Каждый элемент $x \in o(2n+1, F)$ можно представить матрицой $\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & l \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$, где $a \in F$, b_1, b_2 — строки, c_1, c_2 — столбцы длины n и матрицы $m, l, p, q \in F_n$. Тогда из равенства $sx = -x^\top s$ получаем, что

$$a = 0, c_1 = -b_2^\top, c_2 = -b_1^\top, l^\top = -l, p^\top = -p, m^\top = -q.$$

Отсюда получаем, что $Tr(x) = 0$ для всех $x \in o(2n+1, F)$.

Базис алгебры $o(2n+1, F)$ состоит из матриц $e_{1,i+1} - e_{n+i+1,1}$, $e_{1,n+i+1} - e_{i+1,1}$ $(1 \leq i \leq n)$. К этим матрицам добавим матрицы виды $e_{ii} - e_{n+i,n+i}$ $(2 \leq i \leq n+1)$, $e_{i+1,j+1} - e_{n+i+1,n+j+1}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$, которые соответствуют равенству $q = -m^t$. А также матрицы $e_{i+n+1,j+1} - e_{j+n+1,i+1}$ и $e_{i+1,j+n+1} - e_{j+1,i+n+1}$ $((1 \leq i \neq j \leq n)$, которые соответствуют равенствам $p^\top = -p$ и $l^\top = -l$.

Таким образом,

$$\dim_F o(2n+1,F) = 2n^2+n.$$

D_n: В алгебре матриц F_{2n} зафиксируем матрицу $s = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим

$$o(2n,F) = \{x \in F_{2n} | sx = -x^t s\}.$$

Тогда $o(2n,F)$ подалгебра в $\mathrm{gl}(2n,F)$ и также называется ортогональной алгеброй Ли. Поскольку каждый элемент $x \in o(2n,F)$ можно представить матрицой $s = \begin{pmatrix} m & l \\ p & q \end{pmatrix}$, где $m,l,p,q \in F_n$, то из равенства $sx = -x^\top s$ получаем, $m^\top = -q$, $l^\top = -l$, $p^\top = -p$. Тогда базис алгебры $o(2n,F)$ образуют матрицы $e_{ii} - e_{i+n,i+n}$ $(1 \le i \le n)$, $e_{ij} - e_{j+n,i+n}$ $(1 \le i \neq j \le n)$, $e_{i,j+n} - e_{j,i+n}$, $e_{i+n,j} - e_{j+n,i}$ $(1 \le i \neq j \le n)$.

Таким образом,

$$\dim_F o(2n,F) = 2n^2-n.$$

1.3. Алгебра Ли дифференцирований. Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Ленейное преобразование $d : A \mapsto A$ называется дифференцированием алгебры A, если

$$d(ab) = d(a)b + ad(b).$$

Примеры. Пусть $A = F[x]$ — алгебра многочленов от одной переменной. Тогда $\frac{d}{dx}$ — обычное дифференцирование многочленов по переменной x является дифференцированием алгебры A. Дифференцированиями этой алгебры также являются отображения вида $f(x)\frac{d}{dx}$, где $f(x) \in F[x]$.

Пусть L — алгебра Ли и $x \in L$. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{ad}\, x : L \mapsto L,$$

заданное правилом $\mathrm{ad}\,\mathrm{x}(y) = [x,y]$. Ввиду тождества Якоби и тождества антикмутативности получаем,

$$\mathrm{ad}\, x([y,z]) = [x,[y,z]] = [y,[x,z]] + [[x,y],z] = [\mathrm{ad}\, x(y), z] + [y, \mathrm{ad}\, x(z)].$$

Отсюда следует, что $\mathrm{ad}\, x$ — дифференцирование алгебры L. Такие дифференцирования алгебры Ли называются внутренними. Дифференцирования, которые не являются внутренними называются внешними.

Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Через $\mathrm{Der}(A)$ обозначим векторное пространство всех дифференцирований алгебры A. Тогда нетрудно проверить, что $\mathrm{Der}(A)$ является подалгеброй алгебры Ли в $\mathrm{End}(A)^-$.

1.4. Структурные константы. Пусть L — произвольное вектроное пространство над полем F. Тогда L можно превратить в алгебру Ли, задав умножение формулой $[x,y] = 0$ для всех $x,y \in L$. Такая алгебра Ли называется абелевой. Если алгебра Ли L является конечномерным векторным пространством с базисом $e_1,\dots,e_n$, то

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k,$$

где $\gamma_{ij}^k \in F$. Элементы γ_{ij}^k называются структурными константами и удовлетворяют следующим соотношениям.

$$\gamma_{ii}^k = 0, \gamma_{ij}^k = -\gamma_{ij}^k,$$

$$\sum_k(\gamma_{ij}^k\gamma_{kl}^m+\gamma_{jl}^k\gamma_{ki}^m+\gamma_{li}^k\gamma_{kj}^m)=0.$$

1.5. Алгебры Ли малых размерностей. В этой части мы опишем алгебры Ли размерности ≤ 3.

Сначала дадим определение гомоморфизма алгебр Ли. Пусть L, L_1 — алгебры Ли и $\phi : L \mapsto L_1$ — линейное отображение. Тогда ϕ называется гомоморфизмом, если $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]_1$ для любых $x, y \in L$. Здесь $[\,,]_1$ — умножение в алгебре L_1. Гомоморфизм, являющейся биективным отображением называется изоморфизмом.

Размерность один. В этой размерности все алгебры Ли абелевы и изоморфны между собой.

Размерность два. Пусть L — алгебра Ли размерности 2. Если $[L, L] = 0$, то алгебра L — абелева. Все такие алгебры изоморфны.

Предположим L — неабелева. Тогда существуют $a, b \in L$ такие, что $[a, b] \neq 0$. Рассмотрим $[L, L]$ — квадрат алгебры L (Квадрат любой алгебры есть множество сумм произведений элементов). Пусть $x = [a, b]$. Ясно, что x образует базис пространства $[L, L]$, поскольку $\dim[L, L] = 1$. Дополним x элементом y до базиса L. Тогда $[x, y] = \alpha x$, где α ненулевой элемент из F. Умножая y на α^{-1} получим, что умножение в L задается следующим образом:

$$[x, x] = [y, y] = 0, [x, y] = x.$$

Таким образом, в размерности два существуют две не изоморфные алгебры Ли.

Размерность три. Мы классифицируем трехмерную алгебру Ли L в случае $L \neq [L, L]$. В случае $L = [L, L]$ мы покажем, что алгебра L — проста, т.е. не содержит подпространств инвариантных относительно преобразований $ad\,x$ и отличных от нулевого и самого пространства L. Подпространство I из L, инвариантное относительно преобразований $ad\,x$, т.е. $ad\,x(I) \subseteq I$ для всех $x \in L$, называется идеалом алгебры L.

1. Если $[L, L] = 0$, то алгебра L — абелева.

2. Пусть $\dim_F[L, L] = 1$. Тогда $[L, L] = Fz$. Если $[x, z] = 0$ для всех $x \in L$, то в L можно выбрать такой базис x, y, z, что

$$[x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 0.$$

В противном случае существует элемент $x \in L$ такой, что $[x, z] = z$. Дополним x, z элементом y до базиса L. Рассмотрим подпространство $K = Fx + Fz$. Так как $[L, L] \subset K$, то K — алгебра и $\mathrm{ad}\,y$ — является диффферецированием алгебры K. Тогда (см. упражнение 7) существует элемент $a \in K$, что $\mathrm{ad}\,y(b) = \mathrm{ad}\,a(b)$ для любого $b \in K$. Следовательно, $[y - a, x] = [y - a, z] = 0$. Поэтому в L можно выбрать такой базис x, y, z, что

$$[x, z] = z, [x, y] = [y, z] = 0.$$

Заметим, что полученные алгебры не изоморфны.

3. Пусть $\dim_F[L, L] = 2$. Предположим, что алгебра $[L, L]$ — неабелева. Тогда в $[L, L]$ можно выбрать базис такой x, y, что $[x, y] = x$. Пусть $z \in L\backslash[L, L]$. Тогда $\mathrm{ad}\,z$ — дифференцирование алгебры $[L, L]$. Повторяя рассуждения пункта 2 получаем, что в L существует базис x, y, z, что

$$[x, y] = x, [x, z] = [y, z] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$[L, L] = F[x, y] + F[x, z] + F[y, z] \subseteq Fx.$$

Поэтому $\dim_F[L, L] = 1$. Следовательно, $[L, L]$ — абалева.

Пусть $z \in L \setminus [L,L]$. Тогда $\operatorname{ad} z$ — невырожденное линейное преобразование $[L,L]$. Предположим, что собственные значения преоброзования $\operatorname{ad} z$ лежат в поле F. Тогда матрица преоброзования $\operatorname{ad} z$ имеет одну из следующих жордановых форм либо $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \neq 0$. Поэтому L обладает базисом x, y, z одного из следующих видов:

$$[x,y] = 0, [z,x] = \alpha x, [z,y] = \beta y;$$

$$[x,y] = 0, [z,x] = \alpha x + y, [z,y] = \alpha y.$$

В первом случае в L можно выбрать базис x, y, z так, что

$$[x,y] = 0, [x,z] = x, [y,z] = \gamma y, \text{ где } \gamma \in F \text{ и } \gamma \neq 0.$$

Во втором случае в L можно выбрать базис x, y, z так, что

$$[x,y] = 0, [x,z] = x + y, [y,z] = y.$$

Полученные алгебры не изоморфны.

4. Пусть $\dim_F [L,L] = 3$. Тогда L — простая алгебра.

Действительно, пусть I — идеал алгебры L . Если $\dim_F I = 2$, то $I = Fx + Fy$. Пусть x, y, z — базис L. Тогда

$$[L,L] = F[x,y] + F[x,z] + F[y,z] \subseteq I.$$

Поэтому $\dim_F I = 3$. Если $\dim_F I = 1$, то $I = Fr$. Пусть x, y, r — базис L. Поскольку $\dim_F [L,L] = 3$, то элементы $[x,r]$, $[y,r]$ — линейно независимы, при этом $[x,r], [y,r] \in I$. Поэтому $\dim_F I = 2$.

Таким образом, L не содержит собственных идеалов.

Приведем один из примеров алгебры L, у которой $\dim L = \dim [L,L]$. Пусть $L = \mathrm{sl}(2,F)$ и характеристика поля F не равна 2. Тогда матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют базис алгебры $\mathrm{sl}(2,F)$ и по определению умножения в $\mathrm{sl}(2,F)$ получаем,

$$[x,y] = h, [h,x] = 2x, [h,y] = -2y.$$

Следовательно, $\dim_F [L,L] = 3$. Поэтому $\mathrm{sl}(2,F)$ — простая алгебра Ли.

Упражнения

1. Пусть $L = \mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Для векторов $x, y \in L$ положим $[x,y]$ равным их векторному произведению. Доказать, что L с заданном умножением является алгеброй Ли.

2. Пусть A — антикоммутативная алгебра, т.е. в A справедливо тождество $[x,y] = -[y,x]$. Доказать, что для любых линейно зависимых элементов a, b, c алгебры A выполняется тождество Якоби.

3. Пусть V — векторное пространство размерности $2n$ и f — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на V. Тогда

$$\mathrm{sp}(V) = \{\phi \in \mathrm{End}(V) | f(\phi(v), u) = -f(v, \phi(u)) \text{ для всех } v, u \in V\}$$

является подалгеброй в $\mathrm{End}(V)^-$.

4. Пусть V — векторное пространство размерности $2n+1$ и f — невырожденная симметрическая билинейная форма на V. Тогда

$$o(V) = \{\phi \in \mathrm{End}(V) | f(\phi(v), u) = -f(v, \phi(u)) \text{ для всех } v, u \in V\}$$

является подалгеброй в $\mathrm{End}(V)^-$.

5. Привести пример алгебры Ли, у которой нет не нулевых внутренних дифференцирований.

6. Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Проверить, что $\mathrm{Der}(A)$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathrm{End}(A)^-$.

7. Доказать, что все дифференцирования двумерной неабелевой алгебры Ли внутренние.

$ 2. Идеалы, гомоморфизмы и представления алгебр Ли

2.1. Идеалы. Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом в L, если I — инвариантно относительно всех линейных преобразований $\mathrm{ad}\, x$, где $x \in L$. Другими словами для любого $x \in L$ и любого $y \in I$ получаем, $[x, y] = \mathrm{ad}\, x(y) \in I$. Очевидно, что сама алгебра L и нулевое подпространство являются идеалами алгебры L. Любой идеал алгебры L, отличный от этих двух идеалов, называется собственным идеалом.

Для подмножеств X, Y из L положим

$$[X, Y] = \{\sum_i [x_i, y_i] | x_i \in X, y_i \in Y\}.$$

Пусть I, J — два идеала алгебры L. Тогда сумма $I + J$ подпространств I и J является идеалом алгебры L и подпространство $[I, J]$ — идеал алгебры L. Как частный случай получаем, квадрат $[L, L]$ алгебры L является ее идеалом.

Определим центр $Z(L)$ алгебры L, полагая

$$Z(L) = \{z \in L | [z, x] = 0 \text{ для всех } x \in L\}.$$

Ясно, что $Z(L)$ — идеал в L.

Пусть X — подпространство в L. Тогда подпространство

$$C_L(X) = \{y \in L | \mathrm{ad}\, y(x) = [y, x] = 0 \text{ для всех } x \in X\}$$

называется централизатором X в L. В частности, $C_L(L) = Z(L)$.

Алгебра Ли L называется простой, если $L = [L, L]$ и в L нет собственных идеалов. Примером простой алгебры Ли является алгебра $\mathrm{sl}(2, F)$, если $char F \neq 2$. Центр простой алгебры Ли равен нулю.

Пусть I — идеал алгебры L. Тогда на фактор-пространстве L/I можно определить умножение, заданное следующей формулой

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

Если $x + I = x' + I$, то $x - x' \in I$. Поэтому $[x, y] - [x', y] \in I$. Следовательно,

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I = [x', y] + I = [x' + I, y + I].$$

Таким образом, операция умножения задана корректно. Как легко видеть, полученная алгебра является алгеброй Ли и называется факторалгеброй.

2.2. Гомоморфизмы и представления. Как было определено ранее, линейное отображение

$$\phi : L \mapsto L_1$$

алгебр Ли называется гомоморфизмом, если $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]_1$ для любых $x, y \in L$. Здесь $[\,,]_1$ — умножение в алгебре L_1. Как легко видеть, ядро $Ker\, \phi$ гомоморфизма ϕ — идеал алгебры L, а образ $Im\, \phi$ — подалгебра в L_1. Гомоморфизм ϕ называется мономорфизмом, если $Ker\, \phi = 0$. Гомоморфизм ϕ называется эпиморфизмом, если $Im\, \phi = L_1$.

Пусть I — идеал алгебры L. Тогда каноническое среда, отображение $\pi : L \mapsto L/I$, заданное правилом $\pi(x) = x + I$, является гомоморфизмом, при этом $Ker\, \pi = I$.

Теорема 1. (a) Пусть $\phi : L \mapsto L'$ — гомоморфизм алгебр Ли. Тогда $L/Ker\, \phi \cong Im\, \phi$, где $\cong$ обозначает изоморфизм алгебр. Если идеал I алгебры L содержит $Ker\, \phi$, то существует такой единственный гомоморфизм $\psi : L/I \mapsto L'$, что $\psi \circ \pi = \phi$, т.е следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

(б) Если I, J — два идеала в L и $I \subseteq J$, то J/I — идеал в L/I. Более того, $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

(в) Если I, J — два идеала в L то $(I+J)/J \cong I/(I\cap J)$. Это изоморфиз задается отображением $i + J \mapsto i + I \cap J$.

Пусть V — векторное пространство над полем F. Тогда *представлением* алгебры Ли L называется гомоморфизм $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$. Если $x \in L$, то $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{gl}(L)$. Поэтому отображение $\mathrm{ad} : L \mapsto \mathrm{gl}(L)$, заданное правилом $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}\, x$, является линейным отображением. Боле того, для $x, y, z \in L$ имеет место

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= (\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \mathrm{ad}\, x)(z) = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \\ &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] - [y,[x,z]] = \qquad (\mathrm{ad\,x} \text{ — дифференцирование }) \\ &= [[x,y],z] = \mathrm{ad}\,[x,y](z).\end{aligned}$$

Следовательно, ad — представление алгебры Ли L. Оно называется присоединенным представлением. Так как

$$Ker\, \mathrm{ad} = \{x \in L | \mathrm{ad}\, x = 0\} = \{x \in L | \mathrm{ad}\, x(y) = 0 \text{ для всех } y \in L\},$$

то $Ker\, \mathrm{ad} = Z(L)$. Таким образом, если L — простая алгебра Ли, то $Ker\, \mathrm{ad} = \{0\}$ и L изоморфна подалгебре в $\mathrm{gl}(L)$.

2.3. Автоморфизмы алгебр Ли. Пусть L — алгебра Ли. Тогда изоморфиз алгебры L в себя называется автоморфизмом. Множество $\mathrm{Aut}(L)$ всех автоморфизмов алгебры L образуют группу. Если $L \subseteq \mathrm{gl}(n, F)$, то любая невырожденная матрица $g \in \mathrm{gl}(n,F)$, для которой $gLg^{-1} = L$, индуцирует автоморфизм алгебры L, а именно $x \mapsto gxg^{-1}$. Пусть, например, $L = \mathrm{sl}(n, F)$. Тогда условие $gLg^{-1} = L$ выполняется автоматически, поскольку $Tr(gxg^{-1}) = Tr(x)$. Таким образом, мы получаем большой набор автоморфизмов алгебры L.

Пусть F — поле характеристики 0 и d — дифференцирование алгебры L, которое является нильпотентным линейным преобразованием. Тогда мы можем рассмотреть экспонету $\exp(d)$ линейного преобразования d. Как известно, если $d^{n+1} = 0$, то

$$\exp(d) = 1 + d + \frac{d^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n}{n!}.$$

Покажем, что $x \mapsto \exp(d)(x)$ является автоморфизмом алгебры L. Действительно, в силу правила Лейбница

$$d^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k d^i(x) d^{k-i}(y)$$

имеем

$$\frac{1}{k!} d^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i(x) \frac{1}{(k-i)!} d^{k-i}(y).$$

Несложной индукцией по числу k мы получаем,

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i(x) \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d^j(y) = \sum_{l=0}^{2k} \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{i!} d^i(x) \frac{1}{(l-i)!} d^{l-i}(y) = \sum_{l=0}^{2k} \frac{1}{l!} d^l(xy).$$

Поэтому

$$\exp(d)(x)\exp(d)(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d^i(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} d^j(y) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} d^k(xy) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k(xy) = \exp(d)(xy).$$

Следовательно, $\exp(d)$ — гомоморфизм. Поскольку $\exp(d) = 1 + \phi$, где ϕ — нильпотентное линейное преобразование, а именно $\phi = d + \frac{d^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n}{n!}$ и $\phi^{n+1} = 0$, то

$$1 = 1 + \phi^{n+1} = (1+\phi)(1 - \phi + \phi^2 - \phi^3 + \ldots + (-1)^n \phi^n).$$

Отсюда получаем, что $\exp(d) \in \mathrm{Aut}(L)$.

Пусть теперь $x \in L$ и $\mathrm{ad}\, x$ — нильпотентен. Тогда $\exp(\mathrm{ad}\, x)$ — автоморфизм алгебры L. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(L)$, порожденная автоморфизмами вида $\exp(\mathrm{ad}\, x)$, обозначается через $\mathrm{Int}(L)$. Ее элементы называютя внутрениими автомарфизмами. Если $\phi \in \mathrm{Aut}(L)$, то для любого $x \in L$ имеем $\phi\, \mathrm{ad}\, x \phi^{-1} = \mathrm{ad}\, \phi(x)$. Следовательно, $\phi(\exp \mathrm{ad}\, x)\phi^{-1} = \exp(\mathrm{ad})\, \phi(x))$. Поэтому $\phi\tau\phi^{-1} \in \mathrm{Int}(L)$ для любого $\tau \in \mathrm{Int}(L)$.

Упражнения

1. Доказать, что множество внутренних дифференцирований алгебры Ли L является идеалом в $\mathrm{Der}(L)$.

2. Пусть I, J — два идеала алгебры L. Доказать, что $[I, J]$ — идеал алгебры L.

3. Пусть L — алгебра Ли и I — идеал в L. Показать, что для любого $a \in L$, ограничение отображения $\mathrm{ad}\, a$ на I является дифференцированием алгебры I.

4. Доказать, что $\mathrm{sl}(n, F) = [\mathrm{gl}(n, F), \mathrm{gl}(n, F)]$. Следовательно, $\mathrm{sl}(n, F)$ — идеал в $\mathrm{gl}(n, F)$.

5. Пусть $\mathrm{s}(n, F)$ — множество скалярных матриц из $\mathrm{gl}(n, F)$. Доказать, что $Z(\mathrm{gl}(n, F)) = \mathrm{s}(n, F)$. Пусть $n > 2$. Доказать, что собственными идеалами в $\mathrm{gl}(n, F)$ являются $\mathrm{sl}(n, F)$ и $\mathrm{s}(n, F)$. Найти все идеалы алгебры $\mathrm{gl}(2, F)$ в случае $charF = 2$.

6. Доказать, что $Z(\mathrm{sl}(n, F)) = 0$, если $charF$ не делит n. В противном случае $Z(\mathrm{sl}(n, F)) = \mathrm{s}(n, F)$.

7. Доказать, что алгебра $\mathrm{sl}(3, F)$ — проста, если $charF \neq 3$.

$ 3. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

3.1. Разрешимость. Важную роль в теории алгебр Ли играет понятие разрешимости. Пусть L — алгебра Ли. Определим следующую последовательность идеалов:

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \ldots, L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], \ldots$$

Ясно, что

$$L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(n)} \supseteq \ldots.$$

Эта последовательность назывется производным рядом. Индукцией по числу m нетрудно показать, что $(L^{(n)})^{(m)} = L^{(n+m)}$.

Алгебра L назыается разрешимой, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого n.

Предложение 1. Пусть L — алгебра Ли. Тогда

(1) Если алгебра Ли разрешима, то разрешимы все ее подалгебры и гомоморфные образы.

(2) Если I такой идеал алгебры L, что алгебры I и L/I — разрешимы, то алгебра L — разрешима.

(3) Если I, J — разрешимые идеалы алгебры L, то $I + J$ — разрешимый идеал.

Доказательство. (1) Пусть L — разрешимая алгебра. Тогда $L^{(n)} = 0$ для некоторого числа n. Если K — подалгебра в L, то $K^{(n)} \subseteq L^{(n)} = 0$. Следовательно, подалгебра K — разрешима.

Пусть $\phi : L \mapsto M$ — гомоморфизм алгебр Ли. Несложной индукцией можно показать, что $\phi(L^{(n)}) = \phi(L)^{(n)}$. Поэтому из разрешимости L следует разрешимость $\phi(L)$.

(2) Пусть фактор-алгебра L/I — разрешима. Тогда $(L/I)^{(n)} = 0$. Рассмотрим канонический гоморфизм $\pi : L \mapsto L/I$. В силу (1) $\pi(L^{(n)}) = 0$. Поэтому $L^{(n)} \subseteq I$. Если идеал I — разрешим, то $I^{(m)} = 0$. Отсюда следует $L^{(n+m)} \subseteq (L^{(n)})^{(m)} \subseteq I^{(m)} = 0$.

(3) В силу теоремы из второго параграфа $(I + J)/J \cong I/I \cap J$. Тогда по пунктам (1) и (2) идеал $I + J$ — разрешим.

Теорема 1. Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Тогда в L существует наибольшей разрешимый идеал $\mathrm{Rad}(L)$ такой, что фактор-алгебра $L/\mathrm{Rad}(L)$ не содержит разрешимых идеалов.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Rad}(L)$ — максимальный разрешимый идеал в L. Тогда, в силу пункта (3) предложения 3.1, для любого разрешимого идеала I алгебры L получаем $I \subseteq \mathrm{Rad}(L)$. Пусть S — разрешимый идеал в фактор-алгебре $L/\mathrm{Rad}(L)$ и $\pi^{-1}(S)$ — его полный прообраз. Тогда по пункту (1) $(\pi^{-1}(S))^{(m)} \subseteq \mathrm{Rad}(L)$ для некоторого m. Следовательно, $\pi^{-1}(S)$ — разрешимый идеал алгебры L. Потому $\pi^{-1}(S) \subseteq \mathrm{Rad}(L)$ и $S = 0$.

Приведем пример разрешимой алгебры Ли. Пусть $\mathrm{t}(l, F)$ — множество верхнетреугольных матриц, т.е.

$$\mathrm{t}(l, F) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{gl}(l, F) | a_{ij} = 0, \text{ если } i > j\}$$

и $\mathrm{n}(l, F)$ — множество строго верхнетреугольных матриц, т.е.

$$\mathrm{n}(n, F) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{gl}(l, F) | a_{ij} = 0, \text{ если } i \geq j\}.$$

В $\mathrm{gl}(l, F)$ очевидны следующие включения

$$[\mathrm{t}(l, F), \mathrm{t}(l, F)] \subseteq \mathrm{n}(l, F) \subseteq \mathrm{t}(l, F) \text{ и } [\mathrm{n}(l, F), \mathrm{n}(l, F)] \subseteq \mathrm{n}(l, F).$$

Следовательно, $\mathrm{t}(l, F)$, $\mathrm{n}(l, F)$ являются подалгебрами в $\mathrm{gl}(l, F)$.

Лемма 1. Алгебра верхнетреугольных матриц разрешима.

Доказательство. Положим $\mathrm{n}_1 = \mathrm{n}(l, F)$. Для целого $k \geq 2$ определим

$$\mathrm{n}_k = \{a \in \mathrm{n}_{k-1} | a_{(i-k+1)i} = 0, i = k, \ldots l\}.$$

Тогда

$$\mathrm{n}_1 \supseteq \mathrm{n}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{n}_{l-1} \supseteq \mathrm{n}_l = 0.$$

Нетрудно видеть, что $[\mathrm{n}_k, \mathrm{n}_k] \subseteq \mathrm{n}_{k+1}$. Поэтому n_k — подалгебра в n_{k-1} для любого $k = 2, \ldots, l$.

Индукцией по s покажем, что $\mathrm{n}_1^{(s)} \subseteq \mathrm{n}_{s+1}$. Для $s = 1$ имеем

$$\mathrm{n}_1^{(1)} = [\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_1] \subseteq \mathrm{n}_2.$$

Пусть $\mathrm{n}_1^{(s-1)} \subseteq \mathrm{n}_s$. Тогда

$$\mathrm{n}_1^{(s)} = [\mathrm{n}_1^{(s-1)}, \mathrm{n}_1^{(s-1)}] \subseteq [\mathrm{n}_s, \mathrm{n}_s] \subseteq \mathrm{n}_{s+1}.$$

Поэтому $\mathrm{n}_1^{(s)} \subseteq \mathrm{n}_{s+1}$ для любого s. Следовательно, $\mathrm{n}^{(l-1)} \subseteq \mathrm{n}_l = 0$.

Отсюда получаем,

$$\mathrm{t}(l, F)^{(l)} \subseteq (\mathrm{t}(l, F)^{(1)})^{(l-1)} \subseteq [\mathrm{t}(l, F), \mathrm{t}(l, F)]^{(l-1)} \subseteq \mathrm{n}^{(l-1)} = 0.$$

3.2. Нильпотентность. Пусть L — алгебра Ли над полем F. Определим следующую последовательность идеалов:

$$L^0 = L, L^1 = [L, L], L^2 = [L^1, L], ..., L^n = [L^{n-1}, L], ...$$

Ясно, что

$$L^0 \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^n \supseteq \ldots$$

Эта последовательность называется нижним центральным рядом.

Алгебра L называется нильпотентной, если $L^n = 0$, для некоторого n. Нетрудно заметить, что $L^{(i)} \subseteq L^i$. Поэтому каждая нильпотентная алгебра Ли разрешима.

Предложение 1. Пусть L — алгебра Ли. Тогда

(1) Если алгебра Ли нильпотентна, то нильпотентны все ее подалгебры и гомоморфные образы.

(2) Если фактор-алгебра $L/Z(L)$ — нильпотента, то алгебра L — нильпотента.

(3) Ненулевая нильпотентная алгебра L имеет ненулевой центр.

Доказательство. Пункт (1) доказывается также как и соответствующей пункт предложения 3.1.

(2) Пусть фактор-алгебра $L/Z(L)$ — нильпотента. Тогда $L^n \subseteq Z(L)$ для некотрого числа n. Поэтому

$$L^{n+1} \subseteq [L^n, L] \subseteq [Z(L), L] = 0.$$

Следовательно, алгебра L — нильпотентна.

(3) Так как $L^n = [L^{n-1}, L]$, то из $L^n = 0$ следует, $L^{n-1} \subseteq Z(L)$. Поэтому последний ненулевой член нижнего центрального ряда содержится в $Z(L)$.

Заметим, что любой одночлен $[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_k]$ из L^k можно записать в виде $(-1)^{k-1}\mathrm{ad}x_k \ldots \mathrm{ad}x_2(x_1)$.

Предложение 2. Алгебра $\mathrm{n}(l, F)$ — нильпотентна. Алгебра $\mathrm{t}(l, F)$ не является нильпотентной.

Доказательство. Ясно, что $[\mathrm{n}_k, \mathrm{n}] \subseteq \mathrm{n}_{k+1}$ для любого $k \leq l$. Поэтому $\mathrm{n}^k \subseteq \mathrm{n}_k$. Следовательно, $\mathrm{n}^l = 0$.

Пусть $l > 1$ в алгебре $\mathrm{t}(l, F)$ рассмотрим матричные единицы e_{11} и e_{1l}. Поскольку $[e_{11}, e_{1l}] = e_{1l}$, то

$$e_{1l} = (\mathrm{ad}e_{11})^{k-1}(e_{1l}) = (-1)^{k-1}[\ldots[[e_{1l}, e_{11}], e_{11}], \ldots, e_{11}] \in \mathrm{t}(l, F)^k.$$

Поэтому $\mathrm{t}(l, F)^k \neq 0$ для любого k.

Условие нильпотентности алгебры Ли L эквивалентно тому, что в алгебре $\mathrm{End}(L)$ справедливо $\mathrm{ad}\, x_1 \dots \mathrm{ad}\, x_n = 0$ для любых $x_1, \dots, x_n \in L$. Поэтому, если $L^{n+1} = 0$, то $(\mathrm{ad}\, x)^n = 0$ для любого $x \in L$. Элементы $x \in L$, для которых преобразование $\mathrm{ad}\, x$ — нильпотентно, называются ad-нильпотеными. Оказывается справедлива

Теорема 1 (Энгель). Пусть у конечномерной алгебры Ли L все элементы являются ad-нильпотеными. Тогда алгебра L — нильпотентна.

Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть x — нильпотентный элемент ассоциативной алгебры A. Тогда $\mathrm{ad}\, x$ — нилпотентное преобразование пространства A.

Доказательство. Как легко видеть, в алгебре A выполняется равенство

$$(\mathrm{ad}\, x)^k(y) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i y x^{k-i},$$

где все a_i — целые числа. Поэтому из $x^n = 0$ следует, что $(\mathrm{ad}\, x)^{2n} = 0$.

Лемма 2. Пусть V — конечномерное векторное пространство и L — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$ состоящая из нильпотентных преобразоаваний пространства V. Тогда в V существует такой ненулевой вектор v, что $x(v) = 0$ для любого $x \in L$.

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по размерности пространства L.

Пусть $\dim L = 1$. Тогда $L = Fx$ и все собственные значения нильпотентого преобразования x равны 0. Поэтому в V существует такой ненулевой вектор v, что $x(v) = 0$.

Пусть K — подалгебра в L и $K \neq L$. Тогда $\dim K < \dim L$. Для элемента $k \in K$ рассмотрим преобразование $\mathrm{ad}\, k : L \mapsto L$. В силу леммы 1 преобразование $\mathrm{ad}\, k$ — нильпотентно. Поскольку K — инвариантное подпространство относительно преобразования $\mathrm{ad}\, k$, то $\mathrm{ad}\, k$ индуцирует нильпотентное преобразование $\overline{\mathrm{ad}\, k}$ на факторпространстве L/K. А именно,

$$\overline{\mathrm{ad}\, k}(x + K) = [k, x] + K.$$

Пространство, порожденное преобразованиями $\overline{\mathrm{ad}\, k}$, где $k \in K$ является подалгеброй $\mathrm{gl}(L/K)$ и состоит из нильпотентных преобразований. По индукционному предположению в L/K существует ненулевой элемент $\overline{x}$ такой, что $\overline{\mathrm{ad}\, k}(\overline{x}) = 0$ для любого $k \in K$. Поэтому существует элемент $x \in L \setminus K$, такой, что $[K, x] \subseteq K$.

Пусть теперь K — собственная подалгебра в L максимальной размерности и $x \in L \setminus K$, такой, что $[K, x] \subseteq K$. Тогда $Fx + K$ — подалгебра в L, строго содержащая K. Поэтому $L = Fx + K$. По индукционному предположению подпространство $U = \{v \in V | k(v) = 0 \text{ для любого } k \in K\}$ отлично от нуля. Если $u \in U$, то

$$k(x(u)) = x(k(u)) - [x, k](u) = 0.$$

Следовательно, подпространство U — инвариантно относительно преобразования x. Поскольку x — нильпотонтное преобразование, то в U найдется ненулевой вектор u такой, что $x(u) = 0$. Тогда $x(u) = 0$ для любого $x \in L$.

Доказательство теоремы Энгеля. Положим $\mathrm{ad}\, L = \{\mathrm{ad}\, x | x \in L\}$. Ввиду 2.2 $\mathrm{ad}\, L$ — подалгебра $\mathrm{gl}(L)$. По условию теоремы $\mathrm{ad}\, L$ состоит из нильпотентных преобразований. Поэтому ввиду леммы 2 в L существует такой ненулевой элемент z, что $[x, z] = \mathrm{ad}\, x(z) = 0$ для любого $x \in L$. Следовательно, $z \in Z(L)$ и $Z(L) \neq 0$. В этом случае $\dim L/Z(L) < \dim L$ и можно считать, что факторалгебра $L/Z(L)$ — нильпотентна. Тогда в силу пункта (2), доказанного предложения, алгебра L — нильпотентна.

Пусть V — векторное пространства размерности n. Тогда цепочка подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i$$

называется флагом в V. Флаг называется инвариантным относительно $\phi \in \mathrm{End}(V)$, если $\phi(V_i) \subseteq V_i$ для любого i.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathrm{n}(l, F)$. Положим $V = F^n$ — вектроное пространство строк длины n. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства V. Для $i \leq n$ через V_i обозначим подпространство в V, порожденное векторами $e_n, \ldots, e_{n-i+1}$. Очевидно, что $V_0 = 0, V_1, \ldots, V_n$ — флаг в V и $V_i x \subseteq V_{i-1}$ для любого $x \in \mathrm{n}(l, F)$.

Следствие 1. Пусть V — конечномерное пространство размерности и L — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$ состоящая из нильпотентных преобразований пространства V. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица любого линейного преобразования из L имеет строго верхнетреуголный вид.

Доказательство. По лемме 2 существует ненулевой вектор $v_n \in V$ такой, что $x(v_n) = 0$ для любого $x \in L$. Пусть $V_1 = Fv_n$. Тогда каждое преобразование x из L индуцирует нильпотентное преобразование $\overline{x}$ факторпространства V/V_1. А именно, $\overline{x}(v+V_1) = x(v)+V_1$. Можно считать, что V/V_1 имеет базис $v_1 + V_1, \ldots, v_{n-1} + V_1$ в котором матрица любого линейного преобразования $\overline{x}$, гдез $x \in L$ имеет строго верхнетреуголный вид. Поэтому $v_1, \ldots, v_n$ — искомый базис.

Следствие 2. Пусть L — конечномерная нильпотентная алгебра L и K — ненулевой идеал алгебры L. Тогда $K \cap Z(L) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $x \in L$. Тогда $\mathrm{ad}\, x$ — нильпотентное линейное преобразование пространства K. Поэтому $\mathrm{ad}\, L \subseteq \mathrm{gl}(V)$. Ввиду леммы 2 получаем $[L, k] = 0$, для некоторого ненулевого $k \in K$. Следовательно, $K \cap Z(L) \neq 0$.

Упражнения

1. Доказать, что алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда в L существует убывающая цепочка идеалов

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_n = 0$$

такая, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ факторалгебра L_i/L_{i+1} — абелева.

2. Доказать, что алгебра Ли L разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда алгебра $\mathrm{ad}\, L$ разрешима (нильпотентна).

3. Доказать, что неабелева двумерная алгебра Ли L разрешима, но нильпотентна.

4. Пусть L — алгебра Ли и I — идеал алгебры L. Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением n элементов из L (при некоторой растановки скобок), причем r из этих элементов содержаться I. Доказать, что $x \in I^r$.

5. Доказать, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли есть снова нильпотентный идеал.

6. Доказать, что в каждой конечномерной алгебре Ли содержится наибольший нильпотентный идеал.

7. Привести пример алгебры Ли L с наибольшим нильпотентным идеалом N, для которой факторалгебра L/N содержит ненулевой нильпотентный идеал.

$ 4 Теоремы Ли и Картана

4.1. Теорема Ли. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F. Рассмотрим линейное преобразование ϕ пространства V. Тогда ϕ имеет собственный вектор отвечающий собственному значению $\lambda \in F$. Обозначим через V_λ — подпространство собственных векторов преобразования ϕ с собственным значением λ. Если преобразование $\psi \in \mathrm{End}(V)$ коммутирует с ϕ, т.е. $\phi\psi = \psi\phi$, то подпостранство V_λ инвариантно относительно ψ. Тогда V_λ содержит собственный вектор преобразования ψ. Следовательно, ϕ и ψ имеют общий собственный вектор. Заметим, что подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$, порожденная преобразованиями ϕ и ψ абелева.

Таким образом, если L — абелева подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$. Тогда V содержит общий собственный вектор для всех преобразований из L.

Данное утверждение допускает следующее обобщение

Лемма 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 и L — разрешимая подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$. Тогда V содержит ненулевой общий собственный вектор для всех преобразований из L.

Доказательство. Так как алгебра L разрешима, то факторпространство $L/[L, L]$ ненулевое. Ввиду условия леммы

$$L = Fx_1 + \ldots + Fx_m + [L, L].$$

Пусть $K = Fx_2 + \ldots + Fx_m + [L, L]$. Тогда K — идеал в L и $L = Fx_1 + K$.

Для $\dim L = 1$ лемма очевидна. Поэтому можно считать, что V содержит ненулевой общий собственный вектор v для преобразований из K, т.е. $x(v) = \lambda(x)v$ для любого $x \in K$. Тогда функция $\lambda : K \mapsto F$, определенная правилом $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$, является линейной. Определим подпространство

$$W = \{w \in V | x(w) = \lambda(x)w \text{ для всех } x \in K\}.$$

Докажем, что подпространство W — инвариантно относительно всех преобразований из L. Зафиксируем ненулевые элементы $w \in W$ и $x \in L$. Пусть n — наименьшее целое положительное число, для которого система векторов $w, x(w), \ldots, x^n(w)$ — линейно зависима. Более того, для любого $y \in K$ имеем

$$y(x^i(w)) = \lambda(y)x^i(w) + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j x^j(w),$$

где $\alpha_j \in F$. Равенство справедливо для $i = 0$. Пусть $i > 0$. Тогда

$$y(x^i(w)) = y(x(x^{i-1}(v))) = x(y(x^{i-1}(v))) + [y, x](x^{i-1}(v))$$

$$= x(\lambda(y)x^{i-1}(w)) + x(\sum_{j=0}^{i-2} \gamma_j x^j(w)) + \lambda([y, x])x^{i-1}(v) + \sum_{j=0}^{i-2} \beta_j x^j(w) = \lambda(y)x^i(w) + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j x^j(w).$$

Следовательно, подпространство U, порожденное векторами $w, x(w), \ldots, x^{n-1}(w)$ — инвариантно относительно преобразований из K и $Tr(y|_U) = n\lambda(y)$, где $Tr(y|_U)$ — след ограничения преобразования $y \in K$ на подпраcтранства U.

Пусть y — произвольный элемент из K. Тогда $[y, x] \in K$ и $[y, x]|_U = [y|_U, x|_U]$. Поэтому, с одной стороны $Tr([y, x]|_U) = \lambda([y, x])n$, а с другой стороны $Tr([y, x]|_U) = Tr([y|_U, x_U]) = 0$. Следовательно, $\lambda([y, x]) = 0$ для любого $y \in K$.

Отсюда получаем, что для любых элементов $x \in L$, $w \in W$ и $y \in K$

$$y(x(w)) = x(y(w)) + [y, x](w) = \lambda(y)x(w) + \lambda([y, x])w = \lambda(y)x(w).$$

Следовательно, W — инвариантно относительно преобразование x_1. Поэтому в W содержится ненулевой собственный вектор w преобразования x_1. Тогда w — ненулевой общий собственный вектор для всех преобразований из L.

Следствие 1 (Теорема Ли.) Пусть V — конечномерное векторное пространство пространство над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 и L — разрешимая подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица любого линейного преобразования из L имеет верхнетреугольный вид.

Доказательство. Данное следствие доказывается также как следствие 3.2.1

Следствие 2. Пусть L — разрешимая алгебра Ли размерности n над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда в алгебре L существует последовательность идеалов

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$$

такая, что $\dim L_j = j$ при $j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим присоединенное представление $\mathrm{ad} : L \mapsto \mathrm{gl}(L)$ алгебры L. В силу предложения 3.1 $\mathrm{ad}(L)$ — разрешимая подалгебра в $\mathrm{gl}(L)$. Ввиду следствия 1 в L содержится базис $v_1, ...v_n$, в котором матрицы линейных преобразований $\mathrm{ad}\, x$ имеют верхнетреугольный вид. Тогда пространства $L_i = Fv_n + ... + Fv_{n+i-1}$ являются идеалами алгебры L. Очевидно, что последовательность $0 = L_0, L_1, ..., L_n$ удовлетворяет заключению следствия.

Следствие 3. Пусть L — конечномерная разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда для любого $x \in [L, L]$ линейное преобразование $\mathrm{ad}\, x$ — нильтопентно. В частности, подалгебра $[L, L]$ — нильтопентна.

Доказательство. В силу следствия 2 можно считать, что матрица любого преобразования $\mathrm{ad}\, x$ имеет верхнетреугольный вид. Если $x \in [L, L]$, то $\mathrm{ad}\, x = \sum_i [\mathrm{ad}\, x_i, \mathrm{ad}\, y_i]$. Поэтому матрица преобразования $\mathrm{ad}\, x$ является строго верхнетреугольной. Следовательно, преобразование $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентно. В силу теоремы Энгеля получаем, что подалгебра $[L, L]$ — нильтопентна.

4.2. Разложение Жордана-Шевалле. В этом пункте характеристика поля F — произвольная.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F. Линейное преобразование ϕ пространства V называется полупростым, если для каждого инвариантного подпространства U найдется такое инвариатное подпространство W, что $V = U \oplus W$. Это эквиваленино тому, что минимальный многочлен над F аннулирующий ϕ не имеет кратных корней. Если F — алгебраически замкнутое поле, то преобразование ϕ — полупростое тогда и только тогда, когда в некотором базисе пространства V преобразование ϕ имеет диагональную матрицу.

Теорема 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F и $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Тогда

1. Существуют единственные элементы $\phi_s, \phi_n \in \mathrm{END}(V)$ такие, что $\phi = \phi_s + \phi_n$, при этом ϕ_s — полупростое преобразование, ϕ_n — нильпотентное преобразование и ϕ_s, ϕ_n — коммутируют.

2. Существуют такие многчлены $p(t), q(t)$ от одной переменной без свободного члена, что $\phi_s = p(\phi)$, $\phi_n = q(\phi)$. Как следствие получаем, что ϕ_s, ϕ_n коммутируют с любым линейным преобразованием, с которым коммутирует ϕ.

3. Если $A \subseteq B \subseteq V$ — некоторые подпространства и ϕ отображает B в A, то ϕ_s и ϕ_n отображают B в A.

Сначала докажем, что справедлива

Лемма 1. Пусть $p_1(t), ..., p_n(t)$ — попарно взоимно простые многочлены от переменной t. Тогда для любых многочленов $q_1(t), ..., q_n(t)$ существует такой многочлен $p(t)$, что

$$p(t) \equiv q_i(t) (\operatorname{mod} p_i(t)).$$

Доказательство. Пусть $n = 2$. Так многочлены $p_1(t), p_2(t)$ — взоино просты, то существуют такие многочлены $f_1(t), f_2(t)$, что

$$p_1(t)f_1(t) + p_2(t)f_2(t) = 1.$$

Пусть $p(t) = q_1(t)p_2(t)f_2(t) + q_2(t)p_1(t)f_1(t)$. Тогда

$$p(t) = q_1(t) - q_1(t)p_1(t)f_1(t) + q_2(t)p_1(t)f_1(t) = q_1(t) + p_1(t)(-q_1(t)f_1(t) + q_2(t)f_1(t)) \equiv q_1(t)(\operatorname{mod} p_1(t)).$$

Аналогично $p(t) \equiv q_2(t)(\operatorname{mod} p_2(t))$.

Пусть $f(t) = p_2(t)...p_n(t)$ — произведение многочленов $p_2(t), ..., p_n(t)$. Тогда многочлены $p_1(t)$ и $f(t)$ — взоимно просты. В силу доказного выше существует многочлен $g_1(t)$, что

$$g_1(t) \equiv 1(\operatorname{mod} p_1(t))$$

и

$$g_1(t) \equiv 0(\operatorname{mod} f(t)) \equiv 0(\operatorname{mod} p_i(t))$$

для любого $i = 2, ..., n$. Аналогично существуют многочлены $g_2(t), ..., g_n(t)$, что

$$g_j(t) \equiv 1(\operatorname{mod} p_j(t))$$

и

$$g_j(t) \equiv 0(\operatorname{mod} p_i(t)) \equiv 0(\operatorname{mod} p_i(t))$$

при $i \neq j$.

Пусть $p(t) = q_1(t)g_1(t) + ... + q_n(t)g_n(t)$. Тогда многочлен $p(t)$ удовлетворяет заключению леммы.

Доказательство (Теоремы). Рассмотрим характеристический многочлен $\chi(t)$ проеобразования ϕ. Тогда $\chi(t) = (t - a_1)^{m_1}...(t - a_k)^{m_k}$, где $a_1, ..., a_k$ — различные собственные значения преобразования ϕ и $m_1, ..., m_k$ — их кратность. Пусть $V_i = \ker(\phi - a_i 1)^{m_i}$. Тогда

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_k \text{ — корневое разложение пространства } V,$$

при этом подпространство V_i инвариантно относительно ϕ и преобразование $\phi - a_i 1$ действует нильпотентно на подпространстве V_i.

Многчены $(t - a_1)^{m_1}, ..., (t - a_k)^{m_k}$ — попарно взоимно простые. Если 0 является собственные значения преобразования ϕ, то по лемме 1 существует многочлен $p(t)$, что

$$p(t) \equiv a_i(\operatorname{mod} (t - a_i)^{m_i}).$$

Если 0 не является собственные значения преобразования ϕ, то по лемме 1 существует многочлен $p(t)$, что

$$p(t) \equiv a_i(\operatorname{mod} (t - a_i)^{m_i}), p(t) \equiv 0(\operatorname{mod} t).$$

Положим $q(t) = t - p(t)$. Ясно, что $p(t)$ $q(t)$ — многочлены без свободного члена.

Пусть теперь $\phi_s = p(\phi)$ и $\phi_n = q(\phi)$. Тогда, в силу выбора многочлена $p(t)$, ограничение преобразования $\phi_s - a_i 1$ на подпространства V_i является нулевым. Поэтому ограничение $\phi_n = \phi - \phi_s$ на подпространства V_i равно $\phi - a_i 1$. Следовательно, преобразование ϕ_n действует нильпотентно на подпространстве V_i для любого $i = 1, ..., k$. Тогда ϕ_s — полупростое преобразование, а ϕ_n — нильпотентное преобразование. Очевидно, что ϕ_s, ϕ_n — коммутируют.

Утверждение 2 очевидным образом выполняетсь. Поскольку $p(t)$, $q(t)$ — многочлены без свободного члена, то также имеет место утверждение 3.

Пусть $\phi = s + n$ — другое разложение, для которого s, n — коммутируют. Тогда ϕ коммутирует с s и n. Поэтому ϕ_s коммутирует с s и ϕ_n коммутирует с n. Следовательно, преобразование $\phi_s - s$ — полупростое, а $\phi_n - n$ — нильпотентно. Поскольку $\phi_s - s = \phi_n - n$, то $\phi_s = s$ и $\phi_n = n$.

Лемма 2. Пусть V — конечномерное пространство, $x \in \mathrm{gl}(V)$ и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана. Тогда $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ — разложение Жордана для $\mathrm{ad}\, x$.

Доказательство. Поскольку x_n — нильпотеное преобразование, то, по лемме 3.2.1 преобразование $\mathrm{ad}\, x_n$ — нильпотентно.

Пусть $v_1, ..., v_n$ — базис пространства V, в котором матрица преобразования x_s имеет диагональный вид $diag(a_1, ..., a_n)$. Пусть e_{ij} — матричные единицы в $\mathrm{gl}(V)$, соответствующие базису $v_1, ..., v_n$, т.е. $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$. Тогда

$$(\mathrm{ad}\, x_s(e_{ij}))(v_k) = [x_s, e_{ij}](v_k) = x_s(e_{ij}(v_k))) - e_{ij}(x_s(v_k))) = \delta_{jk} a_i v_i - \delta_{jk} a_k v_i = \delta_{jk}(a_i - a_k) v_i.$$

Отсюда получаем, что $\mathrm{ad}\, x_s(e_{ij}) = (a_i - a_j) e_{ij}$. Следовательно, матрица преобразования $\mathrm{ad}\, x_s$ имеет диагональный вид в базисе e_{ij}. Поскольку $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}\, [x_s, x_n] = 0$, то $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ — разложение Жордана для $\mathrm{ad}\, x$.

Лемма 3. Пусть U — произвольная конечномерная алгебра над полем F, d — дифференцирование алгебры U и $d = d_s + d_n$ — разложение Жордана. Тогда d_s и d_n — также дифференцирования алгебры U.

Доказательство. Пусть $a, b \in F$. Индукцией по числу n докажем,

$$(d - (a+b) \cdot 1)^n (xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y)$$

для любых $x, y \in U$. Для $n = 1$ все очевидно. Пусть формула верна для всех $k < n$. Тогда

$$(d - (a+b) \cdot 1)^n (xy) = (d - (a+b) \cdot 1)(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-1-i} (y))$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (d - a \cdot 1)^{i+1} (x) (d - b \cdot 1)^{n-1-i} (y) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y).$$

Пусть теперь U_a и U_b — два корневых подпространства преобразования d, соотвествующие собственным значениям a и b. Тогда для $x \in U_a$ и $y \in U_b$ получаем,

$$(d - (a+b) \cdot 1)^n (xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (d - a \cdot 1)^i (x) (d - b \cdot 1)^{n-i} (y).$$

Следовательно, $(d - (a+b) \cdot 1)^n (xy) = 0$ для некоторого n. Поэтому $U_a U_b \subseteq U_{a+b}$.

Пусть $d = d_s + d_n$ — разложение Жордана и $x \in U_a$, $y \in U_b$. Тогда $d_s(x) = ax$, $d_s(y) = by$. Так как $xy \in U_{a+b}$, то $d_s(xy) = (a+b)xy$. Следовательно,

$$d_s(xy) = d_s(x)y + xd_s(y).$$

Поскольку V — сумма корневых подпространств, то d_s — дифференцирование алгебры U. Тогда $d_n = d - d_s$ — дифференцирование алгебры U.

4.3. Критерий Картана. В этом разделе мы докажим критерий разрешимости алгебры Ли в терминах следов ее линейных преобразований.

Лемма 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 и $A \subseteq B$ — подпространства в $\mathrm{gl}(V)$. Положим $M = \{x \in \mathrm{gl}(V) | [x, B] \subseteq A\}$. Пусть $x \in M$ такой элемент, что $Tr(xy) = 0$ для любого $y \in M$. Тогда элемент x — нильпотентен.

Доказательство. Пусть $x = s + n$ — разложение Жордана элемента x. Тогда матрица преобразования s имеет диагональный вид $diag(a_1, ..., a_m)$, в некотором базисе $v_1, ..., v_m$ пространства V. Рассмотрим векторное подпространство E пространства F над полем рациональных чисел Q, порожденное элементами $a_1, .., a_m$. Пусть E^* — дуальное пространство к E. Ввиду конечномерности E равенство $s = 0$ равносильно $E^* = 0$.

Пусть f — произвольный функционал из E^* и y — такой элемент из $\mathrm{gl}(V)$, что его матрица в базисе $v_1, ..., v_m$ имеет вид $diag(f(a_1), ..., f(a_m))$. Пусть e_{ij} — базис пространства $\mathrm{gl}(V)$, соотвествущий матричным единицам в базисе $v_1, ..., v_m$. Тогда в лемме 4.2.2 было установлено, что $\mathrm{ad}\, s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$. Аналогично $\mathrm{ad}\, y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$. Поскольку равенство $a_i - a_j = a_k - a_l$ влечет $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$, то по интерполяционной теореме Лагранжа существует многчлен $g(t)$ такой, что $g(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ для $i, j = 1, ..., m$. Тогда $\mathrm{ad}\, y = g(\mathrm{ad}\, s)$. Ясно, что $g(t)$ — многчлен без свободного члена. Аналогично элемент y является многочленом от s. Поэтому y коммутирует с элементом x, т.е.$yx = xy$. Тогда по теореме 4.2.1 y коммутирует n. Следовательно, yn — нильпотентен.

В силу леммы 4.2.2 $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, s + \mathrm{ad}\, n$ — разложение Жардана элемента $\mathrm{ad}\, x$. Поэтому по теореме 4.2.1 элемент $\mathrm{ad}\, s$ можно представить как многочлен без свободного члена от элемента $\mathrm{ad}\, x$. Тогда $\mathrm{ad}\, y$ является многочленом без свободного члена от элемента $\mathrm{ad}\, x$. Поскольку $\mathrm{ad}\, x(B) \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то $\mathrm{ad}\, y(B) \subseteq A$. Следовательно, $y \in M$ и по предположению $T(xy) = 0$. Отсюда получаем, что

$$Tr(xy) = Tr(sy) + Tr(ny) = Tr(sy) = \sum_i a_i f(a_i) = 0.$$

Применяя к обеем частям последниго равенства функционал f получим

$$\sum_i f(a_i) f(a_i) = 0.$$

Так как $f(a_1), ..., f(a_m)$ — рационанальные числа, то все $f(a_i) = 0$. Поэтому $f = 0$.

Таким образом, x — нильпотентный элемент.

Лемма 2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F и $x, y, z \in \mathrm{gl}(V)$. Тогда

$$Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z]).$$

Доказательство. Непосредственной проверкой получаем, что в алгебре $\mathrm{End}(V)$ справедливо

$$[y, x]z = [y, xz] - x[y, z].$$

Так как $Tr([y, xz]) = 0$, то

$$Tr([x, y]z) = -Tr([y, x]z) = -Tr([y, xz]) + Tr(x[y, z]) = Tr(x[y, z]).$$

Теорема 1 (Критерий Картана). Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 и L — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$. Предположим, что $Tr(xy) = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in [L, L]$. Тогда алгебра L — разрешима.

Доказательство. В силу теоремы Энгеля достаточно доказать, что x — ad-нильпотентен для любого элемента x из $[L, L]$. В силу леммы 3.2.1 достаточно доказать, что x — нильпотентен для любого элемента x из $[L, L]$.

В лемме 1 положим $A = [L, L]$, $B = L$. Тогда

$$M = \{x \in \mathrm{gl}(V) | [x, L] \subseteq [L, L]\}.$$

Следовательно, $L \subseteq M$.

Пусть $x, y \in L$ и z — произвольный элемент из M. Тогда в силу леммы 2 $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z])$. Поскольку $[y, z] \in [L, L]$, то по условию теоремы $Tr(x[y, z]) = 0$. Поэтому $Tr([x, y]z) = 0$. Следовательно, $Tr(xz) = 0$ для любых $x \in [L, L]$ и $z \in M$. Тогда по лемее 1, x — нильпотентен для любого $x \in [L, L]$.

Следствие 1. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Предположим, что $Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ для всех $x \in [L, L]$ и $y \in L$. Тогда алгебра L — разрешима.

Доказательство. Подпространство $\mathrm{ad}\, L$ — подалгебра в $\mathrm{gl}(L)$. Поскольку $\mathrm{ad}\,[a, b] = [\mathrm{ad}\, a, \mathrm{ad}\, b]$, то по условию полдучаем, $Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ для всех $x \in [\mathrm{ad}\, L, \mathrm{ad}\, L]$ и $y \in \mathrm{ad}\, L$. Поэтому алгебра $\mathrm{ad}\, L$ — разрешима. В силу предложения 3.1.1 алгебра L — разрешима.

Упражнения

1. Пусть F — поле характеристики p. В $\mathrm{gl}(p, F)$ рассмотрим матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 1 \\ 1 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}, y = diag(0, 1, 2, ..., p-1).$$

Проверить, что $[x, y] = x$. Кроме того, x и y не имеют общего собственного вектора.

2. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F и D — дифференцирование алгебры L. Доказать, что пространство $L_1 = L \oplus FD$ с умножением

$$[x + \alpha D, y + \beta D] = [x, y] + \beta(xD) - \alpha(yD)$$

является алгеброй Ли.

3. Пусть L — конечномерная разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики 0, N — ее наибольший нильпотетный идеал и D — дифференцирование алгебры L. Доказать, что $LD \subseteq N$.

4. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 и N — наибольший нильпотетный идеал алгебры L. Доказать, что $[L, Rad(L)] \subseteq N$.

Полупростые алгебры Ли

$5. Форма Киллинга

5.1. Критерий полупростоты. Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Симметрическая билинейная форма β, заданная на L называется *ассоциативной*, если

$$\beta([x,y],z)=\beta(x,[y,z])$$

для любых $x,y,z\in L$. Множество

$$S=\{x\in L|\beta(x,y)=0 \text{ для всех } x\in L\}$$

называется ядром формы β. Как легко видеть, ядро ассоциативной формы есть идеал алгебры L. Форма β называется невырожденной, если ядро формы равно 0. Пусть $e_1,...,e_n$ базис пространства L. Тогда форма β невырожденна в том и только в том случае, когда матрица $(\chi(e_i,e_j))$ невырожденна.

Пусть $x,y\in L$. Тогда положим

$$\chi(x,y)=Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y).$$

Тогда χ — симметрическая билинейная форма. В силу леммы 4.3.2 $\chi([x,y],z)=\chi(x,[y,z])$ для любых $x,y,z\in L$, т.е. форма χ ассоциативна. Форма χ называется формой Киллинга.

Вычислим форму Киллинга алгебры $\mathrm{sl}(2,F)$. Рассмотрим стандартный базис x,h,y алгебры $\mathrm{sl}(2,F)$. Тогда

$$\mathrm{ad}\, h=diag(2,0-2), \mathrm{ad}\, x=\left(\begin{array}{rrr} 0&0&0\\ -2&0&0\\ 0&1&0\end{array}\right), \mathrm{ad}\, y=\left(\begin{array}{rrr} 0&-1&0\\ 0&0&2\\ 0&0&0\end{array}\right).$$

Поэтому матрица формы χ равна $\left(\begin{array}{ccc} 0&0&4\\ 0&8&0\\ 4&0&0\end{array}\right)$. Определитель этой матрицы равен -128. Поэтому, если характеристика поля не равна 2, то форма χ — невырожденна.

Лемма 1. Пусть I — идеал алгебры L, χ — форма Киллинга на L и χ_I — форма Киллинга алгебры I. Тогда $\chi|_{I\times I}=\chi_I$, где $\chi|_{I\times I}$ ограничение χ на $I\times I$.

Доказательство. Пусть $e_1,...,e_k$ — базис пространства I. Дополним его элементами $e_{k+1},...,e_n$ до базиса пространства L. Пусть $x,y\in I$. Тогда $\mathrm{ad}\, x\mathrm{ad}\, y: L\mapsto I$. Матрица преобразования $\mathrm{ad}\, x\mathrm{ad}\, y$ в базисе $e_1,...,e_n$ имеет вид $\left(\begin{array}{cc} A&0\\ B&0\end{array}\right)$, где A — матрица ограничения преобразования $\mathrm{ad}\, x\mathrm{ad}\, y$ на I в базисе $e_1,...,e_k$. Поэтому

$$Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y|_I)=Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y).$$

Следовательно, $\chi(x,y)=\chi_I(x,y)$.

Напомним, что алгебра Ли L полупроста, если $\mathrm{Rad}(L)=0$. В силу определения радикала $\mathrm{Rad}(L)$ получаем, что L — полупроста тогда и только тогда, когда L не содержит ненулевых абелевых идеалов.

Теорема 1. Пусть L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Алгебра L полупроста тогда и только тогда, когда форма Киллинга χ на L невырожденна.

Доказательство. Пусть S — ядро формы χ. Тогда $\chi(x,y)=0$ для всех $x\in S$ и $y\in L$. Поэтому $\chi(x,y)=0$ для всех $x\in S$ и $y\in[S,S]$. Пусть $\mathrm{ad}\, S$ — подпространство, порожденное в $\mathrm{gl}(L)$ преобразованиями $\mathrm{ad}\, s$, где $s \in S$. Тогда $Tr(ab) = 0$ для всех $a \in \mathrm{ad}\, S$ и $b \in [\mathrm{ad}\, S, \mathrm{ad}\, S]$. Поэтому, по критерию Картана, алгебра $\mathrm{ad}\, S$ — разрешима. В силу предложения 3.1.1 алгебра S — разрешима. Поскольку S — идеал алгебры L, то $S \subseteq \mathrm{Rad}(L)$. Следовательно, если алгебра L полупроста, то форма χ — невырожденна.

Пусть теперь χ — невырожденна. Покажем, что L не содержит абелевых идеалов.

Действительно, пусть I — абелев идеал алгебры L. Предположим, что x, y — произвольные элементы из I и из L соответственно. Тогда $\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y : L \mapsto I$. Поскольку

$$(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y)^2(L) \subseteq (\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y)(I) \subseteq [x, I] = 0,$$

то $(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y)^2 = 0$. Следовательно, $Tr(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y) = 0$. Отсюда получаем, что $I \subseteq S$. Тогда $I = 0$.

5.2. Разложение полупростой алгебры Ли. Сначала дадим определение прямой суммы алгебр Ли. Пусть $L_1, ..., L_n$ — алгебры Ли. Рассмотрим $L = L_1 \oplus ... \oplus L_n$ — прямую сумму векторных пространств. Тогда зададим на L операции покомпонентного сложения и умножения, т.е.

$$[x_1 + ... + x_n, y_1 + ... + y_n] = [x_1, y_1] + ... + [x_n, y_n],$$

где $[x_i, y_i]$ — произведение элементов x_i, y_i в алгебре L_i. Легко видеть, что полученная таким образом алгебра, является алгеброй Ли. Подпространства $L_1, ..., L_n$ являются идеалами в L и $[L_i, L_j] = 0$ для $i \neq j$. В этом случае говорят, что алгебра L является прямой суммой идеалов $L_1, ..., L_n$.

Лемма 1 (Шура). Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и χ — форма Киллинга L. Пусть I — идеал алгебры L и $I^\perp = \{r \in I | \chi(r, x) = 0 \text{ для всех } x \in I\}$. Тогда $I^\perp$ — идеал в L и $I \cap I^\perp$ — разрешимый идеал.

Доказательство. В силу ассоциативности формы χ получаем, что $I^\perp$ — идеал в L. Кроме того,

$$\chi(I \cap I^\perp, I \cap I^\perp) = 0.$$

Тогда $Tr(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y) = 0$ для всех $x, y \in I \cap I^\perp$ и по следствию 4.3.1, алгебра $I \cap I^\perp$ — разрешима.

Теорема 1. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда алгебра L — полупроста в том и только в том случае, когда в L существуют простые идеалы $L_1, ..., L_n$, что $L = L_1 \oplus ... \oplus L_n$. Более того, любой простой идеал I алгебры L совпадает с одним из $L_1, ..., L_n$.

Доказательство. Предположим, что алгебра L — полупроста. Тогда по теореме 5.1.1 ее форма Киллинга χ — невырожденна. Если L не содержит идеалов, то все доказано. Поэтому можно считать, что в L содержится идеал L_1 минимальной размерности. По лемме 1 $L_1 \cap L_1^\perp$ — разрешимый идеал в L. Следовательно, $L_1 \cap L_1^\perp = 0$ и $L = L_1 \oplus L_1^\perp$ — прямая сумма идеалов. Отсюда получаем, что любой идеал алгебры L_1 соответственно, $L_1^\perp$ является идеалом алгебры L. Поэтому L_1 — простая алгебра и $L_1^\perp$ — полупростая алгебра. Применяя индукцию по размерности алгебры L получаем, что алгебра $L_1^\perp$ — прямая сумма простых идеалов $L_2, ..., L_n$. В этом случае L — прямая сумма простых идеалов $L_1, L_2, ..., L_n$. Пусть I — простой идеал алгебры L. Так как алгебра L — полупроста, то $[I, L] \neq 0$. Тогда найдется такой индекс i, что $[I, L_i] \neq 0$. Отсюда следует, что $I = [I, L_i] = L_i$.

Обратно, пусть L — прямая сумма простых идеалов $L_1, ..., L_n$. Ввиду ассоциативности формы χ, $[L_i, L_i] = L_i$ и $[L_i, L_j] = 0$ получаем, что

$$\chi(L_i, L_j) = \chi([L_i, L_i], L_j) = \chi(L_i, [L_i, I_j]) = 0$$

для $i \neq j$. Форма Киллинга χ_i алгебры L_i невырожденна. Тогда в силу леммы 5.1.1 форма χ — невырожденна. По теореме 5.1.1 получаем, что L — полупростая алгебра.

Следствие 1. Если алгебра L полупроста, то $L = [L, L]$ и ненулевые гомоморфные образы алгебры L — полупростые алгебры. Каждый идеал в алгебре L есть прямая сумма простых идеалов алгебры L.

5.3. Дифференцирования полупростой алгебры Ли. Пусть L — алгебра Ли. Тогда, ввиду упражнения 1 из параграфа 2, пространство $\operatorname{ad} L$ — идеал алгебры Ли $\operatorname{Der}(L)$, а именно

$$[d, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} d(x) \text{ для всех } x \in L, d \in \operatorname{Der}(L).$$

В этом пункте будет доказана

Теорема 1. Пусть L — конечномерная полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der}(L)$, т.е. каждое дифференцирование алгебры L — внутреннее.

Доказательство. Пусть $I = \operatorname{ad} L$. Так как алгебра L — полупроста, то присоединенное представление $\operatorname{ad} : L \mapsto I$ является изоморфизмом алгебр. Поэтому алгебра I — полупроста. Следовательно, по теореме форма Киллинга χ_I — невырожденна. По лемме 5.1.1, форма χ_I является ограничением на $I \times I$ формы Киллинга χ алгебры $\operatorname{Der}(L)$.

Пусть $e_1, ..., e_n$ — базис I и $f_1, ..., f_n$ — его дуальный базис относительно формы χ_I. Если $I^\perp$ — ортогональное дополнение I относительно χ, то для $x \in \operatorname{Der}(L)$ элемент $x - \sum_{i=1}^n \chi(x, e_i) f_i \in I^\perp$. Покажем, что $I^\perp = 0$.

По лемме 5.2.1, $I^\perp \cap I$ — разрешимый идеал в I. Следовательно, $I^\perp \cap I = 0$ ввиду теоремы 5.1.1. Пусть $d \in I^\perp$. Тогда для любого $y \in L$ получаем, что $\operatorname{ad} d(y) = [\operatorname{ad} y, d] \in I^\perp \cap I = 0$. Поэтому $d(y) = 0$ для любого $y \in L$. Следовательно, $I^\perp = 0$. Таким образом, $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der}(L)$.

5.4 Абстрактное разложение Жордана. Пусть L — конечномерная полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Пусть $x \in \operatorname{ad} L$. Тогда $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_s + (\operatorname{ad} x)_n$ — разложение Жордана для элемента $\operatorname{ad} x$ в $\operatorname{End}(L)$. По лемме 4.2.3 имеем $(\operatorname{ad} x)_s, (\operatorname{ad} x)_n \in \operatorname{Der}(L)$. В силу теоремы 5.3.1 получаем, что $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} s$ и $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} n$ для некоторых элементов $s, n \in L$. Поскольку $\operatorname{ad} [s, n] = [\operatorname{ad} s, \operatorname{ad} n] = 0$, то $[s, n] = 0$. Поскольку $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$ и L — полупростая алгебра Ли, то $x = s + n$. Такое представление элемента x называется абстрактным разложением Жордана.

Упражнения

1. Пусть L — нильпотентная алгебра Ли. Доказать, что форма Киллинга алгебры L тождественно равна нулю.

2. Алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда $[L, L]$ содержится в ядре формы Киллинга.

3. Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли. Доказать, что форма Киллинга алгебры L не равна нулю.

4. Вычислить детерминат формы Киллинга алгебры $\mathrm{sl}(3, F)$ в базисе $h_1, h_2, e_{ij}, i \neq j$.

5. Пусть A — конечномерная алгебра без ненулевых идеалов с нулевым умножением (т.е. для которых $I^2 = 0$). Доказать, что если A обладает невырожденной ассоциативной симметрической билинейной формой, то A можно представить в виде прямой суммы простых идеалов $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где $A_i A_j = 0,\ i \neq j$.

$6. Модули и их полная приводимость

В этом параграфе мы дадим определение модуля над алгеброй Ли и покажем, как связаны представления алгебры Ли и модули.

6.1. Модуль Пусть L — алгебра Ли. Векторное пространство V называется L-модулем, если на V задано действие $L \times V \mapsto V$, т.е $(x, v) \mapsto x \cdot v$, алгебры L, которое удовлетворяет следующим условиям:

(M1) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,

(M2) $x \cdot (av + bu) = a(x \cdot v) + b(x \cdot u)$,

(M3) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$, где $x, y \in L$, $v, u \in V$, $a, b \in F$.

Пусть $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ — представление алгебры Ли. Определим действие алгебры L на V, полагая $x \cdot v = \phi(x)(v)$. Тогда, относительно этого действия, пространство V является L-модулем. Обратно, если V — L-модуль, то отображение $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$, заданное правилом $x \cdot v = \phi(x)(v)$, является представлением алгебры L.

Подпространство L-модуля V называется подмодулем, если оно инвариантно относительно действия алгебры L. Очевидно, что нулевое подпространство и само V являются подмодулями модуля V. Пусть V, W — L-модули. Тогда отображение $\phi : V \mapsto W$ называется гомоморфизмом L-модулей, если $\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v)$. Ядро и образ гомоморфизма модулей является подмодулем. Гомоморфизм $\phi : V \mapsto W$ L-модулей называется изоморфизмом, если его ядро равно нулю и $\phi(V) = W$.

Модуль V называется неприводимым, если он содержит только два подмодуля: нулевой и сам V. Одномерное пространство, на котором задана структура L-модуля, будем считать неприводимым L-модулем. Представление $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ называется неприводимым, если соответствующий ему L-модуль неприводим.

Пусть V и W — два L-модуля. На прямой сумме $U = V \oplus W$ векторных пространств V и W определим действие алгебры L, полагая $x \cdot (v + w) = x \cdot v + x \cdot w$, где $v \in V$, $w \in W$. Тогда $V \oplus W$ является L-модулем. В этом случае говорят, что U– прямая сумма модулей. Данную конструкцию можно обобщить на любое семейство L-модулей.

Модуль V называется вполне приводимым, если он является прямой суммой неприводимых модулей.

Лемма 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем и представление $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ неприводимо. Тогда только скалярные линейные преобразования коммутируют со всеми линейными преобразованиями $\phi(x)$, где $x \in L$.

Доказательство. Поскольку представление ϕ — неприводимо, то V не имеет собственных инвариантных подпространств относительно преобразований $\phi(x)$, где $x \in L$.

Пусть g — линейное преобразование пространства V, коммутирующее со всеми преобразованиями $\phi(x)$, где $x \in L$. Пусть α — собственное значение преобразования g и V_α — подпространство собственных векторов для α. Тогда для любых $v \in V_\alpha$ и $x \in L$ имеем

$$g(\phi(x)(v)) = \phi(x)(g(v)) = \alpha\phi(x)(v).$$

Поэтому $\phi(x)(v) \in V_\alpha$. Следовательно, V_α — инвариантное подпространство относительно всех преобразований $\phi(x)$, где $x \in L$. Отсюда получаем, что $V_\alpha = V$. Таким образом, g — скалярное преобразование.

Приведем конструкцию, которая позволяет нам получить одни L-модулей из других. Определим на поле F структуру L-модуля, полагая $x \cdot 1 = 0$. Тогда данное действие задает структуру L-модуля на F.

Пусть V, W — L- модули. Определим на пространстве $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ действие алгебры L, полагая $(x \cdot g)(v) = x \cdot g(v) - g(x \cdot v)$. Тогда для $x, y \in L$ имеем

$$([x, y] \cdot g)(v) = [x, y] \cdot g(v) - g([x, y] \cdot v) = x \cdot (y \cdot g(v)) - y \cdot (x \cdot g(v)) - g(x \cdot (y \cdot v)) + g(y \cdot (x \cdot v))$$

$$= x\cdot(y\cdot g(v)) - x\cdot g(y\cdot v) - y\cdot(x\cdot g(v)) + y\cdot g(x\cdot v) + x\cdot g(y\cdot v) - g(x\cdot(y\cdot v)) + g(y\cdot(x\cdot v)) - y\cdot g(x\cdot v)$$

$$= x\cdot((y\cdot g)(v)) - y\cdot((x\cdot g)(v)) + (x\cdot g)(y\cdot v) - (y\cdot g)(x\cdot v) = (x\cdot(y\cdot g) - y\cdot(x\cdot g))(v).$$

Поэтому $[x,y]\cdot g = x\cdot(y\cdot g) - y\cdot(x\cdot g)$. Следовательно, $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ является L-модулем.

Пусть V^* — дуальное векторное пространство для V. Тогда $V^* = \mathrm{Hom}_F(V,F)$. Поэтому V^* является L-модулем относительно действия $(x\cdot f)(v) = -f(x\cdot v)$.

6.2. Элемент Казимира для представления. Пусть L — конечномерная алгебра Ли и $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ — представление алгебры L, где V — конечномерное векторное пространство. Тогда на L можно определить симметрическую билинейную форму $\beta(x,y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$. В силу леммы 4.3.2 форма β — ассоциативна. Поэтому ядро S формы β является идеалом алгебры L. Если представление ϕ — точное, т.е. $Ker\,\phi = 0$. Тогда $S \cong \phi(S)$ — изоморфизм алгебр. По критерию Картана алгебра S — разрешима. Если алгебра L — полупроста, то $S = 0$. Следовательно, форма β — невырожденна.

Пусть β — произвольная невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма на L. Тогда для базиса $x_1,...,x_n$ алгебры L существует двойственный базис $y_1,...,y_n$, т.е. $\beta(x_i,y_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть $x \in L$. Тогда $[x,x_i] = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ и $[x,y_i] = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j$. В силу ассоциативности формы β получаем,

$$a_{ik} = \sum_j a_{ij}\beta(x_j,y_k) = \beta([x,x_i],y_k) = -\beta(x_i,[x,y_k]) = -\sum_j b_{kj}\beta(x_i,y_j) = -b_{ki}.$$

Для алгебры Ли L и ее представления $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ положим $c_\phi(\beta) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i)$, где $x_1,...,x_n$ и $y_1,...,y_n$ — двойственные базисы относительно формы β. Тогда $c_\phi \in \mathrm{End}(V)$. Поскольку ϕ — представление алгебры Ли, то

$$[\phi(x),\phi(x_i)] = \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi(x_j),\ \ [\phi(x),\phi(y_i)] = \sum_{j=1}^n b_{ij}\phi(y_j).$$

Заметим, что в алгебре $\mathrm{End}(V)$ выполняется равенство

$$[x,yz] = y[x,z] + [x,y]z.$$

Поэтому для любого $x \in L$ имеем

$$[\phi(x),c_\phi(\beta)] = \sum_i \phi(x_i)[\phi(x),\phi(y_i)] + \sum_i [\phi(x),\phi(x_i)]\phi(y_i) = \sum_{ij} b_{ij}\phi(x_i)\phi(y_j) + \sum_{ij} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i)$$

$$= \sum_{ij}(b_{ij} + a_{ji})\phi(x_i)\phi(y_j) = 0.$$

Следовательно, линейное преобразование $c_\phi(\beta)$ коммутирует с каждым преобразованием $\phi(x)$, где $x \in L$.

Пусть L — полупростая алгебра Ли и $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ — точное представление алгебры L.Тогда $\beta(x,y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$ — невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма. Положим $c_\phi = c_\phi(\beta)$. Тогда

$$Tr(c_\phi) = \sum_i Tr(\phi(x_i)\phi(y_i)) = \sum_i \beta(x_i,y_i) = \dim L.$$

Линейное преобразование c_ϕ называется элементом Казимира представления ϕ.

Если представление ϕ — неприводимо и F — алгебраически замкнутое поле, то по лемме Шура c_ϕ — скалярное линейное преобразование. Тогда для любого $v \in V$ получаем,

$c_\phi(v) = \alpha v$, где $\alpha \in F$. Поэтому $Tr(c_\phi) = \alpha \dim V$. Следовательно, $\alpha = \dim L / \dim V$, т.е. $c_\phi(v) = (\dim L/\dim V)v$.

Рассмотрим изложенные выше рассуждения на примере алгебры $\mathrm{sl}(2,F)$. Пусть $L = \mathrm{sl}(2,F)$, $V = F^2$ — пространство строк длины 2 и ϕ — тождественное отображение L в $\mathrm{gl}(V)$. Тогда $\beta(u,w) = Tr(uv)$. Если характеристика поля F не равна 2, то форма β — невырожденна на L. Пусть x, h, y — стандартный базис алгебры L. Тогда двойственным к нему базисом является базис $y, \frac{1}{2}h, x$. Поэтому

$$c_\phi = xy + \frac{1}{2}h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = (\dim L/\dim V)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть L — полупростая алгебра над полем характеристики 0. Предположим, что представление $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ не является точным. Тогда, по следствию 5.2.1 $Ker\,\phi$ — прямая сумма простых идеалов алгебры L. Обозначим через L' — сумму остальных простых идеалов алгебры L. Тогда $L = L' \oplus Ker\,\phi$. Ограничение ϕ на L' является точным представлением алгебры L' и $\phi(L) = \phi(L')$.

6.3.Теорема Вейля. Прежде чем формулировать основной результат данного пункта докажем, что справедлива

Лемма. Пусть V — конечномерное вектороне пространство $\phi : V \mapsto V$ — линейное преобразование, причем $\phi^2(V) = \phi(V)$. Тогда $V = \phi(V) \oplus \ker\phi$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из V. Тогда $\phi(x) \in \phi(V) = \phi^2(V)$. Поэтому существует такой $y \in V$, что $\phi(x) = \phi(\phi(y))$. Следовательно, $\phi(x - \phi(y)) = 0$, т.е. $x - \phi(y) \in \ker\phi$. Отсюда получаем, что $V = \phi(V) + \ker\phi$. Поскольку $\dim V = \dim\phi(V) + \dim\ker\phi$, то $V = \phi(V) \oplus \ker\phi$.

Основным результатом это пункта является следующая

Теорема 1. Пусть V — ненулевое конечномерное векторное пространство над полем характеристики 0, и $\phi : L \mapsto \mathrm{gl(V)}$ — представление конечномерной полупростой алгебры Ли. Тогда ϕ — вполне приводимо.

Доказательство. Достаточно доказать, что любой L-подмодуль W можно дополнить L-подмодулем U до всего V, т.е. $V = U \oplus W$.

Пусть сначала W — $L-$подмодуль в V коразмерности один. Тогда фактор-модуль V/W одномерный, и элементы алгебры L действуют на V/W умножением на скаляр. Пусть v — порождающий векторного пространства V/W и $x, y \in L$ Тогда $x \cdot v = av$ и $y \cdot v = bv$, где $a, b \in F$. Поэтому

$$[x,y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = a(bv) - b(av) = 0.$$

Поскольку $L = [L, L]$, то L действует на V/W тривиально.

Предположим, что W имеет собственный $L-$подмодуль W'. Рассмотрим фактор-модуль V/W'. Тогда W/W' — $L-$подмодуль в V/W' коразмерности один. Индукцией по размерности V можно считать, что $V/W' = U/W' \oplus W/W'$, где U/W' — $L-$подмодуль в V/W'. Тогда U — $L-$подмодуль в V и W' — его $L-$подмодуль коразмерности один. Поэтому, по предположению индукции $U = X \oplus W'$, где X — $L-$подмодуль. Следовательно, $V = X + W$. Так как $\dim V = \dim U + \dim W - \dim W'$ и $\dim U = \dim X + \dim W'$, то $\dim V = \dim X + \dim W$. Тогда получаем, $V = X \oplus W$. Таким образом, можно считать, что L-подмодуль W неприводим. Не теряя общности, можно предполагать, что L действует точно на V. Рассмотрим элемент Казимира c представления ϕ. Тогда, в силу пункта 6.2, получаем $c(x \cdot v) = x \cdot c(v)$ для любых $x \in L$ и $v \in V$. Следовательно, $c(W)$ и $Ker\,c$ — L-подмодули L-модуля V. Ясно, что $c(W) \subseteq W$. Поэтому можно считать, что либо $c(W) = 0$, либо $c(W) = W$. Поскольку L действует на V/W тривиально, то c индуцирует на V/W нулевое преобразование. Поэтому $c(V) \subseteq W$. Заметим, что в силу пункта 6.2, $Tr(c) \neq 0$.

Следовательно, $c(V) \neq 0$. Так как модуль W — неприводим, то $c(V) = W$. Поскольку $\dim V/W = 1$, то из включения $W \subseteq \ker c$ следует, что $c(V) = W = \ker c$. Тогда $\dim V = 2$ и $\dim c(V) = \dim \ker c = 1$. Пусть u, v — базис пространства V и $v \in \ker c$. Вычисляя матрицу линейного преобразования c в этом базисе и ее след получим, $Tr(c) = 0$, что противоречит пункту 6.2. Следовательно, $W \not\subseteq \ker c$. Поэтому $c(W) = W$. Так как $c(V) = W$, то $c(V) = c^2(V)$. По доказанной выше лемме получаем, $V = W \oplus \ker c$.

Пусть теперь W — произвольный L-подмодуль в V. Рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}(V, W)$. В силу пукта 6.2. $\mathrm{Hom}(V, W)$ является L-модулем относительно действия

$$(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v).$$

Пусть

$$P = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) | f|_W = a\mathcal{E}, \text{ где } a \in F \text{ и } \mathcal{E} \text{ — тождественное отображение на } W\}.$$

Тогда для любого $f \in P$ и $w \in W$ имеем

$$(x \cdot f)(w) = x \cdot f(w) - f(x \cdot w) = a(x \cdot w) - a(x \cdot w) = 0.$$

Следовательно, P — $L-$модуль. Пусть

$$Q = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) | f|_W = 0\}.$$

Тогда Q — $L-$подмодуль в P. Кроме того, $L \cdot P \subseteq Q$. Если $f, g \in P$, то $f|_W = a\mathcal{E}$ и $g|_W = b\mathcal{E}$. Следовательно, $(bf - ag)|_W = 0$. Отсюда получаем, что $\dim P/Q = 1$. По доказанному выше $P = T \oplus Q$, где T — одномерный L-подмодуль с порождающим f. Умножая f на подходящий скаляр, можно считать, что $f|_W = \mathcal{E}$. Поскольку $x \cdot f = 0$ для любого $x \in L$, то f — L-гомоморфизм. Тогда $Ker\, f$ является L-модулем и $W \cap Ker\, f = 0$ так как $f|_W = \mathcal{E}$. Если $v \in V$, то $f(v) \in W$ и $f(f(v)) = f(v)$. Отсюда следует, что $v - f(v) \in Ker\, f$. Таким образом, $V = W \oplus Ker\, f$.

6.4. Еще раз об абстрактном разложении Жордана. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F и L — полупростая подалгебра Ли в $\mathrm{gl}(V)$. Пусть $x \in L$ и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана элемента x на полупростую и нильпотетные части. Возникает вопрос. Верно ли, что $x_s, x_n \in L$? Если это так, то из абрстрактного разложения $x = s + n$ следует $x_s = s$ и $x_n = n$. Цель этого пункта доказать, что $x_s, x_n \in L$.

Пусть L — произвольная алгебра Ли и A — подалгебра в L. Тогда подпространство

$$N_L(A) = \{x \in L | [x, a] \in A \text{ для любого } \quad a \in A\}$$

называется нормализатором подалгебры A в L. Нетрудно видеть, что $A \subseteq N_L(A)$ и $N_L(A)$ — подалгебра в L. Более того, A является идеалом $N_L(A)$.

Теорема 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 и L — полупростая подалгебра Ли в $\mathrm{gl}(V)$. Тогда L содержит полупростую и нильпотентную части разложения Жордана любого элемента x из L

Доказательство. Пусть $x \in L$ и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана. Тогда по лемме 4.2.2 $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ — разложение Жардана, здесь ad — оторбражение в $\mathrm{gl}(V)$. Так как $[x, L] \subseteq L$, то из свойств разложения Жордана получаем, $[x_s, L] \subseteq L$ и $[x_n, L] \subseteq L$. Поэтому $x_s, x_n \in N = N_{\mathrm{gl}(V)}(L)$.

Пусть W — произвольный L-подмодуль в V. Тогда положим

$$L_W = \{y \in \mathrm{gl}(V) | y(W) \subseteq W \text{ и } Tr(y|_W) = 0\}.$$

Так как алгебра L полупроста, то $L = [L, L]$. Поэтому $Tr(y|W) = 0$ для любого $y \in L$. Следовательно, $L \subseteq L_W$. Из свойств разложения Жордана получаем, что $x_n \in L_w$ и $x_s \in L_W$. Положим

$$A = N \cap (\cap_{W \subseteq V} L_W),$$

где W — L-подмодуль в V. Ясно, что $x_s, x_n \in A$, $L \subseteq A$ и A — подалгебра в $\mathrm{gl}(V)$. Поэтому $[A, L] \subseteq A$. Тогда A — L-модуль и по теореме Вейля получаем $A = L \oplus B$, где B — L-подмодуль в A. Отсюда следует, что

$$[B, L] \subseteq L \cap B = 0.$$

Пусть $y \in B$. Тогда y коммутирует со всеми преобразованиями из L. Следовательно, по лемме Шура преобразование y действует как скаляр на неприводимым L-подмодуле W из V, а так как $Tr(y|_W) = 0$, то $y(W) = 0$. По теореме Вейля V — сумма неприводимцых L-подмодулей. Поэтому $y(V) = 0$. Следовательно, $y = 0$. Таким образом, $B = 0$ и $L = A$. Отсюда получаем, что $x_s, x_n \in L$.

Следствие 1. Пусть L — полупростая конечномерная алдгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и $\phi : L \mapsto \mathrm{gl}(V)$ — конечномерное представление. Если $x = s + n$ — абстрактное разложение Жордана элемента $x \in L$, то $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ — разложение Жордана элемента $\phi(x)$ в $\mathrm{gl}(V)$.

Доказательство. Пусть $x = s + n$ — абстрактное разложение Жордана элемента $x \in L$. Тогда преобразоваине $\mathrm{ad}\, s$ — полупросто. Пуэтому L имеет базис из собственных векторов преобразоваине $\mathrm{ad}\, s$. Так как алгебра $\phi(L)$ изоморфна L, то $\mathrm{ad}\, \phi(s)$ — полупростое преобразоваине алгебры $\phi(L)$. Аналогично $\mathrm{ad}\, \phi(n)$ — нильпотентное преобразоваине. Так как преобразования $\mathrm{ad}\, \phi(s)$ и $\mathrm{ad}\, \phi(n)$ коммутируют, то $\mathrm{ad}\, \phi(x) = \mathrm{ad}\, \phi(s) + \mathrm{ad}\, \phi(n)$ — разложение Жордана элемента $\phi(x)$. Поэтому $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ — разложение Жордана элемента $\phi(x)$.

§9. Системы корней. Простые корни. Фундаментальные системы корней

9.1. Системы корней. В параграфе 8 мы показали, что каждой паре (L, H), где L — полупростая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, а H — максимальная торическая подалгебра L, можно сопоставить пару (Φ, E), где Φ — система корней алгебры L относительно H и E — конечномерно евклидово пространство со скалярным произведением $(\,,)$. При этом справедливы утверждения (a) — (d) теоремы 8.5.1.

Пусть теперь E — призвольное конечномерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\,,)$. Зафиксируем базис $e_1, ..., e_l$ пространства E. Пусть $\alpha = r_1e_1 + ... + r_le_l$ и $\beta = s_1e_1 + ... + s_le_l$. Определим на E отношение порядка $\succ$, полагая $\alpha \succ \beta$, если существует такое число $1 \le k \le l$, что $r_1 = s_1, ..., r_{k-1} = s_{k-1}$, а $r_k > s_k$. Будет писать, что $\alpha \prec \beta$, если $\beta \succ \alpha$.

Предложение 1. (a) Отношение $\succ$ является линейным порядком на E, т.е. для $\alpha, \beta \in E$ выполнено одно из трех соотношений $\alpha \succ \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha \prec \beta$.

(b) Если $\alpha \succ \beta$, то для любого $\gamma \in E$ имеем $\alpha + \gamma \succ \beta + \gamma$.

(c) Если $\alpha \succ \beta$, то $r\alpha \succ r\beta$ для любого положительного числа $r \in \mathbb{R}$ и $-\alpha \prec -\beta$.

Для элементов $\alpha, \beta \in E$ положим

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Тогда конечное подмножество Φ евклидова пространства E называется системой корней, а его элементы называются корнями, если

(1) Множество Φ порождает пространство E и не содержит 0.

(2) Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$ и среди произведения корня α на скаляр корнями являются только $\pm\alpha$.

(3) Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

(4) Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$.

Поскольку E — евклидово пространства, то между векторами $\alpha, \beta \in E$ определен угол θ, при этом $(\alpha, \beta) = ||\alpha|| ||\beta|| \cos\theta$, здесь $||\alpha||$ — длина вектора α в евклидовом пространстве E. Тогда

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{||\beta||}{||\alpha||}\cos\theta.$$

Поэтому $\langle \beta, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle = 4\cos^2\theta$. Так как $0 \le cos^2\theta \le 1$, то $0 \le \langle \beta, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle \le 4$. Ввиду условия (3) для $\alpha \ne \pm\beta$ и $||\beta||^2 \ge ||\alpha||^2$ имеем следующие возможности отроженные в таблице

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\|\beta\|\|^2/\|\|\alpha\|\|^2$
0	0	$\pi/2$	—
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Предложение 2. Пусть α, β — не пропорциональные друг другу корни. Если $(\alpha, \beta) > 0$, то $\alpha - \beta$ — корень. Если $(\alpha, \beta) < 0$, то $\alpha + \beta$ — корень.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение следует из первого, если корень β заменить на $-\beta$.

Пусть $(\alpha, \beta) > 0$. Тогда либо $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, либо $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Если $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, то по (4)

$$\alpha - \beta = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta \in \Phi.$$

Если $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, то по (4) и по (2), $\alpha - \beta \in \Phi$.

Пусть α и β — корни из Φ. Рассмотрим α — серию, порожденную корнем β, т.е. последовательность корней вида $\beta + i\alpha$, где $i \in \mathbb{Z}$. Пусть r, q — наибольшие нетрицательные цилые числа, для которых $\beta - r\alpha \in \Phi$, $\beta + q\alpha \in \Phi$. Тогда справедливо

Предложение 3. Для любого целого числа i, $-r \leq i \leq q$ элемент $\beta + i\alpha$ является корнем. Кроме того, $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$. Длина любой α-серии, порожденной корнем β, не превосходит 4.

Доказательство. Пусть i — такое целое число, что $-r \leq i \leq q$ и $\beta + i\alpha \notin \Phi$. Тогда в отрезки $[-r, q]$ найдуться такие целые числа p, s, что $p < s$, $\beta + p\alpha \in \Phi$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + s\alpha \in \Phi$. Тогда по предложению 1 получаем, $(\beta + p\alpha, \alpha) \geq 0$ и $(\beta + s\alpha, \alpha) \leq 0$. С другой стороны, $p(\alpha, \alpha) < s(\alpha, \alpha)$. Следовательно, $(\beta + p\alpha, \alpha) < (\beta + s\alpha, \alpha) \leq 0$. Получили противоречие. Отсюда следует, что $\beta + i\alpha$ — корень для любого целого $i \in [-r, q]$.

Положим $\gamma = \beta + q\alpha$. Тогда

$$\gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha = \beta - (q + \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha.$$

В силу условия (4) имеем $\beta - (q + \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha \in \Phi$. Следовательно, $-r \leq -(q + \langle \beta, \alpha \rangle)$ и $\langle \beta, \alpha \rangle \leq r - q$.

Пусть $\gamma = \beta - r\alpha$. Тогда

$$\gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha = \beta + (r - \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha.$$

Поэтому $\beta + (r - \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha \in \Phi$. Следовательно, $r - \langle \beta, \alpha \rangle \leq q$ и $r - q \leq \langle \beta, \alpha \rangle$. Отсюда получаем, $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$.

Поскольку $\beta + q\alpha \in \Phi$, то

$$-3 \leq \langle \beta + q\alpha, \alpha \rangle \leq 3.$$

Тогда $-3 \leq \langle \beta, \alpha \rangle + 2q \leq 3$. Поэтому $-3 \leq r - q + 2q \leq 3$. Следовательно,

$$-3 \leq r + q \leq 3.$$

Так как длина любой α-серии, порожденной корнем β равна $r + q + 1$, то длина не превосходит 4.

9.2. Простые корни. Зафиксируем на пространстве E отношение порядка $\succ$, для которого справедливо предложение 9.1.1. Положим $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi | \alpha \succ 0\}$ и $\Phi^- = \{\alpha \in \Phi | \alpha \prec 0\}$. Тогда $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ и $\Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset$.

Корень $\alpha \in \Phi^+$ называется простым, если его нельзя представить в виде $\beta + \gamma$, где β и γ принадлежат Φ^+. Очевидно, что наименьший положительный корень, относительно порядка $\succ$, является простым.

Предложение 1. Пусть α и β — различны просты корни. Тогда элемент $\alpha - \beta$ не является корнем и $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha - \beta$ — корень. Если $\alpha - \beta \succ 0$, то $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, что противоречит простоте корня α. Поэтому $\alpha - \beta \prec 0$ и в силу предложения 1, $\beta - \alpha \succ 0$. Тогда $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$, что противоречит простоте корня β. Следовательно, $\alpha - \beta$ не корень и по предложению 2 получаем, что $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Пусть Δ — подмножество всех простых корней в множестве Φ^+. Тогда справедливо

Предложение 2. (B1) Каждый корень β является целочисленной линейной комбинаций корней из Δ, все коэффициенты которой либо положительны, либо отрицательны.

(B2) Подмножество Δ является базисом E.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Достаточно рассмотреть случай положительных корней. Наименьший положительный корень является простым и поэтому представляется в виде целочисленной линейной комбинации с положительными коэффициентами корней из Δ. Пусть β — наиименьший, относительно порядка $\prec$, корень из Φ^+, который нельзя представляется в виде целочисленной линейной комбинации с положительными коэффициентами корней из Δ. Тогда корень $\beta \notin \Delta$. Следовательно, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+$ и $\beta_1 \prec \beta, \beta_2 \prec \beta$. В силу выбора β получаем, что корни β_1 и β_2 представляются в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами корней из Δ. Тогда корень β является целочисленной линейной комбинации с положительными коэффициентами корней из Δ.

Пусть теперь $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Покажем, что элементы $\alpha_1, ..., \alpha_k$ линейно независимы. Предположим противное. Пусть

$$r_1\alpha_1 + ... + r_s\alpha_s - r_{s+1}\alpha_{s+1} - ... - r_k\alpha_k = 0,$$

где $r_1, ..., r_s, r_{s+1}, ..., r_k$ — положительные действительные числа. Положим

$$\lambda = r_1\alpha_1 + ... + r_s\alpha_s = r_{s+1}\alpha_{s+1} + ... + r_l\alpha_k.$$

Тогда

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{i=1, j=1}^{s, k-s} r_i r_{s+j} (\alpha_i, \alpha_{s+j}).$$

В силу предложения 2 получаем, что $(\lambda, \lambda) \leq 0$ и поэтому $\lambda = 0$. Следовательно, $r_1\alpha_1 + ... + r_s\alpha_s = 0$. Так как $r_i > 0$ и $\alpha_i \succ 0$, то $r_1\alpha_1 + ... + r_s\alpha_s \succ 0$. Получили противоречие. Ввиду (B1) подмножество Δ является базисом E.

9.3. Фундаментальная система корней. Подможество Δ системы корней Φ называется фундаментальной системой корней, если Δ удовлетворяет условиям (B1) и (B2).

Предложение 1. Пусть Δ — фундаментальная система корней в Φ. Тогда Δ индуцирует на E отнощение линейного порядка $\succ$, относительно которого Δ — множество всех простых корней в множестве $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi | \alpha \succ 0\}$.

Доказательство. Пусть $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ — фундаментальная система корней в Φ. Тогда по (B2), $\alpha_1, ..., \alpha_l$ — базис пространства E. Поэтому Δ задает на E отношение линейного порядка $\succ$, отвечающей этому базису. Если $\alpha_i = \beta + \gamma$, где $\beta \in \Phi^+$ и $\gamma \in \Phi^+$, то по (B1), $\beta = \sum_j r_j\alpha_j$, где все $r_j \geq 0$ и $\gamma = \sum_j s_j\alpha_j$, где все $s_j \geq 0$. Отсюда получаем, что α_i — простой корень относительно порядка $\succ$. Пусть α — простой корень из Φ^+, не принадлежащей Δ. По предложению 9.2.2 пункт (B1), $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i$, где все $k_i \geq 0$ и $\alpha_i \in \Delta$. Тогда по предложению 9.2.1 получаям, $(\alpha_i, \alpha) \leq 0$. Поэтому $(\alpha, \alpha) = \sum_i k_i(\alpha_i, \alpha) \leq 0$ и $(\alpha, \alpha) = 0$. Следовательно, Δ — множество всех простых корней относительно порядка $\succ$.

Пусть Δ — фиксированная фундаментальная ситсема из Φ и $\succ$ — отношение линейного порядка, отвечающее системе Δ.

Предложение 2 Пусть α — положительный, не простой корень. Тогда в Δ найдется такой корень β, что $\alpha - \beta$ — положительный корень.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i$, где $\alpha_i \in \Delta$ и все $k_i \geq 0$. Так как α — не простой корень, то $k_i > 0$ и $k_j > 0$, для некоторых индексов i и j. Поэтому среди корней $\{\alpha_i\}$ найдется такой корень β, что $(\alpha, \beta) > 0$, в противном случае $(\alpha, \alpha) \leq 0$. Тогда в силу предложения 9.1.2 получаем, что $\alpha - \beta$ — корень. Следовательно, $\alpha - \beta$ — положительный корень.

Предложение 3. Пусть α — положительный корень. Тогда $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_k$, где все $\alpha_i \in \Delta$ не обязательно различны и каждая частиная сумма $\alpha_1 + ... + \alpha_s$ является корнем.

Доказательство. Если α — простой корень, то все доказано. Пусть α — положительный, не простой корень. Предположим, что для всех положительных корней $\gamma \prec \alpha$ предложение имеет место. По предложению 2 в Δ существует такой β, что $\alpha - \beta$ — положительный корень. Так как $\alpha - \beta \prec \alpha$, то $\alpha - \beta = \alpha_1 + ... + \alpha_{k-1}$, где все $\alpha_i \in \Delta$ и каждая частиная сумма $\alpha_1 + ... + \alpha_s$ является корнем. Тогда это верно и для корня α.

Пусть $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ — упорядочение фундаментальной системы Δ. Тогда $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ — числа Картана, а $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ — матрица Картана.

Предложение 4. Пусть $\Phi' \subset E'$ — система корней в евклидовом пространстве E' с фундаментальной системой корней $\Delta' = \{\alpha_1', ..., \alpha_l'\}$. Если $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i', \alpha_j' \rangle$ при $1 \leq i, j \leq l$, то биекция $\alpha_i \mapsto \alpha_i'$ фундаментальных систем Δ и Δ' единственным образом продолжатся до изоморфизма $\phi : E \mapsto E'$, который отображает Φ на Φ', причем скалярные произведения $(\ ,\ )$ и $(\ ,\ )_1$ на E и E' связаны равенством $(\alpha, \beta) = s(\phi(\alpha), \phi(\beta))_1$ для любых $\alpha, \beta \in E$, где s — дествительное число. В частности, система корней Φ однозначно определяется матрицей Картана.

Доказательство. Поскольку Δ — базис E и Δ' — базис E', то отображение $\phi : E \mapsto E'$, заданное правилом $\phi : \sum_i k_i \alpha_i \mapsto \sum_i k_i \alpha_i'$, является изоморфизмом векторных пространств. Покажем, что $\phi(\Phi) \subseteq \Phi'$.

Пусть β — такой положительный корень из Φ, что $\phi(\gamma) \in \Phi'$ для любого положительного корня $\gamma \prec \beta$ и $\langle \phi(\gamma), \phi(\alpha) \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle$ для любого $\alpha \in \Delta$. По предложению 7 существует такой корень $\alpha \in \Delta$, что $\gamma = \beta - \alpha$ — положительный корень в Φ. Тогда по преположению $\phi(\gamma) \in \Phi'$. Рассмотрим α-серию

$$\gamma - r\alpha, ..., \gamma, \gamma + \alpha, ..., \gamma + q\alpha,$$

порожденную корнем γ и α'-серию

$$\phi(\gamma) - r_1\alpha', ...\phi(\gamma), ..., \phi(\gamma) + q_1\alpha',$$

порожденную корнем $\phi(\gamma)$. В силу предложения 3 имеем $r - q = \langle \gamma, \alpha \rangle$ и $r_1 - q_1 = \langle \phi(\gamma), \alpha' \rangle$. Поскольку $\gamma \prec \beta$ и $\phi(\gamma) \in \Phi'$, то $\langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \phi(\gamma), \alpha' \rangle$. Следовательно, $r - q = r_1 - q_1$. Аналогично $\phi(\gamma) - r\alpha' \in \Phi'$ и поэтому $r \leq r_1$. Отсюда получаем, $q_1 \geq q$. Тогда $q_1 \geq 1$ и $\phi(\gamma) + \alpha'$ — корень. Так как $\phi(\beta) = \phi(\gamma) + \alpha'$, то $\phi(\beta) \in \Phi'$. Так как $\langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \phi(\gamma), \alpha' \rangle$, для любого $\alpha \in \Delta$ то $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \alpha' \rangle$ для любого $\alpha \in \Delta$.

Покажем, что $\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi$. Рассмотрим α-серию

$$\beta - r\alpha, ..., \beta, \beta + \alpha, ..., \beta + q\alpha,$$

порожденную корнем β и $\phi(\alpha)$-серию

$$\phi(\beta) - r_1\phi(\alpha), ...\phi(\beta), ..., \phi(\beta) + q_1\phi(\alpha),$$

порожденную корнем $\phi(\beta)$. По доказанному $\phi(\beta) - r\phi(\alpha), \phi(\beta) + q\phi(\alpha)$ — корни из Φ'. Поскольку ϕ — изоморфизм, то в силу предложения 9.1.3 $r = r_1$ и $q = q_1$. Поэтому

$$\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = r_1 - q_1 = r - q = \langle \beta, \alpha \rangle.$$

Определим на E' новое скалярное произведение $(\ ,\ )_2$, полагая $(\alpha, \beta)_2 = (\phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\beta))$ для любых $\alpha, \beta \in E'$. Тогда существует автоморфизм ψ векторного пространства E' такой, что $(\alpha, \beta)_2 = (\alpha, \psi(\beta))_1$ для любых $\alpha, \beta \in E'$.

Действительно, зафиксируем $y \in E'$. Тогда отображение $x \mapsto (x, y)_2$ является линейным функционалом. Как известно, существует единственный $y' \in E'$ такой, что $(x, y)_2 = (x, y')_1$. Поэтому отображение $\psi : y \mapsto y'$ является искомым автоморфизвом векторного пространства E'.

В силу доказаного

$$\frac{(\alpha,\beta)_2}{(\alpha,\alpha)_2}=\frac{(\alpha,\beta)_1}{(\alpha,\alpha)_1}$$

для любых $\alpha,\beta\in\Phi'$. Поэтому

$$\frac{(\alpha,\psi(\beta))_1}{(\alpha,\psi(\alpha))_1}=\frac{(\alpha,\beta)_1}{(\alpha,\alpha)_1}.$$

Теперь покажем, что $(\alpha,\beta) = s(\phi(\alpha),\phi(\beta))_1$. Если $(\alpha,\beta)_1 = 0$, то $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\phi^{-1}(\alpha),\phi^{-1}(\beta)\rangle{=}0$ и все доказано. Поэтому не ограничивая общности можно считать, что $(\alpha,\beta)_1\neq 0$. Тогда

$$\frac{(\alpha,\psi(\beta))_1}{(\alpha,\beta)_1}=\frac{(\alpha,\psi(\alpha))_1}{(\alpha,\alpha)_1}.$$

Ананолгично

$$\frac{(\alpha,\beta)_2}{(\beta,\beta)_2}=\frac{(\alpha,\beta)_1}{(\beta,\beta)_1}\quad\text{и}\quad\frac{(\alpha,\psi(\beta))_1}{(\alpha,\beta)_1}=\frac{(\beta,\psi(\beta))_1}{(\beta,\beta)_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{(\alpha,\psi(\alpha))_1}{(\alpha,\alpha)_1}=\frac{(\beta,\psi(\beta))_1}{(\beta,\beta)_1}$$

для любых $\alpha,\beta\in\Phi'$.

Положим $s=\frac{(\alpha,\psi(\alpha))_1}{(\alpha,\alpha)_1}$. Тогда s — константа и $(\alpha,\psi(\beta))_1 = s(\alpha,\beta)_1$ для любых $\alpha,\beta\in\Phi'$ Отсюда получаем, что $\psi(\beta)=s\beta$. Поэтому

$$(\alpha,\beta)=(\phi(\alpha),\phi(\beta))_2=(\phi(\alpha),\psi(\phi(\beta)))_1=s(\phi(\alpha),\phi(\beta))_1$$

для любых $\alpha,\beta\in\Phi$. Поскольку Φ линейно порождает E, то $(\alpha,\beta)=s(\phi(\alpha),\phi(\beta))_1$ для любых $\alpha,\beta\in E$.

Система корней Φ называется приводимой, если $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, где каждый корень из Φ_1 ортогонален каждому корню из Φ_2, т.е. $(\alpha,\beta)=0$ для всех $\alpha\in\Phi_1$ и $\beta\in\Phi_2$. Система корней Φ, которая не является приводимой называется неприводимой.

Предложение 5. Система корней Φ неприводима тогда и только тогда, когда ее фундаментальная система корненй Δ — неприводима, т.е. ее нельзя представить в виде объединения ортогональных подмножеств.

Доказательство. Пусть $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, где $(\Phi_1,\Phi_2)=0$. Тогда ясно, что Δ — приводима.

Пусть система Φ — неприводима. Докажем, что Δ также неприводима. Предположим, что $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ и $(\Delta_1,\Delta_2)=0$. Положим

$$\Phi_1=\{\beta\in\Phi|\beta=\sum_{\alpha_i\in\Delta_1}k_i\alpha_i\}\quad\text{и}\quad\Phi_2=\{\beta\in\Phi|\beta=\sum_{\alpha_i\in\Delta_2}k_i\alpha_i\}.$$

Тогда $(\Phi_1,\Phi_2)=0$. Покажем, что $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$.

Пусть β такой положительный корень из $\Phi\setminus(\Phi_1\cup\Phi_2)$, что для всех положителных корьней $\gamma\prec\beta$ имеет место $\gamma\in\Phi_1\cup\Phi_2$. В силу предложения 2 существует $\alpha\in\Delta$ и наибольшие целое число $k\geq 1$, что $\beta-k\alpha$ — положительный корень. Ясно, что $\beta-k\alpha\prec\beta$. Тогда $\beta-k\alpha\in\Phi_1\cup\Phi_2$. Пусть $\beta-k\alpha\in\Phi_1$. Тогда $\alpha\in\Delta_2$, иначе $\beta\in\Phi_1$. Поэтому $(\beta-k\alpha,\alpha)=0$ и $(\beta,\alpha)=k(\alpha,\alpha)$. По условию (4) пункта 9.1 имеем, что $\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha\in\Phi$. Следовательно, $\beta-2k\alpha\in\Phi$. В силу выбора k корень $\beta-2k\alpha$ — отрицательный. Тогда по условию (B1) предлжения 9.2.2 имеем $\beta=\sum_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma+2\alpha$, где $k_\gamma\leq 0$. В силу условия (B1) условия (4) на систему корней Φ получаем, $\beta=\alpha$, что противоречит выбору β. Значить $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$.

Пусть Δ — фундаментальная система корней в Φ. Для $\beta\in\Phi$ имеем $\beta=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\alpha$. Число $ht(\beta)=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha$ назавем высотой корьня β.

Предложение 6. Пусть система корней Φ неприводима и Δ — ее фундаментальная система корней. Тогда в Φ существует единственный корень β максимальный высоты, причем $(\alpha, \beta) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Если $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, то $\beta = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ и все $k_i > 0$.

Доказательство. Пусть теперь β — корень в Φ максимальный высоты. Тогда $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, где все $k_\alpha \geq 0$. Рассмотрим разбиение $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ и $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$. Пусть $\Delta_2 \neq \emptyset$. Тогда по предложению 9.2.1 $(\beta, \alpha) \leq 0$ для любого $\alpha \in \Delta_2$. В силу неприводимости Φ существуют $\alpha' \in \Delta_1$ и $\alpha \in \Delta_2$, что $(\alpha', \alpha) \neq 0$. Следовательно, $(\beta, \alpha) < 0$ и по предложению 9.2.1 $\beta + \alpha$ — корень. Тогда $ht(\beta + \alpha) > ht(\beta)$, что противоречит выбору корня β. Поэтому $\Delta_2 = \emptyset$ и $\beta = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, где все $k_i > 0$. Более того, в силу предложения 9.1.2 $(\beta, \alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Так как Δ — фундаментальная система корней, то $(\beta, \alpha) > 0$, для некоторого $\alpha \in \Delta$.

Пусть β_1 — другой корень в Φ максимальный высоты. Тогда $(\beta, \beta_1) > 0$. Поэтому по предложению 9.1.2 $\beta - \beta_1$ — корень. Если $\beta - \beta_1$ — положительный корень, то $ht(\beta) > ht(\beta_1)$. Если $\beta - \beta_1$ — отрицательный корень, то $ht(\beta) < ht(\beta_1)$. Следовательно, β — единственный корень в Φ максимальный высоты.

§9. Графы Кокстера и схемы Дынкина

В начале этой главы мы приведем практический алгоритм, позволяющий восстановить систему корней Φ по ее числам Картана. Для этого рассмотрим серии корней. Начнем с корней высоты 1, т.е. с простых корней, и рассмотрим пару различных простых корней α_i, α_j. В α_j-серии, порожденной корнем α_i, число r равно 0 (так как $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем ввиду предложения 9.4), поэтому число q равно $-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Это, в частности, позволяет нам установить все корни α высоты 2, а тогда и все числя $\langle \alpha, \alpha_j \rangle$. Для каждого корня высоты 2 можно легко найти число r в α_j серии корней, порожденной числом α, так как α_j можно вычесть не больше 1 раза. Тогда определяется и q, так как мы знаем величину разности $r - q = \langle \alpha, \alpha_j \rangle$. Повторив этот процесс достаточное число раз, мы в итоге получим все положительные корни.

Число l простых корней данной системы корней Φ называется *рангом* Φ. Как было показано $l = \dim E$. Система корней ранга 1 имеет один простой корень. Поэтому $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$. Обозначим эту систему корней через A_1. Матрица Картана A_1 состоит из одного элемента 2. Для $l = 2$ имеется четыре различных системы корней данного ранга. Это системы корней $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2 их мартицы Каратана соответственно равны

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Восстановим систему корней $\Phi = G_2$ по ее матрицы Картана. Пусть $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ — множество простых корней системы Φ.

Найдем корни высоты 2. Так как $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$, то $\gamma = \alpha + \beta$ является корнем из Φ. При этом $\langle \gamma, \alpha \rangle = 2 - 3 = -1$, $\langle \gamma, \beta \rangle = 2 - 1 = 1$.

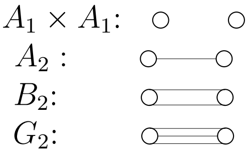
Найдем корни высоты 3. Рассмотрим α-серию корней, порожденную корнем γ. Так как $\gamma - \alpha = \beta$, то $r = 1$. Но $r - q = \langle \gamma, \alpha \rangle = -1$ и $q \geq 1$, то есть $\gamma_1 = \gamma + \alpha$ является корнем. При этом $\langle \gamma_1, \alpha \rangle = -1 + 2 = 1$, $\langle \gamma_1, \beta \rangle = 1 - 1 = 0$. Рассмотрим β-серию корней, порожденную корнем γ. Для нее также $r = 1$. Так как $r - q = \langle \gamma, \beta \rangle = 1$, то в этом случае $q = 0$ и $\gamma + \beta$ не является корнем. Итак, у нас есть только один положительный корень длины 3 это $\gamma_1 = \alpha + \beta + \alpha$.

Найдем все корни высоты 4. Для этого рассмотрим α-серию корней, порожденную корнем γ_1. Для нее $r = 2$. Найдем q: $r - q = \langle \gamma_1, \alpha \rangle = 1$, следовательно, $q = 1$ и вектор $\gamma_2 = \gamma_1 + \alpha$ является корнем. Рассмотрим теперь β серию корней, порожденную корнем γ_1. Так как $\gamma_1 - \beta = 2\alpha$ не является корнем, то r в этом случае равно 0. Найдем q: $r - q = \langle \gamma_1, \beta \rangle = 0$, то есть $\gamma_1 + \beta$ не является корнем.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что вектор $\gamma_2 + \alpha$ не является корнем, а вектор $\gamma_3 = \gamma_2 + \beta$ является корнем высоты 5, при этом ни $\gamma_3 + \alpha$ ни $\gamma_3 + \beta$ корнем являться не будет. Таким образом, множество положительных и корней в данном случае будет $\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \alpha, \alpha + \beta + \alpha + \alpha, \alpha + \beta + \alpha + \alpha + \beta\}$.

Пусть Φ — произвольная система корней и $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ — ее фундаментальная система корней. Если α,β — различные положительные корни, то, как мы знаем, $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$ или 3.

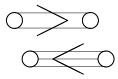
Назовем *графом Кокстера* системы Φ граф с l вершинами, в котором i-я и j-я вершины $(i \neq j)$ соединены $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ ребрами. Примеры:



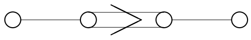
Если все корни имеют одинаковую длину, то граф Кокстера однозначно определяет числа $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$, поскольку в этом случае $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$. При наличии разных длин корней (например, в случае B_2, или G_2) граф Кокстера не говорит нам, какая из двух вершин соответствует короткому простому корню, а какая длинному, если эти вершины соединены двумя или тремя ребрами.

Когда в графе Кокстера для Φ встречается двойное или тройное ребро, мы можем добавить стрелку, указывающую на более короткий из двух корней. Эта дополнительная информация позволяет восстановить числа Картана; полученная фигура называется *схемой Дынкина* для Φ. (как и граф Кокстера, она зависит от нумерации простых корней.) Например:

B_2:
G_2:



Другой пример: если дана схема



(которая в действительности соответствует системе корней F_4), то для нее соответствующая матрица Картана будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.2 Неприводимые компоненты. Напомним, что система Φ неприводима, если и только если Φ (или, что равносильно, Δ) не разбивается на два собственных ортогональных подмножества. Ясно, что система Φ неприводима если и только если ее граф Кокстера связен. В общем случае граф Кокстера имеет несколько связных компонент; пусть $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_t$ — соответствующее разбиение базиса E на взаимно ортогональные подмножества. Если Δ_i порождает подпространство E_i, то ясно, что $E = E_1 \oplus \ldots E_t$, причем $(E_i, E_j) = 0$ при $i \neq j$. При этом очевидно, что $\mathbb{Z}$-линейные комбинации элементов из Δ_i, являющиеся корнями (обозначим это множество через Φ_i), образуют систему корней в E_i. Несложно видеть, что для любых $\alpha_i, \beta_i \in \Phi_i$ выполняется $\beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha \in \Phi_i$.

Пусть $\beta \in \Phi^+$ такой, что для любого положительного корня λ такого, что $\lambda \prec \beta$, выполняется $\lambda \in \Phi_i$ для некоторого i. По предложению 9.7 существует $\alpha \in \Delta$ такой, что $\gamma = \beta - \alpha \in \Phi^+$. Но $\gamma \prec \beta$, поэтому можно считать, что $\gamma \in \Phi_1$. Если $\alpha \in \Phi_1$, то $\beta \in \Phi_1$. Если α не лежит в Φ_1, то $(\gamma, \alpha) = 0$ и $(\beta, \alpha) = (\alpha, \alpha)$. По свойству 4 системы корней получаем, что элемент $\gamma_1 = \beta - \langle\beta,\alpha\rangle = \beta - 2\alpha$ является корнем. Так как $\gamma_1 \prec \beta$ а также в силу того, что $\gamma \in \Phi_1$ получаем, что $\gamma_1 \in \Phi_1$, а следовательно и $\alpha \in \Phi_1$. Противоречие.

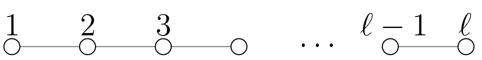
Таким образом, $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$. Мы доказали следующее

Предложение 1. Система Φ распадается (единственным образом) в объединение неприводимых систем корней Φ_i (в подпространствах E_i пространства E), причем $E = E_i \oplus \ldots \oplus E_t$ (прямая сумма ортогональных подпространств).

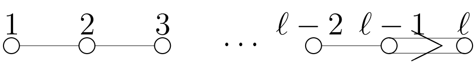
10.3 Теорема классификации. Из п.10.2 мы видим, что достаточно классифицировать неприводимые системы корней или, что равносильно, связные схемы Дынкина.

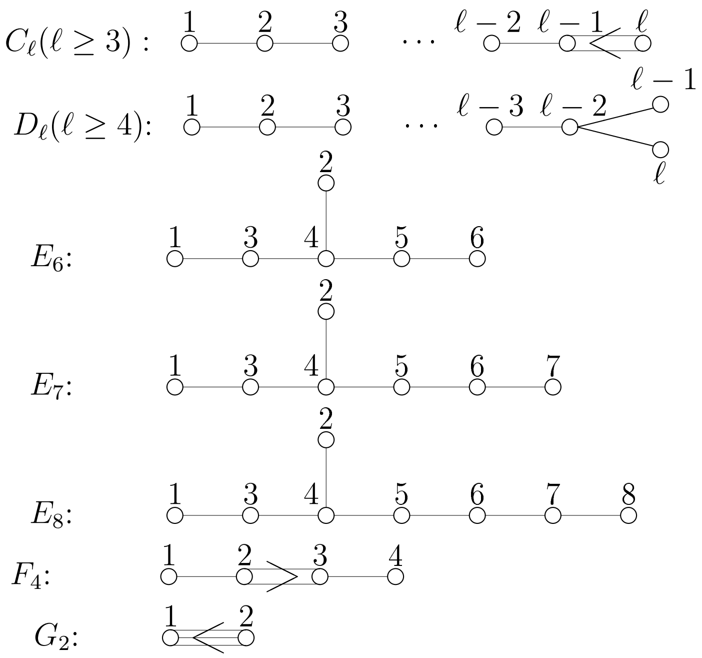
Теорема. Пусть Φ — неприводимая система корней ранга ℓ. Тогда ее схема Дынкина является одной из следующих (во всех случаях количество вершин равно ℓ):

$A_\ell(\ell \geq 1)$:



$B_\ell(\ell \geq 2)$:





В случае A_ℓ—D_ℓ наложены ограничения, чтобы избежать повторений. Из вышеперечисленных схем видно, что схема Дынкина восстанавливается по графу Кокстера во всех случаях, кроме B_ℓ и D_ℓ. Соответствующие матрицы Картана будут иметь вид

$$A_\ell : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_\ell : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_\ell : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} D_\ell : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad E_7 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} F_4 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Доказательство. В начале мы классифицируем возможные графы Кокстера (независимо от длин корней), а затем посмотрим, какие схемы Дынкина при этом получатся.

Так как нас не интересуют длины, то мы будем работать с множеством единичных векторов.

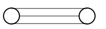
Пусть E — евклидово пространство (произвольной размерности), $U = \{e_1, \dots, e_n\}$ — множество n линейно-независимых векторов, причем $(e_i, e_j) \leq 0$ $(i \neq j)$ и $4(e_i, e_j)^2 = 0, 1, 2$ или 3. Такое множество векторов будем называть *допустимым.* (пример: элементы фундаментальной системы корней, разделенные на их длины). Сопоставим множеству U граф Γ с вершинами x_i и соединив вершину e_i с вершиной e_j посредством $4(e_i, e_j)^2$ ребер. Разобьем наше рассуждение на шаги.

1. Если удалить некоторые из векторов e_i, то оставшиеся вектора также образуют допустимое множество.Его граф получается из Γ удалением соответствующих вершин и инцидентных им ребер.

2. *Число вершин в графе Γ, соединенных хотя бы одним ребром, строго меньше чем n.* Положим $e = \sum\limits_i e_i$. Поскольку векторы e_i линейно независимы, то $e \neq 0$. Поэтому $0 < (e, e) = n + 2\sum\limits_{i<j}(e_i, e_j)$. Пусть i, j — пара различных индексов, для которых $(e_i, e_j) \neq 0$ (то есть вершины i и j соединены). Тогда $4(e_i, e_j)^2 = 1, 2$ или 3 и, как следствие, $2(e_i, e_j) \leq -1$. Ввиду предыдущего неравенства число таких пар не может превосходить $n - 1$.

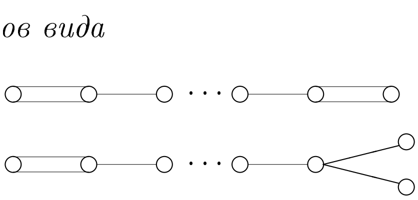
3. *Граф Γ не содержит циклов.* Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ — цикл в графе Γ. Пусть U' - множество вершин, входящих в Γ'. Тогда $U' \subset U$ и по шагу 1 U' является допустимым множеством. Получаем противоречие с шагом 2, так как в графе Γ количество ребер не менее мощности множества U'.

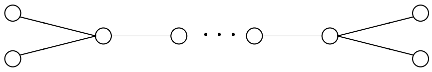
4. *В заданной вершине графа Γ может начинаться не более трех ребер.* Пусть $e \in U$, а $n_i, n_2, \dots, n_k$ — различные вектора, связанные с данной вершиной одним, двумя или тремя ребрами, т.е. $(e, n_i) < 0$ для любого $i = 1, \dots, k$. Ввиду шага 3 никакие два вектора n_i и n_j не соединены между собой, поэтому $(n_i, n_j) = 0$ при $i \neq j$. Поскольку множество U линейно независимо, в линейной оболочке векторов $e, n_1, \dots, n_k$ имеется единичный вектор n_0, ортогональный к $n_1, \dots, n_k$. Очевидно, что $(e, n_0) \neq 0$. Так как $e = \sum\limits_{i=0}^{k}(e, n_i)n_i$, то мы заключаем, что $1 = (e, e) = \sum\limits_{i=0}^{k}(e, n_i)^2$. Как следствие, $\sum\limits_{i=1}^{k}(e, n_i)^2 < 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k}4(e, n_i)^2 < 4$. Но $4(e, n_i)^2$ равно количеству ребер, соединяющих e с n_i в графе Γ.

5. *Единственный связный граф Γ допустимого множества U, содержащий тройное ребро, имеет вид*  *(граф Кокстера G_2).* Это непосредственно вытекает из шага 4.

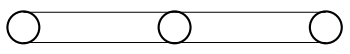
6. *Пусть подмножеству $\{e_i, \dots, e_k\} \subset U$ соответствует подграф в Γ вида*  *(простая цепь). Если $U' = (U - \{e_1, \dots, e_k\}) \cup \{e\}$, $e = \sum\limits_{i=1}^{k} e_i$, то множество U' допустимо.* (его граф получается из Γ сжатием простой цепи в точку). Линейная независимость множества U' очевидна. По предположению 2 $(e_i, e_{i+1}) = -1 (1 \leq i \leq k-1)$,так что $(e, e) = k + 2\sum\limits_{i<j}(e_i, e_j) = k - (k-1) = 1$, то есть e — единичный вектор. Любой вектор $n \in U - \{e_i, \dots, e_k\}$ соединен не более чем с одним из векторов $e_1, \dots, e_k$ (по шагу 3), поэтому $(n, e) = 0$ или $(n, e) = (n, e_i)$ при $1 \leq i \leq k$. В любом случае $4(n, e)^2 = 0, 1, 2$ или 3.

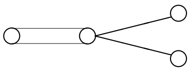
7. *Граф Γ не содержит подграфов вида*

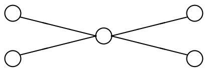




Допустим, что какой-то из этих подграфов содержится в Г. Согласно шагу 1 он является графом допустимого множества. Но шаг 6 позволят нам в любом случае заменить простую цепь на вершину, получая (соответственно) следующие графы:

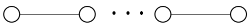


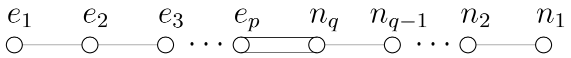


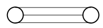


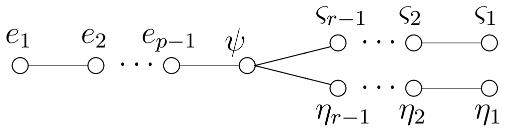
Данные графы невозможны в силу шага 4.

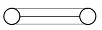
8. *Связный граф* Г *любого допустимого множества совпадает с одним из следующих:*

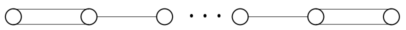


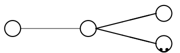






Действительно, ввиду шага 5 тройное ребро имеется лишь в графе . Связный граф с более чем одним двойным ребром содержит подграф



запрещенный ввиду шага 7. Таким образом, может встретиться только одно двойное ребро. Кроме того, если двойное ребро присутствует, то граф Г не может содержать "вилку"(точку разветвления)  (снова ввиду шага 7). Таким образом, остается единственная возможность — второй из нарисованных графов (циклы запрещены в силу пункта 3). Пусть, наконец, граф Г имеет только простые ребра. Тогда, если нет вилок, то Г является простой цепью. В силу шага 6 вилок может быть не более одной, и единственная оставшаяся возможность - это четвертый из изображенных графов.

9. *Единственными связными графами второго типа из шага 8 являются граф Коксетера F_4 и граф Коксетера $B_n(=C_n)$.*

Положим $e = \sum\limits_{i=1}^{p} ie_i$, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{q} i\eta_i$. По предположению $2(e_i, e_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$. Остальные пары ортогональны, поэтому $(e,e) = \sum\limits_{i=1}^{p} i^2 - \sum\limits_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}$, $(\eta,\eta) = \frac{q(q+1)}{2}$. Кроме того, поскольку $4(e_p, \eta_q)^2 = 2$, $(e,\eta) = p^2q^2(e_p,\eta_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$. Из неравенства Шварца вытекает (поскольку e, η заведомо линейно независимы), что $(e,\eta)^2 < (e,e)(\eta,\eta)$ и $\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$, а значит $(p-1)(q-1) < 2$. Имеются следующие возможности: $p = q = 2$ (что приводит к F_4), $p = 1$ (q произвольно), $q = 1$ (p произвольно).

10. *Единственными связными графами четвертого типа из шага 8 являются граф Коксетера D_n и граф Коксетера E_n($n = 6, 7$ или 8).* Положим $e = \sum_{i=1}^{p-1} ie_i$, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{q-1} i\eta_i$, $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{r-1} i\zeta_i$. Ясно, что векторы e, η, ζ линейно независимы и взаимно ортогональны, причем

ψ не лежит в их линейной оболочке. Как и на шаге 4 мы получаем, что $\frac{(\psi,e)^2}{(e,e)} + \frac{(\psi,\eta)^2}{(\eta,\eta)} + \frac{(\psi,\zeta)^2}{(\zeta,\zeta)} < 1$. Аналогично шагу 9 получаем $(e,e) = \frac{p(p-1)}{2}$, $(\eta,\eta) = \frac{q(q-1)}{2}$, $(\zeta,\zeta) = \frac{r(r-1)}{2}$. Имеем, $\frac{(\psi,e)^2}{(e,e)} = \frac{(p-1)^2(\psi,e_{p-1})}{(e,e)} = \frac{2(p-1)^2}{p(p-1)} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$. Аналогично $\frac{(\psi,\eta)^2}{(\eta,\eta)} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})$, $\frac{(\psi,\zeta)^2}{(\zeta,\zeta)} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})$. Суммируя полученное неравенство, получаем $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{r}) < 1$, или

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \tag{1}$$

Поменяв, если нужно, обозначения, можно считать, что $\frac{1}{p} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{r} \le \frac{1}{2}$ (если p, r или q равно 1, то мы возвращаемся к типу A_ℓ). С учетом неравенства (1) получаем, что $\frac{3}{2} \ge \frac{3}{r} > 1$, а значит $r = 2$. Тогда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$ и $2 \le q < 4$.Если $q = 2$ то мы получаем тип D_ℓ Если $q = 3$, то $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ и $p < 6$. При $p = 5, 4, 3$ получаем E_8, E_7, E_6 соответственно, при $p = 2$ получаем тип D_5.

Изложенное рассуждение показывает, что связные графы допустимых множеств векторов в евклидовом пространстве можно найти среди графов Кокстера типов $A - G$. В частности, графы Кокстера систем корней должны принадлежать к одному из этих типов. Теорема доказана.

11. Построение систем корней.

В параграфе 10 были найдены всевозможные (связные) схемы Дынкина (неприводимых) систем корней. Остается показать, что каждая схема типов $A - G$ действительно принадлежит некоторой системе корней.

Через $e_1 \dots e_n$ будем обозначать ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Целочисленную оболочку векторов этого базиса назовем (по определению) *решеткой* и обозначим I.

11.1 Случай A_ℓ.

Пусть E — ℓ-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{\ell+1}$, ортогонально вектору $e_1 + \ldots + e_{\ell+1}$. Пусть $I' = I \cap E$. В качестве Φ возьмем множество всех таких $\alpha \in I'$, что $(\alpha,\alpha) = 2$. Тогда $\Phi = \{e_i - e_j,\ i \ne j\}$. Векторы $\alpha_i = e_i - e_{i+1} \in \Phi$ $(1 \le i \le \ell)$ линейно независимы и являются базисом E. Вместе с тем $e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \ldots + (e_{j-1} - e_j)$ при $i < j$. Следовательно, любой вектор из Φ можно получить в виде целочисленной линейной комбинации векторов α_i. Таким образом, осталось проверить свойство 3 и 4 систем корней. Проверим свойство 4. Имеем

$$\langle e_i - e_j, e_k - e_s\rangle = (e_i - e_j, e_k - e_s) = \delta_{ik} - \delta_{is} - \delta_{jk} + \delta_{js} \in \mathbb{Z}.$$

Осталось проверить свойство 3. Для этого достаточно доказать, что для любых $e_i - e_j, e_k - e_s \in \Phi$ и $\beta = e_i - e_j - \langle e_i - e_j, e_k - e_s\rangle(e_k - e_s):\ (\beta,\beta) = 2$. Имеем:

$$(\beta,\beta) = (e_i - e_j - \langle e_i - e_j, e_k - e_s\rangle(e_k - e_s), e_i - e_j - \langle e_i - e_j, e_k - e_s\rangle(e_k - e_s)) =$$

$$= 2 - 2(\delta_{ik} - \delta_{is} - \delta_{jk} + \delta_{js})^2 + 2\delta_{ik} - \delta_{is} - \delta_{jk} + \delta_{js})^2 = 2.$$

Таким образом Φ — система корней в E. Ясно, что матрица Картана у Φ имеет тип A_ℓ. При этом вектора α_i образуют фундаментальную систему корней.

11.2 Случай B_ℓ.

Пусть $E = \mathbb{R}^\ell$, $\Phi = \{\alpha \in I,\ (\alpha,\alpha) = 1 \text{ или } 2\}$. Легко проверить, что система Φ состоит из векторов $\pm e_i$ (с квадратом длины равным 1) и $\pm(e_i \pm e_j)$, $i \ne j$ (с квадратом длины, равным 2). Множество $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{\ell-1} - e_\ell, e_\ell\}$ линейно независимо. При этом, для короткого корня имеем следующее выражение

$$e_i = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \ldots (e_{\ell-1} - e_\ell) + e_\ell.$$

Аналогичные выражения получаем для $e_i - e_j$ и $e_i + e_j$. Следовательно, Δ является фундаментальной системой корней системы корней Φ с матрицей Картана типа B_ℓ.

11.3 Случай C_ℓ.

В пространстве $\mathbb{R}^\ell$ рассмотрим множество векторов $\pm 2e_i$ и всех векторов $\pm(e_i \pm e_j)$, $i \neq j$. Несложно проверить, что данное множество векторов образует систему корней типа C_ℓ с базисом $\{e_1 - e_2, \ldots, e_{\ell-1} - e_\ell, 2e_\ell\}$.

11.4 Случай D_ℓ.

Пусть $E = \mathbb{R}^\ell$, $\Phi = \{\alpha \in I : \ (\alpha, \alpha) = 2\} = \{\pm(e_i \pm e_j),\ i \neq j\}$. В качестве базиса возьмем ℓ линейно-независимых векторов $e_1 - e_2, \ldots, e_{\ell-1} - e_\ell, e_{\ell-1} + e_\ell$. Получаем систему корней с графом Кокстера типа D_ℓ.

11.5 Случаи E_6, E_7 и E_8.

Построим E_8. Пусть $E = \mathbb{R}^8$, $I' = I + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}(e_i + \ldots + e_8))$, I'' — подгруппа в I', состоящая из элементов вида $\sum c_i e_i + \frac{c}{2}(e_1 + \ldots + e_8)$, таких, что число $\sum c_i$ четно. Положим $\Phi = \{\alpha \in I'' : \ (\alpha, \alpha) = 2\}$. Свойства 1 и 2 системы корней очевидны. Для проверки свойств 3 и 4 достаточно проверить, что скалярные произведения элементов из Φ лежать в $\mathbb{Z}$. Действительно, пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha = \sum c_i e_i + \frac{c}{2}(e_1 + \ldots + e_8) = \frac{1}{2}(\sum(2c_i + c)e_i)$, $\beta = \frac{1}{2}(\sum(2s_i + d)e_i)$. Тогда $(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{8}(4c_i s_i + 2c_i d + 2s_i c + cd) = \sum c_i s_i + \frac{1}{2}(\sum c_i d + \sum s_i c) + 2 \in \mathbb{Z}$. Следовательно Φ — система корней. Рассмотрим множество

$$\Delta = \{\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - (e_2 + \ldots + e_7)), e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_4 - e_3, e_5 - e_4, e_6 - e_5, e_7 - e_6\}.$$

Докажем, что Δ — фундаментальная система корней для Φ.

Для начала докажем, что элементы $e_8 - e_7$ и $e_1 + e_i$ $(i > 2)$ можно представить в виде линейных комбинаций элементов из Δ с целыми коэффициентами. Имеем

$$e_8 - e_7 = 2(\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - (e_2 + \ldots + e_7))) + (e_6 - e_5) + 2(e_5 - e_4) + 3(e_4 - e_3) + 4(e_3 - e_2) + 2(e_2 - e_1) + 2(e_1 + 2_3).$$

$$e_1 + e_i = (e_1 + e_2) + (e_3 - e_2) + \ldots + (e_i - e_{i-1}).$$

Рассмотрим элемент $\alpha = \sum\limits_i c_i e_i + \frac{c}{2}(e_1 + \ldots + e_8) \in \Phi$. Если c — четное, то $\alpha \pm (e_i \pm e_j)$. Элементы такого вида можно представить следующим образом (считаем, что $i > j$):

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i-1}) + (e_{i-1} - e_{i-2}) + \ldots + (e_{j+1} - e_j),$$

$$e_i + e_j = (e_i + e_1) + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_j - e_{j-1}).$$

Пусть теперь c — нечетное. Можно считать, что $c = \pm 1$. Элемент α можем переписать в следующем виде:

$$\alpha = \frac{1}{2}((2c_1 \pm 1)e_1 + \ldots + (2c_8 \pm 1)).$$

Так как $(\alpha, \alpha) = 2$, то коэффициенты должны удовлетворять $(2c_i \pm 1) = \pm 1$. Таким образом, $c_i = 0, 1$ $(i = 1, \ldots, 8)$, если $c = -1$, и $c_i = 0, -1$ $(i = 1, \ldots, 8)$, если $c = 1$. Рассмотрим случай $c = -1$. Тогда

$$\alpha = c_1 e_1 + \ldots + c_8 e_8 - \frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8).$$

Пусть $c_8 \neq 0$. Тогда существует $i \in \{1, \ldots, 8\}$, такой, что $c_i = 1$. Тогда

$$\alpha = c_1 e_1 + \ldots + \widehat{c_i e_i} + \ldots + c_7 e_7 + \frac{1}{2}(e_i + e_8 - (e_2 + \ldots + \widehat{e_i} + \ldots + e_7)) =$$

$$= c_1 e_1 + \ldots + \widehat{c_i e_i} + \ldots + c_7 e_7 + \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - (e_2 + \ldots + e_7))) + (e_i - e_1).$$

Пусть теперь $c_8 = 0$. Тогда существует $i \in \{1, \ldots, 8\}$ такой, что $c_i = 0$. Рассмотрим множество $J = \{j \in \{1, \ldots, 8\} |\ c_j = 0,\ j \neq i, 8\}$. Тогда

$$\alpha = \frac{1}{2}(e_1 + \ldots + \widehat{e_i} + \ldots + e_7 - (e_i + e_8)) - \sum_{j \in J} e_j = -\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - (e_2 + \ldots + e_7))) + (e_1 - e_i) - \sum_{j \in J} e_j.$$

Таким образом Δ — фундаментальная система корней для Φ с графом Кокстера E_8.

Случай E_7: Рассмотрим подпространство V с базисом $e_7 - e_6$. Рассмотрим фактор-пространство $E\ V$, тогда образ Φ будет системой корней с графом Кокстера E_7.

Случай E_6: Аналогично случаю E_6 рассмотрим подпространство V с базисом $e_7 - e_6$, $e_6 - e_5$ и фактор-пространство $E\ V$. Тогда образ Φ будет системой корней с графом Кокстера E_6.

11.6 Случай F_4.

Пусть $E = \mathbb{R}^4$, $I' = I + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4))$, $\Phi = \{\alpha \in I',\ (\alpha, \alpha) = 1$ или $2\}$. Тогда Φ состоит из всех векторов $\pm e_i$, всех векторов $\pm(e_i \pm e_j)$, $i \neq j$, а также всех векторов $\pm\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$, где знаки можно выбирать независимо. Несложно проверить, что все числа $\langle , \alpha, \beta \rangle$ целые. В качестве базиса возьмем $\Delta = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$.

11.7 Случай G_2.

Пусть E — подпространство в $\mathbb{R}^3$, ортогональное к $e_1 + e_2 + e_3$. Положим $I' = I \cap E$, $\Phi = \{\alpha \in I' :\ (\alpha, \alpha) = 2$ или $6\}$. Таким образом $\Phi = \pm\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_3, 2e_2 - e_1 - e_3, 2e_3 - e_1 - e_2\}$. В качестве базиса возьмем $\Delta = \{e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3\}$.

Мы доказали следующую

Теорема. Для каждой схемы Дынкина (и матрицы Картана) типов $A - G$ существует неприводимая система корней с такой схемой.

Литература

[1] Н. Джекобсон. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

[2] Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

[3] Ж. Диксимье. Универсальные обертывающие алгебры: М.: Мир, 1978.