Вариант Мг.08.3.2

1. А) Пусть $\vec{u}$ - скорость, p - давление, ρ - плотность, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \equiv rot\,\vec{u}$ -относительный вихрь, $2\vec{\Omega}$ - планетарный вихрь. Следствием каких законов механики является уравнение $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{u} - \vec{\omega}_a\, div\,\vec{u} + rot\dfrac{\nabla p}{\rho}$? Здесь $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$ - абсолютный вихрь, d/dt - полная производная. В) Пусть $\vec{\Omega} = 0$ и выполнено баротропное уравнение состояния, т. е. $p = p(\rho)$. Доказать, что относительный вихрь никогда не возникнет, если его не было в начальный момент времени.

2. А) Дать определение обобщенной производной $\partial u / \partial x_i$ в смысле Соболева в $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$. В) На интервале $(-1,1)$ заданы функции

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

Доказать, что v является обобщенной производной функции u.

3. А) Дать определение производной Яуманна – Нола тензора напряжений Коши $P(x,t)$.
В) Привести пример применения в механике производной Яуманна – Нола.

4. Сформулировать Лемму Хопфа о существовании соленоидального продолжения векторной функции.

5. А) На примере задачи

$$u_t + au_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\quad -\infty < x < \infty,\quad 0 < t < T,\ a = const \qquad (1)$$

дать определения схемы сохраняющей монотонность и схемы с невозрастающей полной вариацией (TVD - схемы). В) Доказать, что TVD - схема является схемой, сохраняющей монотонность.

Задачи

1. Доказать, что уравнения Навье – Стокса (плоскопараллельный случай, плотность жидкости равна единице) с нулевым полем внешних сил допускают преобразование переменных $x' = x + \varphi(t)$, $y' = y$, $u' = u + \dot{\varphi}(t)$, $v' = v$, $p' = p + \ddot{\varphi}(t)$, где u, v – компоненты вектора скорости, p – давление, а $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция времени t.

2. На интервале $\{-2 < x < 2\} = \Omega$ рассматривается краевая задача $u_{xx} = 0$, $u\,|_{|x|=2} = 0$. Доказать, что функция $u(x) = \min\{1, 2 - |x|\}$ не является обобщённым решением в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$.

3. Доказать, что тензор градиента деформаций $\partial x / \partial \xi$ не является индифферентным, т. е. зависит от системы отсчёта.

4. Для численного решения задачи (1) рассмотрим неявную схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0,\quad \Delta t = t^{n+1} - t^n = const,\quad \Delta x = x_i - x_{i-1} = const,\ u_i^0 = u_0(x_i).$$

При каком соотношении шагов разностной сетки схема является устойчивой, удовлетворяет условию TVD?