НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и математической логики

В.А.ЧУРКИН

ЗАДАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ
для 1 курса ММФ

Новосибирск 2007

Каждое из шести заданий включает около 15 задач, в основном, теоретического характера и рассчитано примерно на месяц самостоятельной работы. Отчет письменный или, по желанию преподавателя, устный. Каждая задача оценивается в 10 баллов, оценка “отлично” — при наборе 80% общей суммы баллов задания, “хорошо” — 60% , “удовлетворительно” — 40% .

Утверждения, не содержащие прямое указание к действию, необходимо доказать, либо опровергнуть.

Задание 1

Отображения, группы, кольца, поля, подстановки, матрицы

1. Построить все графы отображений трехэлементного множества в себя и разбить их на классы, состоящие из изоморфных графов.

2. Доказать, что множество алгебраических структур вида ($\mathbb{R}$; $x \mapsto ax + b$) разбивается на 5 классов, состоящих из изоморфных структур, а множество структур вида ($\mathbb{R}$; $x \mapsto ax^2 + bx + c$) — на бесконечно много классов.

3. Найти все непрерывные изоморфизмы между группой вещественных чисел по сложению и группой положительных вещественных чисел по умножению.

4. Пусть p – простое число, $R_p = \{a + b\sqrt{p} \,|\, a,\, b \in \mathbb{Z}\}$. Доказать, что R_p – кольцо относительно сложения и умножения чисел. Будет ли R_p полем? Изоморфны ли кольца R_2 и R_3?

5. Всякий автоморфизм поля $\mathbb{Z}_p$ вычетов по простому модулю p, поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел является тождественным. Существует только два непрерывных автоморфизма поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

6. Комплексное число $(3 + 4i)/5$ не является корнем из единицы, хотя по модулю оно равно единице.

7. Всякая четная подстановка $n \geqslant 3$ элементов разлагается в произведение циклов длины 3 и даже циклов (123), (124), ..., $(12n)$.

8. Натуральное число m с каноническим разложением на простые множители $p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ является наименьшим периодом некоторой подстановки n элементов тогда и только тогда, когда $p_1^{k_1} + \ldots + p_s^{k_s} \leqslant n$.

9. Отображения f и f' множества X в себя назовем *подобными*, если существует такое взаимно однозначное отображение g множества X на себя, что $f' = g \circ f \circ g^{-1}$. Какие из отображений $x \mapsto x^2 \pm 1$, $x \mapsto x^2 \pm 2$, кольца $\mathbb{Z}_6$ в себя подобны? Сколько отображений $\mathbb{Z}_6$ в себя перестановочно с отображением $f(x) = x^2 - 1$ относительно композиции отображений?

10. Всякая группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок S_n.

11. *Центром* кольца R называется множество $\{a \in R \mid ax = xa$ для всех $x \in R\}$. Доказать, что центр кольца матриц $M_n(K)$ над полем K состоит из скалярных матриц $Diag(c, c, ..., c)$, $c \in K$, и изоморфен K.

12. Проверить тождества для следа матриц над полем:

а) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$;

б) $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E = 0$, если A — матрица порядка 2;

в) $\operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} AB^{-1} = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$, если $\det A = \det B = 1$, A, B — матрицы порядка 2.

13. Элементы a кольца R называется *левым делителем нуля*, если найдется такой элемент b из R, что $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Аналогично определяется правый делитель нуля. Доказать, что в кольце матриц над полем обратимая матрица не является делителем нуля, а необратимая — и левый, и правый делитель нуля.

14. Определитель матрицы порядка 3 над полем вещественных чисел по модулю равен объему параллелепипеда, три направляющих ребра которого в прямоугольной системе координат задаются строками матрицы.

15. Найти наибольшее значение определителя матрицы порядка 3, составленной из чисел 1 и -1.

16. Матрица A называется *кососимметричной*, если $A^\top = -A$. Доказать: а) определитель кососимметричной матрицы нечетного порядка равен нулю; б) определитель кососимметричной матрицы четного порядка не изменится, если ко всем ее элементам прибавить одно и то же число.

17. Исследовать замкнутость каждого из следующих множеств матриц — специальные, бесследные, ортогональные, унитарные, симметричные, эрмитовы, кососимметричные, косоэрмитовы — относительно операций сложения, умножения на скаляр, умножения матриц, обращения, коммутирования $[A, B] = AB - BA$, антикоммутирования $A \circ B = AB + BA$ и оформить результаты в виде таблицы.

Проверить тождества *колец Ли*: $[A,\, A] = 0$, $[[A,\, B],\, C] + [[B,\, C],\, A] + [[C,\, A],\, B] = 0$, *колец Йордана*: $A \circ B = B \circ A, ((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A)$.

Какие алгебраические структуры получаются в итоге?

Задание 2

Векторы, матрицы, линейные уравнения

1. Доказать, что функции $1,\ \cos t,\ \cos 2t, ...,\ \cos nt$ линейно независимы в пространстве всех вещественнозначных функций на вещественной прямой.

2. Показать, что порядок q конечного поля всегда является степенью простого числа с натуральным показателем. Сколько базисов содержит векторное пространство размерности n над полем порядка q? Сколько там подпространств размерности k?

3. Доказать, что любой базис конечномерного векторного пространства можно преобразовать в любой другой базис пространства с помощью элементарных преобразований.

4. Для всякой $s \times n$-матрицы A ранга r над полем существует "скелетное" разложение $A = XY$, где X — $s \times r$-матрица, Y — $r \times n$-матрица. Найти скелетное разложение вещественных матриц

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. Установить нижнюю оценку ранга произведения матриц над полем:

$$\mathrm{rk}(AB) \geqslant \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n,$$

где n — число столбцов матрицы A.

6. В каждой (косо)симметрической матрице найдется главный базисный минор. Если в поле $1 + 1 \neq 0$, то ранг кососимметричной матрицы над полем всегда четен. Определитель целочисленной кососимметричной матрицы является квадратом целого числа.

7. Доказать, что матрицы $AB - E$ и $BA - E$ либо обе обратимы, либо обе необратимы. Здесь A и B — матрицы порядка n над полем.

8. Пусть U — пространство решений однородной системы линейных уравнений от n переменных над полем K, а L — линейная оболочка строк матрицы системы. Доказать, что $K^n = L \oplus U$ для любой такой системы, если и только если уравнение $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ имеет в поле K одно решение – нулевое. Рассмотреть случаи $K = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{Z}_p$.

9. Доказать, что для конечномерного векторного пространства над конечным полем число всех подпространств размерности k и число всех подпространств коразмерности k совпадают.

10. Если всякое решение системы $Ax = 0$ над полем K является решением системы $Bx = 0$ над полем K, то $B = CA$ для некоторой матрицы C над K.

11. Найти систему вещественных линейных уравнений, задающих линейное многообразие $a + U$, где

$$a = (1,\ 1, -1, -1), \quad U = \langle (1, -1, -1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 1,\ 3) \rangle.$$

12. Доказать, что для совместной системы вещественных линейных уравнений существует единственное решение, принадлежащее линейной оболочке строк матрицы системы.

13. Конечномерное векторное пространство над бесконечным полем *не* может быть объединением конечного числа собственных линейных многообразий. Если линейное многообразие в таком пространстве лежит в объединении конечного числа других линейных многообразий, то оно содержится в одном из этих многообразий.

14. Найти все *целочисленные* решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z = -2, \\ 8x - 3y - 6z = 4, \\ 5x - 8y - 9z = 6. \end{cases}$$

Выделить среди них решения, ближайшие к началу координат.

15. Пусть дана однородная целочисленная система s линейных уравнений от n переменных, $n > s$, и каждый коэффициент системы по модулю не превосходит M. Доказать, что тогда найдется ненулевое целочисленное решение этой системы в n-мерном кубе $|x_i| \le 2(nM)^{s/(n-s)}$, $i = 1, ..., n$.

Задание 3

Алгебра многочленов

1. Пусть $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$ — целочисленный многочлен. Произведение $f(x)^3 f(1/x)^3$ очевидно можно разложить по степеням x^k, где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$, с целыми коэффициентами. Доказать, что коэффициент при x^0 равен числу "счастливых" автобусных билетов, в номерах которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр.

2. Доказать, что функции $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при $|x| \leqslant 1$ совпадают с многочленами Чебышёва, которые можно вычислить по схеме:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geqslant 1.$$

Найти для них старшие коэффициенты, четность, корни, точки экстремума, экстремальные значения.

3. Всякая функция от n переменных $f : K^n \to K$ на конечном поле K реализуется, и даже не одним, многочленом над K от n переменных.

4. Найти все корни уравнения $(z-1)^n = (z+1)^n$, а также сумму их квадратов.

5. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $f(x) \geqslant 0$ для всех x из $\mathbb{R}$. Доказать, что тогда существуют такие вещественные многочлены $g(x)$ и $h(x)$, что $f(x) = g(x)^2 + h(x)^2$.

6. В алгебре многочленов над любым полем существует бесконечно много неразложимых элементов.

7. Рациональную дробь $1/(x^{2n}+1)$, $n \geqslant 1$, разложить на простейшие над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

8. Если $g(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$ и корни x_k попарно различны, то верна формула Лагранжа для правильной рациональной дроби:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{g'(x_k)(x - x_k)}.$$

9. Найти все неразложимые многочлены степени $\leqslant 3$ от одной переменной над полем из двух элементов. Построить поля из четырех и из восьми элементов. Указать для них таблицы сложения и умножения.

10. Разложить на неразложимые множители многочлен $x^{15} - 1$ над полем из двух элементов и над полем рациональных чисел.

11. Пусть K — поле из q элементов и $P(n,q)$ — доля многочленов без корней в поле K среди всех многочленов степени n от одной переменной над полем K. Найти $P(n,q)$ и доказать, что $\lim_{q\to\infty}(\lim_{n\to\infty} P(n,q)) = 1/e \sim 0,367$. Таким образом, многочленов большой степени без корней над большим конечным полем примерно 37%.

12. Многочлен x^4+1 неразложим в кольце $\mathbb{Z}[x]$, но разложим в алгебре $\mathbb{Z}_p[x]$ по любому простому модулю p.

13. Доказать, что число комплексных корней многочлена $f(z)$, содержащихся внутри контура, на котором $f(z)$ не обращается в нуль, равно деленному на 2π приращению аргумента комплексной переменной $w = f(z)$ при однократном обходе переменной z по контуру против часовой стрелки. Найти число корней многочлена $z^7 + 14z^3 + 12$ в кругах $|z| \leqslant 1$ и $|z| \leqslant 2$.

14. Найти размерность пространства однородных многочленов степени k от n переменных.

15. Нормированный вещественный многочлен называется *устойчивым*, если все его корни расположены в левой полуплоскости $Re\, z < 0$. Можно считать, что кратных корней нет. Доказать, что многочлен устойчив, если и только если положительны все его коэффициенты, а также все коэффициенты нормированного многочлена, корнями которого являются всевозможные суммы различных корней исходного многочлена. При каких условиях на коэффициенты устойчив кубический многочлен?

16. Решить над полем комплексных чисел систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = 3, \\ x^2+y^2+z^2 = 3, \\ x^3+y^3+z^3 = 6. \end{cases}$$

17. Доказать, что $\mathbb{R}[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle \simeq \mathbb{R}[\cos t,\ \sin t]$.

18. Каждый идеал в кольце тригонометрических многочленов $\mathbb{R}[\cos t,\ \sin t]$ конечнопорожден.

19. Найти базис-делитель идеала $\langle x^3+xy+z,\ 3x^2+y\rangle$ в алгебре $\mathbb{Q}[x,y,z]$ относительно лексикографического порядка $x>y>z$.

20. Решить над полем комплексных чисел систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y+z=1, \\ x+y^2+z=1, \\ x+y+z^2=1. \end{cases}$$

Задание 4

Линейные операторы векторных пространств

1. Линейный оператор векторного пространства размерности $\geqslant 2$ имеет в некотором базисе элементарную матрицу–трансвекцию тогда и только тогда, когда определитель оператора равен 1, а подпространство неподвижных векторов имеет коразмерность 1.

2. Какие отношения включения возможны между подпространствами $\operatorname{Ker} AB$ и $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B$ для линейных операторов A и B?

3. Ядро линейного отображения $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ пространства H_p однородных вещественных многочленов степени p от переменных x,y в пространство H_{p-2} является линейной оболочкой "гармонических" многочленов $u_p(x,y)$ и $v_p(x,y)$, определяемых тождеством $u_p(x,y)+i\,v_p(x,y)=(x+iy)^p$, где $i^2=-1$.

4. Числа Фибоначчи задаются правилом: $F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ при $n\geqslant 1$. Пусть $u_n=(F_{n+1},\ F_n)^\top$. Выразить u_n через u_{n-1} в матричном виде $u_n=Au_{n-1}$, найти собственные значения и собственные векторы для A и доказать, что F_n – ближайшее целое к числу $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

5. Найти долю в объеме шара $x^2+y^2+z^2+t^2\leqslant r^2$ из $\mathbb{R}^4$ множества точек (x,y,z,t), для которых матрица $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$ подобна вещественной диагональной.

6. Доказать, что в n-мерном комплексном пространстве V для всякого линейного оператора существует "флаг" инвариантных подпространств

$$0=U_0\subset U_1\subset U_2\subset \ldots \subset U_n=V,\ \dim U_k=k,$$

более того, в такой флаг можно включить любое наперед заданное инвариантное подпространство из V. (На матричном языке это равносильно теореме Шура: всякая квадратная комплексная матрица подобна треугольной, причем матрицу перехода можно даже выбрать унитарной.) Что можно утверждать для вещественных пространств?

7. Коммутирующие линейные операторы в конечномерном комплексном пространстве всегда имеют общий собственный вектор и даже флаг подпространств, инвариантных относительно всех операторов.

8. Спектры матриц A и B порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$ при $k = 1, 2, ..., n$.

9. Доказать, что спектры матриц AB и BA всегда совпадают. Здесь A и B — любые матрицы порядка n над полем.

10. Построить ядерно–образные разложения и дать геометрическое описание действия линейных операторов A в $\mathbb{R}^n$, если а) $A^2 = A$, б) $A^2 = E$, в) $A^3 = A$.

11. Сколько инвариантных подпространств имеет линейный оператор, если его минимальный многочлен совпадает с характеристическим и все его корни содержатся в поле скаляров?

12. Перечислить все возможные жордановы формы для матрицы A с условием $A^3 = A^2$.

13. Доказать, что наборы обратимых жордановых клеток для матриц AB и BA всегда совпадают. Здесь A и B — любые матрицы порядка n над полем.

14. Всякая матрица, коммутирующая с жордановой клеткой, является многочленом от этой клетки.

15. Решить матричное уравнение $AX = XA$, где A — жорданова форма из двух клеток.

16. Найти жорданову форму оператора Δ из задачи 2 в пространстве многочленов степени $\leqslant n$ от переменных x, y.

17. Решить матричное уравнение $X^2 - 3X = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Задание 5

Линейные операторы и квадратичные формы

1. Доказать, что планету Земля можно изометрично расположить в n-мерном евклидовом кубике с ребром в 1 см, если n — достаточно большое число, например, $n \geqslant 5 \cdot 10^{18}$.

2. Пусть любые два из данных k векторов евклидова пространства V образуют тупой угол. Доказать, что $k \leqslant 1 + \dim V$.

3. Найти расстояние от функции $(\cos t)^{k+1}$ до линейной оболочки V функций $1, cost, \sin t$, $\ldots$, $\cos kt$, $\sin kt$ в пространстве вещественных непрерывных функций на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ со скалярным произведением

$$(f,\, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

4. Всякая квадратная невырожденная комплексная матрица A имеет единственное разложение Грама вида $A = QR$, где Q – унитарная, а R – верхнетреугольная матрица с вещественной положительной главной диагональю.

5. Найти операторы, сопряженные с операторами $L_A : X \mapsto AX$ и $C_A : X \mapsto AXA^{-1}$ относительно скалярного произведения $(X, Y) = \mathrm{tr}\ X^*Y$ на пространстве матриц $M_n(\mathbb{C})$. Здесь A — данная (обратимая) комплексная матрица порядка n, а X^* получается из матрицы X комплексным сопряжением элементов и транспонированием.

6. Найти оператор, сопряженный с оператором дифференцирования D на пространстве V гладких функций из задачи 3. Найти канонические базис и матрицу D и дать геометрическое описание действия D на V.

7. Всякая симметричная (эрмитова) положительно определенная матрица является матрицей Грама подходящей системы векторов.

8. Если A — ортогональная матрица порядка n, то для её характеристического многочлена выполнено следующее условие симметрии

$$\chi_A(t) = (-t)^n \chi_A(1/t).$$

9. При каких значениях вещественных параметров p и q матрица $\begin{pmatrix} p & pq-q \\ 1 & q \end{pmatrix}$ подобна ортогональной?

10. Каково максимальное число линейно независимых вещественных попарно коммутирующих а) симметричных матриц порядка n, б) кососимметричных матриц порядка n, в) произвольных матриц порядка n?

11. Доказать, что экспонента отображает алгебру косоэрмитовых матриц *на* группу унитарных, а алгебру кососимметричных матриц — *на* группу специальных ортогональных.

12. а) Дробно-линейное преобразование комплексных чисел $z \mapsto (1-z)/(1+z)$ мнимую ось $\mathbb{R}i$ отображает взаимнооднозначно на единичную окружность $|z| = 1$ с выколотой точкой -1 и совпадает по форме со своим обратным.

б) Преобразование Кэли $X \mapsto (E-X)(E+X)^{-1}$ алгебру кососимметричных операторов взаимнооднозначно отображает на множество ортогональных операторов без точки -1 в спектре и совпадает по форме со своим обратным.

13. Для матрицы $A_\varepsilon = E_{12} + E_{23} + ... + E_{n-1,n} + \varepsilon E_{n1}$ рассмотреть изменение спектра и сингулярных чисел при возмущении $A_0 \to A_\varepsilon$, если $n = 10,\ \varepsilon = 10^{-10}$.

14. Найти угол и раствор между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4A_5$ правильного пятимерного симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$, используя сингулярные числа.

15. Какие линейные операторы n-мерного евклидова пространства

а) сохраняют площади параллелограммов,

б) сохраняют k-мерный объем при данном k, где $1 \leqslant k \leqslant n$,

в) сохраняют углы между векторами?

16. Пусть $A = (a_{ij})$ — комплексная матрица со спектром $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать, что каждое из следующих условий равносильно нормальности A : а) $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$, б) A^* — многочлен от A.

17. Найти сигнатуру следующей симметричной билинейной формы на пространстве вещественных многочленов от одной переменной степени $\leqslant 1$:

$$\varphi(f,\, g) = \int_0^c (t-1) f(t) g(t) dt.$$

18. Множество $\{(x,\, Ax) : x \in V,\ \|x\| = 1\}$ является выпуклой оболочкой спектра нормального оператора A в эрмитовом пространстве V. Найти экстремумы и и точки экстремума на сфере $\|x\| = 1$ из $\mathbb{R}^3$ для вещественной квадратичной формы

$$q(x) = -3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

19. При каких условиях на спектр матрицы вещественной квадратичной формы $q(x)$ от n переменных поверхность с уравнением $q(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}^n$, в пересечении с некоторым подпространством коразмерности 1 образует сферу S^{n-2}?

20. Если пара вещественных квадратичных форм с матрицами $A, B \neq 0$ одновременно канонизируется обратимой заменой переменных, то многочлен $\det(A-tB)$ имеет вещественные корни, однако обратное утверждение неверно.

Задание 6

Линейные группы и алгебры

1. Группа SO_2 может рассматриваться как подгруппа группы SO_3. Отождествить непрерывно множество правых смежных классов $\mathrm{SO}_3/\mathrm{SO}_2$ с двумерной сферой S^2.

2. Пусть группа G действует на множестве X и X/G – множество орбит. Доказать, что можно отождествить непрерывно X/G и тор (поверхность бублика), если X – плоскость, а G – группа, порожденная двумя переносами в непараллельных направлениях; X/G и бутылку Клейна, если X – плоскость, а G – группа, порожденная переносом и скользящей симметрией в непараллельных направлениях.

3. Доказать, что группа поворотов правильного тетраэдра изоморфна A_4, группа поворотов куба или октаэдра изоморфна S_4, а группа поворотов додекаэдра или икосаэдра изоморфна группе A_5.

4. Доказать, что группа, порожденная двумя отражениями в сторонах угла на евклидовой плоскости, конечна тогда и только тогда, когда угол составляет рациональную долю полного угла.

5. Доказать, что группа всех ортогональных операторов евклидова векторного пространства порождается отражениями относительно всевозможных подпространств коразмерности 1, а группа всех изометрий евклидова аффинного пространства — отражениями относительно гиперплоскостей.

6. Найти центры групп GL_n, O_n, SO_n, U_n, SU_n.

7. Описать алгебраически и геометрически классы сопряженных элементов в группах SU_2 и SO_3.

8. а) Доказать, что $\mathrm{O}_3 \simeq \mathrm{Z}_2 \times \mathrm{SO}_3$.

б) Доказать, что группа SU_2 не содержит подгруппы, изоморфной группе SO_3, и потому не расщепляется в полупрямое произведение групп $\{\pm 1\}$ и SO_3.

9. Вычислить ряд коммутантов и его секции для групп изометрий евклидовой аффинной прямой, плоскости и трехмерного пространства.

10. Найти точное представление а) поля порядка 4 матрицами порядка 2 над полем из двух элементов, б) алгебры Ли $\mathbb{R}^3$ относительно векторного произведения вещественными матрицами порядка 3.

11. Вычислить структурные константы ассоциативной алгебры $\mathrm{M}_n(K)$ в базисе из матричных единиц $E_{ij},\ 1 \le i,\ j \le n$, и алгебры Ли so_n вещественных кососимметрических матриц в базисе $C_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, где $1 \le i < j \le n$.

12. Матричная алгебра $\mathrm{M}_n(K)$ над полем K является простой как ассоциативная алгебра, т.е. содержит только тривиальные двусторонние идеалы.

13. Алгебра Ли so_3 изоморфна алгебре Ли $\mathbb{R}^3$ относительно векторного произведения и является простой, т.е. содержит только тривиальные идеалы.

14. Доказать, что алгебра Ли $so_3(\mathbb{R})$ не изоморфна алгебре Ли бесследных матриц $sl_2(\mathbb{R})$, но $so_3(\mathbb{C})$ изоморфна $sl_2(\mathbb{C})$.

15. Доказать, что алгебра Ли so_4 изоморфна $so_3 \oplus so_3$.

16. Группа автоморфизмов тела кватернионов изоморфна SO_3.

17. Доказать, что $\exp(q) = \cos\|q\| + \sin\|q\| \cdot (q/\|q\|)$ для ненулевого мнимого кватерниона q. Вывести отсюда, что отображение $q \mapsto \exp(q)$ “периодически наворачивает"евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ мнимых кватернионов на сферу $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$.

УКАЗАНИЯ

1.2. а) Используя соответствие $x \leftrightarrow px + q,\ p \ne 0$, показать, что при $a \ne 1$ структура $(\mathbb{R}; x \mapsto ax+b)$ изоморфна $(\mathbb{R}; x \mapsto ax)$. б) Свести к случаю $(\mathbb{R}; x \mapsto x^2 - c)$ линейной заменой. Исследовать дерево прообразов точки $-c$ при $1 < c < 2$ и заметить, что ближайший обрыв в нем можно сделать сколь угодно далеким, если параметр c близок к 2.

1.5. Положительность вещественного числа и, следовательно, линейный порядок на поле вещественных чисел можно выразить через алгебраические операции.

1.6. Предположить противное. Использовать сравнение $(3 + 4i)^n = 5^n \equiv 0 (\bmod 5)$.

1.8. Использовать неравенство $ab \geqslant a + b$ при $a \geqslant 1,\ b \geqslant 1$.

1.10. Сопоставить элементу g группы G “правый сдвиг” $\widehat{g} : x \mapsto xg$ на множестве G.

1.14. Заметить, что при элементарных преобразованиях строк объем и определитель не изменяются, и в невырожденном случае привести матрицу к диагональному виду.

2.1. Эта система функций линейно эквивалентна системе степеней косинусов.

2.2. Кольцо, объемлющее поле, может рассматриваться как векторное пространство над этим полем.

2.5. Использовать разложение матрицы в произведение диагональной и трансвекций.

2.6. Найти элементарные преобразования (косо)симметричной матрицы, сохраняющие (косо)симметричность и позволяющие привести матрицу к (почти) диагональному виду.

2.13. Использовать индукцию по размерности.

2.15. В кубе из $\mathbb{R}^n$ со стороной l число целочисленных точек растет быстрее, чем в кубе из $\mathbb{R}^s$ со стороной al при $l \to \infty$.

3.3. Использовать индукцию по n.

3.9. $K[x]/\langle p \rangle$ — поле, если p неразложим над полем K.

3.13. Использовать разложение комплексного многочлена на линейные множители и свойства аргумента комплексного числа.

4.3. Продифференцировать обе части тождества, определяющего гармонические многочлены.

4.5. Достаточно разобрать случай корней простой степени из 1.

4.7. $\mathrm{Ker}(B - \lambda E)$ инвариантно относительно A, если $AB = BA$.

4.11. Инвариантное подпространство тоже имеет корневое разложение.

4.13. Записать действие BA в жордановом базисе пространства относительно BA, а затем применить A.

4.17. Привести правую часть к жордановой форме.

5.3. Использовать задачу 3.2.

5.10. Найти общее минимальное инвариантное подпространство и использовать индукцию по размерности пространства.

5.14. Отождествить вершины симплекса с “концами” векторов стандартного базиса для $\mathbb{R}^6$.

5.15. Использовать полярное разложение.

5.16. а) Сумма квадратов модулей всех элементов матрицы не меняется при сопряжении унитарной матрицей. б) Использовать полиномиальную интерполяцию.

5.19. Использовать перемежаемость спектра матрицы квадратичной формы и её сужения на подпространстве.

6.3. Рассмотреть индуцированное действие на множестве вершин, диагоналей и вписанных кубов.

6.10. Подобно задаче 1.10, использовать правый сдвиг.

6.14. Вычислить структурные константы для sl_2 в “естественном” базисе и применить 6.13.

6.15. Базис so_4 с нужными структурными константами можно найти, например, используя разложение группы PSO_4 в прямое произведение.

6.17. Использовать разложение в ряд экспоненты, косинуса и синуса.