Программа курса

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

для студентов 1-2 курсов

Механико-математического факультета

Новосибирского государственного университета

1. Организационно-методический раздел.

1.1. Название курса - «Математическая логика». Данный курс реализуется в рамках специальности «Математика». Относится к числу общих математических дисциплин. Относится к вузовской компоненте.

1.2. Цели и задачи курса.

Дисциплина "Математическая логика" предназначена для того, чтобы студенты Механико-математического факультета овладели основами математической логики и теории множеств.

Основной целью освоения дисциплины является знание основополагающих понятий, результатов и методов математической логики - фундаментальной науки, лежащей в основании математики и информатики.

Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса: освоение теории множеств, понимание принципов аксиоматического метода, синтаксиса и семантики , накопление опыта работы с формализованными языками, пропозициональными и предикатными исчислениями, знание формулировок и доказательств основных теорем курса, усвоение основ теории алгоритмов, необходимых для доказательства фундаментальных теорем Геделя о неполноте и неразрешимости арифметики.

1.3. Требования к усвоению содержания курса.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен:

- иметь представление о задачах, которыми занимается математическая логика;
- знать определения основных понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса;
- уметь строить выводы в пропозициональных и предикатных исчислениях, записывать свойства на языке первого порядка, решать задачи на применение теорем о полноте и корректности, локальной теоремы Мальцева, приводить формулы к нормальным формам, находить мощности множеств, решать задачи, относящиеся к частично упорядоченным и вполне упорядоченным множествам.

1.4. Формы контроля.

Итоговый контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрены зачет и экзамен в конце каждого из двух семестров, в течение которых читается курс.

Текущий контроль. В течение каждого семестра проводятся 3 контрольные работы, проверяются домашние задания. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Новизна курса. Курс дает основы математической логики, которые являются необходимыми для студентов ММФ.

2.2. Тематический план курса (распределение часов)

	Количество часов			
Наименование разделов и тем	Лекции	Семинары	Самост.работа	Всего
2-й семестр (1 курс)				
Исчисление высказываний (ИВ)	12	12	8	30
Истинность формул ИВ	10	10	7	27
Теория множеств	8	6	5	17
Истинность формул данного языка	4	4	3	13
3-й семестр (2 курс)				
Исчисление предикатов (ИП)	12	12	10	38
Теория рекурсии	12	12	10	36
Теоремы Геделя о неполноте и неразрешимости арифметики	10	8	6	24
Итого по курсу:	68	68	49	185

2.3. Содержание основных разделов и тем

I. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Исчисление высказываний (ИВ). Вывод в ИВ. Эквивалентность формул. Теорема о подстановке.
2. Допустимые правила вывода. Примеры.
3. Синтаксическая эквивалентность формул логики высказываний. Теоремы о замене. Вывод основных эквивалентностей.
4. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
5. Таблицы истинности. Теорема о функциональной полноте исчисления ИВ.
6. Теорема о полноте ИВ.
7. Совершенные нормальные формы.
8. Исчисление высказываний гильбертовского типа ($ИВ_1$).
9. Теорема о дедукции для $ИВ_1$.
10. Теорема о равносильности $ИВ_1$ и ИВ.

II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Аксиомы теории множеств (ZFC).

2. Упорядоченная пара. Декартово произведение множеств. Отношения и функции.

3. Отношения эквивалентности, предпорядка, частичного и линейного порядков.

4.Основные свойства вполне упорядоченных множеств. Теорема об изиморфизме вполне упорядоченных множеств.

5. Принцип максимума и принцип полного упорядочения.

6. Сравнение множеств по мощности. Теоремы Кантора-Бернштейна и Кантора. Теорема о сравнении множеств по мощности..

7. Ординалы и их свойства, кардиналы.

8. Теорема о квадрате бесконечного множества.

7. Мощность объединения и произведения бесконечных множеств. Мощность множества слов в бесконечном алфавите.

III. ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ЕГО СЕМАНТИКА

1. Предикаты и функции. Алгебраические системы данной сигнатуры.

2. Термы и атомарные формулы. Формулы первого порядка.

3. Определение истинности формул на алгебраической системе. Тождественная истинность и выполнимость.

4. Семантическая эквивалентность формул. Предваренная нормальная форма.

IV. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод в исчислении.

2. Допустимые правила. Леммы о подстановке.

3. Тождественная истинность доказуемых секвенций.

4. Непротиворечивые множества формул и их свойства.

5. Теорема о существовании модели.

6. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов.

7. Локальная теорема Мальцева. Теорема о расширении. Теорема Левенгейма-Скулема.

8. Аксиоматизируемые классы. Критерий конечной аксиоматизируемости.
Критерий универсальной аксиоматизируемости.

V. АЛГОРИТМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга.

2. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.

3. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Частично-рекурсивные функции.

4. Нумерация пар и кортежей натуральных чисел. Функция Геделя.

5. Нумерация машин Тьюринга.

6. Равнообъемность класса частично-рекурсивных функций и класса вычислимых функций. Тезис Черча.

7. Существование универсальной частично рекурсивной функции.
8. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества.
9. Существование нерекурсивного, рекурсивно перечислимого множества.

VI. ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ

1. Геделевская нумерация и ее свойства.
2. Рекурсивно аксиоматизируемые, полные и разрешимые теории.
3. Формальная теория арифметики.
4. Представимость рекурсивных функций.
5. Теорема Геделя о неполноте и неразрешимости арифметики.
6. Теорема Черча о неразрешимости исчисления предикатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.- М., Наука, 1979 или 1987.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М., Наука, 1975, 1984, 1995 или 2001.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.- М., Наука, 1965 или 1986.

2.4.Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы

Программа практических занятий
по МАТЕМАТИЧЕСКОИ ЛОГИКЕ
для студентов 1 курса (2-й семестр)

1. Понятие формулы. Таблицы истинности. Семантическая эквивалентность (2 часа). Лавров,Максимова, Часть 2, Параграф 1, N 1-3, 7-10, 19-20.
2. Вывод в исчислении высказываний. Допустимые правила. Вывод основных эквивалентностей (5 часов). ЛМ, Часть 2, Параграф 3, N 1-9, 14.
3. Приведение к нормальным формам (2 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 1, N 24.
4. Контрольная работа.
5. Приведение к совершенным нормальным формам (1 час). ЛМ, Часть 2, Параграф 1, N 29, 30, 32, 33, 35-40.
6. Функционально полные системы связок (3 час). ЛМ, Часть 2, Параграф 2, N 2-6, 8-13.
7. Контрольная работа.
8. Декартово произведение. Отношения и функции (2 час). ЛМ, Часть 2, Параграф 2, N 1-27.
9. Отношения эквивалентности, частичного и полного порядка (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 3, N 6-11, 26-31, 34-42; Пар. 5, N 30-43.
10. Мощность множества (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 4, N 7-36; Пар. 6, N 8, 9.
11. Контрольная работа.

10. Понятие терма и формулы данной сигнатуры. Запись свойств на языке первого порядка (3 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 4.

11. Истинность и выполнимость. Приведение к предваренной нормальной форме (3 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 5, N 7-19, 30-37, 42.

ЛИТЕРАТУРА

И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М.: Наука, 1975, 1984, 1995 или 2001.

Программа практических занятий

по МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

для студентов 2 курса (3-й семестр)

1. Выводы в исчислении предикатов (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 6 N 1-9, Пар. 7 N 1.
2. Локальная теорема Мальцева (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 7 N 12-17; Пар. 9 N 1-3, 5, 7, 8.
3. Примитивно рекурсивные и частично-рекурсивные функции (4 часа). ЛМ, Часть 3, Параграф 1, N 1-32.
4. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга (4 часа). ЛМ, Часть 3, Параграф 2 N 1-10.
5. Нумерация машин Тьюринга (2 часа). Часть 3, Параграф 2 N 11-20.
6. Универсальные функции (2 часа). Часть 3, Параграф 2 N 21,22, Пар. 1 N 43,44.
7. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества, Часть 3, Параграф 3 N 1-29.
8. Рекурсивно аксиоматизируемые, разрешимые и неразрешимые теории (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 7 N 13-17.
9. Формальная арифметика. Представимость рекурсивных функций (4 часа). ЛМ, Часть 2, Параграф 7 N 18-37.

ЛИТЕРАТУРА

И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М.: Наука, 1975, 1984, 1995 или 2001.

3.**Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

3.3. Образцы вопросов для подготовки к экзамену (зачету)

(2-й семестр)

1) Формулы ИВ, лемма о начале формулы ИВ;
2) Теоремы о подформулах формул ИВ;
3) Теорема о единственности дерева образования формулы ИВ;
4) Аксиомы и правила вывода ИВ;

5) Доказательства и теоремы ИВ;
6) Допустимые правила вывода ИВ;
7) Эквивалентность формул, основные эквивалентности ИВ;
8) Теорема о замене;
9) Нормальные формы;
10) Теорема о существовании д.н.ф.;
11) Теорема о существовании к.н.ф.;
12) Интерпретация формул ИВ;
13) Основная лемма о доказуемости в ИВ;
14) Теорема о полноте И В;
15) Теорема о существовании совершенной д.н.ф.;
16) Теорема о существовании совершенной к.н.ф.;
17) Исчисление высказываний гильбертовского типа (ИВ1);
18) Линейное доказательство в ИВ1, вывод в ИВ1;
19) Теорема о дедукции в ИВ1;
20) Теорема о равносильности ИВ и ИВ1;
21) Аксиомы объемности, пустого множества и пары;
22) Аксиомы объединения, бесконечности и степени;
23) Аксиомы регулярности и ее следствия;
24) Аксиомы подстановки и выбора;
25) Упорядоченные наборы (определение и основное свойство);
26) Функции, отображения, их типы;
27) Композиция и инверсия бинарных отношений;
28) Типы бинарных отношений;
29) Частично упорядоченные множества, особые элементы (максимальные, минимальные и т.п.) и их свойства;
30) Принцип максимума;
31) Линейно и вполне упорядоченные множества;
32) Теорема о полном упорядочении;
33) Теорема о кардинальном упорядочении;
34) Теорема об изоморфизме вполне упорядоченных множеств;
35) Сравнение множеств по мощности;
36) Теорема Кантора-Бернштейна;
37) Теорема Кантора;
38) Теорема о сравнимости множеств по мощности;
39) Конечные и бесконечные множества, их свойства;
40) Теорема о характеризации конечных множеств;
41) Теорема о квадрате бесконечного множества;
42) Ординалы и их свойства
43) Теорема о представлении в.у.м.;
44) Кардиналы и мощность множества;
45) Натуральные числа и счетные множества;

46) Мощность множества слов данного алфавита.

(3-й семестр)

1. Понятия языка и структуры (алгебраической системы) данного языка;
2. Подструктуры и изоморфизмы структур;
3. Термы и формулы данного языка;
4. Свободные и связанные вхождения переменных;
5. Значение терма в структуре;
6. Истинность формулы в структуре;
7. Сохранение истинности формулы при изоморфизме;
8. Аксиомы и правила вывода $ИП^L$, теоремы $ИП^L$;
9. Тавтологии, сохранение эквивалентностей ИВ в $ИП^L$;
10. Основные эквивалентности $ИП^L$;
11. Доказуемость секвенции $\forall x_o \ldots \forall x_n \Psi \vdash (\Psi)^{xo \ldots xn}_{to \ldots tn}$;
12. Доказуемость секвенции $(\Psi)^{xo \ldots xn}_{to \ldots tn} \vdash \exists x_o \ldots \exists x_n \Psi$;
13. Допустимость в $ИП^\Sigma$ правила подстановки в секвенцию S вместо переменных $x_1,\ldots,x_n$ термов $t_1,\ldots,t_n$;
14. Доказуемость секвенций, выражающих симметричность и транзитивность равенства;
15. Доказуемость секвенций, выражающих подстановку равных термов в терм;
16. Теорема о замене в $ИП^L$;
17. Теорема о предваренной нормальной форме;
18. Полные теории и их свойства;
19. Существование полной теории, содержащей данное непротиворечивое множество;
20. Теорема о существовании константно плотной теории;
21. Теорема о константной структуре;
22. Теорема о существовании модели;
23. Локальная теорема Мальцева;
24. Теорема о непротиворечивости $ИП^L$;
25. Теорема о полноте $ИП^L$;
26. Теорема о существовании моделей как угодно большой мощности;
27. Аксиоматизируемые классы, сохранение аксиоматизируемости при взятии объединения и пересечения;
28. Связь конечной аксиоматизируемости с сохранением аксиоматизируемости при взятии дополнения;
29. Примеры неаксиоматизируемых и не конечно аксиоматизируемых классов;
30. Арифметика Робинсона (AR), теорема о представимости рекурсивных функций в AR;

31. Представимость простейших функций в AR;
32. Геделевская нумерация;
33. Теорема о неразрешимости арифметики;
34. Теорема о неразрешимости ИП$^{\Sigma_0}$;
35. Рекурсивная аксиоматизируемость аксиоматизируемой теории;
36. Разрешимость полной аксиоматизируемой теории;
37. Теорема Геделя о неполноте;
38. Критерий элементарности подструктур;
39. Лемма о мощности наименьшего замкнутого множества;
40. Теорема Левенгейма-Сколема;
41. Элементарная диаграмма и ее свойство;
42. Теорема об абсолютно категоричных теориях;
43. Теорема о полноте категоричной теории;
44. Разрешимость теорий плотных порядков, векторных пространств и поля комплексных чисел.

2.4.Список основной и дополнительной литературы

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.- М., Наука, 1987 или 2004.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М., Наука, 1975, 1984, 1995 или 2001.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.- М., Наука, 1965 или 1986.

Профессор, д.ф.-м.н. Е.А.Палютин