Программа по курсу «Высшая Алгебра»

1. Организационно-методический раздел.

1.1. Название курса - «Высшая алгебра». Данный курс реализуется в рамках специальности «Математика». Относится к разделу общих математических дисциплин. Относится к вузовской компоненте.

1.2. Цели и задачи курса. Дисциплина «Высшая алгебра» предназначена для того, чтобы студенты механико-математического факультета овладели основами линейной и абстрактной алгебры, необходимыми для применения как в алгебре так и в других математических и физических дисциплинах. Основной целью освоения дисциплины является знание основ линейной и абстрактной алгебры. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- научить студентов: решать системы линейных уравнений;
- работать с векторными пространствами, группами, кольцами (в частности, матриц и многочленов) и полями;
- работать с линейными преобразованиями, уметь находить жорданову форму линейного преобразования над C, канонический вид нормальных преобразований;
- основам теории квадратичных форм.

Требования к уровню освоения содержания курса. По окончании изучения указанной дисциплины студент должен:

- иметь представление о задачах, которыми занимается линейная и абстрактная алгебра;
- знать основные теоремы курса;
- уметь решать системы линейных уравнений;
- уметь работать с векторными пространствами, группами, кольцами (в частности, матриц и многочленов) и полями;
- уметь работать с линейными преобразованиями, уметь находить жорданову форму линейного преобразования над C, канонический вид нормальных преобразований;
- уметь приводить квадратичную форму к диагональному виду.

Формы контроля.

Итоговый контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен.

Текущий контроль. В течение каждого семестра выполняются три контрольных работы, принимается коллоквиум и задания. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете и получения зачета. В конце каждого семестра проводится зачет и экзамен.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Новизна курса - курс дает основы теории линейной и абстрактной алгебры, которые являются необходимыми для студентов ММФ.

2.2. Тематический план курса (распределение часов).

Наименование разделов и тем	Лекции	Семинары	Самост. работа	Всего
Системы уравнений	6	6	9	21
Векторные пространства	8	8	12	28
Матрицы	12	12	18	42
Определители	10	10	15	35
Алгебраические структуры	18	18	27	63
Многочлены	14	14	21	49
Линейные преобразования	14	14	21	49
Унитарные пространства	12	12	21	45
Квадратичные формы	8	8	12	28
Всего	**102**	**102**	**156**	**360**

2.3. Содержание отдельных разделов и тем.

1. **Векторные пространства. Матрицы и определители:** Приведение систем линейных уравнений к ступенчатому виду методом Гаусса. Базис и размерность векторного пространства: существование и свойства. Координаты вектора. Суперпозиция линейных отображений и произведение матриц. Обратимые преобразования и матрицы. Образ и ядро линейного отображения, связь их размерностей. Теорема Кронекера – Капелли. Однородные системы, пространство решений, его размерность, фундаментальная система решений. Линейные многообразия и решения неоднородной системы линейных уравнений. Фактор-пространство, его размерность. Определитель матрицы как полилинейная кососимметрическая нормированная функция строк матрицы. Теорема об определителе транспонированной матрицы.
2. **Алгебраические структуры (группы, кольца, поля):** Определение и примеры полугрупп. Теорема об обобщенной ассоциативности. Симметрическая группа. Разложение подстановки на независимые циклы. Изоморфизм групп, теорема Кэли. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Кольца многочленов и формальных степенных рядов. Гомоморфизм и идеалы колец. Фактор-кольцо Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Кольцо Z_n . Поле, подполе, расширение поля. Поле F_p . Теорема о простом подполе. Характеристика поля. Поле комплексных чисел. Формула Муавра. Максимальные идеалы колец и поля вычетов. Целостные кольца и поля частных, поле рядов Лорана.
3. **Кольца многочленов:** Факториальные кольца, критерий целостности, Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены, признак неприводимости Эйзенштейна. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Корни многочлена и линейные множители. Число корней многочлена. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона. Существование корня в расширении поля. Простое алгебраическое расширение поля.

Симметрические многочлены. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$.

4. **Линейные преобразования векторных пространств:** Операции над линейными преобразованиями. Характеристический многочлен матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли. Инвариантные подпространства. Жорданова нормальная форма. Теорема Жордана. Представление пространтства в виде прямой суммы инвариантных корневых подпространств. Функции от матриц. Представление функций от матриц многочленами.
5. **Евклидовы и унитарные пространства:** Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Сопряженные преобразования. Канонический вид матрицы нормального преобразования унитарного пространства. Канонический вид матрицы нормального преобразования Евклидова пространства. Канонический вид матриц и унитарных ортогональных преобразований. Эрмитовы и симметрические преобразования. Полярное разложение линейного преобразования.
6. **Квадратичные формы:** Алгоритм Лагранжа – приведение квадратичной формы к диагональному виду. Закон инерции квадратичных форм. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы. Одновременная диагонализация пары форм.

<u>2.4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:</u>

- Решить систему линейных уравнений.
- Найти фундаментальную систему решений.
- Доказать линейную независимость системы векторов.
- Написать систему уравнений, задающую векторное пространство.
- Пусть U,V,W - подпространства в L, причем $V \subseteq U$. Доказать, что $U \cap (V+W) = (U \cap V) + (U \cap W)$.
- Найти обратную матрицу.
- Найти ранг матрицы.
- Вычислить определитель матрицы методом рекуррентных соотношений.
- Найти неизвестную матрицу X из уравнения $AX=B$.
- Доказать изоморфность групп R и R^+ .
- Доказать, что S_n как группа порождается подстановками $(12),(13),\ldots,(1\,n)$.
- Найти условия, когда кольцо вычетов является полем.
- Решить уравнение $2\,x=2$ в $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_5$.
- Найти все максимальные идеалы в $\mathbb{Z}_{24}$.
- Решить в поле $\mathbb{C}$ уравнение $(z-i)^n-(z+i)^n=0$.
- Оценить границы корней многочлена $x^4+2x^3+15x^2-5\,x+1$.
- Выписать все неприводимые многочлены степени не выше 4 над F_2 .
- Найти жорданову форму и базис матрицы.
- Найти e^A для $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- Найти канонический вид ортогональной матрицы.
- Привести пару форм к диагональному виду.

См. также п. 3.3.

3. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

3.3. Образцы вопросов для подготовки к экзамену:

1. Исследование систем линейных уравнений. Необходимые и достаточные условия совместности и определенности систем линейных уравнений.
2. Пространство решений однородной системы линейных уравнений.
3. Линейные комбинации и линейная зависимость. Базис и размерность векторного пространства: существование и свойства. Координаты вектора.
4. Пространство линейных отображений $L(U,V)$ и пространство матриц $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Изоморфизм пространств $L(U,V)$ и $M_{m,n}(\mathbb{R})$.
5. Образ и ядро линейного отображения, связь их размерностей.
6. Характеризация обратимого преобразования в терминах ядра и образа.
7. Вертикальный и горизонтальный ранги матрицы, их равенство.
8. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Однородные системы, пространство решений, его размерность, фундаментальная система решений.
10. Линейные многообразия и решения неоднородной системы линейных уравнений. Фактор-пространство, его размерность.
11. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства.
12. Теорема об определителе транспонированной матрицы.
13. Формулы Крамера. Ранг матрицы как наибольший порядок ненулевых миноров.
14. Теорема об окаймляющем миноре.
15. Подгруппы, циклические группы. Порядок элемента и порядок порожденной им циклической группы.
16. Симметрическая группа. Разложение подстановки на независимые циклы.
17. Знакопеременная группа, ее порядок. Теорема о полном развертывании определителя.
18. Изоморфизм групп, теорема Кэли.
19. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.
20. Нормальные подгруппы, фактор-группы. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
21. Кольцо Z_n .
22. Поле, подполе, расширение поля. Поле F_p . Теорема о простом подполе.
23. Характеристика поля. Поле комплексных чисел: матричная конструкция, изоморфизм с конструкцией в виде пар действительных чисел.
24. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы, их свойства.
25. Алгоритм деления с остатком. Факториальные кольца, критерий целостности, Н.О.Д. и Н.О.К. в факториальных кольцах.
26. Евклидовы кольца. Алгоритм Евклида.
27. Факториальность евклидовых колец. Примитивные многочлены. Лемма Гаусса.
28. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
29. Поле рациональных функций. Разложение рациональных функций на простейшие дроби.
30. Корни многочлена и линейные множители. Число корней многочлена.
31. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

32. Производная многочлена, формула Тейлора. Отделение кратных множителей. Формулы Виета.
33. Основная теорема о симметрических многочленах.
34. Дискриминант многочлена. Формулы Ньютона.
35. Результант двух многочленов как определитель наличия общих множителей.
36. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$.
37. Матрица линейного отображения. Координаты образа вектора. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базы.
38. Однозначное определение линейного преобразования по образам базисных элементов.
39. Характеристический многочлен матрицы. Подобие матриц. Совпадение характеристических многочленов подобных матриц.
40. Теорема Гамильтона-Кэли. Инвариантные подпространства.
41. Собственные векторы и собственные значения матриц и линейных преобразований.
42. Минимальные многочлены матриц и линейных преобразований.
43. Нильпотенциальные линейные преобразования. Канонический вид матрицы нильпотентного линейного преобразования. Клетка и матрица Жордана.
44. Минимальный и характеристический многочлен от матрицы Жордана.
45. Теорема Жордана. Представление пространтства в виде прямой суммы инвариантных корневых подпространств.
46. Теорема Жордана – существование и единственность жордановой нормальной формы.
47. Задача о подобии матриц.
48. Функции от матриц. Представление функций от матриц многочленами.
49. Аксиоматика и примеры унитарных и евклидовых пространств.
50. Длина вектора и расстояние между векторами. Неравенство Коши-Буняковского.
51. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.
52. Линейные функционалы и сопряженное пространство.
53. Существование и единственность сопряженного преобразования.
54. Нормальные преобразования. Канонический вид матрицы нормального преобразования унитарного пространства.
55. Канонический вид матрицы нормального преобразования Евклидова пространства.
56. Эрмитовы и симметрические преобразования.
57. Квадратный корень из неотрицательного эрмитового преобразования.
58. Полярное разложение линейного преобразования.
59. Матрица квадратичной формы, ее поведение при замене переменных.
60. Приведение квадратичной формы к главным осям.
61. Закон инерции квадратичных форм.
62. Формулы Якоби - приведение квадратичной формы к диагональному виду.
63. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы.
64. Одновременная диагонализация пары форм.

<u>3.4. Список основной литературы:</u>

1. Б. Л. Ван-дер-Варден, Алгебра, М.: Наука, 1976.
2. Э. Б. Винберг, Курс алгебры, М.: Факториал, 1999.

3. А. И. Кострикин, Введение в алгебру, М.: Наука, 1977.
4. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М.: Наука, 1968.
5. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М.: Наука, 1970.
6. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, М.: Физматгиз, 1962.
7. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1972.
8. В. А. Чуркин, Жорданова классификация конечномерных линейных операторов, НГУ, Новосибирск, 1991.

Список дополнительной литературы:

1. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, Линейная алгебра и геометрия, М.: МГУ, 1980.
2. П. Халмош, Конечномерные векторные пространства, М.: Физматгиз, 1963.

доцент НГУ, к.ф.-м.н. Пожидаев А.П.