Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Начнем рассуждать. Выделим фразы, которые могли бы помочь выбрать путь рассуждений. Такой фразой послужит словосочетание «точек экстремума», которое ведет нас к воспоминаниям о том, что такое экстремум и как исследуются задачи, связанные с экстремумом. Образно вспоминаем, что экстремум — это либо «впадина», либо «холмик», а для исследования можно применять производную. Однако мы обычно исследовали функции, заданные формулой, в которой модуль не участвовал. Дело в том, что наличие модуля говорит о том, что функция имеет составной вид, т. е. задается разными выражениями на тех множествах, где подмодульное выражение сохраняет свой знак. Стало быть, пока на будем обольщаться методами, связанными с производной, по крайней мере до тех пор, пока не разберемся с заданием функции.

Для выявления выражений, которыми задается функция, необходимо прибегнуть к раскрытию модуля. Ориентируясь на определение модуля, имеем

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3a^2 - 5x & \text{при } x - a^2 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 3a^2 - 5x & \text{при } x - a^2 < 0, \end{cases}$$

что после простейших преобразований можно записать так:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 3a^2 & \text{при } x - a^2 \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 3a^2 & \text{при } x - a^2 < 0. \end{cases}$$

Что изменилось и стало ли продолжение решения яснее? Конечно, модуль исчез, однако появились разные выражения для задания функции на разных множествах, причем смена задающего функцию выражения меняется не в конкретной точке, а в зависимости от параметра. Это плохой признак, так как недостаточно ясно, где какую ветвь параболы брать.

Обратимся к вопросу задачи. Спрашивается, когда у функции более двух точек экстремума. Значит, надо провести такие преобразования, которые бы дали бо́льшую ясность в вопросе формирования экстремумов у этой функции. Ясно, что каждая из задающих $f(x)$ квадратичных функций имеет минимум в виде вершины параболы, однако, во-первых, вовсе необязательно, что эта вершина попадет в ту область, в которой эта квадратичная функция задает $f(x)$, а во-вторых, вершина-то всего одна, а нам экстремумов надо не менее чем три (т. е. более чем два). Откуда брать еще два? Они могут появиться только за счет смены задающих функцию выражении при переходе через точку, в которой такая смена происходит.

Чтобы понять, как формируется функция, желательно преобразовать задающие ее квадратичные выражения, выделив в них полные квадраты:

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 + 3a^2 - 16 & \text{при } x \geqslant a^2, \\ (x-1)^2 - 3a^2 - 1 & \text{при } x < a^2. \end{cases}$$

Обратимся к графику функции $f(x)$. Он составлен из кусков двух парабол, причем до некоторой точки, а именно до a^2, берется одна из парабол, а после — другая. Точка $x = a^2$ смены парабол лежит в неотрицательной части оси абсцисс. Это параболы, абсциссы вершин которых расположены в точках $x = 1$ и $x = 4$ и не меняются. В любом случае слева от точки a^2 берется парабола, являющаяся графиком функции $f_1(x) = (x-1)^2 - 3a^2 - 1$, а справа — парабола, служащая графиком функции $f_2(x) = (x-4)^2 + 3a^2 - 16$.

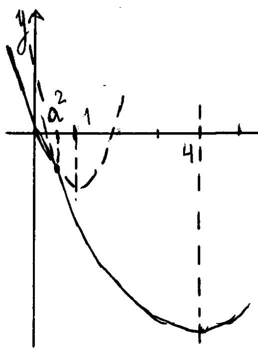

Рис. 1.

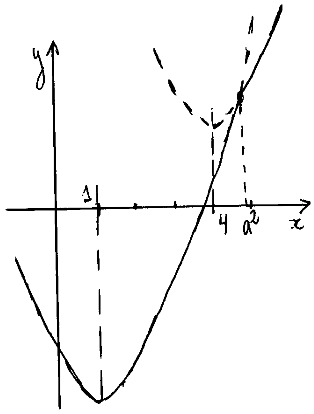

Рис. 2.

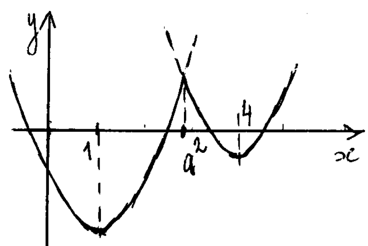

Рис. 3.

Будем мысленно передвигать точку смены парабол от нуля вправо. Если она расположена левее единицы или совпадает с ней, т. е. $0 \leqslant a^2 \leqslant 1$, то смена параболы происходит до того момента, когда появляется ее вершина, а значит, эта вершина точку минимума нашей функции не порождает (рис. 1, масштаб на рисунках условный, соблюдается лишь качественная картина). Конечно, точка смены парабол может оказаться точкой минимума, но такого не будет, так как исходная функция непрерывна, а тогда ордината вершины правой параболы должна быть ниже ординаты вершины левой, тем более ниже тоски перемены парабол. Этот же эффект можно обнаружить и не обращаясь к непрерывности, а наблюдая за величинами $3a^2 - 16$ и $-3a^2 - 1$ параметров сдвига парабол вверх или вниз. Остается только одна возможность для точки экстремума функции $f(x)$ — это вершина второй параболы.

Аналогичная картина будет наблюдаться в том случае, когда точка смены параболы станет больше четырех (рис. 2). А если смена параболы происходит между точками 1 и 4, то в точке смены параболы появляется максимум при том, что обе вершины порождают минимумы составной функции (рис. 3). Таким образом, условием появления трех точек экстремума служит выполнение неравенства

$$1 < a^2 < 4,$$

где a^2 — точка смены параболы. Решая полученную систему неравенств, приходим к выводу, что более двух точек экстремума функция $f(x)$ имеет, когда $1 < a^2 < 4$, т. е. при $-2 < a < -1$ или $1 < a < 2$.

Упражнение. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - |x - a^2| - 5x$$

имеет хотя бы одну точку максимума. Ответ: $-\sqrt{3} < a < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$.