Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 4x + 3|$$

больше 1.

В определении функции участвует модуль. Естествен вопрос: сразу его раскрывать или нет? Сформулируем принцип наступления момента раскрытия модуля (он относится к любой ситуации с участием модуля): если есть хоть какая-то возможность продолжать решение задачи без раскрытия модуля, надо продолжать. Модуль надо раскрывать только в том случае, если без этой операции дальнейшее решение невозможно или хотя бы проблематично. У нас, видимо, без раскрытия модуля делать нечего. Значит, сразу избавимся от модуля в определении функции, правда, при этом, как обычно бывает с модулем, придется прибегнуть к разветвленному заданию функции. А именно согласно определению модуля имеем

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-4)x + 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ -x^2 + (2a+4)x - 3, & \text{если } x^2 - 4x + 3 < 0, \end{cases}$$

и, найдя множество положительности подмодульного выражения, можем записать:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-4)x + 3 & \text{при } x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty), \\ -x^2 + (2a+4)x - 3 & \text{при } x \in (1, 3). \end{cases}$$

Теперь подумаем над содержанием вопроса. Во-первых, можно описать, чему равно наименьшее значение функции f в зависимости от a, и записать условие, согласно которому это значение будет больше единицы. Во-вторых, можно сдвинуть функцию вниз на единицу, т. е. рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - 1$, и задаться вопросом, когда ее наименьшее значение положительно. Этот ход содержательно не отличается от первого, однако говорить о положительности наименьшего значения функции, тесно связанной с квадратической, удобнее, чем вести речь о том, что оно больше единицы. Наконец, требование, чтобы наименьшее значение было большим единицы, равносильно тому, чтобы все значения были больше единицы, а описание ситуаций, когда все значения больше единицы, или что функция $g(x)$ положительна, исследуется немного иначе. Во всяком случае, начнем изучение функции, а там посмотрим, чем легче будет воспользоваться.

Итак, займемся ответом на вопрос: при каких значениях a наименьшее значение функции

$$g(x) = f(x) - 1 = \begin{cases} x^2 + (2a-4)x + 2 & \text{при } x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty), \\ -x^2 + (2a+4)x - 4 & \text{при } x \in (1, 3). \end{cases}$$

положительно.

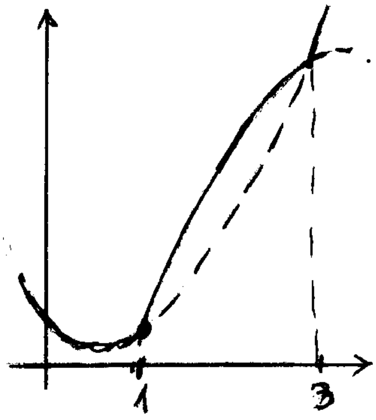

Рис. 1

График функции $g(x)$ на промежутках $(-\infty, 1]$ и $[3, +\infty)$ представляет собой фрагменты параболы, ветви которой направлены вверх, а значит, она принимает наименьшее значения на этом множестве либо в вершине, если таковая лежит в множестве $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$, либо в точках 1 или 3. График второго фрагмента, задающего функцию $g(x)$, есть часть параболы, ветви которой направлены вниз, и она может давать наименьшие значения только на концах промежутка, т. е. в точках 1 или 3. А в этих точках она совпадает с первой задающей $g(x)$ квадратичной функцией (рис. 1, на котором функции изображены условно), а значит, часть функции $g(x)$ на промежутке от 1 до 3 можно не рассматривать.

Обратимся к изучению функции $h(x) = x^2 + (2a-4)x + 2$ на множестве $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ на предмет выяснения, когда ее наименьшее значение этом множестве положительно. Наименьшим является значение, соответствующее вершине параболы, если таковая оказалась в рассматриваемом множестве, и значение на каком-то из концов рассматриваемого множества, если вершина из него ушла. Стало быть, надо рассмотреть три возможности для расположения абсциссы вершины и сделать соответствующие выводы.

1. Пусть абсцисса вершины лежит левее единицы либо совпадает с ней, т. е. $-a + 2 \leqslant 1$, или, что то же, $a \geqslant 1$. Тогда положительность ординаты вершины графика функции $h(x)$ равносильна тому, что ее дискриминант отрицателен, т. е. $(a-2)^2 - 2 < 0$, а это произойдет при $a \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, так что с учетом рассматриваемых значений a, а именно $a \geqslant 1$, получаем, что при этих a наименьшее значение функции $h(x)$ положительно, если $a \in [1, 2 + \sqrt{2})$.

2. Пусть абсцисса вершины правее чем три или совпадает с тройкой, т. е. $-a + 2 \geqslant 3 \iff a \leqslant -1$. Однако это множество не имеет пересечений с множеством тех a, при которых дискриминант отрицателен, так что в этом случае на рассматриваемом множестве всегда

есть отрицательные значения и тем самым этот случай не вносит никакой информации в окончательный результат.

3. Наконец, пусть $-1 < a < 1$. Это условие означает, что абсциссы вершин парабол $h(x)$ при таких a расположены между 1 и 3. Тогда наименьшее значение функции $h(x)$ на рассматриваемом множестве достигается либо в точке 1, либо в точке 3. Найдем значения $h(1)$ и $h(3)$ и потребуем их положительности. Имеем

$$h(1) > 0 \Longleftrightarrow a > \frac{1}{2}, \quad h(3) > 0 \Longleftrightarrow a > \frac{1}{6},$$

и с учетом того, что рассматриваются только $a \in (-1, 1)$, получаем, что среди таких a функция $g(x)$ положительна при $a \in (1/2, 1)$. Объединяя полученный результат с достигнутым ранее, приходим к ответу: $a \in (1/2, 2 + \sqrt{2})$.

Упражнение. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше 1. Ответ: $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.