Пример. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(x+5+2a)^2+(-y+1+a)^2} \leqslant \dfrac{|a^2-a-1|}{\sqrt{5}}, \\ x+2y \geqslant -2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Первое, на что можно обратить внимание в условии задачи — тип соотношения, единственность решения которого предлагается выяснить. Это система неравенств! Редко встречающееся соотношение вообще, тем более с вопросом о единственности решения.

Почти полное отсутствие среди задач систем неравенств связано с тем, что неравенства являются не столь «жесткими» соотношениями, как уравнения. К системе неравенств невозможно применять аналитические средства, типичные для систем уравнений: нельзя выразить какую-то неизвестную из одного неравенства и подставить результат в другие и т. п. Поэтому сразу отклоним аналитический путь решения и начнем рассуждать с геометрических позиций.

Первое неравенство системы задает на плоскости (x, y) круг радиусом $\dfrac{|a^2-a-1|}{\sqrt{5}}$ с центром в точке $(-5-2a, 1+a)$. Второе неравенство характеризует полуплоскость, расположенную выше прямой $x+2y=-2$. Нетрудно догадаться, что единственность решения системы может быть только в том случае, когда окружность, являющаяся границей круга, касается прямой, выделяющей полуплоскость, и при этом центр окружности лежит ниже заданной прямой. Таким образом, по существу, вопрос задачи превращается в такой: при каких a система соотношений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+5+2a)^2+(-y+1+a)^2} = \dfrac{|a^2-a-1|}{\sqrt{5}}, \\ x+2y=-2, \\ (-5-2a)+2(1+a) < -2. \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение? Так по крайней мере привычнее.

Далее можно пойти традиционным путем: выразить из второго уравнения x через y, подставить полученное выражение в первое, получить квадратное относительно y уравнение и свести вопрос задачи к вопросу о единственности решения квадратного уравнения, ответ на который известен: обращение в нуль дискриминанта. Однако действие, превращающее первое уравнение в квадратное, а именно возведение в квадрат, приведет к появлению четвертой степени в свободном члене, включающем параметр a, и условие единственности решения квадратного уравнения будет сопряжено с уравнением четвертой степени относительно a. В принципе, шансы дойти этим путем до конца может быть и есть, но они невелики.

Что делать? Еще раз обратимся к геометрической поддержке. Задаваемая вторым уравнением системы (1) прямая неизменна, в то время как центры и радиусы задаваемых первым уравнением системы (1) окружностей меняются. Из геометрических соображений можно сделать вывод, что окружность и прямая коснутся в том случае, когда расстояние от центра окружности до прямой окажется равным радиусу окружности. Для математической записи этого факта надо выразить через a расстояние от центра окружности до данной прямой и приравнять полученное выражение радиусу. Придем к уравнению, решение которого даст требуемый результат. Останется проверить, какие из полученных значений параметра будут удовлетворять неравенству системы (1), и выбрать из полученного набора наибольшее число.

Для нахождения расстояния от точки до прямой можно, разумеется, найти соответствующую формулу, выучить ее для возможного применения в подходящей ситуации и применить. Однако формул много, разнообразных ситуаций тоже много, все формулы выучить трудно, если вообще возможно, поэтому предлагаю пойти другим путем, а именно воспроизвести процедуру получения формулы расстояния от точки до прямой, полагая, что она даст не только формулу, но и понимание сути происходящего при обращении с прямой (а в стереометрии — с ее аналогом, с плоскостью), а это, в свою очередь, облегчит в случае необходимости запоминание самой формулы.

Начнем с описания прямой посредством уравнения. Известно, что общий вид уравнения прямой таков: $ax + by + c = 0$, где a, b, c — константы (параметры), а x, y — переменные. Нам потребуется геометрическое содержание коэффициентов a и b. Для его выяснения обратимся к следующей постановке задачи об описании прямой с помощью уравнения. Пусть на плоскости даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{n} = (a, b)$. Описать множество всех точек $M = (x, y)$ плоскости таких, что M_0 ему принадлежит и вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Иначе говоря, ставится задача составления уравнения прямой l, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n}$ (рис. 1).

Обратим внимание на то, что в постановке задачи об уравнении прямой, перпендикулярной данному вектору (a, b), мы использовали букву a, имевшуюся в постановке исходной задачи. Использование одной и той же буквы для обозначений в одном тексте, но в разных контекстах, довольно распространенная ситуация, к которой надо относиться спокойно и, главное, различать по контексту, в каком смысле используется буква.

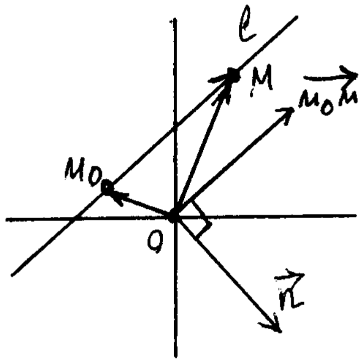

Рис. 1.

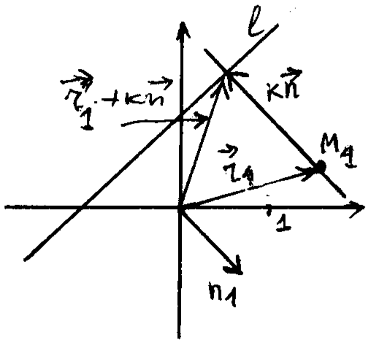

Рис. 2.

Известно, что перпендикулярность двух векторов выражается в виде равенства нулю их скалярного произведения. Запишем это обстоятельство применительно к векторам $\vec{n}$ и $(x - x_0, y - y_0)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Преобразовав левую часть уравнения (2) и обозначив число $-ax_0 - by_0$ через c, получим общий вид уравнения прямой

$$ax + by + c = 0, \tag{3}$$

в котором коэффициенты a, b являются координатами вектора, перпендикулярного задаваемой прямой.

Займемся получением формулы для расстояния от точки до прямой. Пусть на координатной плоскости даны точка $M_1(x_1, y_1)$ и прямая l, заданная уравнением $ax + by + c = 0$. Требуется найти расстояние $\rho(M_1, l)$ от M_1 до l.

По определению расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из M_1 на l. Воспользуемся тем, что у нас есть информация о векторе, перпендикулярном прямой l — это вектор (a, b). Для нахождения требуемого расстояния поступим так. Во-первых, из вектора (a, b) получим вектор, с ним сонаправленный, но имеющий единичную длину. Он будет играть роль масштаба при измерении расстояния на прямой, направленной вдоль вектора $\vec{n}$. Для этого, разделив каждую из координат вектора на его длину, получим единичный вектор $\vec{n}_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Во-вторых, из начала координат сдвинемся в точку M_1, затем будем из этой точки смещаться по прямой, перпендикулярной прямой l, и, имея единицу измерения длины вдоль этой прямой в виде записанного выше вектора n_1, найдем такое число k, что конец вектора $\vec{r}_1 + k\vec{n}_1$ попадет на l. В итоге величина k приведет к искомому расстоянию (рис. 2).

Реализуем намеченный план. Представим координаты точек, лежащих на прямой, проходящей через M_1 и направленной перпендикулярно l, в виде

$$x = x_1 + \frac{ka}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = y_1 + \frac{kb}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Как собирались, будем искать такое значение k, при котором точка с такими координатами попадет на прямую l, а это значит, что (x, y) удовлетворяет уравнению (3):

$$a\left(x_1 + \frac{ka}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\left(y_1 + \frac{kb}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + c = 0.$$

Проведя простые преобразования, запишем последнее уравнение в виде

$$ax_1 + by_1 + c + k\sqrt{a^2+b^2} = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и

$$\rho(M_1, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4}$$

Завершим решение задачи. В ней прямая имеет уравнение $x + 2y + 2 = 0$, в котором коэффициенты при переменных x и y суть 1 и 2 и свободный член равен 2. Центр окружности расположен в точке с координатами $(-5 - 2a, 1 + a)$. Значит, согласно формуле (4)

$$\rho = \frac{|(-5 - 2a) + 2(1 + a) + 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

и искомые значения параметра a найдутся из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|a^2 - a - 1|}{\sqrt{5}},$$

корни которого составляют множество $\{-1, 0, 1, 2\}$. Несложная проверка показывает, что все элементы этого множества удовлетворяют неравенству системы (1). Наибольшим элементом полученного множества является 2.

Решив задачу, можно провести ее небольшое исследование. Круги, описываемые первым неравенством данной в условии системы, имеют изменяющиеся вместе с параметром центры, и любопытно выяснить, где эти центры расположены, т. е. охарактеризовать множество точек плоскости, занимаемое центрами кругов. Координаты центров таковы:

$$x = -5 - 2a, \quad y = 1 + a.$$

Рассматривая последние равенства как систему уравнений относительно x, y и исключив из нее параметр, получим, что центры лежат на прямой $x + 2y = -3$. Замечательный результат! Центры — на прямой, параллельной той, которая задается вторым уравнением системы (1)! Значит, касание произойдет в тех случаях, когда радиус окружности окажется равным расстоянию между прямыми $x + 2y = -3$ и $x + 2y = -1$. Это расстояние равно $1/\sqrt{5}$, стало быть, условию задачи удовлетворят такие значения a, которые являются корнями уравнения $|a^2 - a - 1| = 1$. Пришли к полученному выше соотношению.

Упражнение. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \leqslant \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x - 2y \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет решения. Ответ: $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$.