**Пример.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x+1-2a)^2+(y+2a-1)^2 \leqslant (2a+1)^2, \\ (x+1+4a)^2+(y-6a-1)^2 \leqslant (9a-6)^2 \end{cases} \tag{1}$$

имеет хотя бы одно решение.

Никаких поводов для попыток аналитического решения задачи не видно, и единственный шанс что-то предпринять состоит в разработке геометрической интерпретации. Она несложна. Каждое из неравенств системы задает на координатной плоскости $(x,y)$ круг соответствующего радиуса и с соответствующим центром. Вопрос задачи можно сформулировать так: выяснить, когда эти круги пересекаются? Если один из них не лежит полностью в другом, то пересечение кругов равносильно пересечению ограничивающих их окружностей, а это — переход от системы неравенств к системе уравнений. По крайней мере можно рассуждать о разрешимости системы уравнений, а не неравенств. Однако это, подчеркиваю, в случае не полного включения одним кругом другого. Скорее всего, так оно и есть, но чтобы это выяснить, полезно изучить, где лежат центры этих кругов. Множество центров кругов, задаваемых первым неравенством системы, описывается равенствами $x=2a-1$, $y=1-2a$, и если исключить из них параметр $a$, то получаем множество на плоскости $(x,y)$ в точках которого расположены центры. Нетрудно вывести, что это прямая, задаваемая уравнением $x+y=0$. Обращаясь аналогично со вторым неравенством системы, можно сделать вывод о том, что центры кругов, задаваемых вторым неравенством, находятся на прямой $3x+2y=-1$. По крайней мере геометрические места центров найдены, но это еще не обеспечивает отсутствие вложенности кругов, надо бы изучить их радиусы, а это уже непростая задача, а главное, вполне возможно, что бесполезная.

А что если попробовать «встать» в центр одного из этих кругов и вести наблюдение из него? Что будет получаться? Для совершения такого действия сделаем замену переменных, при которой положим

$$x+1-2a=z, \quad y+2a-1=v.$$

Выразив отсюда $x$ и $y$ через $z$, $v$, $a$, т. е. записав

$$x=z+2a-1, \quad y=v-2a+1$$

и подставив эти выражения во второе неравенство системы (1), получаем, что система (1) относительно новых переменных примет вид

$$\begin{cases} z^2 + v^2 \leqslant (2a+1)^2, \\ (z+6a)^2 + (v-8a)^2 \leqslant (9a-6)^2. \end{cases} \tag{2}$$

Стало существенно проще! Центр кругов первого семейства системы (2) один и тот же и находится в начале координат, а центры кругов второго лежат на прямой $v = -4z/3$ (это можно выяснить аналогично тому, как мы выясняли выше расположение центров кругов системы (1)). Теперь факт пересекаемости кругов можно описать в терминах сравнения суммы их радиусов и расстояния от начала координат до центров кругов второго семейства системы (2). А именно, круги пересекутся в тех случаях, когда расстояние от начала координат до центра второго круга окажется не больше чем сумма радиусов. Найдя, что расстояние от начала до точки $(-6a, 8a)$, в которой находится центр второго круга, равно $10|a|$, запишем ведущее к ответу неравенство:

$$10|a| \leqslant |2a+1| + |9a-6|.$$

Не останавливаясь на его решении, запишем ответ: $a \in (-\infty, 7/17] \cup [5, +\infty)$.

**Упражнение.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leqslant -a^2 + 2a(x-y+1), \\ x^2 + y^2 - 1 \leqslant 3a^2 - 2a(2x-3y+4) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Ответ: $(-\infty, -1) \cup (0{,}25, +\infty)$.