Программа спецкурса
“Теория колец - введение в конечномерные алгебры Ли”

читает к.ф.-м.н. Гончаров Максим Евгеньевич
2012-2013 учебный год.

Целью курса является изучение структурной теории конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутом полем харктеристики ноль и их конечномерных представлений. Особое внимание уделяется изложению методов работы с линейными оперторами, дуйствующими на конечномерных векторных пространствах, а также изложению методов работы с нильпотентыми, разрешемыми, полупростыми алгебрами Ли. Приобретаемые знания и умения расширяют математическую эрудицию и создают условия для углубленного изучения различных направлений в математики и физики.

Содержание курса:

1. Определение и примеры алгебры Ли. Задание алгебры Ли тождествами. Алгенбры Ли дифференцирований. Полная линейная алгебра Ли и ее основные подалгебры. Структурные константы.

2. Описание алгебр Ли малых размерностей. Изучение трехмерной простой алгебра Ли. Понятие представления алгебры Ли.

3. Понятие идеала алгебры Ли. Гомоморфизмы алгебр Ли. Основные теоремы о гомоморфизмах. Присоединенное представление алгебры Ли и его основные свойства. Центр алгебры Ли. Автоморфизмы алгебры Ли и их связь с дифференцированиями.

4. Изучение разрешимых и нильпотентных для алгебр Ли. Примеры разрешимых, но ни нильпотентных алгебр Ли. Радикал алгебры Ли. Теоремы Энгеля о нильпотетности алгебры Ли с нильпотентным присоединенным предствавлеинем. Теорема Ли о существование общего вектора для разрешымой алгебры Ли линейных преобразований, действующих в конечномерном векторном пространстве. Связь разрешимых и нильпотентных алгебр Ли с треугольными и верхни треугольными матрицами. Изучение центра нильпотентной алгебры Ли. Изучение квадрата разрешимой алгебры Ли.

5. Изучение полупростых и нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. Теорема Жардана-Шевалле о разложенении линейного оператора на полупростую и нильпотетную части. Изучение полупростой и нильпотентной частей в разложении Жардана-Шевалле дифференцирования конечномерной алгебры. Критерий Картана о разрешимости алгебры Ли в терменах следов некоторых ее эндоморфизмов.

6. Изучение полупростых алгебр Ли: форма Киллинга и ее основные свойства, критерий полупросты алгебры Ли в терминах формы Киллига, разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых подлгебр, дифференцирования полупростой алгебры Ли, абстрактное разложеине Жордана.

7. Представления алгебр Ли: определения предствления алгебры Ли, элемени Казимира данного представления, модули над алгебрами Ли и их связь с представлениями, теорема Вейля о полной приводимости, совпадение обычного разложения и абстрактного разложения Жордана для полупростых подалгебр полной линеной алгебры Ли.

8. Изучение торических подалгебр, абелевость торической подалгебры, корневое разложние алгебры Ли относительно торической поалгебры, множдество корней относительно торической подалгебры, торичекие подалгебры алгебр Ли sl(2,F) и sl(3,F).

9. Изучение свойств централизатора торической подалгебры, абстрактное разлоржение Жардана элементов из централизатора торической подалгебры, неворожденность формы Киллинга на торической подалгебре, абелевость цетрализатора торической подалгебры, совпадение торической подалгебры с ее централизатором.

10. Изучение свойств корневого разложения, представление корней в виде функционалов, заданных на торической подалгебре, соответствие между корнями полупростой алгебры Ли и корнями sl(2,F), одномерность корневых подпространств, свойства рациональности корневого разложения, сведение к корневым системам в евклидовых пространствах.

11. Изучение системы корней, определения и основные свойства системы корней, простые корни, фундаментальная система корней и ее основные свойства, числа Картана и матрица Картана, однозначность задания системы корней ее матрицей Картана, неприводимые системы корней, связь между неприводимостью системы корней и ее фундаментальной системы, высота корьня и единственность корня максимальной высоты.

12. Классификация системы корней, алгоритм востановления системы корней по матрице Картана, потраение графов Кокстера по системе корней, схемы Дынкина, классификация неприводимой системы корней.

13. Изучение свойств картановских подалгебр: энгелевы подалгебры и их основные свойства, определение картановской подалгебры, связь между картановскими подалгебрами и энгелевыми поалгебрами, картановские и торические подалгебры в полупростых алгебрых Ли, сопряженность картановских подалгебр.

14. Доказательство леммы Уайтхеда и теоремы Леви.

Предлагаемые задачи для самостоятельной работы по курсу «Теория колец - введение в конечномерные алгебры Ли»:

1. Пусть L=R^3, где R – поле действительных чисел. Для векторов $x,y \in$ L положим $[x,y]$ равным их векторному произведению. Доказать, что L с заданном умножением является алгеброй Ли.

2. Пусть A – антикоммутативная алгебра, т.е. в A справедливо тождество $[x,y] = -[y,x]$. Доказать, что для любых линейно зависимых элементов a,b,c алгебры A выполняется тождество Якоби.

3. Пусть V – векторное пространство четной размерности и f – невырожденная кососимметрическая билинейная форма на V. Тогда

$$\mathrm{sp}(V)=\{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid f(\varphi(v),u)=-f(v,\varphi(u)) \text{ для всех } v,u \in V\}$$

является подалгеброй в $\mathrm{End}(V)^{-}$.

4. Пусть V – векторное пространство нечетной размерности и f – невырожденная симметрическая билинейная форма на V. Тогда o(V)={ $\varphi \in$ End(V) $|f(\varphi(v),u)=-f(v,\varphi(u))$ для

всех $v,u \in V$} является подалгеброй в $End(V)^{-}$.

5. Привести пример алгебры Ли, у которой нет не нулевых внутренних дифференцирований.

6. Пусть A – произвольная алгебра над полем F и End(A) – алгебра линейных преобразований пространства A. Дифференцированием алгебры A называется всякое линейное отображение δ: $A \to A$, такое, что $\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b$. Обозначим через Der(A) – пространство всех дифференцирований алгебры A. Доказать, что Der(A) является подалгеброй Ли в алгебре $End(A)^{-}$.

7. Доказать, что все дифференцирования двумерной неабелевой алгебры Ли внутренние.

8. Доказать, что множество внутренних дифференцирований алгебры Ли L является идеалом в Der(L).

9. Пусть I,J – два идеала алгебры L. Доказать, что [I,J] - идеал алгебры L.

10. Пусть L – алгебра Ли и I - идеал в L. Показать, что для любого $a \in L$, ограничение отображения ad a на I является дифференцированием алгебры I.

11. Доказать, что sl(n, F)=[gl(n, F),gl(n,F)]. Следовательно, sl(n, F) – идеал в gl(n, F).

12. Пусть s(n,F) – множество скалярных матриц из gl(n, F). Доказать, что Z(gl(n, F))=s(n,F). Пусть n>2. Доказать, что собственными идеалами в gl(n, F) являются sl(n, F) и s(n,F). Найти все идеалы алгебры gl(2, F) в случае char F=2.

13. Доказать, что Z(sl(n, F))=0, если характеристика поля F не делит n. В противном случае Z(sl(n, F))=s(n,F).

14. Доказать, что алгебра sl(3, F) – проста, если характеристика поля F не равна 3.

15. Доказать, что алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда в L существует убывающая цепочка идеалов $L=L0 \subseteq L1 \subseteq \ldots \subseteq Ln=0$ такая, что для каждого i=1,…,n факторалгебра Li/L(i+1) –абелева.

16. Доказать, что алгебра Ли L разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда алгебра ad L разрешима (нильпотентна).

17. Доказать, что неабелева двумерная алгебра Ли L разрешима, но нильпотентна.

18. Пусть L – алгебра Ли и I – идеал алгебры L. Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением n элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причем r из этих элементов содержаться в I. Доказать, что $x \in I^r$.

19. Доказать, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли есть снова нильпотентный идеал.

20. Доказать, что в каждой конечномерной алгебре Ли содержится наибольший нильпотентный идеал.

21. Привести пример алгебры Ли L с наибольшим нильпотентным идеалом N, для которой факторалгебра L/N содержит ненулевой нильпотентный идеал.

22. Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем F и D – дифференцирование алгебры L. Доказать, что пространство $L1=L\oplus FD$ с умножением

$$[x+\alpha D,y+\beta D]=[x,y]+\beta(xD)-\alpha(yD)$$

является алгеброй Ли.

23. Пусть L – конечномерная разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики 0, N – ее наибольший нильпотентный идеал и D – дифференцирование алгебры L. Доказать, что $LD\subseteq N$.

24. Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 и N – наибольший нильпотентный идеал алгебры L. Доказать, что $[L,Rad(L)]\subseteq N$.

25. Пусть L – нильпотентная алгебра Ли. Доказать, что форма Киллинга алгебры L тождественно равна нулю.

26. Доказать, что алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда [L,L] содержится в ядре формы Киллинга.

27. Пусть L – двумерная неабелева алгебра Ли. Доказать, что форма Киллинга алгебры L не равна нулю.

28. Вычислить детерминант формы Киллинга алгебры sl(3,F) в базисе $h1,h2,e_{ij}$, $i\neq j$.

29. Пусть A – конечномерная алгебра без ненулевых идеалов с нулевым умножением (т.е. для которых $I^2=0$). Доказать, что если A обладает невырожденной ассоциативной симметрической билинейной формой, то A можно представить в виде прямой суммы простых идеалов

$$A=A1\oplus\ldots\oplus Ak, \text{ где } AiAj=0,\ i\neq j.$$

Литература:

1. Артамонов В. А. Лекции по алгебре. М.: МГУ, 2004.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М: Мир, 1976.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001.
4. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
5. Ленг С. Алгебра, М: Мир, 1968.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
7. Парамонова И.М.,Шейнман О.К. Задачи семинара "Алгебры Ли и их приложения". 2004.
8. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
9. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлени. М:МЦНМО, 2003.
10. Winter D.J. Abstract Lie algebras, Cambrige, Mass.-London: M.I.T. Press, 1972.