МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Механико-математический факультет

“*УТВЕРЖДАЮ*”

____

«_____»__________________201__ г.

Рабочая программа дисциплины

«Элементы теории волн»

Направление подготовки
010100 Математика

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск 2016

Программа дисциплины «Элементы теории волн» составлена в соответствии с уникальной инновационной образовательной программой Китайско-Российского института по направлению подготовки **010100** «**Математика**», все профили подготовки. Программа соответствует специальному годовому курсу лекций, прочитанному автором дважды - в 2015 г. и 2016 г. - студентам IV курса Китайско-Российского Института Хэйлунцзянского университета, г. Харбин, КНР. Годовой спецкурс входит в учебный план подготовки дипломированных бакалавров ММФ НГУ.

В курсе лекций по программе строго, последовательно и компактно излагаются наиболее универсальные методы математической теории волн, формулируются основные модельные задачи этой теории, а также подходы к их решению. Основное внимание уделяется наиболее содержательным и ценным для приложений разделов линейной волновой теории и нелинейным уравнениям Кортвега-де Фриза и Бюргерса. Кратко излагаются сопутствующие вопросы теории обобщенных функций и уравнений математической физики. Программой дисциплины предусмотрены две контрольные работы, а также итоговый письменный экзамен. Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц. Итоговый индивидуальный результат студента получается комбинированием оценки за его работу у доски с полученными им баллами за выполненные контрольные и экзаменационную работы.

Автор: Васкевич Владимир Леонтьевич, д.ф.-м.н.

Механико-Математический Факультет
Кафедра дифференциальных уравнений

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Элементы теории волн» реализует общие цели уникальной инновационной образовательной программы Китайско-Российского института в части подготовки выпускников в области математических и естественнонаучных знаний для успешного выполнения разработок, ориентированных на научные исследования и их приложения.

Цели освоения дисциплины обучающимися - научиться использовать предметную теорию при изучении реальных физических процессов, выработав при этом правильные представления о связи абстрактных математических моделей с этими процессами.

Овладение материалом курса означает, во-первых, освоение слушателями основных положений теории и, во-вторых, умение применить изученные методы при решении задач, аналогичных рассмотренным в курсе.

Основная цель преподавания дисциплины состоит в обучении правилам постановок задач для уравнений и систем с частными производными, возникающих в математической теории волн, а также в обучении основным методам решения правильно поставленных задач. Важно кроме того выработать у обучающихся устойчивые навыки корректного математического моделирования реальных физических процессов.

Целевая аудитория программы – это студенты IV курса КРИ, специализирующиеся по направлениям "Математика" и "Прикладная Математика".

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Годовой специальный курс входит в учебный план подготовки дипломированных бакалавров ММФ НГУ. Курс «Элементы теории волн» опирается на следующие дисциплины образовательной программы:

- Линейная алгебра и аналитическая геометрия;
- Математический анализ;
- Обыкновенные дифференциальные уравнения;
- Теория функций комплексной переменной.

Результаты освоения дисциплины «Элементы теории волн» используются в следующих дисциплинах образовательной программы:

- Численные методы;
- Математическое моделирование;
- Физика;
- Функциональный анализ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

- Общекультурные компетенции: ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11, ОК-12;
- Профессиональные компетенции: ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-13, ПК-22

  .

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- уметь правильно ставить и решать задачи для волнового уравнения,
- уметь правильно ставить и решать задачи для уравнения теплопроводности,
- уметь правильно ставить и решать задачи для уравнения Гельмгольца,
- владеть сопутствующими вопросами теории обобщенных функций и теории специальных функций.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц. Распределение учебных часов по разделам дисциплины представлено в таблице.

№ п/п	Раздел дисциплины	Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации				
		Лекция	Самост. работа	Контр. работа	Зачет	
1.	Введение: Предмет математической теории волн. Примеры**.**	4	8			
2.	Раздел I. Линейные волны: волновое уравнение. .	10	20			
3.	Раздел II. Линейные волны: уравнение Гельмгольца. Сферические функции в многомерном пространстве.	10	20			
4.	Раздел III. Линейные волны: системы дифференциальных уравнений**.**	10	20			
5.					3	**контрольная**
6.	Раздел IV. Нелинейные волны: уравнение простых волн, обобщенные решения.	10	20			
7.	Раздел V. Нелинейные волны: уравнение Кортвега-де Фриза.	10	20			
8.	Раздел VI. Нелинейные волны: уравнение Бюргерса. Задача Коши для уравнения теплопроводности.	10	20			
9.					3	**контрольная**
10.	Раздел VII. Автомодельные решения. Бегущие волны.	4	8			
11.					4	**Консультация, Экзамен**
	Всего	**68**	**136**	**6**	**10**	

Общая структура курса и содержание занятий:

ВВЕДЕНИЕ: Предмет математической теории волн. Примеры.

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ.

ТЕМА 1: Формула общего решения одномерного волнового уравнения, ее графическая интерпретация. Формула Даламбера. Принцип конечной зависимости решений от начальных условий. Задача в квадранте с простейшим краевым условием. Использование формулы Даламбера для решения смешанной задачи.

ТЕМА 2: Задача Коши для трехмерного волнового уравнения с данными в начальный момент времени. Сферическое среднее, формула Кирхгофа. Вывод формулы Пуассона методом спуска Адамара. Принцип Гюйгенса. Принцип Дюамеля, запаздывающий потенциал. Сферические, цилиндрические и плоские волны.

РАЗДЕЛ II. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

ТЕМА 1: Установившиеся колебания в трехмерном пространстве. Неоднородное уравнение Гельмгольца и его связь с волновым уравнением. Первая и вторая формулы Грина (вывод из формулы Гаусса Остроградского). Фундаментальные решения уравнение Гельмгольца. Интегральное представление гладкого решения. Решения однородного уравнения Гельмгольца, убывающие к нулю на бесконечности. Условия излучения Зоммерфельда. Теорема единственности.

ТЕМА 2: Уравнение Гельмгольца в сферических координатах. Уравнение трехмерных сферических гармоник в угловых переменных. Теорема об ограниченных решениях уравнения Лежандра. Формула Родрига для полиномов Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Базис пространства сферических гармоник в случае трех независимых переменных. Уравнение для радиальной части решения. Сферические функции Бесселя.

РАЗДЕЛ III. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

ТЕМА 1: Общий вид системы уравнений данного порядка. Характеристические поверхности систем. Системы уравнений первого порядка. Система уравнений акустики: вывод из системы уравнений гидродинамики, векторная форма записи. Система уравнений акустики: покомпонентная и матричная формы записи. Уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей. Отыскание характеристических поверхностей, проходящих через заданную поверхность в начальный момент времени. Система уравнений одномерной газовой динамики.

ТЕМА 2: Области единственности для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Постановка задачи на область единственности. Разбиение двойственного пространства, ассоциированное с уравнением конуса характеристических нормалей. Уравнение границы компоненты, содержащей положительную полуось. Теорема о дифференциальном уравнении границы области единственности. Примеры постановок задач на область единственности.

ТЕМА 3: Задача Коши для уравнения Гамильтона -Якоби. Общий вид уравнения Гамильтона---Якоби. Система квазилинейных уравнений. Задача Коши для сопутствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неявная форма задания решения с помощью системы первых интегралов. Примеры.

РАЗДЕЛ IV. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: УРАВНЕНИЕ ПРОСТЫХ ВОЛН. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ.

ТЕМА 1: Эффекты, характерные для теории нелинейных волн. Дисперсия волн: дисперсионное соотношение для линейных уравнений и систем, примеры, размывание профиля волны в среде с дисперсией, нелинейный случай. Разрушение волны: задача Коши для уравнения простых волн, ее решение методом характеристик. Обобщенное решение уравнения простых волн. Условия на разрыве и поиск точки разрыва.

ТЕМА 2: Локально суммируемые функции. Пространство финитных функций. Регулярная обобщенная производная от локально суммируемой функции. Лемма дю Буа-Реймонда. Свойства оператора обобщенного дифференцирования. Пространство распределений на финитных бесконечно дифференцируемых функциях. Обобщенные решения дифференциальных уравнений Фундаментальные решения дифференциальных операторов.

РАЗДЕЛ V. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: УРАВНЕНИЕ КОРТВЕГА-ДЕ ФРИЗА.

ТЕМА 1: Канонический вид и законы сохранения уравнения КдФ. Постановки прямой и обратной задач рассеяния. Схема решения задачи Коши для уравнения КдФ методом обратной задачи. Единственность решения задачи Коши в классе быстроубывающих функций.

ТЕМА 2: Свойства одномерного оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом. Определение пары Лакса. Критерий унитарной эквивалентности реализаций оператора Шредингера при разных значениях времени. Примеры операторов, образующих пары Лакса. Следствия о собственных числах. Уравнение для собственных функций оператора с постоянными во времени собственными числами. Зависимость от времени данных рассеяния в случае быстроубывающего потенциала. Функции Йоста. Матрица рассеяния, связь ее элементов с коэффициентами отражения и прохождения. Связь между потенциалом и ядром в треугольном представлении первой функции Йоста. Связь ядра в треугольном представлении первой функции Йоста с данными рассеяния (уравнение Гельфанда─Левитана─Марченко).

ТЕМА 3: Задача Коши для уравнения КдФ со специальными начальными данными (постановка, решение прямой задачи рассеяния с начальным потенциалом, зависимость данных рассеяния от времени). Построение и решение уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко для положительного значения временной переменной. Определение солитона, качественный характер взаимодействия двух солитонов. Общий вид решения уравнения типа безотражательного потенциала. Определение N-солитонного решения уравнения КдФ. Асимптотика такого решения на бесконечности.

РАЗДЕЛ VI. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА.

ТЕМА 1: Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула–Хопфа.

ТЕМА 2: Задача Коши для уравнения теплопроводности. Инвариантность множества решений уравнения теплопроводности относительно специальных преобразований плоскости. Интеграл Пуассона. Пример Ковалевской. Принцип максимума. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. Принцип Дюамеля.

ТЕМА 3: Стационарная ударная волна. Поведение решений уравнения Бюргерса при малой вязкости.

РАЗДЕЛ VII. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ: БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ.

ТЕМА 1: Автомодельное решение задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности. Автомодельные решения нелинейного уравнения теплопроводности, уравнения Бюргерса и уравнения КдФ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Приложения математической теории волн. Примеры.

5. Образовательные технологии

Используется традиционная лекционно-семинарная система обучения. Лекции читаются с использованием медиа-проектора и ноутбука. Проведение семинаров включает обязательную работу студентов у доски для публичного/коллективного решения задач по теме под управлением преподавателя. Курс подразумевает также выполнение студентами домашних заданий. При возникновении у студентов конкретных вопросов или затруднений решения одной/двух задач из числа заданных на дом разбираются у доски.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Перечень примерных контрольных вопросов для самостоятельной работы:

1. Найти функцию $\boldsymbol{u = u(t,x)}$, удовлетворяющую условиям

$$u_{tt} - 4\,u_{xx} = 0, \qquad u(0,x) = \cos 2x,\ u_t(0,x) = 10\,x.$$

   Как называется эта задача? С какой скоростью распространяется волна $\boldsymbol{u(t,x)}$ вдоль числовой прямой?

2. Записать в виде интеграла Дюамеля функцию $\boldsymbol{u = u(t,x,y,z)}$, удовлетворяющую условиям

$$u_{tt} - 4\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = e^t \sin(x + 2y + 3z),$$
$$u(0,x,y,z) = 0,$$
$$u_t(0,x,y,z) = 0.$$

   Сосчитать этот интеграл. Как называется дифференциальное уравнение в этой задаче?

3. Указать формулу общего вида сферической волны в трехмерном пространстве и найти с ее помощью решение следующей задачи

$$u_{tt} - 4\,(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0,$$
$$u(0,x,y,z) = r, \qquad u_t(0,x,y,z) = r^2.$$

4. Записать дисперсионное соотношение для следующего линейного дифференциального уравнения

$$u_t + 9u_x - 6u_{xxx} = 0.$$

5. Найти функцию $u = u(t,x)$, удовлетворяющую условиям

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(0,x) = 1 - 2x^2 + 4x - 2.$$

6. Регулярна ли функция $\delta(2x-1) + \delta(2x+1)$? Найти ее носитель. Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

7. Найти обобщенные производные первого, второго и третьего порядков от функции $f(x) = |x-1|$. Являются ли функции $f'(x), f''(x)$ и $f'''(x)$ локально суммируемыми?

8. Дать определение солитонного решения уравнения Кортвега де Фриза. Указать амплитуду этого решения и скорость, с которой соответствующий ему волновой профиль распространяется вдоль числовой прямой.

9. Поставить и решить прямую задачу рассеяния для стационарного оператора Шредингера с потенциалом

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2(x-4)}.$$

10. Решить обратную задачу рассеяния по известным данным рассеяния

$$N = 1, \qquad \varkappa_1 = 1, \qquad c_1 = \sqrt{2}\,e^4, \qquad b = 0, \qquad a = 1.$$

11. Решить интегральное уравнение

$$K(x,y) + 2e^{8-x-y} + 2e^{8-y}\int_x^{\infty} K(x,z)e^{-z}\,dz = 0.$$

Указать потенциал $u = u(x)$, для которого это уравнение является уравнением Гельфанда-Левитана-Марченко.

12. Дать определение преобразования Коула-Хопфа и указать к какому уравнению этим преобразованием приводится уравнение Бюргерса.

13. Найти решение $\boldsymbol{u}$ уравнения $\boldsymbol{u_t + uu_x = 9u_{xx}}$, имеющее вид стационарной ударной волны. Как называется это уравнение?

14. Найти функцию $\boldsymbol{u = u(t,x)}$, удовлетворяющую условиям

$$\boldsymbol{u_t = 4\,u_{xx}}, \qquad \boldsymbol{u(0,x) = 2\,\delta(x-1)}.$$

Здесь $\boldsymbol{\delta(x)}$ – дельта-функция Дирака.

15. Найти решение $\boldsymbol{u}$ уравнения $\boldsymbol{u_t + uu_x = u_{xx}}$, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{u(0,x) = 2(x-1)}$.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) **Основные учебники:**

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1966.
2. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
4. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
6. Кузнецов Е.А. Методические указания по специальному курсу "Теория солитонов". Новосибирск : Изд-во НГУ, 1986.
7. КузнецовЕ.А., ШапироД.А. Методы математической физики: курс лекций. Новосибирский государственный университет, 2011. Ч.I.
8. Рысков Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000.
9. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
10. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. Шаповалов А.В. Введение в нелинейную физику. Томск, Изд-во ТПУ, 2002. 129 с.

б) **Основные задачники:**

1. Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики / под редакцией Владимирова В.С. М.: ФМЛ, 2001. 288 с.
2. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.

в) **Дополнительная литература:**

1. Соболев С. Л. Избранные труды. Т.1-. / Отв. ред. Ю.Г. Решетняк и др.. - Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2003.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е издание, исправленное и дополненное. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ФМЛ, 2003.
5. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Программное обеспечение для демонстрации слайд-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению **010100** «**Математика**», все профили подготовки.

Автор: ____ Васкевич Владимир Леонтьевич,

д.ф.-м.н., внс ИМ СО РАН,

e-mail: vask@math.nsc.ru