**В. Н. Дятлов, Г. В. Дятлов**

# МАТЕМАТИКА.

## Между школой и вузом

(ПРОБНАЯ ВЕРСИЯ)

УДК 51
ББК 22.1
Д998

**Дятлов В. Н.**

Математика. Между школой и вузом / В. Н. Дятлов, Г. В. Дятлов — Новосибирск: Издательство Института математики, 2012. — 116 с.

ISBN 978–5–86134–190–5

Изложен материал, необходимый для адаптации к изучению математики в вузе и обычно не излагаемый в вузовских математических курсах.

Для студентов первых курсов, изучающих математику. Полезна для старшеклассников и учителей.

УДК 51
ББК 22.1
Д998

Д $\frac{1601000000–01}{Я82(03)–12}$ Без объявл.



ISBN 978–5–86134–190–5

## Введение

Наиболее важным для студента периодом его обучения математике в вузе являются первые месяцы первого курса. Существенное различие стиля изучения математики в школе и в вузе предъявляет высокие требования к адаптации первокурсника. Переход от решения задач в школе, основанного на проведении несложных преобразований без особого логического сопровождения, к необходимости формирования логических цепочек при решении даже простых задач во многих изучаемых в вузе предметах, является трудно преодолимым скачком для многих поступивших на первый курс. Поэтому возникает потребность в адаптационном курсе, позволяющем на материале, с которым школьник встречался раньше, познакомиться с основными требованиями, предъявляемыми к студентами в процессе обучения в вузе, и выработать навыки, позволяющие студенту продолжать образование.

Предлагаемый курс предназначен для восполнения указанного пробела. Он состоит из двух частей: теория и практика. Название части «теория», может, излишне громкое, в ней сообщаются основные понятия, необходимые для дальнейшего понимания математики, какие-то наблюдения, связанные с этими понятиями, рекомендации по их усвоению. В практический части представлены процедуры применения изложенных в теоретической части понятий.

Курс начинается с повторения элементарного школьного материала, связанного с числами и тождественными преобразованиями. Напоминается и отрабатывается техника оценок, опирающаяся на свойства и устройство числового множества, а также техника тождественных преобразований числовых и буквенных выражений. Этот раздел, как, впрочем, и любой другой, можно опустить, если его содержание достаточно хорошо усвоено, разделы не связаны между собой и могут изучаться изолированно и в любом порядке. Затем сообщаются простейшие элементы логики рассуждений, проводится работа с кванторами, которая развивается на примерах изучения свойств функций. Изучаемые свойства функций расположены в последовательности, соответствующей усложнению восприятия утверждений с кванторами, и подводят к пониманию высказываний с тремя кванторами, в первую очередь понятия предела. В завершение предлагается знакомство с операциями над множествами, отображениями и отношениями.

В качестве основы взят материал, изучаемый в школе на протяжении нескольких лет, с той целью, чтобы, во-первых, установить связи между школьными знаниями и простейшим изучаемым в вузе материалом, а во-вторых, обеспечить базу на необходимом для дальнейшего обучения уровне, в третьих, за счет особенностей построения курса приучить студентов к процедуре получения образования в вузе, а именно к способности письменного и устного изложения изученного материала, решения стандартных задач, умению самостоятельно оперировать предметными понятиями и фактами. Отбор материала в определенной степени отражает опыт и предпочтения авторов.

Структурно курс состоит из практических занятий, на которых происходит самостоятельное под наблюдением преподавателя-консультанта изучение понятий и фактов и решение задач на основе изученного материала. Особое внимание обращается на формирование познавательной самостоятельности, что должно достигаться благодаря изучению материала на основе фактов и правил, а не только на примерах и подражании (что происходит обычно при изучении математики в школе). Предлагается следующая организация изучения материала. Фиксируется тема на текущее занятие. Слушатели самостоятельно изучают соответствующие разделы из теоретической части, затем обращаются к решению упражнений из практической части, и по мере необходимости осваивают технологии, предваряющие соответствующий блок упражнений. Надо обратить внимание на обеспечение способности точного воспроизведения основных определений и утверждений. Этого можно достичь, например, путем неоднократной письменной фиксации текста определения или формулировки. В процессе занятий желательно предусмотреть контроль усвоения материала в виде контрольных-коллоквиумов каждый 4–5 занятий, занимающих по времени половину занятия.

Пособие состоит из двух частей, отражающих теорию и практику, а также приложения, в котором предложен план работы с материалом. Он не разбит на отдельные занятия по причине индивидуальности скорости усвоения материала различной аудиторией.

Содержание пособия рассчитано примерно на 32 учебных часа. Результатом работы с пособием должна стать возросшая способность в ориентации в базовых вузовских дисциплинах.

При выполнении упражнений рекомендуется на занятиях выполнять упражнения, в нумерации которых есть нечетное число, остальные упражнения предназначены для домашней работы.

Номера выделенных в отдельные строки формул, имеющих отношение к общему материалу, состоят из номера параграфа и номер формулы в параграфе, номера формул, имеющих отношение только к примеру, одинарные и свои для каждого примера.

В пособии отражен многолетний опыт работы обоих авторов со студентами механико-математического факультета Новосибирского государственного университета, а также работы В. Н. Дятлова как сотрудника Южного математического института РАН с учителями и учащимися профильных классов школ г. Владикавказа.

Замечания и пожелания по материалу пособия можно сообщить по адресу vndyatlov@gmail.com.

# ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ

## § I.1. Устройство числовых множеств

**I.1.1. Натуральные числа.** В математике, как и в любой другой области знаний, встречаются два способа введения новых понятий. Обычно мы определяем какой-то объект, указывая, к какому классу объектов он относится и какими свойствами характеризуется, т. е. руководствуемся при определении вопросом «что это такое?». Например, можно сказать, что четырехугольник — это многоугольник, у которого четыре стороны (мы указали, что четырехугольник относится к классу многоугольников, и сформулировали свойство, полностью характеризующее четырехугольники среди всех многоугольников). Ясно, однако, что когда-то придется обратиться к таким объектам, которые не определяются в указанном выше смысле через другие объекты этой же области знаний. Такие объекты рассматриваются как первичные, определение которых придется давать не через другие объекты, а каким-то иным способом. Для введения первичных понятий или объектов используют следующий прием: вместо того, чтобы, характеризуя определяемый объект, отвечать на вопрос «что это такое?», задаются вопросами «какими свойствами обладает определяемый объект, что мы с ним можем делать, как он взаимодействует с другими объектами?», т. е. дают **описание** определяемого объекта, используя при этом такие его свойства, которые интуитивно очевидны. В математике особенно ярко видны такие первичные понятия, как точка, прямая и плоскость в геометрии, которые характеризуются не тем, что они из себя представляют, а тем, как они друг с другом взаимодействуют, при этом утверждения, определяющие такие взаимодействия, называют аксиомами, т. е. свойствами точек, прямых и плоскостей, принимаемыми нами без дополнительных обоснований.

Курс арифметики и алгебры также должен строиться на основе первичных понятий. К таким относится в первую очередь понятие натурального числа. Можно определить натуральные числа, сформулировав перечень аксиом, которым они должны удовлетворять, однако мы, не увлекаясь высокой степенью формализации, ограничимся описанием тех свойств, которым должны удовлетворять натуральные числа.

Понятие натурального числа возникло в результате потребности счета предметов и формализует интуитивно ясное представление о количестве объектов. Для натуральных чисел используют обозначения 1, 2, 3, $\ldots$, множество натуральных чисел обозначают через $\mathbb{N}$. В множестве натуральных чисел определены операции сложения и умножения, т. е. каждым двум натуральным числам $m$ и $n$ сопоставляются также натуральные числа $m+n$ и $m \cdot n$, называемые соответственно *суммой* и *произведением* чисел $m$ и $n$ (точку в обозначении произведения обычно не ставят). Кроме того, натуральные числа можно сравнивать, т. е. для любых двух натуральных чисел $m$ и $n$ указывается, какое из них меньше, какое больше, а именно считают, что $n$ больше чем $m$ (или $m$ меньше чем $n$), если $n$ можно получить из $m$ прибавлением какого-то натурального числа. При этом используют соответственно обозначения $n > m$, $m < n$.

Среди всех натуральных чисел выделяется наименьшее, обозначаемое символом 1 и называемое *единицей*. Любое натуральное число можно получить как результат сложения единиц. Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1) $m+n=n+m, \quad m,n \in \mathbb{N}$;
2) $m+(n+k)=(m+n)+k, \quad k,m,n \in \mathbb{N}$;
3) $m \cdot n = n \cdot m, \quad m,n \in \mathbb{N}$;
4) $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k, \quad k,m,n \in \mathbb{N}$;
5) $m \cdot 1 = m, \quad m \in \mathbb{N}$;
6) $(m+n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k, \quad k,m,n \in \mathbb{N}$.

**I.1.2. Целые числа.** В множестве натуральных чисел операции вычитания и деления выполнимы далеко не всегда, т. е. уравнения $a+x=b$ и $a \cdot x = b$ не при любых $a, b \in \mathbb{N}$ имеют решения в множестве натуральных чисел. Естественно расширить множество натуральных чисел, добавив к нему какие-то элементы и распространив на расширенное множество имевшиеся в $\mathbb{N}$ операции сложения и умножения так, чтобы в новых множествах указанные уравнения были разрешимы, а операции обладали по крайней мере теми свойствами, которые были у них в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Расширим множество натуральных чисел, добавив к нему новые элементы, обозначаемые символами 0 и $-1, -2, -3, \ldots$. Расширенное множество вместе с вводимыми ниже операциями называют *множеством* *целых чисел*, при этом натуральные числа называют *положительными целыми числами*, натуральные числа вместе с нулем — *неотрицательными целыми числами*, числа $-1, -2, -3, \ldots$ — *отрицательными целыми числами*, а числа $0, -1, -2, -3, \ldots$ — *неположительными целыми числами.* Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют *противоположными*, так что числа $k$ и $-k$, где $k \in \mathbb{N}$, противоположные.

Множество целых чисел обозначают через $\mathbb{Z}$.

Для любого $a \in \mathbb{Z}$ определим его модуль $|a|$, полагая $|a|$ равным самому числу $a$, если оно положительно, нулю, если $a = 0$, и противоположному числу, если $a$ отрицательно, т. е. $|a| = b$, если $a = -b$, $b \in \mathbb{N}$.

Введем сравнение целых чисел по следующему правилу: положительные числа сравниваются как натуральные числа, любое отрицательное число меньше любого положительного, из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше, нуль больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного числа.

Распространим на $\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения. Если $a, b \in \mathbb{N}$, то сумма их уже определена как сумма натуральных чисел. Сумма противоположных чисел равна нулю: $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Прибавление нуля к любому числу не изменяет его: $a + 0 = 0 + a = a$. Сумма двух отрицательных чисел равна числу, противоположному сумме их модулей, т. е. чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и поставить перед полученным числом знак минус. Наконец, чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля слагаемых вычесть меньший и поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

В множестве целых чисел определена операция вычитания уже для любых двух чисел, т. е. для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ можно указать единственное целое число $x$ такое, что $a + x = b$. В качестве числа $x$ в последнем равенстве можно взять сумму $b+(-a)$, которую как результат вычитания обозначают обычно через $b - a$.

Исходя из определений, можно показать, что в множестве целых чисел сохраняются все свойства суммы, присущие множеству натуральных чисел.

Обратимся к распространению операции умножения на множество целых чисел. Умножение целых положительных чисел уже определено как умножение натуральных чисел. Чтобы перемножить два целых числа с разными знаками, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак минус. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули. Результат умножения любого целого числа на нуль есть нуль.

Относительно распространенной на $\mathbb{Z}$ операции умножения можно утверждать, что для нее также сохраняются все свойства, которыми обладала операция умножения в $\mathbb{N}$.

**I.1.3. Рациональные числа.** Множество рациональных чисел, обозначаемое далее символом $\mathbb{Q}$, возникает как расширение множества целых чисел до такого множества, в котором сохраняются все свойства множества $\mathbb{Z}$ и гарантируется разрешимость уравнения $a{\cdot}x = b$ для любых чисел $a \neq 0$ и $b$.

Начнем с геометрической подоплеки рациональных чисел, восходящей к потребности измерения отрезков. Как известно, измерение длины отрезка заключается в сравнении данного отрезка с эталонным отрезком длиной 1 и состоит в нахождении количества эталонных отрезков, умещающихся в данном отрезке. Если данной отрезок можно исчерпать с помощью эталонного отрезка, то длина описывается натуральном числом, указывающим, сколько раз эталонный отрезок умещается в данном. Поскольку такое возможно далеко не всегда, в качестве эталонных берут отрезки, получаемые при делении исходного эталонного отрезка на натуральное число частей. Если эталонный отрезок разделен на $n \in \mathbb{N}$ частей, то длина нового эталонного отрезка описывается с помощью одного натурального числа и считается равной величине $\dfrac{1}{n}$. Если отрезков такой длины в данном отрезке укладывается ровно $k$, где $k \in \mathbb{N}$, то процесс измерения заканчивается и длина отрезка выражается величиной, записываемой в виде $\dfrac{k}{n}$. Таким образом, при смене эталонного отрезка длину можно описать (упорядоченной) парой натуральных чисел (об упорядоченных парах см. ниже в п. I.3.2), в которой на одном месте (например, на втором) находится количество отрезков $n$, на которое разбит первоначальный эталонный, а на другом (первом) — количество $k$ новых эталонных отрезков, исчерпывающих данный. При этом для пары $(k, n)$ используют всегда обозначения $\dfrac{k}{n}$ или $k/n$ и вместо термина *упорядоченная пара* используют термин *дробь*, называя число $n$ *знаменателем* и число $k$ — *числителем* дроби $\dfrac{k}{n}$.

Именно из дробей мы и начнем конструировать требуемое множество. Можно было бы объявить рациональными числами сами дроби, так обычно и поступают, и мы так же в дальнейшем будем поступать, однако предварительно немного порассуждаем и кое о чем договоримся. Дело в том, что с геометрической точки зрения длина одного и того же отрезка может быть описана разными упорядоченными парами, т. е. разными по их изображению дробями. Например, дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$, будучи с формальной точки зрения различными (упорядоченными парами), ибо у них различны числители и знаменатели, измеряют тем не менее равные между собой отрезки. Поэтому договоримся такого типа дроби считать равными. Понятие равенства дробей сформируем с помощью множества натуральных чисел. А именно, дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{l}{m}$ *равны*, если $km = ln$ (равенство осмыслено, так как сравниваются натуральные числа). *Рациональным числом* (*положительным*) будем называть совокупность равных между собой дробей. Конечно, работать с целой совокупностью в качестве одного числа мы не будем и при всех обращениях к рациональным числам будем поступать следующим образом. Среди равных дробей (т. е. для данного рационального числа) будем выбирать какой-либо представитель и с ним проводить все необходимые действия. Полученная в результате дробь отвечает какому-то рациональному числу. При таких действиях можно сказать, что дробь *изображает* рациональное число, а если нет опасности недоразумений (а так обычно и бывает), то саму дробь будем считать рациональным числом.

Почему бы не подойти к определению рационального числа как числа, записанного в виде дроби? В принципе, можно, так обычно и делают, однако при подходе к построению числового множества как развивающейся системы к тому моменту, когда надо определять рациональные числа, есть только числа целые (и натуральные). Поэтому, говоря в этот момент «число», мы имеем возможность говорить только о целых числах, а это нас не устраивает: мы хотим выйти за пределы имеющихся числовых множеств. Впрочем, если не заниматься, возможно, избыточными придирками, то можно договориться считать, что рациональное число — это число, записанное в виде дроби.

Мы ограничились пока только дробями, составленными из натуральных чисел, поскольку опирались на интуитивно поддержанную процедуру измерения. Однако, начав с задачи расширения множества целых чисел и наметив путь ее решения, удобнее именно множество целых чисел и использовать для построения множества рациональных чисел.

Пару целых чисел, записанную в виде дроби $\dfrac{k}{n}$, где $n \neq 0$, будем называть *рациональным числом*, подчеркивая при этом, что две дроби $\dfrac{k}{n}$ и $\dfrac{l}{m}$ *равны* (или *изображают одно и то же рациональное число*), если $km = ln$ (всё как и для дробей из натуральных чисел). Отсюда можно вывести правило *сокращения* дроби: для любых $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Если у числителя и знаменателя дроби нет общих множителей, то дробь называют *несократимой.*

Равенство (1.1) позволяет также сделать вывод, что если числитель и знаменатель дроби домножить на одно и то же целое (отличное от нуля) число, то дробь не изменится. В частности, если знаменатель дроби является отрицательным числом, то, умножив числитель и знаменатель на $-1$, мы добьемся того, что знаменатель станет натуральным числом. Тем самым всегда можно считать, что знаменатель дроби — натуральное число, относя ее знак к числителю.

Нам предстоит определить операции сложения и умножения рациональных чисел так, чтобы для них сохранились все имевшиеся в множестве $\mathbb{Z}$ свойства операций. Опуская геометрическую подоплеку, на основе которой можно усмотреть определение операций, обратимся непосредственно к определению операций сложения и умножения.

Пусть $\dfrac{k}{l}$ и $\dfrac{m}{n}$ — два рациональных числа. По определению полагаем

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + ml}{ln}, \quad \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}.$$

Как и для целых чисел, определим вычитание в множестве $\mathbb{Q}$:

$$\frac{k}{l} - \frac{m}{n} = \frac{k}{l} + \left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{kn - ml}{ln}.$$

Наконец, отметим, что в множестве рациональных чисел всегда выполнима операция деления на ненулевые числа, а именно если $m \neq 0$, то

$$\frac{k}{l} : \frac{m}{n} = \frac{kn}{lm}.$$

Ясно, что так определенная операция деления позволяет гарантировать разрешимость уравнения $a \cdot x = b$ для любых рациональных $a, b$, $a \neq 0$. Действительно, если $a = \dfrac{k}{l}$, $b = \dfrac{m}{n}$, то, взяв $x = \dfrac{b}{a} = \dfrac{lm}{kn}$, имеем

$$a \cdot x = \frac{k}{l} \cdot \frac{ml}{kn} = \frac{kml}{lkn} = \frac{m}{n} = b.$$

Опираясь на определения и свойства операций, можно показать, что в множестве рациональных чисел выполняются следующие свойства операций сложения и умножения:

$$x + y = y + x, \quad x, y \in \mathbb{Q},$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x, y, z \in \mathbb{Q},$$

$$x + 0 = x, \quad x \in \mathbb{Q},$$

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x, y \in \mathbb{Q},$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad x, y, z \in \mathbb{Q},$$

$$x \cdot 1 = x, \quad x \in \mathbb{Q},$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Кроме того, в множестве рациональных чисел однозначно разрешимы уравнения

$$a + x = b, \quad c \cdot x = d, \quad a, b, c, d, x \in \mathbb{Q},\ c \neq 0.$$

Рациональные числа можно сравнивать. Числа $x \in \mathbb{Q}$, числитель и знаменатель которых суть целые числа одного знака, считают положительными и факт положительности обозначают так: $x > 0$. Все остальные ненулевые рациональные числа считают отрицательными и обозначают факт отрицательности так: $x < 0$. По определению число $x \in \mathbb{Q}$ считают *больше* числа $y \in \mathbb{Q}$ или число $y$ *меньше* числа $x$ (обозначают $x > y$ или $y < x$), если $x - y > 0$. Числовые неравенства обладают следующими свойствами, доказательства которых вытекают непосредственно из определения:

1) неравенства $x > y$ и $y < x$ равносильны;
2) если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$;
3) если $x > y$, то $x + z > y + z$ для любого $z \in \mathbb{Q}$;
4) если $x > y$ и $z > 0$, то $xz > yz$;
5) если $x > y$ и $z < 0$, то $xz < yz$;

6) если $x > y$ и $u > v$, то $x + u > y + v$;

7) если $x, y, u, v$ — положительные числа и $x > y$, $u > v$, то $xu > yv$;

8) если $x > y > 0$, то $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$.

**I.1.4. Действительные числа ($\mathbb{R}$), их представление в виде десятичных дробей.** Как известно, в множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел определены операции сложения и умножения, а также обратные к ним операции вычитания и деления, возникающие в результате решения уравнений $a + x = b$ и $cx = d$, $c \neq 0$. Однако, оставаясь в множестве рациональных чисел, не всегда возможно решить уравнение вида $x^2 = a$, $a \geqslant 0$, т. е. существуют такие рациональные числа, которые не могут быть представлены как квадрат какого-то рационального числа. Например, не существует такого рационального числа $x$, для которого $x^2 = 2$. Действительно, предположим противное, т. е. предположим, что существует несократимая дробь $\dfrac{m}{n}$ такая, что $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$, следовательно, $m$ четно. Пусть $m = 2k$, где $k$ целое. Тогда $m^2 = 4k^2$, откуда $4k^2 = 2n^2$, или $2k^2 = n^2$. Но тогда и $n$ также четно, что противоречит несократимости дроби $\dfrac{m}{n}$.

Множество рациональных чисел можно расширить так, что в расширенном множестве сохранятся все имевшиеся в множестве рациональных чисел операции и свойства и добавится возможность решения уравнения вида $x^2 = a$, $a \geqslant 0$.

Прежде чем заняться расширением множества рациональных чисел, сообщим два факта, связывающих рациональные числа с десятичными дробями.

**Утверждение 1.** *Всякое рациональное число может быть представлено в виде либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дроби.*

**Утверждение 2.** *Всякая периодическая десятичная дробь является рациональным числом.*

Множество, состоящее из всех десятичных дробей, будем называть *множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел*, при этом непериодические десятичные дроби будем называть *иррациональными числами*.

Одной из основных задач при таком расширении является распространение всех имеющихся в множестве $\mathbb{Q}$ операций и отношения порядка на новое, расширенное, множество.

Можно показать (это делается в курсах высшей математики), что в множестве действительных чисел существует корень из любого положительного числа.

Определим операции суммы и произведения десятичных дробей. Пусть $a = N.a_1a_2\dots a_n\dots$ — бесконечная дробь, в которой $N$ — неотрицательное целое число, а $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — цифры. Число $a$ в таком случае считается неотрицательным. Рациональное число $\underline{a}_n = N.a_1a_2\dots a_n00\dots$ будем называть *$n$-м приближением числа $a$ с недостатком*, а рациональное число $\overline{a}_n = \underline{a}_n + 10^{-n}$ — *$n$-м приближением числа $a$ с избытком.* Если же рассматривается отрицательная бесконечная дробь $a = -N.a_1a_2\dots a_n\dots$, в которой $N$ — неотрицательное целое число, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ — цифры, то рациональное число $\underline{a}_n = -N.a_1a_2\dots a_n00\dots$ будем называть *$n$-м приближением числа $a$ с избытком*, а рациональное число $\overline{a}_n = \underline{a}_n - 10^{-n}$ — *$n$-м приближением числа $a$ с недостатком.* Ясно, что $\underline{a}_n \leqslant a < \overline{a}_n$ при любом номере $n$ (при этом считается, что число, у которого периодически повторяется цифра 9, равно числу, у которого в предыдущем началу периода из девяток разряде добавлена единица, а все дальнейшие цифры суть нули).

Возьмем две десятичные дроби

$$a = N.a_1a_2\dots a_n\dots, \quad b = M.b_1b_2\dots b_n\dots, \tag{1.2}$$

и пусть $\underline{a}_n$, $\underline{b}_n$, $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$ — их приближения с недостатком и с избытком. Поскольку такие приближения представляют собой рациональные числа, их можно складывать, при этом для любого номера $n$ сумма приближений с недостатком будет меньше суммы приближений с избытком: $\underline{a}_n + \underline{b}_n < \overline{a}_n + \overline{b}_n$. Можно доказать, что *существует единственное действительное число $c \in \mathbb{R}$, у которого приближения с недостатком и с избытком находятся между приближениями с недостатком и с избытком для суммы*, т. е.

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant \underline{c}_n < \overline{c}_n \leqslant \overline{a}_n + \overline{b}_n$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Это число $c$ и считают суммой двух действительных чисел $a$ и $b$.

Произведение сначала определим для двух неотрицательных действительных чисел $a$ и $b$. Произведением чисел $a$ и $b$ будем считать такое действительное число $d$, для которого

$$\underline{a}_n \cdot \underline{b}_n \leqslant \underline{d}_n < \overline{d}_n \leqslant \overline{a}_n \cdot \overline{b}_n$$

при любом $n \in \mathbb{N}$.

Распространим теперь операцию умножения на все множество $\mathbb{R}$. Как и в множестве целых чисел, для любого числа $a \in \mathbb{R}$ определим его модуль $|a|$ как число, равное самому числу $a$, если оно положительно, нулю, если $a = 0$, и противоположному числу $-a$, если $a$ отрицательно, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Умножение положительных чисел уже определено. Чтобы перемножить два действительных числа с разными знаками, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак минус. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули. Результат умножения любого действительного числа на нуль есть нуль.

Действительные числа можно сравнивать, а именно для $a, b \in \mathbb{R}$ считаем, что $a < b$, если $b - a > 0$. В множестве действительных чисел выполнены все свойства неравенств, имеющиеся в множестве рациональных чисел.

Важно отметить, что в множестве действительных чисел выполняются все присущие множеству рациональных чисел свойства операций сложения и умножения, а также однозначно разрешимы уравнения

$$a + x = b, \quad a \cdot x = b \ (a \neq 0), \quad x^2 = a \ (a \geqslant 0), \quad a, b, x \in \mathbb{R}.$$

Для $a, b \in \mathbb{R}$ число $x$, для которого $a + x = b$, называют *разностью* чисел $b$ и $a$ и обозначают через $b - a$. Операцию нахождения разности называют *вычитанием*.

Для данных $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, число $x$, для которого $a \cdot x = b$, называют *частным* чисел $b$ и $a$ и обозначают либо $\dfrac{b}{a}$, либо $b/a$, либо $b : a$. Операцию нахождения частного называют *делением* числа $b$ на число $a$.

**I.1.5. Метод математической индукции.** Строение множества натуральных чисел порождает метод математической индукции доказательства утверждений, истинность которых зависит от натуральных чисел. Он состоит в следующем.

Предположим, что некоторое утверждение $P(n)$, справедливость которого зависит от натурального $n$, верно для первого натурального числа

$n = 1$ и из того, что верно $P(n)$, следует, что верно $P(n+1)$. Принцип математической индукции гласит, что в таком случае утверждение $P(n)$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

## § I.2. Структура математических утверждений

**I.2.1. Высказывания. Кванторы.** В математике мы часто встречаемся с высказываниями. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, в котором что-то утверждается о каком-то объекте, и при этом можно судить, верно это утверждение или нет. Для высказывания вместо слова «верно» говорят также «истинно» «справедливо», «выполнено», «имеет место» и т. п., для не верного высказывания используют также термин «ложно».

Есть несколько способов получения новых высказываний на основе имеющихся. Ясно, что для каждого из них мы должны указать, в каких случаях новое высказывание будет истинным в зависимости от истинности имевшихся высказываний.

Можно получить новое высказывание, имея в распоряжении всего одно высказывание, а именно можно взять *отрицание* данного высказывания, т. е. если высказывание обозначить одной буквой, например $P$, то новое высказывание будет (не $P$). Символически высказывание (не $P$) или (неверно $P$) обозначают через $\neg P$.

Рассмотрим два высказывания, обозначим одно из них буквой $P$, а другое — буквой $Q$. Путем их соединения одним из союзов «и», «или» можно получить новые высказывания: ($P$ и $Q$) и ($P$ или $Q$) (в последнем вместо союза «или» используют иногда союз «либо»). Высказывание ($P$ и $Q$) называют *конъюнкцией высказываний $P$ и $Q$* и обозначают через $P \wedge Q$ или $P \& Q$. Высказывание ($P$ или $Q$) называют *дизъюнкцией высказываний $P$ и $Q$* и обозначают через $P \vee Q$.

Высказывание ($P$ и $Q$) истинно, если оба высказывания $P$, $Q$ истинны, и ложно при других раскладах. Высказывание ($P$ или $Q$) истинно, если хотя бы одно из высказываний $P$, $Q$ истинно, и ложно в одном случае — когда оба высказывания $P$, $Q$ ложны.

Еще один способ получения нового высказывания из $P$, $Q$ — это составление условного утверждения, а именно высказывания

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

или, иначе говоря,

$$\text{если (выполнено) } P, \text{ то (выполнено) } Q.$$

Это высказывание кратко обозначают так:

$$P \Rightarrow Q,$$

и называют *импликацией.*

Если $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то высказывания $P$ и $Q$ называют *равносильными* или *эквивалентными* и используют при этом обозначение $P \Longleftrightarrow Q$. Два высказывания равносильны в том и только в том случае, если они оба либо истинны, либо ложны.

Импликацию $P \Rightarrow Q$ можно переформулировать иным способом, привлекая рассуждение «от противного»: предположим, что $Q$ не верно, если при этом $P$ также оказывается ложным, то считается, что верно высказывание $P \Rightarrow Q$. Иначе говоря, высказывание $P \Rightarrow Q$ равносильно высказыванию (не $Q$) $\Rightarrow$ (не $P$).

Импликация $P \Rightarrow Q$ ложна только в одном случае, когда $P$ истинно, а $Q$ ложно, в остальных случаях она истинна. Считать $P \Rightarrow Q$ ложной, если $P$ истинно, а $Q$ ложно, достаточно естественно — вряд ли мы согласимся, что из истинного утверждения, рассуждая корректно, можно получить ложное. Также естественно считать ее истинной, если $P$ и $Q$ оба истинны. Некоторую настороженность могут вызвать случаи, когда $P$ ложно. Попробуем договориться так. Если $Q$ истинно, то нам все равно, откуда оно могло бы следовать, так что импликацию $P \Rightarrow Q$ в этом случае будем считать истинной, даже если $P$ ложно.

Осталась ситуация, когда $P$, $Q$ оба ложны. Однако ввиду того, что импликация $P \Rightarrow Q$ равносильна импликации (не $Q$) $\Rightarrow$ (не $P$), в случае, когда оба $P$ и $Q$ ложны, их отрицания (не $P$) и (не $Q$) истинны. В таком случае импликацию (не $Q$) $\Rightarrow$ (не $P$) истинна, а вместе с ней истинной считаем и импликацию $P \Rightarrow Q$.

Информацию об истинности высказываний, составленных с использованием конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, в зависимости от истинности их составляющих удобно представить в виде таблицы, в которой 1 означает, что высказывание истинно, а 0 — что оно ложно:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

О равносильности составных высказываний можно судить по их таблицам истинности. А именно отличительной особенностью равносильных высказываний служит совпадение их таблиц истинности. Стало быть, если оказалось, что таблицы совпали, то такие высказывания равносильны.

**I.2.2. Отрицание составных высказываний.** Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ и } Q).$$

В нем говорится о том, что не выполнены утверждения $P$ и $Q$ одновременно, а это указывает на то, что по крайней мере одно из них не выполнено, т. е. не $(P$ и $Q)$ равносильно высказыванию ((не $P$) или (не $Q$)). Символически можно это записать так:

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ или } Q).$$

В нем говорится: не верно, что выполнено $P$ или выполнено $Q$, т. е. оба высказывания $P$ и $Q$ не верны. Таким образом, не $(P$ или $Q)$ равносильно тому, что ((не $P$) и (не $Q$)). Символически:

$$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Прежде чем заняться отрицанием импликации $P \Rightarrow Q$ сформируем равносильное ей высказывание с использованием дизъюнкции и отрицания и запишем отрицание импликации как отрицание такого высказывания. Когда мы считаем высказывание «если $P$, то $Q$» истинным? В случае, когда $P$ не выполнено, нам безразлична справедливость $Q$, но если $P$ верно, то $Q$ должно быть также верным. Это можно сказать так: или $P$ не верно, или $Q$ верно, т. е. записать в виде дизъюнкции $\neg P \vee Q$.

Легко убедиться в справедливости равносильности этой дизъюнкции и импликации $P \iff Q$, написав таблицу истинности:

| $P$ | $Q$ | $\neg P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

Теперь легко сформировать отрицание (не верно $P \Rightarrow Q$). Заменив $P \Rightarrow Q$ ему равносильным $\neg P \vee Q$ и взяв его отрицание, получим высказывание $P \wedge \neg Q$. Словесно его можно оформить так: неверно, что из $P$ следует $Q$, означает, что $P$ выполнено, а при этом $Q$ — нет.

**I.2.3. Высказывания с переменными. Кванторы.** Высказывания могут быть такими, что их истинность зависит от выбора какого-то объекта (или нескольких объектов) из заданной совокупности объектов. В таком случае высказывание включает в себя некоторую букву (или несколько букв), на место которой (которых) можно подставлять разные объекты из данной совокупности, и тогда говорят, что рассматривается высказывание с переменной (переменными). При этом в результате подстановки каждого конкретного объекта мы должны получать высказывание без переменной, т. е. каждый раз должны иметь возможность судить, истинно высказывание для конкретного объекта или ложно.

С высказываниями с переменными связан важный способ образования новых высказываний (без переменных). Пусть дано высказывание $P(x)$, истинность которого зависит от объектов, обозначенных здесь буквой $x$ и выбираемых из некоторого множества $X$. Из этого высказывания с переменной можно сделать новые высказывания, сообщив, при каких обстоятельствах относительно $x$ будем рассматривать данное высказывание.

Одно из этих обстоятельств выражается фразами «для любого», «для каждого», «для всех» и приводит к новому высказыванию вида «(для любого $x \in X$) $P(x)$», которое читается обычно так: для любого (для каждого, для всех) $x$ из $X$ выполнено $P(x)$. Ясно, что словами эти фразы писать не всегда удобно, поэтому для их обозначения используют символ

$\forall$, называемый *квантором общности.* О высказывании $(\forall x \in X)\ P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связана квантором общности.*

Второе обстоятельство выражается словами «найдется», «существует», «можно подобрать» и т. п. и приводит к высказыванию вида «(существует $x \in X$) $P(x)$», читается так: существует $x$ из $X$, для которого выполнено $P(x)$. Для обозначения слов «найдется», «существует» и т. п. используется символ $\exists$, который называют *квантором существования.* О высказывании $(\forall x \in X)\ P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связывается квантором существования.*

**I.2.4. Отрицание высказывания с кванторами.** Разберемся в том, как брать отрицание высказываний с кванторами, Рассмотрим утверждение вида

$$(\exists x \in X)\ P(x).$$

Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\exists x \in X)\ P(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что существует $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$. Но если не существует такого $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$, то для любого $x \in X$ должно выполняться отрицание высказывания $P(x)$, т. е. должно быть

$$(\text{для любого } x \in X) \quad \text{не верно } P(x)$$

или, символически,

$$(\text{не } (\exists x \in X)\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in X) \text{ не } P(x).$$

Что произошло? Квантор существования сменился квантором общности, а отрицание проникло вглубь утверждения и разместилось за квантором.

Теперь рассмотрим утверждение вида

$$(\forall x \in X)\ Q(x).$$

Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\forall x \in X)\ Q(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. не для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. существует такое $x \in X$, для которого не выполнено $Q(x)$. Символически:

$$\text{не } ((\forall x \in X)\ Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in X) \text{ не } Q(x).$$

Здесь квантор общности сменился квантором существования, а отрицание стало после квантора.

Последовательно применяя эти простейшие шаги к более сложным высказываниям с кванторами, можно легко получать их отрицания. Так, например,

$$\begin{aligned}
&\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \iff \\
&\iff \forall C \text{ не } ((\forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \iff \\
&\iff (\forall C\ \exists x \in X) \text{ не верно } f(x) \leqslant C \iff \\
&\iff (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C,
\end{aligned}$$

или, опуская промежуточные шаги,

$$\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \iff (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C.$$

Знатоки могут отметить, что мы сначала указали свойство ограниченности сверху функции $f$ на множестве $X$ и в виде отрицания получили свойство неограниченности сверху функции $f$ на множестве $X$.

**I.2.5. Аксиомы. Утверждения. Необходимые и достаточные условия.** Математика состоит из высказываний, истинность которых декларируется, и такие высказывания называют *аксиомами*, и высказываний, доказываемых на основе аксиом и уже доказанных высказываний с помощью логических рассуждений. Доказываемые высказывания называют *утверждениями*, и в зависимости от дополнительных обстоятельств используют другие слова для обозначения утверждений. Например, утверждение, носящее вспомогательный для данного контекста характер, называют леммой, а утверждение, в данном контексте фундаментальное, важное — теоремой, и т. д.

В математических утверждениях не встречается свободных, не связанных кванторами объектов. При этом есть договоренность, что если не указано явно, каким из кванторов связывается переменная, то считается, что она связана квантором общности.

Формулировки условных утверждений организуют обычно так. Сначала сообщают обстановку, в рамках которой будет происходить действие, т. е. указывают, какие объекты и при каких обстоятельствах рассматриваются. Затем дают условие, начиная фразу, например, словом «если». После того как условие записано, сообщают результат (вывод). Эта часть утверждения начинается, например, словом «то». Описание обстановки можно вынести за рамки утверждения, однако при изучении и использовании данного утверждения всегда надо иметь в виду обстановку, в которой оно формулируется. Такая организация в явном виде встречается не всегда, есть и другие способы выражения условного утверждения, но эта наиболее прозрачна и требует минимума усилий при раскодировании содержания утверждения.

Поговорим о том, как в русском (математическом) языке оформляется импликация $P \Rightarrow Q$. Два варианта такого оформления мы уже встретили при ее определении:

из $P$ следует $Q$

и

если (выполнено) $P$, то (выполнено) $Q$.

Но этим языковое богатство для импликации не исчерпывается. Оставшиеся три способа, которые мы обсудим, не столь прозрачные, и мы остановимся на них подробнее, ибо они поначалу вызывают определенные трудности.

Один из способов связан со словами о необходимых и достаточных условиях. А именно, о высказывании (если $P$, то $Q$) говорят:

для (выполнения) $P$ необходимо (выполнение) $Q$,

и в этом контексте утверждение $Q$ называют *необходимым условием* выполнения $P$.

Почему импликацию «из $P$ следует $Q$» выражают таким словосочетанием? Это несколько непривычное выражение можно легко понять, если заметить, что слово «необходимо» здесь означает «не обходимо», т. е. «нельзя обойти», т. е. «обязательно будет выполнено», т. е. если выполнено утверждение $P$, то нельзя обойти выполнение утверждения $Q$, оно также будет выполнено, т. е. из $P$ следует $Q$.

То же самое утверждение «из $P$ следует $Q$» выражают и так: «для выполнения $Q$ достаточно выполнения $P$», и высказывание $P$ называют *достаточным условием* для $Q$.

Еще один способ выразить утверждение (если $P$, то $Q$) таков: $Q$ выполнено тогда, когда выполнено $P$, и это словосочетание довольно естественно. Менее естественно, к чему просто надо привыкнуть, такое словосочетание: $P$ выполнено только тогда, когда выполнено $Q$.

Наконец, (если $P$, то $Q$) выражают так: $Q$ выполнено в том случае, если (или когда) выполнено $P$, и двойственным образом: $P$ выполнено только в том случае, если (или когда) выполнено $Q$.

В качестве примера приведем разные способы формулировки известной из школьного курса теоремы о необходимых условиях экстремума дифференцируемой функции на интервале.

**Теорема.** *Пусть* $f$ *— функция, заданная на интервале* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *и имеющая (конечную) производную в каждой точке этого интервала.* **Если** $x \in (a, b)$ *— точка экстремума функции* $f$*,* **то** $f'(x) = 0$*.*

Можно сформулировать то же утверждение по форме как необходимое условие.

**Теорема.** *Для того чтобы* $x \in (a, b)$ *была точкой экстремума дифференцируемой на* $(a, b)$ *функции* $f$*, необходимо, чтобы* $f'(x) = 0$*.*

Вторая формулировка может показаться красивее, интереснее, но вряд ли ее можно считать более понятной, чем первую.

Можно то же самое сообщить, например, так.

**Теорема.** *Точка* $x \in (a, b)$ *является точкой экстремума дифференцируемой на* $(a, b)$ *функции* $f$ *только тогда, когда* $f'(x) = 0$*.*

Этот вариант, скорее всего, еще менее понятен, чем предыдущие два.

Непонятно, стоит ли в погоне за простотой, красотой и лаконичностью формулировки утрачивать ее ясность, особенно в текстах для первоначального знакомства, таких как учебники для школы.

Выбирайте, если у вас есть возможность, такую форму представления утверждения, которая больше вас устраивает и лучше подходит для данного контекста.

Важно понимать суть и значение необходимых условий. Допустим, что мы интересуемся утверждением $P$ и хотим узнать, справедливо ли оно, но пока располагаем лишь утверждением типа «из $P$ следует $Q$». Можно ли исходя из этого утверждения выяснить, выполнено ли $P$? Конечно, нет. Дело в том, что в утверждении «из $P$ следует $Q$» интересующее нас утверждение $P$ стоит в условии, на месте предположения, а не в результате, не на месте вывода, т. е. нам известно, что **в предположении справедливости** $P$ будет выполнено какое-то заключение, обозначенное нами символом $Q$. Исходя из этого невозможно сделать какое-либо заключение о справедливости $P$.

Тем не менее утверждение типа «из $P$ следует $Q$», или «для выполнения $P$ необходимо выполнение $Q$», какую-то информацию об утверждении $P$ сообщает. Действительно, перепишем его в виде «если не выполнено $Q$, то не выполнено $P$» и заметим, что мы тем самым получаем возможность выяснить, когда же $P$ **не выполнено**, т. е. при каких обстоятельствах не надо интересоваться справедливостью $P$ — это произойдет в том случае, если не выполнено $Q$. Отсюда можно сделать вывод о том, что ожидать выполнения $P$ можно лишь среди объектов, для которых выполнено $Q$. Те объекты, на которых $Q$ не выполняется, можно не рассматривать, ибо на них $P$ заведомо не выполняется.

В отличие от необходимых, достаточные условия гарантируют выполнение интересующего нас свойства — их и называют достаточными потому, что их проверки вполне хватает для выполнения требуемого свойства. Однако прежде чем применить достаточные условия, сначала следует учесть необходимые условия с тем, чтобы достаточные применять только там, где выполнены условия необходимые.

Рассмотрим пример. Допустим, мы интересуемся, будет ли точка $x$ из интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ точкой экстремума дифференцируемой на $(a, b)$ функции $f$. Если никакой информации о возможности экстремума в данной точке нет, то задача неподъемная — не исследовать же все точки из $(a, b)$, их слишком много, времени не хватит. Помогает необходимое условие: для того чтобы точка $x$ была точкой экстремума функции $f$, необходимо, чтобы ее производная в этой точке обращалась в нуль, т. е. чтобы было выполнено равенство $f'(x) = 0$. Иначе это можно сформулировать так: если $x$ — точка экстремума функции $f$ на $(a, b)$, то $f'(x) = 0$. Это утверждение, сформулированное в виде: если $f'(x) \neq 0$, то $x$ — не точка экстремума, подсказывает нам, что если $f'(x) \neq 0$, то на предмет наличия экстремума такую точку исследовать не надо — в ней экстремума нет! Следовательно, исследованию подлежат только те точки, где $f'(x) = 0$, а их, как правило, не очень много, и задача становится обозримой. Какими средствами изучать те точки, где $f'(x) = 0$, это уже другой вопрос, как правило, к ним применяют достаточное условие экстремума.

**I.2.6. Свойство, признак, критерий. Прямое и обратное утверждения.** Для условного утверждения «если выполнено $P$, то выполнено $Q$» в зависимости от ситуации употребляются следующие названия. Допустим, что мы интересуемся справедливостью утверждения $Q$, тогда $P$ называют *признаком* выполнения $Q$. Если же у нас есть $P$ и мы интересуемся, что из этого можно получить, то высказывание $Q$ называют *свойством* $P$. Например, в утверждении «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны» высказывание $Q$=«углы при основании равны» является свойством высказывания $P$=«данный треугольник равнобедренный». Если же мы интересуемся высказыванием $Q$=«данный треугольник равнобедренный» и имеем в распоряжении высказывание $P$=«два угла треугольника равны между собой», то оно служит признаком равнобедренности, так как имеет место утверждение «если два угла треугольника равны между собой, то треугольник равнобедренный»,

Если у нас есть некое высказывание $P$ и мы установили эквивалентность «$P$ равносильно $Q$», то $Q$ называют *критерием* $P$. Например, если посмотреть на приведенный пример с точки зрения такой формулировки: «равнобедренность треугольника равносильна тому, что два его угла равны между собой», то равенство углов оказывается критерием равнобедренности треугольника.

Пусть даны утверждения $P$ и $Q$. Из них можно составить два условных утверждения, а именно «если верно $P$, то верно $Q$» и «если верно $Q$, то верно $P$» или, иными словами, «из $P$ следует $Q$» и «из $Q$ следует $P$». Считая одно из них данным, говорят «прямым», другое называют к нему *обратным.* Например, если утверждение

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

данное (прямое), то утверждение

$$\text{из } Q \text{ следует } P$$

к нему обратное.

Обратим внимание на то, как оформляется в доказательстве равносильности каких-то утверждений переход к доказательству обратного утверждения. Это в некоторой мере зависит от того, в какой манере дана формулировка. Так, если в утверждении написано, что для выполнения $P$ необходимо и достаточно выполнения $Q$, и доказана необходимость, т. е. «если выполнено $P$, то выполнено $Q$», далее говорят: «докажем достаточность», имея в виду, что теперь будет доказываться импликация «из $Q$ следует $P$».

Если утверждение сформулировано так: «высказывание $P$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено $Q$», и доказано прямое (в данном контексте) утверждение, т. е. что из $P$ следует $Q$, и теперь переходим к доказательству обратного утверждения, то этот момент оформляется так: «обратно, пусть выполнено $Q$, докажем выполнение $P$». Используемое в этой ситуации слово «обратно» как признак начала доказательства обратного утверждения иногда заменяют словом «наоборот», здесь совершенно неуместным: слово «обратно» указывает на начало доказательства обратного, а не «наоборотного» утверждения.

Может возникнуть вопрос: как связаны между собой прямое и обратное утверждения в плане их справедливости? Ответ простой: никак. Поэтому если вместо требуемого утверждения предлагают обратное к нему, это грубая ошибка, встречающаяся, в частности, при формулировке теоремы о необходимых условиях экстремума, особенно в стиле, использующем именно слово «необходимо».

## § I.3. Функции, основные понятия и свойства

В этом параграфе даются основные определения и обсуждаются особенности их применения. Технологии исследования свойств функций описаны отдельно в части, посвященной практической работе.

Расположение связанного со свойствами функций материала соответствует возрастанию логических трудностей, которые приходится преодолевать при его изучении. Наиболее простыми являются ситуации с одним квантором существования. К таким относится, например, описание образа и прообраза множества (аналогов множества значений и области определения), поэтому с них и будет начинаться освоение работы с кванторами. Затем будет обсуждена ситуация, в которой участвуют только кванторы общности — это четность, нечетность и монотонность функции. Далее пойдет разработка последовательности кванторов вида $\exists\,\forall$, типичной для свойства ограниченности функции, после этого — $\forall\,\exists$, типичной для неограниченности функции и точных нижней и верхней границ числовых множеств. Прежде чем перейти к наиболее употребимой в анализе последовательности кванторов вида $\forall\,\exists\,\forall$, характерной для всего, что связано с пределом, будет напомнено еще свойство периодичности функций, а также некоторые важные технические средства.

**I.3.1. Понятие функции. Элементарные функции.** В математике значительную роль играют зависимости между величинами или объектами, отражающие зависимости между явлениями или объектами окружающего нас мира. Зависимости, рассматриваемые в математике, могут быть описаны разными способами, более того, одна и та же зависимость может быть описана разными средствами. Величины, находящиеся во взаимозависимости, могут выступать как равноправные, а может быть и так, что одна из величин считается выбираемой произвольно, а другая находится согласно определенному правилу в зависимости от выбора первой.

Среди всех зависимостей выделяют зависимости, обладающие свойством однозначности, и для них вводят отдельный термин — отображение.

Определение 3.1. Пусть даны множества $X$ и $Y$ (произвольной природы). *Отображением*, определенным (заданным) на множестве $X$ и действующим в множество $Y$, называют правило, согласно которому каждому элементу $x$ множества $X$ сопоставляется какой-то один, вполне определенный, элемент $y$ множества $Y$.

Таким образом, термин «отображение» резервируется за однозначными зависимостями. Ситуации, когда это требование отсутствует, а зависимость между $x \in X$ и $y \in Y$ все же есть, будут вкратце рассмотрены позже.

Тот факт, что каждому $x \in X$ сопоставляется один элемент из $Y$, вовсе не означает, что всем элементам из $X$ сопоставляется один и тот же элемент. Это означает, что одному $x$ не может быть сопоставлено более одного $y$. При этом разным элементам может сопоставляться один и тот же элемент, а могут и разные.

Если множества $X, Y$ числовые, т. е. состоят из вещественных чисел, то в таком случае отображение множества $X$ в множество $Y$ называют *функцией*.

Далее мы будем чаще всего обращаться именно к функциям, т. е. считать $X, Y$ содержащимися в $\mathbb{R}$, поэтому при развитии терминологии будем говорить о функциях, хотя термины, определения которых не используют особенностей числового множества типа арифметических операций, сравнения и т. п., годны и для отображений. Мы будем также называть функциями отображения, действие которых распространяется на несколько числовых величин (так называемые функции нескольких переменных).

Договоримся о терминах и обозначениях. Правило, задающее функцию, часто обозначают буквами $f, g, h, \varphi, \ldots$. Если $f$ — функция, то множество $X$, на элементы которого распространяется действие правила (функции) $f$, называют *областью определения функции* $f$ и обозначают через $D(f)$. Число, получаемое в результате действия функции $f$ на элемент $x \in X$, называют *значением функции* $f$ *на элементе* $x$ и обозначают символом $f(x)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где $x$ берутся из области определения $D(f)$, называют *множеством значений функции* $f$ и обозначают через $E(f)$. Тот факт, что $y$ — значение функции $f$ на элементе $x$, выражают равенством $y = f(x)$. Это же обстоятельство иногда удобно записывать с использованием стрелки с хвостиком, а именно в виде $f : x \mapsto f(x)$, символизирующем тот факт, что элемент $x$ правилом $f$ переводится в $f(x)$.

Функция может быть задана описанием, задающим правило сопоставления, либо формулой, либо перечислением всех ее значений. Можно говорить и о графическом задании функции, если оно позволяет определенно установить правило сопоставления, характеризующее функцию. Вместе с указанием правила сопоставления желательно указывать и два других атрибута, сопровождающие функцию, а именно ее область определения и множество значений. Если область определения при задании функции не указана, то считается, что функция рассматривается на ее естественной области определения, т. е. на множестве всех тех чисел, для которых выполнимы предусмотренные формулой действия. Множество значений обычно не указывается по той причине, что оно однозначно характеризуется заданием самой функции и области ее определения.

Любой разговор будет малосодержательным без примеров рассматриваемых понятий и конструкций. Поэтому в первую очередь напомним определения основных функций, с которыми нам доведется встречаться на протяжении длительного времени. При этом будем главным образом отмечать области определения и множества значений, привлекая при необходимости свойства функций, подробно изучаемые позже.

1. Линейная функция. *Линейной* называют функцию, определенную правилом $x \mapsto ax + b$, где $a, b$ — некоторые числа. Она определена на множестве всех вещественных чисел и в случае $a \neq 0$ принимает все вещественные значения, а при $a = 0$ — только значение $b$.

Функцию вида $ax + b$ называют линейной по той причине, что ее график ассоциируется с прямой линией на координатной плоскости. Позже мы узнаем, что эту функцию точнее называть аффинной, в то время как название «линейная» оставить за функциями вида $ax$. Однако мы сохраним данное название, рассчитывая, что оно не приведет к недоразумениям.

2. Квадратичная функция. *Квадратичной* называют функцию, определенную правилом $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Она определена на множестве всех вещественных чисел. Для нахожде-

ния множества значений проделаем нехитрые технические манипуляции, называемые *выделением полного квадрата.* Учитывая, что $a \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Выражение $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ при любом $x \in \mathbb{R}$ неотрицательно, значит, если $a > 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \geq \frac{4ac - b^2}{4a},$$

а если $a < 0$, то

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

так что значение

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

принимаемое функцией $ax^2 + bx + c$ в точке $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, является при $a > 0$ ее наименьшим, а при $a < 0$ — наибольшим значением. Используя обозначения $x_v$, $y_v$, формулу (3.1) можно записать в виде

$$y(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v. \tag{3.2}$$

Множеством значений функции $ax^2 + bx + c$ будет промежуток $(-\infty, y_v]$ при $a < 0$ и $[y_v, +\infty)$ при $a > 0$.

3. Функция вида $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$. При $k > 0$ такую функцию называют *обратно пропорциональной зависимостью.*

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 0$. Множество ее значений также состоит из всех ненулевых чисел.

4. Степенная функция. В степени с произвольным основанием, т. е. в выражении вида $u^v$, где $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$, можно считать постоянным либо показатель степени, либо основание. В зависимости от этого говорят либо о степенной, либо о показательной функции.

Пусть фиксирован показатель степени, т. е. рассматривается функция, определяемая правилом $f(x) = x^\alpha$. При произвольном $\alpha \in \mathbb{R}$ она определена для $x > 0$. Однако при не столь общем предположении о показателе степени ее можно определить и на более широком множестве.

Пусть показатель степени — некоторое натуральное число $n$. Тогда получаем функцию, сопоставляющую каждому действительному $x$ число $x^n$ и называемую *степенной с натуральным показателем* $n$. Функция $x^n$, $n \in \mathbb{N}$, определена на множестве $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, и если $n$ нечетно, то множеством ее значений является всё $\mathbb{R}$, а если $n$ четно, то она принимает все неотрицательные значения.

Пусть показатель — целое отрицательное число. В таком случае степенная функция имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Она определена на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и множеством значений будет $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $n$ нечетном и $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.

5. Показательная функция. Если фиксировано основание степени $a > 0$, а изменяется ее показатель $x$, то получается функция $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, называемая *показательной с основанием* $a$.

Показательная функция определена на множестве $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, и если $a \neq 1$, то множеством ее значений является промежуток $(0, +\infty)$, а если $a = 1$, то множество значений состоит из одного числа 1.

6. Логарифмическая функция. Пусть дано действительное число $a > 0$, $a \neq 1$. Показательная функция $f(z) = a^z$, $z \in \mathbb{R}$, с основанием $a \neq 1$ строго монотонна, и множеством ее значений служит множество $(0, +\infty)$ всех положительных вещественных чисел, стало быть, для каждого $x \in (0, +\infty)$ существует единственное число $z \in \mathbb{R}$ такое, что $a^z = x$. Это число $z$ называют *логарифмом числа* $x$ *по основанию* $a$ и обозначают символом $z = \log_a x$. Правило, согласно которому каждому (строго) положительному $x$ сопоставляется число $\log_a x$, называют *логарифмической функцией.* Она определена на множестве всех (строго) положительных вещественных чисел и принимает все действительные значения.

7. Определения синуса и косинуса. Эти функции появляются в процессе согласования вращательного движения, т. е. движения по окружности, с прямоугольной системой координат. Рассмотрим окруж-

ность единичного радиуса с центром в начале координат $O$. Предполагая рассматривать движение по окружности, в качестве начальной возьмем точку $M_0 = (1, 0)$. Пусть точка на окружности, начав движение в $M_0$, прошла по окружности дугу величиной $x$ радиан, или же соответствующий этой точке луч (отрезок, вектор) повернулся на угол $x$ радиан.

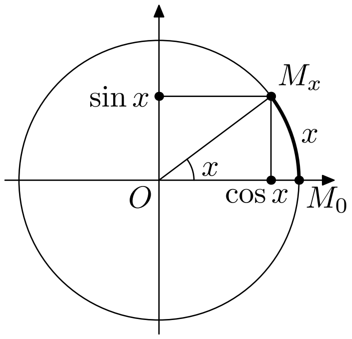



Рис. 3.1.

Пусть $M_x$ — положение точки на окружности в конце движения. Эта точка полностью описывается ее координатами, поэтому для них вводят специальные обозначения. А именно, ординату точки $M_x$ (или, иначе говоря, ее проекцию на ось ординат) называют *синусом*, а абсциссу (проекцию на ось абсцисс) — *косинусом дуги* (*угла, числа*) $x$, при этом используют соответственно обозначения $\sin x$, $\cos x$ (рис. 3.1).

Сопоставляя каждому $x \in \mathbb{R}$ числа $\sin x$, $\cos x$, мы задаем функции sin, cos. Они определены на всем $\mathbb{R}$, т. е. для любых вещественных чисел $x$, и их значения заполняют промежуток $[-1, 1]$.

8. Тангенс и котангенс. Функции, определенные равенствами

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

называют соответственно *тангенсом* и *котангенсом*.

Тангенс определен для таких $x$, что $\cos x \neq 0$, т. е. для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точек вида $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а котангенс — в тех точках, где синус отличен от нуля, т. е. во всех точках числовой прямой, кроме точек вида $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Множеством значений тангенса и котангенса является множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

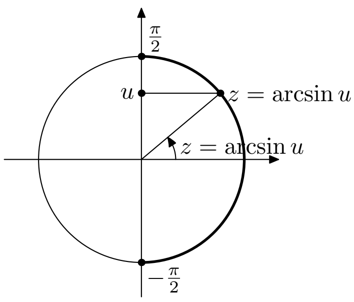



Рис. 3.2.

9. Арксинус и арккосинус. Синус при изменении аргумента в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$, и ввиду строгого возрастания каждое значение синуса принимается на единственном значении аргумента из $[-\pi/2, \pi/2]$. Каждому $u \in [-1, 1]$ сопоставим то единственное число $z \in [-\pi/2, \pi/2]$, при котором $u = \sin z$. Это число $z$ называют *арксинусом* числа $u$ и обозначают $z = \arcsin u$ (рис. 3.2).

Указанное сопоставление задает функцию arcsin с областью определения $[-1, 1]$ и множеством значений $[-\pi/2, \pi/2]$. Согласно определению равенство $z = \arcsin u$ равносильно одновременному выполнению следующих соотношений:

1) $-\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2$,

2) $u = \sin z$.

Символически можно написать:

$$z = \arcsin u \Longleftrightarrow \begin{cases} -\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2, \\ u = \sin z. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекают формулы

$$\arcsin(\sin z) = z \quad \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{3.4}$$

$$\sin(\arcsin u) = u \quad \text{при } -1 \leqslant u \leqslant 1. \tag{3.5}$$

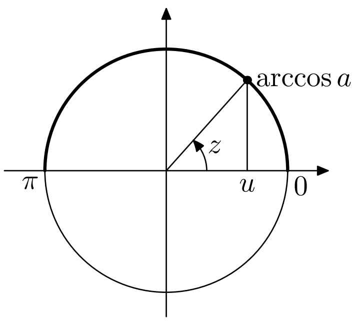



Рис. 3.3.

Косинус при изменении аргумента в промежутке $[0, \pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$, и ввиду строгого убывания каждое значение косинуса принимается на единственном значении аргумента из $[0, \pi]$. Каждому $u \in [-1, 1]$ сопоставим то единственное число $z \in [0, \pi]$, при котором $u = \cos z$ (рис. 3.3). Это число $z$ называют *арккосинусом* числа $u$ и обозначают $z = \arccos u$. Указанное сопоставление задает функцию arccos с областью определения $[-1, 1]$ и множеством значений $[0, \pi]$. Согласно определению равенство $z = \arccos u$ равносильно выполнению следующих соотношений:

1) $0 \leqslant z \leqslant \pi$,

2) $u = \cos z$.

Символически можно написать

$$z = \arccos u \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant \pi, \\ u = \cos z. \end{cases} \tag{3.6}$$

Имеют место аналогичные формулам (3.4), (3.5) равенства

$$\arccos(\cos z) = z \quad \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \pi, \tag{3.7}$$

$$\cos(\arccos u) = u \quad \text{при } -1 \leqslant u \leqslant 1. \tag{3.8}$$

**I.3.2. Координатная плоскость. График функции.** Многие свойства функций легче воспринимать, обращаясь к их графикам. Прежде чем определить понятие графика, поговорим об обстановке, в которой это происходит.

Определение 3.2. Пусть $X, Y$ — какие-то множества. Будем говорить, что элементы $x \in X$, $y \in Y$ *образуют упорядоченную пару* $(x, y)$, если элемент $x$ считается первым, а $y$ — вторым. Далее вместо слов «упорядоченная пара» будем нередко писать просто «пара», если это не приведет к недоразумению.

Для пары $(x, y)$ важен не только состав ее элементов, но и порядок их расположения, так что пары $(x, y)$ и $(y, x)$ при неравных $x$, $y$ различны. Кроме того, пары $(x, y)$ и $(u, v)$ равны в том и только в том случае, если $x = u$, $y = v$.

Для множества упорядоченных пар вещественных чисел, обозначаемого символом $\mathbb{R}^2$, обычно используют следующую геометрическую интерпретацию. На плоскости изображают две взаимно перпендикулярные числовые прямые (числовые оси) так, что точка их пересечения соответствует числу нуль на каждой из прямых. Одну из этих прямых называют *осью абсцисс*, а другую — *осью ординат*, если выполнены следующие условия: результат поворота положительной части оси абсцисс вокруг точки пересечения прямых на угол $\pi/2$ против часовой стрелки совпадет с положительной частью оси ординат (рис. 3.4).

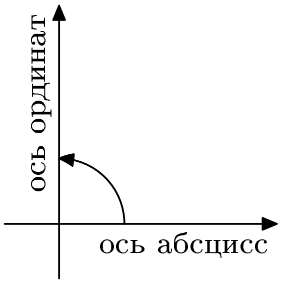



Рис. 3.4.

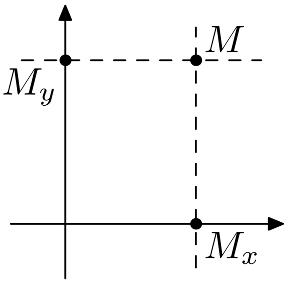



Рис. 3.5.

Каждой паре $(x, y)$ вещественных чисел $x, y$ поставим в соответствие точку координатной плоскости по следующему правилу. Отметим на оси абсцисс точку $M_x$, соответствующую числу $x$, на оси ординат — точку $M_y$, соответствующую числу $y$. Через точку $M_x$ проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс (тем самым параллельную оси ординат), а через точку $M_y$ — прямую, перпендикулярную оси ординат (т. е. параллельную оси абсцисс). Паре $(x, y)$ сопоставляется точка $M$ пересечения этих прямых (рис. 3.5).

В построенной конструкции точки $M_x$, $M_y$ или соответствующие им числа $x, y$ называют *первой* и *второй координатами точки* $M$ и обычно для точки $M$ используют обозначение $(x, y)$, отведенное ранее для упорядоченной пары. Также говорят, что $x$ — это *абсцисса* точки $M$ (или точки $(x, y)$), а $y$ — ее *ордината.* Саму плоскость с выделенными взаимно перпендикулярными прямыми называют *прямоугольной* (или *декартовой*) *системой координат*, а точку пересечения осей абсцисс и ординат — *началом координат.*

Имея в виду указанную геометрическую модель множества упорядоченных пар вещественных чисел, будем воспринимать упорядоченные пары как точки координатной плоскости, т. е. отождествлять пары чисел и точки координатной плоскости. Такое отождествление, как правило, не приводит к недоразумению.

Определение 3.3. *Графиком функции* $f$ называют множество точек $(x, y)$ координатной плоскости таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$.

Иначе можно сказать, что график функции $f$ — это множество упорядоченных пар чисел $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для изображения графика функции $f$ поступают следующим образом. Изображают прямоугольную систему координат и около стрелки, показывающей положительное направление оси абсцисс (ординат) ставят букву, которой обозначается аргумент (соответственно значения) функции (на рис. 3.6 это буквы $x$ и $y$). Затем, следуя определению графика, отмечают на плоскости множество точек $(x, y)$ таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$, т. е. множество точек вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$ (см. рис. 3.6). Надо иметь в виду, что, например, две буквы $x$, стоящие на рис. 3.6 чуть ниже оси абсцисс, несут разную смысловую нагрузку (т. е. их следует воспринимать как разные объекты): одна (около стрелки) указывает обозначение оси, где отмечаются значения аргумента функции, а другая — символ собственно аргумента.

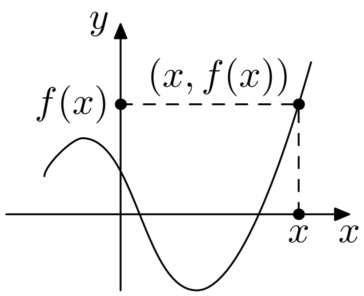


Рис. 3.6.

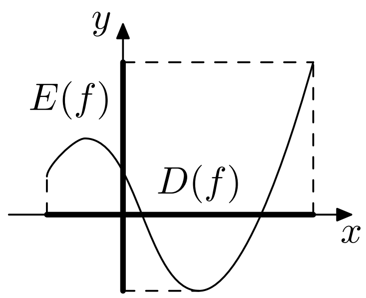


Рис. 3.7.

Область определения $D(f)$ располагается на (горизонтальной) оси абсцисс, множество значений $E(f)$ — на (вертикальной) оси ординат (рис. 3.7).

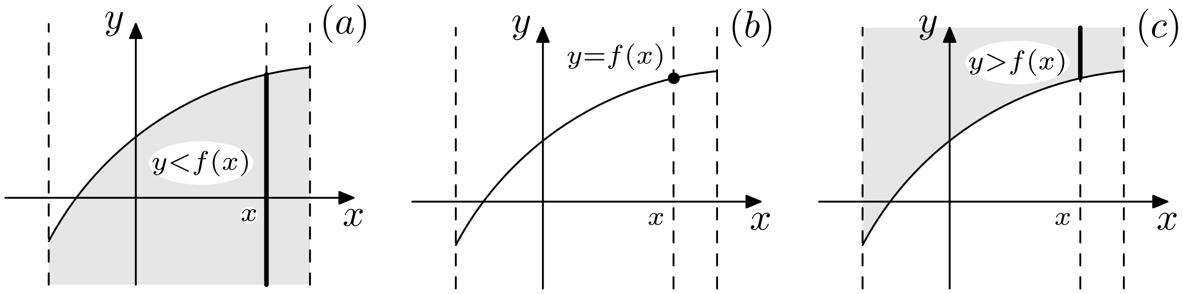



Рис. 3.8.

Вместе с графиком бывают полезны *подграфик* и *надграфик* функции $f$, а именно множества точек $(x, y)$ координатной плоскости таких, что $x \in D(f)$, а $y < f(x)$ и соответственно $y > f(x)$. Подграфик, график и надграфик функции $f$ можно представить себе так. Фиксируем $x \in D(f)$ и при этом $x$ двигаемся по прямой снизу вверх, изменяя $y$. Сначала $y$ расположен настолько низко, что $y < f(x)$, и мы находимся в подграфике (рис. 3.8($a$)). Поднимаясь вверх, мы придем в такую точку $(x, y)$, где будет $y = f(x)$, и окажемся в точке графика (рис. 3.8($b$)). Поднимаясь далее вверх, мы оказываемся в таких точках $(x, y)$, где $y > f(x)$, т. е. в надграфике функции $f$ (рис. 3.8($c$)). Проделывая эту процедуру при всех $x$ из области определения $f$, получаем подграфик, график и надграфик функции $f$.

**I.3.3. Способы образования новых функций.** Укажем способы получения новых функций из уже имеющихся. Часть таких способов связана с арифметическими операциями в множестве вещественных чисел.

Определение 3.4. Пусть на множестве $X$ заданы функции $f, g$. *Суммой, произведением, частным функций $f$ и $g$* и *произведением функции $f$ на число* называют функции, заданные соответственно правилами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{3.9}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \tag{3.11}$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

О соотношениях (3.7)–(3.10) говорят, что они понимаются *поточечно.*

Кроме того, функции можно сравнивать, а именно для заданных на множестве $X$ функций $f$ и $g$ считают, что $f$ *меньше чем* $g$, если $f(x) < g(x)$ для любого $x \in X$. Аналогично подходят к терминам *меньше или равна*, *больше*, *больше или равна.*

Еще один способ получения новых функций основан на последовательном действии нескольких функций. Опишем его для двух функций, для большего числа функций процедура аналогична.

Определение 3.5. Пусть функция $f$ определена на множестве $X$ и действует в множество $Y$, а функция $g$ определена на множестве $Y$ или на каком-то его подмножестве и действует в некоторое множество $Z$. Тогда, взяв такой элемент $x \in X$, что $f(x)$ попадает в область определения функции $g$, можно подействовать на $f(x)$ функцией $g$. Получается новое правило $h$, действующее на те элементы из $X$, для которых $f(x) \in D(g)$, следующим образом:

$$h(x) = g(f(x)). \tag{3.13}$$

Отображение $h$ называют *сложной функцией, составленной из* $f$ *и* $g$, или *композицией функций* $f$ *и* $g$, или *суперпозицией функций* $f$ *и* $g$.

Из определения композиции $h$ функций $f$ и $g$ ясно, что $D(h) = \{x \in X : f(x) \in D(g)\}$.

Наконец, отметим еще один способ образования новых функций. Он основан на восстановлении «истории» значений данной функции и отражает определенную равноправность переменных. Однако этот способ требует от функции дополнительного свойства, которое сейчас опишем.

В определении функции особо было оговорено свойство ее однозначности, т. е. невозможности сопоставления одному элементу сразу двух или более элементов. Вместе с тем разным элементам из области определения функции вполне может быть сопоставлен один и тот же элемент множества ее значений. Например, функция $y = x^2$ любые два противоположных значения аргумента переводит в одно значение, функция $y = \sin x$ бесконечно много элементов переводит в один, и т. д. Ясно, что если в таком случае задаться целью определить, из какого значения аргумента было получено то или иное значение функции, то однозначно это сделать невозможно. Поскольку указанное восстановление «истории» значений функции бывает необходимо, обратимся к свойству функции, которое обеспечивало бы однозначность при таком восстановлении.

Определение 3.6. Функцию $v = f(u)$ называют *обратимой* или *взаимно однозначной на множестве* $X \subset D(f)$, если для любых $u_1, u_2 \in X$ таких, что $u_1 \neq u_2$, будет $f(u_1) \neq f(u_2)$, иначе говоря, если для любых двух различных элементов множества $X$ соответствующие им значения функции различны.

Тем самым каждое значение $v = f(u)$ обратимой функции $f$ получается в точности из одного значения $u \in X$ и можно вести речь об однозначном восстановлении «истории» значения $v = f(u)$, т. е. об элементе $u \in X$, из которого значение $v$ получено.

Определение 3.7. Пусть $v = f(u)$ — обратимая на множестве $X$ функция, и пусть $Y$ — множество всех элементов $v = f(u)$, где $u \in X$. Каждому элементу $v \in Y$ сопоставим элемент $u \in X$ такой, что $v = f(u)$. Указанное однозначное правило определяет функцию, которую называют *функцией, обратной к функции* $f$, и обозначают символом $f^{-1}$.

Заметим, что если на элемент $u \in X$ сначала подействовать функцией $f$, а затем на элемент $v = f(u)$ подействовать функцией $f^{-1}$, то мы получим исходный элемент $u$, иначе говоря,

$$f^{-1}(f(u)) = u \quad \text{для любого } u \in X. \tag{3.14}$$

Аналогичное равенство можно записать и для элементов $v \in Y$:

$$f(f^{-1}(v)) = v \quad \text{для любого } v \in Y. \tag{3.15}$$

Из определения функции, обратной к данной, можно усмотреть, что равенство $v = f(u)$ равносильно тому, что $u = f^{-1}(v)$, тем самым можно говорить не только о функции, обратной к данной, а о паре взаимно обратных друг другу функций $f$ и $f^{-1}$. Записи $v = f(u)$ и $u = f^{-1}(v)$ означают, по существу, одно и то же, а именно что элементы $u$ и $v$ находятся в определенной зависимости, которая в разных контекстах может принимать разные обозначения: $v = f(u)$ или $u = f^{-1}(v)$, смотря по тому, какую из переменных $u$ и $v$ считают аргументом функции. Кстати, равенства (3.12), (3.13) в полной мере характеризуют обратные друг другу функции $f$ и $f^{-1}$.

Полезно знать, как связаны между собой графики данной функции и обратной к ней (если, разумеется, таковая есть). Как отмечено выше, исходная функция и ей обратная — это два разных способа записи одной и той же зависимости между переменными $u$ и $v$, поэтому в рамках множества упорядоченных пар прямая и обратная функции отличаются только тем, какая из переменных стоит на первом месте, а какая — на втором. Тем самым пара $(v, u)$ лежит на графике обратной функции в том и только в том случае, если пара $(u, v)$ находится на графике исходной функции. Мы договорились изображать горизонтально прямую, отведенную для первой координаты, и вертикально — для второй, стало быть, для получения точки $(v, u)$ графика обратной функции нам надо взять точку $(u, v)$ графика исходной и отразить ее симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно множества точек вида $(u, u)$, $u \in \mathbb{R}$ (рис. 3.9($a$)). Поскольку так получается любая точка графика обратной функции, весь график обратной функции получается отражением графика исходной относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Пример получения графика обратной функции из графика исходной функции показан на рис. 3.9($a$), ($b$).

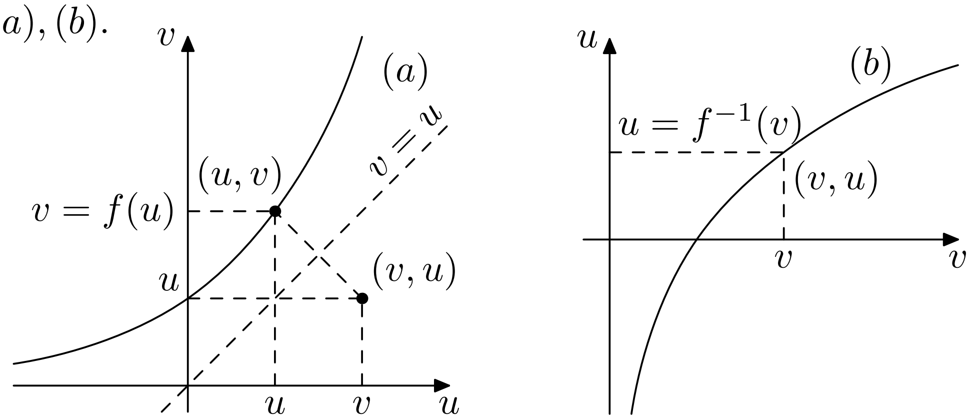



Рис. 3.9.

Кстати, операцию отражения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов можно применить к графику любой функции (даже к любому множеству на плоскости), однако если исходная функция не была обратимой, то получится некое множество точек плоскости, которое не окажется графиком какой-либо функции (будет отсутствовать однозначность). Пример такой ситуации дан на рис. 3.10($a$), ($b$).

Более того, можно изображать и «график» какой-либо, необязательно однозначной зависимости между $x$ и $y$, считая $x$ независимой величиной, но к этому средству обращаются при изображении множеств на координатной плоскости, элементы которых обладают определенным свойством.

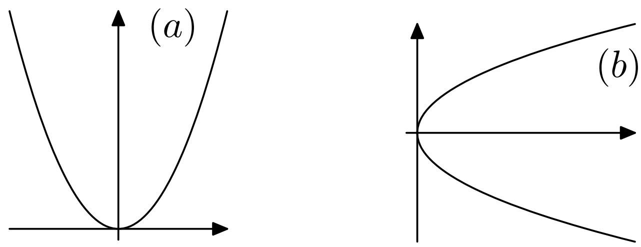



Рис. 3.10.

### 3.1.4. Свойства функций.

Четность и нечетность.

Определение 3.8. Функцию $f$ называют *четной* (*нечетной*), если **для любого** элемента $x$ из $D(f)$ противоположный ему элемент $-x$ также входит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). Кратко это можно выразить так:

$$(\forall x \in D(f)) \quad -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (\text{соответственно} f(-x) = -f(x)).$$

Отсутствие свойства четности у функции $f$ запишется так:

$$(\exists x \in D(f)) \quad (\text{либо } -x \notin D(f), \text{ либо } f(-x) \neq f(x)).$$

Тем самым для проверки отсутствия четности достаточно либо установить несимметричность области определения $f$ относительно нуля, либо предъявить такое $x \in D(f)$, при котором значения $f(-x)$ и $f(x)$ различны.

Так же анализируется отсутствие свойства нечетности функции.

Если $f$ не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, то ее называют *функцией общего вида.*

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. относительно точки $(0, 0)$.

Если $f, g$ — нечетные (четные) функции, то их сумма также нечетна (соответственно четна).

Возрастание и убывание.

Определение 3.9. Функцию $f$ называют *возрастающей* (*неубывающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если **для любых** $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) \geqslant f(x_1)$). Кратко это выразится так:

$$(\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X) \quad x_2 > x_1 \Longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$(\text{соответственно } f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Функцию $f$ называют *убывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если **для любых** $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) \leqslant f(x_1)$). Кратко:

$$(\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X) \quad x_2 > x_1 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$(\text{соответственно } f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

Если функция $f$ либо возрастающая, либо убывающая на множестве $X$, то ее называют (*строго*) *монотонной* на $X$. Термин «монотонная» используют и в тех случаях, когда функция неубывающая или невозрастающая.

Несколько слов о терминологии. Иногда сформулированные здесь свойства возрастания или убывания называют строгим возрастанием или убыванием, а термин «возрастающая» («убывающая») функция относят к таким функциям, которые здесь названы неубывающими (невозрастающими). Поэтому если в задаче существенно, знак какого неравенства, строгого или нестрогого, имеется в виду при сравнении значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$, то лучше уточнить в том источнике, откуда взята задача, что авторы понимают под той или иной разновидностью монотонности.

Примеры возрастающей, неубывающей, убывающей и невозрастающей функций приведены на рис. 3.11$(a)$–$(d)$.

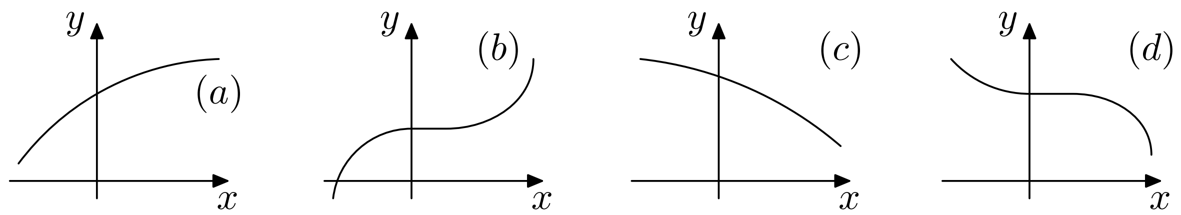



Рис. 3.11.

Строгая монотонность функции служит достаточным условием ее обратимости. Более того, для обратной функции сохраняется вид монотонности исходной: *если $f$ возрастающая, то $f^{-1}$ тоже возрастающая, а если $f$ убывающая, то $f^{-1}$ тоже убывающая.* Обоснуем это утверждение для случая возрастающей функции, для убывающей рассуждения аналогичны.

Пусть $f$ возрастает на множестве $X$ и переводит его на множество $Y$. Если $x_1, x_2 \in X$ различны, то либо $x_1 < x_2$, либо $x_2 < x_1$, и ввиду возрастания $f$ либо $f(x_1) < f(x_2)$, либо $f(x_2) < f(x_1)$, стало быть в любом случае $f(x_2) \neq f(x_1)$ и $f$ обратима на $X$.

Пусть $f$ возрастает на $X$. Предположим, что $f^{-1}$ не является возрастающей функцией на множестве $Y$. Тогда найдутся такие два элемента $y_1, y_2 \in Y$, что $y_1 < y_2$, но $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Пусть $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Тогда $x_1 \geqslant x_2$. Если $x_1 = x_2$, то $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ ввиду свойства однозначности функции, что противоречит предположению $y_1 < y_2$, а если $x_1 > x_2$, то $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ ввиду предполагаемого возрастания $f$, что также противоречит предположению $y_1 < y_2$. Стало быть, предположение об отсутствии у $f^{-1}$ свойства возрастания несостоятельно.

Периодичность.

Определение 3.10. Функцию $f$ называют *периодической*, если **существует** такое число $T \neq 0$, называемое ее *периодом*, что **для любого** элемента $x$ из $D(f)$ элементы $x + T$, $x - T$ также входят в $D(f)$ и имеют место равенства $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Образно периодическую функцию можно представить как функцию, каждое значение которой повторяется через величину, равную периоду.

Примеры графиков периодических функций даны на рис. 1.9$(a), (b)$ (имеется в виду, что графики продолжаются неограниченно влево и вправо).

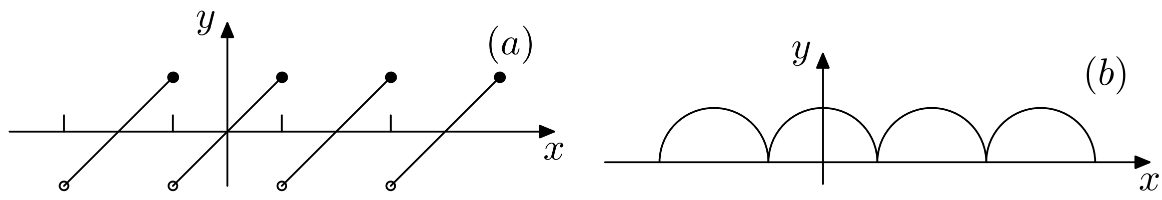



Рис. 3.12.

Если $f$ задана на каком-то промежутке $[a, b]$ и говорится, что она распространяется по периодичности на всё $\mathbb{R}$, или что задана периодическая функция, у которой изображен график на промежутке длиной периода, то имеется в виду следующее. Строится периодическая функция $g$ с периодом $T = b - a$ (период равен длине отрезка $[a, b]$) следующим образом. Если $x \in [a, b]$, то $g(x) = f(x)$. Если же $x \notin [a, b]$, то добавляем к $x$ (или вычитаем из $x$) столько периодов, чтобы получаемая точка лежала в $[a, b]$, т. е. находим такое целое $n$, что $x + nT \in [a, b]$, и полагаем $g(x) = f(x + nT)$.

Экстремум.

Определение 3.10. Рассмотрим функцию $f$ на некотором множестве $X$ из области ее определения. Говорят, что точка $x_0 \in X$ является *точкой максимума* (*минимума*) функции $f$, если **найдется** такое число $r > 0$, что **для любого** элемента $x \in X$, из интервала $(x_0 - r, x_0 + r)$, имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) (рис. 3.12).

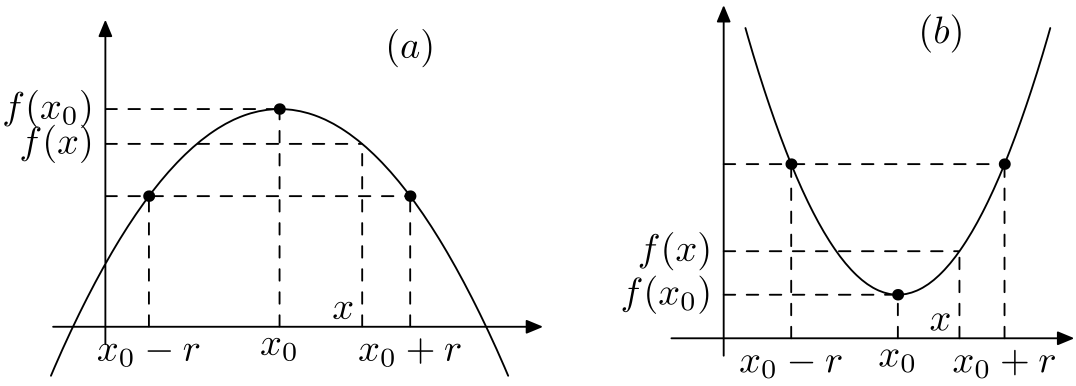



Рис. 3.13.

Если $x_0$ либо точка максимума, либо точка минимума функции $f$, то ее называют *точкой экстремума функции* $f$.

Значение $f(x_0)$ в точке максимума (минимума) называют *максимальным* (*минимальным*) значением функции $f$ или, короче, *максимумом* (*минимумом*) функции $f$. Максимальное или минимальное значение функции называют ее *экстремумом.*

Обратим внимание на то, что свойство функции иметь экстремум в точке отражает ее поведение вблизи рассматриваемой точки, иначе говоря, это *локальное свойство* и, говоря об экстремумах, в случае необходимости подчеркивают, что это локальные максимумы или минимумы.

Ограниченность и неограниченность.

Определение 3.11. Функцию $f$ называют *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subset D(f)$, если

$$\exists C \ \forall x \in X \quad f(x) \leqslant C, \tag{3.16}$$

соответственно

$$\exists C \ \forall x \in X \quad f(x) \geqslant C. \tag{3.17}$$

Функцию $f$ называют *ограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\exists C \ \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant C. \tag{3.18}$$

Ясно, что функция ограничена на данном множестве тогда и только тогда, когда она на нем ограничена сверху и снизу одновременно.

Определение 3.12. Функцию $f$ называют *неограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если она не обладает свойством соответствующей ограниченности, т. е., обращаясь к отрицанию, если

$$\forall C \ \exists x \in X \quad f(x) > C, \tag{3.19}$$

соответственно

$$\forall C \ \exists x \in X \quad f(x) < C. \tag{3.20}$$

Функцию $f$ называют *неограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\forall C \ \exists x \in X \quad |f(x)| > C. \tag{3.21}$$

Ясно, что функция неограниченная тогда и только тогда, когда она неограниченная либо сверху, либо снизу.

Определение 3.13. Рассмотрим функцию $f$ на множестве $X$. Значение $f(x_0)$ функции $f$ в точке $x_0 \in X$ называют *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции* $f$ *на множестве* $X$, если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) **для всех** точек $x \in X$.

## § I.4. Множества, соответствия, отношения

**I.4.1.** В этом разделе рассмотрим одно из самых употребимых в математике понятий, а именно понятие множества, познакомимся с простейшими операциями над множествами и простейшими связанными с множествами конструкциями.

В основе языка современной математики лежит понятие множества. Это первичное понятие математики, формируемое через создание единообразного представления о том, что такое множество. *Множеством* будем называть любой набор объектов, который можно рассматривать как единое целое, т. е. мыслить многие объекты как соединенные каким-либо признаком и образующие новый объект — множество, состоящее из данных объектов. Тем самым среди объектов какие-то в данном контексте считаются отдельными, неделимыми, а некоторые — множествами, состоящими из других объектов. Основное относящееся к понятию множества свойство — это полная определенность множества путем указания (каким-либо способом) всех составляющих его объектов. Если объект $x$ входит в состав множества $A$, то говорят, что $x$ — *элемент множества*

$A$ или $x$ *принадлежит множеству* $A$, или $A$ *включает* $x$, и это обстоятельство обозначают через $x \in A$ или $A \ni x$.

О каждых объекте $x$ и множестве $A$ можно с определенностью судить, является $x$ элементом $A$ или нет. Если $x$ не элемент $A$, то будем писать $x \notin A$. Множество, не имеющее элементов, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$.

Говорят, что *множество $A$ содержится в множестве $B$* (или что $A$ — *подмножество* $B$), и пишут $A \subset B$ (или $A \subseteq B$), если для любого $x \in A$ будет $x \in B$. Множества $A, B$ *равны* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, равенство $A = B$ означает справедливость двух утверждений: если $x \in A$, то $x \in B$, и если $x \in B$, то $x \in A$.

Есть несколько способов задания множеств. Если множество небольшое, то его можно задать прямым указанием всех его элементов, при этом множество обозначается путем записи всех его элементов, ограниченной слева и справа фигурными скобками. Так, множество, элементами которого являются объекты $x$, $y$, обозначается через $\{x, y\}$ (или, что, разумеется, то же, $\{y, x\}$). Однако бывают множества, включающие столь много элементов, что перечислить их все не представляется возможным. Тогда используют какие-то другие способы описания множества. Самый распространенный — это указание свойства, которым должны обладать все элементы данного множества (и только они). Если $A$ — некоторое множество, а $P(x)$ — свойство (т. е. повествовательное предложение, истинность которого зависит от выбора элемента $x$), то символом $\{x \in A : P(x)\}$ обозначают подмножество (т. е. часть) множества $A$, состоящее из всех $x \in A$, для которых $P(x)$ верно. В частности, при рассмотрении уравнений или неравенств свойство $P(x)$ обычно выражается в виде равенства или неравенства.

Если $A, B$ — множества, то совокупность объектов $x$ таких, что либо $x \in A$, либо $x \in B$, образует множество, называемое *объединением* множеств $A, B$ и обозначаемое через $A \cup B$. Совокупность объектов $x$ таких, что $x \in A$ и $x \in B$, называют *пересечением* множеств $A$ и $B$ и обозначают символом $A \cap B$. Множество $\{x \in A : x \notin B\}$ называют *дополнением множества $B$ до множества $A$* (или разностью множеств $A$ и $B$) и обозначают через $A \setminus B$. Множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называют *симметрической разностью множеств $A$ и $B$*. Кратко можно написать, что

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Особую роль играет множество, составленное с использованием двух объектов $x$, $y$ следующим образом: $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Оно удовлетворяет условию, характеризующим упорядоченную пару, т. е. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{s\}, \{s, t\}\}$ тогда и только тогда, когда $x = s$, $y = t$. Тем самым понятие упорядоченной пары уходит из разряда первичных понятий, каким оно было для нас ранее, и становится объектом, определяемым в рамках понятия множества. Разумеется, для составленной из двух объектов $x$ и $y$ упорядоченной пары будем использовать прежнее обозначение $(x, y)$ и называть $x$ ее первым, а $y$ — втором элементом. Множество $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ называют *прямым произведением множеств* $A, B$. Можно последовательно определить произведение $A_1 \times \cdots \times A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$. Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то для произведения обычно используют символ $A^n$.

Ранее мы определили отображение как однозначное правило сопоставления элементам одного элементов другого множества. Это понятие, как и понятие упорядоченной пары, также оказывалось первичным понятием. Подойдем к отображению с точки зрения теории множеств. Каждое отображение имеет график. Это подмножество прямого произведения двух множеств, одно — из которого действует отображение, второе — в которое оно действует. Поэтому в качестве первоисточника в подходе к определению отображения можно взять подмножество прямого произведения. В таком случае можно не требовать однозначности, и на этом пути получаем понятие, более общее по сравнению с понятием отображения, и немало используемое в математике.

Пусть даны множества $X$ и $Y$. Произвольное непустое подмножество $F$ прямого произведения $X \times Y$ называют *соответствием*, действующим из $X$ в $Y$. Если $X = Y$, то соответствие называют *отношением* на множестве $X$.

Проекцию $F_X = \{x \in X : (\exists y \in Y)\ (x, y) \in F\}$ множества $F$ на $X$ называют *область определения* $F$, проекцию $F_Y = \{y \in Y : (\exists x \in X)\ (x, y) \in F\}$ — множеством значений $F$.

Соответствие можно представлять себе как многозначное отображение, сопоставляя каждому $x \in F_X$ сечение $F(x) = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ на элементе $x$. Если $F(x)$ состоит при каждом $x \in F_X$ состоит из одного элемента, то соответствие $F$ называют *отображением*. Таким образом, при таком подходе отображение определяется через его график.

Мы будем редко сталкиваться с соответствиями, а с отношениями дело иметь придется часто, поэтому остановимся на них подробнее. Отношение на множестве $X$ можно представлять себе как установление взаимосвязей между элементами данного множества. Выделение отношения $F \subset X \times X$ означает, что попадание пары $(x, y)$ в множество $F$ сообщает о том, что элементы $x$ и $y$ находятся между собой в отношении $F$. Обычно тот факт, что два элемента $x, y \in X$ находятся в данном отношении $F$, выражают следующим образом: пишут сначала первый из элементов, затем знак данного отношения, а в конце — второй элемент. Для конкретных отношений используют традиционно соответствующим им знаки.

Наиболее распространенным является отношение эквивалентности, которое позволяет агрегировать и рассматривать как единое целое совокупность неразличимых по какому-то признаку элементов данного множества. *Отношением эквивалентности на множестве* $X$ называют такое подмножество $\sigma \subset X \times X$, которое обладает следующими свойствами:

(1) *рефлексивность*: $(x, x) \in \sigma$ для любого $x \in X$,

(2) *симметричность*: для любых $x, y \in \sigma$ если $(x, y) \in \sigma$, то $(y, x) \in \sigma$,

(3) *транзитивность*: для любых $x, y, z \in \sigma$ если $(x, y) \in \sigma$ и $(y, z) \in \sigma$, то $(x, z) \in \sigma$.

В традиционной записи для отношения эквивалентности используют знак $\sim$, так что эквивалентность элементов $x, y \in X$ записывают в виде $x \sim y$. Иногда об эквивалентных элементах удобнее говорить как о равных. Например, рациональные числа определяются как пары чисел $(m, n)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, записываемые в виде $\dfrac{m}{n}$ и называемые дробями, при этом сразу задается отношение равенства на множестве дробей: $\dfrac{k}{l} = \dfrac{m}{n}$ означает, что $kn = lm$ (операция умножения в множестве целых чисел к моменту определения рациональных чисел уже есть). После такого отождествления рациональным числом считают не пару чисел из указанных выше множеств, а класс эквивалентных между собой пар. При этом алгебраические операции над парами проводят стандартным для ситуаций с отождествлением способом: взяв два числа т. е. два набора попарно равных дробей, из каждого классы выбирают по представителю, с ними проводят операцию и результатом операции над классами считают тот класс, в котором оказался результат выполнения операции над представителями.

# ЧАСТЬ II. ПРАКТИКА

## § II.1. Сравнение чисел. Тождественные преобразования. Метод математической индукции

**II.1.1. Сравнение чисел.** Обычно сравнение вещественных чисел устанавливается одним из следующих способов.

1. Поиском промежуточного числа, промежуточной границы между числами, т. е. такого числа, которое расположено между двумя данными числами. Такой поиск может определяться свойствами тех функций, в терминах которых описаны данные числа.

2. Проведением преобразований, приводящих данное сравнение к известному или легко устанавливаемому.

3. Приближением чисел с недостатком и с избытком до тех пор, пока не появится реальная возможность сравнить приближения.

4. Применением какого-либо известного неравенства, например, между средним арифметическим и средним геометрическим.

**Пример 1.** Какое из чисел больше: 3 или $2^{\sqrt{2}}$?

Займемся поиском промежуточного числа, по существу, приближая число $2^{\sqrt{2}}$ с недостатком или с избытком. Начнем с приближения с избытком, так как это в нашем случае проще. Поскольку $\sqrt{2} < 3/2$, а основание степени больше единицы, имеем $2^{\sqrt{2}} < 2^{3/2}$. Будет ли $2^{3/2} < 3$? Это выяснить легко. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат: $2^3 < 3^2$, и найдем, что пришли к верному неравенству, поэтому и исходное было верным. Таким образом, $2^{\sqrt{2}} < 2^{3/2} < 3$.

**Пример 2.** Какое из чисел больше: $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ или $\sqrt{12} - \sqrt{11}$?

Можно, как это иногда делают, написать оба данных числа со знаком «или» между ними и проделывать манипуляции, приводящие к равносильным числовым неравенствам. То неравенство, которое будет верным на последнем шаге преобразований, будет иметь место и для начальных чисел. Однако поступим немного иначе, а именно напишем между этими числами какой-то из знаков неравенств и будем преобразовывать неравенство так, чтобы не нарушать его содержания. Если в конце придем к верному неравенству, то начальное было верным, если — к неверному, то в начале должно быть противоположное неравенство. Придем мы к ясности по поводу неравенства или нет — вопрос открытый, но по крайней мере попробуем.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{11}-\sqrt{10}<\sqrt{12}-\sqrt{11} \Longleftrightarrow 2\sqrt{11}<\sqrt{10}+\sqrt{12}\\
\Longleftrightarrow &4\cdot 11<10+2\sqrt{10}\sqrt{12}+12 \Longleftrightarrow 11<\sqrt{10}\sqrt{12}\\
\Longleftrightarrow &121<10\cdot 12 \Longleftrightarrow 121<120,
\end{aligned}$$

и приходим к неверному неравенству. Следовательно,

$$\sqrt{11}-\sqrt{10}>\sqrt{12}-\sqrt{11}.$$

К анализу этого сравнения можно было подойти и несколько иначе. Умножим и разделим каждую из данных разностей на сумму соответствующих величин. Тогда

$$\sqrt{11}-\sqrt{10}=\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}},$$

аналогично $\sqrt{12}-\sqrt{11}=\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$, а теперь уже ясно, что вторая дробь меньше, так как у нее знаменатель больше.

**Пример 3.** Докажем, что $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

Как легко проверить,

$$1.7<\sqrt{3}<1.8, \quad 1.4<\sqrt{2}<1.5,$$

т. е.

$$\frac{17}{10}<\sqrt{3}<\frac{18}{10}, \quad \frac{14}{10}<\sqrt{2}<\frac{15}{10},$$

а поскольку, как легко проверить, $2^{18/10}<3^{14/10}$, имеем

$$2^{\sqrt{3}}<2^{18/10}<3^{14/10}<3^{\sqrt{2}}.$$

**Упражнения.**

**1.** Сравнить два числа:

**(1)** $\dfrac{129}{588}$ и $\dfrac{82}{367}$, **(2)** 2 и $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$б

**(3)** $\dfrac{3-\sqrt{129}}{4}$ и $\dfrac{2-\sqrt{35}}{3}$, **(4)** $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ и $3+\sqrt{3}$,

**(5)** $365^2$ и $363\cdot 367$, **(6)** $230^2$ и $112\cdot 118$.

**II.1.2. Тождественные преобразования.** Умение работать с арифметическими и алгебраическими выражениями — одна из основ в освоении математики. Если нет навыков преобразований различных выражений, то дальше в математике делать нечего. Без таких навыков невозможно дойти до сути сколько-нибудь содержательной задачи. Весь этот небольшой параграф будет посвящен простейшим наблюдениям, пожеланиям, принципам работы с выражениями, призванным помочь начинающим осваивать эту тему.

Для преобразования алгебраических выражений не требуется ничего сверх обычных правил действий с дробями и корнями (радикалами), изложенных в § 1.1. Конечно, полезны применительно к алгебраическим выражениям формулы сокращенного умножения, а именно формулы

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \tag{1.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \tag{1.2}$$

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b), \tag{1.3}$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \tag{1.4}$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \tag{1.5}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2), \tag{1.6}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2), \tag{1.7}$$

которые надо уметь применять не только «слева направо», но и «справа налево».

При преобразованиях арифметических или алгебраических выражений будем задавать вопрос, который максимально кратко выглядит так: «формула или преобразование?». Смысл этого вопроса состоит в стремлении спланировать действие, которое надо совершить с выражением на очередном шаге решения: использовать какую-то формулу (сокращенного умножения) или сделать какое-то преобразование типа приведения к общему знаменателю, раскрытия скобок, вынесения общего множителя за скобки, приведения подобных членов и т. п. Приоритет чаще всего следует отдать использованию формулы, т. е. если в выражении есть какой-то фрагмент, позволяющий использовать одну из формул (1.1)–(1.7), то следует такой формулой воспользоваться, после чего к полученному выражению снова задать тот же вопрос. Если никакого фрагмента для применения формулы не находится, надо сделать какое-то возможное преобразование и снова поставить тот же вопрос. И так до тех пор, пока остаются возможности применять формулы или совершать преобразования. Если в той ситуации, когда уже нет никаких возможностей, мы не пришли к ожидаемому результату (например, осталось еще громоздкое выражение, а мы надеялись на более простое), то сначала надо поискать ошибку в наших действиях. Если ошибки не находится, то, может, это и должен быть результат, а может, в условии задачи написано не то, что имели в виду ее составители (это самый тяжелый случай). Возможно также, что выбранный путь тупиковый, и тогда надо искать другой путь. Для корректно сформулированной задачи при отсутствии наших ошибок процесс постановки вопросов и ответов на них, как правило, приводит к результату.

Покажем на примерах, как работает предложенная процедура. Иногда в процессе разбора примеров будем сообщать какие-то наблюдения или пожелания, которые желательно совершать в ситуациях, подобных имеющимся в примере. К таким пожеланиям рекомендуем отнестись очень внимательно, стараться распознать их в других примерах и проделать то, что было высказано в качестве пожелания.

Начнем с простейших примеров тождественных преобразований. Возможно, кому-то предлагаемый здесь анализ покажется избыточно тривиальным или навязчивым, однако делается это с вполне определенной целью — продемонстрировать подробно возможные шаги в выполнении преобразований с тем, чтобы читатель, даже совсем не умеющий это делать, мог попробовать самостоятельно научиться делать несложные преобразования. Поэтому выбрана предлагаемая степень подробности.

При решении примеров мы, как правило, не будем следить за изменениями области допустимых значений входящих в выражения букв — это при необходимости легко сделать исходя из соответствующих свойств.

**Пример 1.** Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{y}}-(\sqrt{xy})^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right). \tag{1}$$

Не знаю как вам, а мне эти корни и степени что-то не нравятся. Поэтому предлагаю от них избавиться, благо средство для этого есть: замена. Постараемся сделать ее так, чтобы ни корней, ни дробных степеней не было. Для этого пронаблюдаем за тем, каковы степени у радикалов и знаменатели у дробей в показателях степени. Это 2 (корень квадратный), 3 и 6. Если ввести обозначения

$$x^{\frac{1}{6}}=a, \quad y^{\frac{1}{6}}=b,$$

то все остальные выражения представятся в виде натуральных степеней $a$ и $b$. Подготовим замену, т. е. выразим имеющиеся в выражении буквы, а также все встречающиеся в выражении величины через новые буквы:

$$x=a^6,\ \sqrt{x}=a^3,\ x^{\frac{1}{3}}=a^2,\ \sqrt[3]{x^2}=a^4,$$
$$y=b^6,\ \sqrt{y}=b^3,\ y^{\frac{1}{3}}=b^2,\ y^{\frac{2}{3}}=b^4.$$

Теперь запишем выражение (1), используя новые буквы:

$$\left(\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}-ab\right)\cdot\left(\frac{a+b}{a^3+b^3}\right).$$

Стало проще. Применив к выражению $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$ вопрос «формула или преобразование?», видим, что есть возможность использования формулы разности квадратов (1.3), причем как в числителе при понимании того, что $a^4=(a^2)^2$, $b^4=(b^2)^2$, так и в знаменателе. Можно заметить, что достаточно применить эту формулу к числителю, после чего выполнить простое преобразование — сократить общий множитель:

$$\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2-b^2}=a^2+b^2.$$

Применив вопрос «формула или преобразование?» к выражению $\dfrac{a+b}{a^3+b^3}$, видим, что есть возможность применения в знаменателе формулы суммы кубов (1.6):

$$\frac{a+b}{a^3+b^3}=\frac{a+b}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{1}{a^2-ab+b^2}.$$

Перемножив выражения в скобках, приходим к ответу: 1.

**Пример 2.** Преобразуем выражение

$$\frac{ab}{(a^{-1}+b^{-1})^{-1}}+\frac{\sqrt[4]{a^3b}\sqrt{a}}{2(a+2)\sqrt[4]{a^{-3}b^{-1}}b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-4a^{-2}}{a^{-1}-2^{-1}}. \tag{1}$$

В первую очередь организуем и подготовим замену. Положим

$$a^{\frac{1}{4}}=x,\quad b^{\frac{1}{4}}=y.$$

Тогда

$$a=x^4,\ a^{\frac{3}{4}}=x^3,\ \sqrt{a}=x^2,\ a^{-1}=\frac{1}{x^4},\ a^2=x^8,$$
$$b=y^4,\ b^{\frac{1}{2}}=y^2,\ b^{-1}=\frac{1}{y^4}.$$

В новых буквах первый фрагмент выражения (1) будет иметь вид $\dfrac{x^4y^4}{\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}\right)^{-1}}$. Здесь возможность применения каких-то формул не просматривается, так что займемся простыми преобразованиями: в знаменателе приведем сумму дробей к общему знаменателю, затем освободимся от отрицательной степени и представим все выражение в виде простой дроби:

$$\frac{x^4y^4}{\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}\right)^{-1}}=\frac{x^4y^4}{\left(\frac{x^4+y^4}{x^4y^4}\right)^{-1}}=\frac{x^4y^4}{\frac{x^4y^4}{x^4+y^4}}=x^4+y^4.$$

Займемся вторым фрагментом. В нем так же, как и в первом, не видно, чтобы можно было применить формулы, так что займемся «уборкой» — избавимся от отрицательных степеней и затем сделаем упрощения:

$$\frac{x^3yx^2}{2(x^4+2)\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{y}\cdot y^2}=\frac{x^8}{2(x^4+2)}.$$

Остался третий фрагмент, в котором в процессе преобразований появляется возможность применить формулу разности квадратов (1.3):

$$\frac{1-\frac{4}{x^8}}{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{x^8-4}{x^8}}{\frac{2-x^4}{2x^4}}=2\frac{x^8-4}{(2-x^4)x^4}=2\frac{(x^4-2)(x^4+2)}{(2-x^4)x^4}=-\frac{2(x^4+2)}{x^4}.$$

Теперь соберем всё вместе:

$$x^4+y^4+\frac{x^8}{2(x^4+2)}\left(-\frac{2(x^4+2)}{x^4}\right)=x^4+y^4-x^4=y^4.$$

Ответ запишем, осуществив обратную замену: $b$.

Приведем несколько примеров преобразований числовых выражений. В этом есть свои особенности, которые проявятся в ходе решения примеров.

**Пример 3.** Найдем значение выражения

$$A = \left(3.9 \cdot \sqrt[4]{25 \cdot \sqrt{5}} + 1.1 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{16}{13}}.$$

Никаких формул не видно, значит, будем совершать преобразования. Так как действия с рациональными показателями проще, чем действия с корнями (и сводятся к действиям с рациональными числами), будем всюду переходить от радикалов к степеням с рациональными показателями:

$$\begin{aligned} A &= (3.9 \cdot (5^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{4}} + 1.1 \cdot (5^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{16}{13}} = (3.9 \cdot 5^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}} + 1.1 \cdot 5^{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2}})^{\frac{16}{13}} \\ &= (3.9 \cdot 5^{\frac{5}{8}} + 1.1 \cdot 5^{\frac{5}{8}})^{\frac{16}{13}} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(выносим за скобки общий множитель)} \\ &= (5^{\frac{5}{8}}(3.9 + 1.1))^{\frac{16}{13}} = (5^{\frac{5}{8}} \cdot 5)^{\frac{16}{13}} = (5^{\frac{13}{8}})^{\frac{16}{13}} = 5^{\frac{13}{8} \cdot \frac{16}{13}} = 5^2 = 25. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Вычислим значение выражения

$$\sqrt[4]{8\sqrt{10} - 24} \cdot \sqrt[4]{24 + 8\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{64}.$$

Каковы могут быть действия при вычислении этого выражения? Наличие корня четвертой степени указывает на то, что надо будет работать с подкоренными выражениями. Внесем все выражения под один корень:

$$\sqrt[4]{(8\sqrt{10} - 24) \cdot (24 + 8\sqrt{10}) \cdot 64}.$$

Теперь зададим вопрос «формула или преобразование?». Здесь легко заметить возможность использования формулы разности квадратов, которую мы и применим:

$$\sqrt[4]{((8\sqrt{10})^2 - 24^2) \cdot 64} = \sqrt[4]{(640 - 576) \cdot 64} = \sqrt[4]{64 \cdot 64}.$$

Теперь можно, конечно, выполнить умножение под корнем и затем извлекать корень четвертой степени (не очень представляя, как это делается без применения калькулятора), но в такой ситуации перемножению мы всегда предпочтем нахождение состава числа, т. е. разложение участвующих в умножении чисел на простые множители. В нашем примере это сделать легко, так как $64 = 2^6$, следовательно,

$$\sqrt[4]{64 \cdot 64} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 2^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

**Пример 5.** Найдем значение выражения

$$a = \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

При работе с выражениями, где под корнем находится сумма или разность, есть две возможности. Одна из них состоит в том, чтобы посмотреть, является ли подкоренное выражение полным квадратом суммы или разности каких-то чисел, и если да, то можно избавиться от корня и квадрата одновременно (с помощью формулы (1.4)). Вторая предполагает возведение величины в степень с последующими преобразованиями и извлечением корня. Вторая возможность, пожалуй, более универсальная, так как далеко не всегда подкоренное выражение есть квадрат приемлемой суммы или разности, а возвести в степень можно всегда.

В нашем выражении можно воспользоваться любой из указанных возможностей. Чтобы увидеть, есть ли полный квадрат суммы под первым корнем, представим выражение $4\sqrt{3}$ в виде $4\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$ (удвоенное произведение чисел 2 и $\sqrt{3}$), откуда можно сделать вывод о том, что если там и есть полный квадрат, то только суммы величин 2 и $\sqrt{3}$. Проверим: $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$. Сошлось. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} &= \sqrt[4]{(2 + \sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1. \end{aligned}$$

Посмотрим, что будет, если мы пойдем другим путем. Кстати, именно для использования второго пути данное выражение с самого начала было обозначено одной буквой. Возведя в четвертую степень, получим

$$a^4 = (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2 = (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{4}) = 1,$$

откуда приходим к ответу: $a = 1$.

**Упражнения.** Упростить выражения:

**(1)** $\dfrac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} \left( \dfrac{\sqrt{a^{-1} - b^{-1/2}}}{a^{-1/2} + (\sqrt{b})^{-1}} \right)^{-1},$

**(2)** $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^3}}\right)^{-1}$,

**(3)** $\dfrac{(a-b)(\sqrt[8]{ab})^{-2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\left(\sqrt[8]{\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{a}}\right)^3}+\left(\dfrac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt[8]{a^5b^7}}\right)^2\right)^{-1}$

**(4)** $\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{2/3}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{3/2}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}\right)^{-2}$,

**(5)** $\left(\frac{m-n}{m^{1/3}-n^{1/3}}-(m+n)(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})^{-1}\right)\dfrac{6}{(mn)^{1/3}}$

**(6)** $\dfrac{5a}{b-a}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}+a\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1}}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2}}\right)$.

**II.1.3. Краткие обозначения для суммы и произведения.** Познакомимся с простыми обозначениями, с которыми будем часто встречаться в дальнейшем.

Рассмотрим конечный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, занумерованных последовательными натуральными числами от 1 до $n$. Для суммы $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ используют обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, в котором букву $k$ называют *индексом суммирования*. Она является внутренней переменной в том смысле, что ее использование ограничивается данным выражением и за его пределами можно снова использовать эту же букву. Важно не то, какой буквой обозначен индекс суммирования, а то, в каких конфигурациях эта буква участвует. Иначе говоря, выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ представляет собой краткую форму записи следующей процедуры: на то место, где встречается индекс $k$ в выражении $x_k$, подставляются последовательно числа $1, 2, \ldots, n$ и полученные значения суммируются. Например,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{(2\cdot 2-1)^2}+\frac{1}{(2\cdot 3-1)^2}+\ldots\frac{1}{(2\cdot m-1)^2}$$
$$=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Аналогичное обозначение используют для обозначения произведения конечной последовательности $x_k$, $k = 1, \ldots, n$:

$$\prod_{k=1}^{n} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ первых $n$ натуральных чисел обозначают символом $n!$ называемым *факториалом числа* $n$. Для удобства по определению полагают $0! = 1$.

**II.1.4. Метод математической индукции.** Для использования метода математической индукции с целью доказательства некоторого утверждения $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, надо проверить $P(1)$, т. е. справедливость утверждения для первого натурального числа, а затем обосновать условное утверждение, так называемый индуктивный переход. А именно, предполагая справедливость утверждения для некоторого натурального числа $n$, доказать его выполнение для следующего натурального числа $n+1$. Разумеется, в процессе доказательства надо активно использовать индуктивное предположение, т. е. допущение справедливости $P(n)$. Если утверждение $P(n)$ надо доказывать не для всех натуральных $n$, а только начиная с некоторого натурального $n_0$, то в качестве базы индукции проверяется утверждение $P(n_0)$ и индуктивный переход обосновывается для $n \geqslant n_0$.

**Пример 1.** Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно, если $n = 1$, то сумма слева превращается в одно число 1, и справа имеем $1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)/6 = 1$, так что при $n = 1$ требуемое равенство верно. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном $n$, и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Используя предположение, имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции требуемое равенство будет верным при любом натуральном $n$.

**Упражнения.**

**1.** Доказать равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{3}$$

**2.** Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \ 0! = 1.$$

**3.** Доказать неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

**4.** Доказать неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 2. \tag{2}$$

## § II.2. Высказывания с кванторами

**II.2.1. Восприятие кванторов.** Поскольку встречаться с кванторами нам придется на протяжении всего времени общения с математикой, важно хорошо понимать, как работать с утверждениями, содержащими кванторы.

Отношение к кванторам общности и существования неоднозначно и зависит от статуса утверждения с их участием, а именно от того, надо ли такое утверждение доказывать или оно уже дано и его можно использовать.

Допустим, что квантор общности участвует в утверждении, которое надо доказывать. Тогда квантор «для любого» можно представлять себе как внешнее требование, не зависящее от нас, которое мы должны удовлетворить. Если в утверждении есть слова «для любого», представьте себе, что кто-то чужой придет и будет предлагать вам какие-то значения величины, сопровождаемой словами «для любого», а вам предстоит при этом выполнить все действия, которые следуют за этими словами. Пусть для определенности величина, к которой относятся слова «для любого», обозначается буквой $\varepsilon$, и для еще большей определенности (так чаще всего бывает) добавим требование: $\varepsilon > 0$. Тогда выражение «для любого $\varepsilon > 0$» надо понимать так: кто-то придет и будет давать какие-то положительные числа в качестве $\varepsilon$. Мы, в свою очередь, должны будем обеспечить справедливость какого-то утверждения (обозначим его через $P(\varepsilon)$), связанного с выбранным $\varepsilon$. С чего начать обеспечение требуемого утверждения? Во-первых, надо посмотреть, что от нас потребуется в утверждении $P(\varepsilon)$, и задаться вопросом: *откуда можно получить выполнение* $P(\varepsilon)$? Иначе говоря, пойти с конца, пытаясь понять, какие действия надо предпринять для обеспечения $P(\varepsilon)$. Значение $\varepsilon$ нам неизвестно, поэтому надо заботиться о том, чтобы выработать **правило** обеспечения справедливости $P(\varepsilon)$, зависящее, естественно, от $\varepsilon$. Если такое правило выработать удается, то можно гарантировать, что мы обеспечим выполнение утверждения

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P(\varepsilon).$$

Пусть квантор общности встретился в утверждении, которое дано, и мы имеем право его использовать. Тогда выбор той величины, к которой относится этот квантор, в наших руках, мы вправе придать ей то значение, которое нам требуется, и использовать с этим значением всё, что сообщается в утверждении.

Очень важно не смешивать эти две ситуации.

Иначе следует относиться к квантору существования. Если квантор существования стоит в утверждении, которое мы доказываем, то это наши возможности, мы можем подбирать величину, о существовании которой говорится, исходя из всех имеющихся ресурсов. Это наш регулятор, которым мы управляем. Конечно, в каждом конкретном случае гарантия существования осуществляется по-разному, однако в некоторых ситуациях есть наблюдения, носящие рекомендательный характер. О двух таких ситуациях мы поговорим ниже.

Если же квантор существования находится в утверждении, которое известно, нам дано, и мы можем его использовать, то квантор существования — это пришедшая извне (из имеющегося утверждения) информация, которую мы можем использовать в наших целях.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

свяжем параметры $a, b$ кванторами всевозможными способами и ответим на вопрос, будет ли уравнение иметь решение при соответствующем раскладе кванторов.

Комбинаций кванторов всего четыре, а именно $\forall\forall$, $\forall\exists$, $\exists\forall$, $\exists\exists$. Рассмотрим только две первые комбинации, последние две не представляют особых трудностей. Рассмотрим соответствующие высказывания.

Проанализируем, верно ли высказывание

$$(\forall a \forall b \exists x) \quad ax + b = 0.$$

Кванторы «для любого» находятся в высказывании, которое надлежит доказывать, если мы сочтем его верным, а это значит, что надо ориентироваться на какие-то значения $a$ и $b$ и пытаться выработать правило выбора $x$ в зависимости от $a$ и $b$. Ясно, что для нахождения $x$ желательно иметь возможность делить на $a$, но это возможно не всегда, поэтому надо позаботиться о ситуациях, когда делить можно, и когда нельзя. Если $a \neq 0$, то независимо от $b$ можно найти $x$, а если $a = 0$, то для любого $b$ подобрать $x$ невозможно. Поэтому рассматриваемое высказывание неверно. Записав его отрицание:

$$(\exists a \exists b \forall x) \quad ax + b \neq 0,$$

легко обеспечить требуемые условия: достаточно взять $a = 0$, $b \neq 0$.

Займемся высказыванием

$$(\forall a \forall b \exists x) \quad ax + b = 0.$$

Квантор «для любого» находится в высказывании, которое надлежит доказывать, если мы сочтем его верным, а это значит, что надо ориентироваться на какое-то значение $a$ и подбирать в зависимости от него значения $b$ и $x$ так, чтобы $ax + b = 0$. Пусть дано какое-то $a$. Естественно рассмотреть два случая. Пусть $a \neq 0$. Тогда есть возможность делить на $a$, поэтому независимо от $b$ можно подобрать требуемое $x$. Пусть $a = 0$. Тогда, взяв $b = 0$, получим, что равенство верно не только при некотором, но даже при любом $x$, так что высказывание верно и обосновано.

**Упражнения.**

**1.** Рассмотрим неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0. \tag{1}$$

Связать параметры $a, b, c$ кванторами всеми возможными способами и определить, при каких комбинация неравенство (1) имеет решения. Например, верно ли, что

$$(\forall a \forall b \forall c)\ (\exists x) \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

или

$$(\exists a \forall b \forall c)\ (\exists x) \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

и т. д.

**2.** Какие из выписанных ниже формулировок означают, что из $P$ следует $Q$:

(a) если выполнено $P$, то выполнено $Q$;
(b) если выполнено $Q$, то выполнено $P$;
(c) для выполнения $P$ необходимо выполнение $Q$;
(d) для выполнения $Q$ необходимо выполнение $P$;
(e) для выполнения $P$ достаточно выполнения $Q$;
(f) для выполнения $Q$ достаточно выполнения $P$;
(g) $P$ выполнено в том случае, если выполнено $Q$;
(h) $Q$ выполнено в том случае, если выполнено $P$;
(i) $P$ выполнено только в том случае, если выполнено $Q$;
(j) $Q$ выполнено только в том случае, если выполнено $P$;
(k) $P$ выполнено тогда, когда выполнено $Q$;

(l) $Q$ выполнено тогда, когда выполнено $P$;

(m) $P$ выполнено только тогда, когда выполнено $Q$;

(n) $Q$ выполнено только тогда, когда выполнено $P$.

(o) $P$ выполнено, если выполнено $Q$;

(p) $P$ выполнено, только если выполнено $Q$;

(q) $Q$ выполнено, только если выполнено $P$.

**3.** Ориентируясь на восприятие кванторов, разобраться в следующей ситуации:

(a) при каких значениях $a$ для любого $b$ найдется хотя бы одно $c$ такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx + y = ac^2, \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

(b) при каких значениях $a$ для любого $b$ найдется хотя бы одно $c$ такое, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + by = c^2, \\ bx + 2y = ac - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

## § II.3. Функции, основные методы исследования

**II.3.1. Нахождение области определения, множества значений функции, образа и прообраза множеств.** Область определения, видимо, первое, что надо изучить при общении с данной функцией. Для функции, заданной графически, т. е. предъявлением ее графика, метод нахождения области определения состоит в следующем. Встанем в точку $x$ оси абсцисс и проведем через нее вертикальную прямую. Если она пересечет график (кстати, в единственной точке), то такое $x$ входит в область определения функции $f$, если не пересечет — не входит. Двигаясь по оси абсцисс слева направо и при каждом $x$ проделывая указанную процедуру, мы можем увидеть, какую часть оси абсцисс занимает область определения (рис. 3.1($a$)).

Аналогично выявляется множество значений, но для этого мы должны взять точку $y$ оси ординат и провести через нее горизонтальную прямую. Если она пересечет график функции (возможно, в нескольких точках), то такое $y$ входит в множество значений, если не пересечет — не

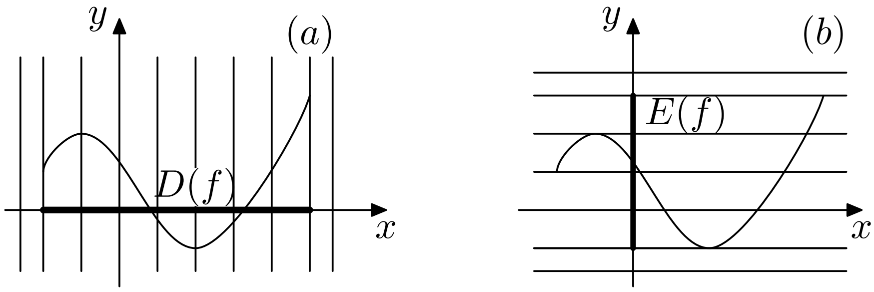



Рис. 3.1.

входит. Двигаясь по оси ординат снизу вверх и при каждом $y$ проделывая указанную процедуру, мы можем увидеть, какую часть оси ординат занимает множество значений (рис. 3.1($b$)).

Напомним области определения и множества значений основных элементарных функций, при этом аргумент и значения будем обозначать не традиционно используемыми для них буквами $x$, $y$, а какими-то другими, например $t$, $z$. Это сделано для того, чтобы в требования, предъявляемые к области определения и множеству значений той или иной функции, можно было на место аргумента или значения подставлять какие-то зависящие от другой переменной выражения и получать соотношения, характеризующие область определения и множество значений данной функции. Вся информация представлена в виде таблицы.

Начинать нахождение области определения функции лучше всего с вопроса «как устроена функция?» Это может быть сумма, или произведение конечного набора функций, или частное двух функций, или композиция (сложная функция). После ответа на этот вопрос можно приступать к нахождению области определения, пользуясь следующими фактами.

**1.** Сумма или произведение конечного набора функций определены на множестве тех чисел, для которых определены **все** слагаемые или сомножители, т. е. область определения суммы или произведения равна пересечению областей определения слагаемых или сомножителей.

Если функцию умножить на какое-то число, то ее область определения не изменится.

**2.** Частное двух функций определено для тех чисел, для которых определены числитель и знаменатель и при этом значения знаменателя отличны от нуля.

**3.** Композиция $g(f(x))$ функций $f$ (внутренняя функция) и $g$ (внешняя функция) определена на множестве таких значений аргумента $x$, для

**Таблица областей определения и множеств значений**

| $z = f(t)$ | требования к $D(f)$ | требования к $E(f)$ |
|---|---|---|
| $z = t^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ | нет | $z \geqslant 0$ |
| $z = t^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, | нет | нет |
| $z = \sqrt[2n]{t}$ | $t \geqslant 0$ | $z \geqslant 0$ |
| $z = \sqrt{t}$ | $t \geqslant 0$ | $z \geqslant 0$ |
| $z = \frac{1}{t}$ | $t \neq 0$ | $z \neq 0$ |
| $z = a^t$ | нет | $z > 0$ |
| $z = \log_a t$ | $t > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ | нет |
| $z = \sin t$ | нет | $-1 \leqslant z \leqslant 1$ |
| $z = \cos t$ | нет | $-1 \leqslant z \leqslant 1$ |
| $z = \operatorname{tg} t$ | $t \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ | нет |
| $z = \operatorname{ctg} t$ | $t \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ | нет |
| $z = \arcsin t$ | $-1 \leqslant t \leqslant 1$ | $-\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2$ |
| $z = \arccos t$ | $-1 \leqslant t \leqslant 1$ | $0 \leqslant z \leqslant \pi$ |
| $z = \operatorname{arctg} t$ | нет | $-\pi/2 < z < \pi/2$ |
| $z = \operatorname{arcctg} t$ | нет | $0 < z < \pi$ |

которых, во-первых, определена внутренняя функция $f$, а во-вторых, значения $f(x)$ принадлежат области определения внешней функции $g$. При нахождении области определения композиции достаточно записать в виде соотношений требование принадлежности значений $t = f(x)$ внутренней функции области определения внешней функции $g(t)$ и перейти к решению записанных соотношений (область определения внутренней функции учтется в ходе их решения).

При определении вида (устройства) функции надо выделить последнее действие, которое производится при нахождении ее значений. Если такое действие есть сложение, умножение или деление, то это сумма, произведение или частное двух функций; если же это нахождение значения какой-то из основных элементарных функций, то это композиция, в которой последней действует та функция, значения которой находятся на последнем шаге. После определения вида функции надо воспользоваться указанными выше фактами и перейти к изучению областей определения функций, из которых составлена данная функция.

Посмотрим на примерах, как работают описанные соображения.

**Пример 1.** Найдем область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2}.$$

Наша функция представляет собой сумму двух функций, так что для нахождения ее области определения надлежит найти области определения каждого из слагаемых и взять их пересечение.

Функция $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ устроена так, что последней при нахождении ее значений является операция взятия корня, т. е. мы имеем композицию, в которой последней действует функция «корень квадратный». Ее область определения порождает требование $x^2 - 4 \geqslant 0$. Аналогично область определения функции $f_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$ добавляет требование $9 - x^2 \geqslant 0$.

Нетрудно найти множества решений этих неравенств: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, $[-3, 3]$, и взять их пересечение: $[-3, -2] \cup [2, 3]$, в результате получаем область определения функции $f$.

**Пример 2.** Найдем область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{12 + x - x^2}}{x^2 - 9}.$$

Функция представляет собой частное двух функций, поэтому она определена там, где определены обе эти функции при добавлении требования отличия от нуля знаменателя. Ясно, что знаменатель определен всюду, а обращается в нуль при $x = 3$ или $x = -3$. Теперь надлежит найти область определения числителя и из нее удалить нули знаменателя (если, конечно, какой-то их них туда попадет).

Числитель представляет собой композицию, в которой последняя функция — это взятие корня квадратного. Функция определена там, где подкоренное выражение неотрицательно, т. е. область определения числителя характеризуется как множество решений неравенства $12 + x - x^2 \geqslant 0$. Легко установить, что это промежуток $[-3, 4]$. Для нахождения области определения всей дроби из этого промежутка надо удалить числа $-3$ и $3$ как нули знаменателя, в итоге получим множество $(-3, 3) \cup (3, 4]$.

**Пример 3.** Найдем область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - \sqrt{4x-1}).$$

Функция представляет собой композицию, в которой внешней (последней действующей) функцией служит логарифм, поэтому область определения функции $f$ будет находиться из условия положительности подлогарифмического выражения:

$$2x - \sqrt{4x-1} > 0, \tag{1}$$

и будет множеством решений неравенства (1). Найдем это множество, т. е. решим неравенство (1). Имеем

$$2x - \sqrt{4x-1} > 0 \Longleftrightarrow 2x > \sqrt{4x-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 4x - 1 \geqslant 0, \\ 4x^2 > 4x - 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4}, \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4}, \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [1/4, 1/2) \cup (1/2, +\infty).$$

**Пример 4.** Найдем область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}.$$

Функция является композицией функций, последней из которых действует функция извлечения квадратного корня, поэтому область определения всей функции будет находиться из требования неотрицательности подкоренного выражения, т. е. как множество решений неравенства $\log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+5} \geqslant 0$.

Решим это неравенство. Оно представляет собой логарифмическое неравенство, в котором логарифм с основанием, меньшим единицы, сравнивается с нулем. Имеем

$$\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x < -5, \\ x > 1, \end{array} \right. \\ x > -5 \end{cases} \Longleftrightarrow x > 1.$$

Перейдем к анализу множества значений. Есть разные средства нахождения множества значений функции. Отметим наиболее часто используемые.

**1.** Если функция $f$ монотонна и определена на промежутке с концами $a, b$, то множество значений представляет собой промежуток с концами $f(a), f(b)$, при этом включение концов промежутка для множества значений соответствует включению таковых для области определения.

**2.** Если $f$ устроена как сложная функция вида $f(x) = g(h(x))$, т. е. представляет собой композицию функций $h$ и $g$, и внешняя функция $g$ в композиции монотонна, то поиск множества значений функции $f$ можно свести к поиску множества $E$ значений функции $h(x)$ на области $D(f)$ определения функции $f$.

**3.** Если в ситуации п. 2 множество значений функции $h(x)$ представляет собой промежуток с концами $a$, $b$, то множеством значений функции $f$ будет промежуток с концами $g(a)$ и $g(b)$.

**4.** Если данная функция устроена как композиция нескольких функций, то можно, идя от множества значений внутренней функции и последовательно анализируя, как преобразуются множества значений, получаемые в результате применения очередной функции из композиции, дойти до множества значений исследуемой функции.

**5.** Можно попробовать искать множество значений функции $y = f(x)$ по определению, т. е. исследовать, при каких $y \in \mathbb{R}$ найдется такое $x \in D(f)$, что $y = f(x)$. Иными словами, считая $y$ буквенной постоянной (параметром), можно попробовать выяснить, при каких $y$ уравнение $y = f(x)$ относительно неизвестной $x \in D(f)$ имеет решение. Такие значения $y$ и составят множество значений функции.

**6.** В тех случаях, когда требуется найти множество значений функции, непрерывной на отрезке (т. е. ограниченном промежутке, включающем концы), можно, используя средства, связанные с производной, найти наибольшее и наименьшее значения функции. Множество значений будет заполнять промежуток от наименьшего до наибольшего значений.

**7.** В самых непростых случаях можно провести подробное исследование функции, из которого будет ясно, каково множество значений. Обращение к пожеланиям пп. 6, 7 отложим до развития соответствующей техники.

Поиск множества значений бывает полезен в тех случаях, когда от него зависит процесс решения какой-то задачи, связанной с данной функцией.

**Пример 5.** Найдем множество значений функции

$$f(x) = \log_2\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x\right).$$

Заметим, что мы имеем композицию нескольких функций. В отличие от процесса нахождения области определения здесь надо начинать с анализа внутренней функции, идя от ее множества значений, и продвигаться к множеству значений данной функции.

Первое действие, которому подвергается аргумент $x$, — это умножение на 2. Эта операция никак не влияет на множество значений: $x$ может быть любым и $2x$ тоже любое. Следующая функция cos принимает на своей области определения значения из промежутка $[-1, 1]$, т. е. $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$. Идем далее и умножаем все части этой системы неравенств на положительное число $1/8$, тогда

$$-\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{8}\cos 2x \leqslant \frac{1}{8}.$$

Следующее действие — прибавление числа $3/8$:

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \leqslant \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x \leqslant \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Наступило время действия последней функции, а именно логарифма по основанию 2. Эта функция возрастающая, а значит, ее применение сохранит имеющиеся неравенства:

$$\log_2\frac{1}{4} \leqslant \log_2\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x\right) \leqslant \log_2\frac{1}{2}, \Longleftrightarrow -2 \leqslant \log_2\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 2x\right) \leqslant -1.$$

Тем самым множеством значений будет промежуток $[-2, -1]$.

Можно было заметить, что наша функция представляет собой сложную функцию, в которой последней действует возрастающая функция $g(z) = \log_2 z$, поэтому можно было найти множество значений функции $h(x) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 2x$, заметить, что это промежуток $[1/4, 1/2]$, и заключить, что множеством значений функции $f$ будет промежуток с концами $\log_2(1/4)$ и $\log_2(1/2)$, т. е. промежуток $[-2, -1]$.

Если при анализе строения функции оказалось, что это не композиция, а, например, сумма, или произведение, или частное, то для нахождения множества значений могут потребоваться иные средства, такие как упрощающие задачу замены переменной или применение производной для исследования функции.

**Пример 6.** Найдем множество значений функции

$$f(x) = 2\cos 2x + 2\cos x + 1.$$

Функция представляет собой сумму нескольких функций. В этом случае проследить последовательно за формированием множества значений, как мы это сделали в случае композиции нескольких функций, не удастся. Придется обратиться к другим средствам.

Аргумент $x$ участвует в формировании значения функции только посредством выражения $\cos x$. Иначе говоря, $f(x) = g(h(x))$, где $h(x) = \cos x$, $g(z) = 4z^2 + 2z - 1$. Это говорит о том, что можно сделать замену, положив $\cos x = z$, при этом обязательно учитывая, что $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Задача при такой замене сводится к поиску множества значений квадратичной функции $g(z) = 4z^2 + 2z - 1$ на множестве $[-1, 1]$. Для этого надо найти значения функции $g$ на концах данного промежутка, т. е. в точках $-1$, $1$, а также в точке $z_v$, если она входит в промежуток $[-1, 1]$. Имеем $z_v = -1/4 \in [-1, 1]$, так что надо искать значения $g(-1)$, $g(1)$, $g(-1/4)$. Легко обнаружить, что $g(-1) = 1$, $g(1) = 5$, $g(-1/4) = -5/4$. Следовательно, множеством значений функции $g$ на $[-1, 1]$ является множество $[-5/4, 5]$.

**Пример 7.** Немного усложним задачу, составив композицию с участием функции из предыдущего примера. Найдем множество значений функции

$$h(x) = \sqrt{2\cos 2x + 2\cos x + 1}.$$

Воспользуемся результатом примера 6, а именно тем, что множество значений внутренней функции в композиции есть промежуток $[-5/4, 5]$. Ясно, что только эти значения могут остаться к тому моменту, когда надо находить значение внешней функции в композиции, т. е. квадратного корня. К некоторым из них может быть применена операция нахождения корня квадратного, и от них можно найти корень; к некоторым эта операция неприменима, так как они не входят в область определения корня. Значит, надо взять значения из промежутка $[-5/4, 5]$, принадлежащие области определения корня, а именно составляющие промежуток $[0,5]$, и узнать, какие значения принимает корень на этом множестве. Ввиду возрастания корня это будет множество $[0,\sqrt{5}]$, оно и является искомым множеством значений.

**Упражнения.**

**1.** Найти область определения следующих функций:

(1) $\lg(x-1)-\lg(x+1)$, (2) $\lg\dfrac{x-1}{x+1}$, (3) $\sqrt{\lg(1-x^2)}$,

(4) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, (5) $\sin\arcsin x$, (6) $\arcsin\sin x$,

(7) $\sqrt{(x-\log_2 3)(\log_3 4-x)}$, (8) $\log_{\sin x}\cos x$,

(9) $\sqrt{\log_{x+1}(x^2-3x+2)-1}$, (10) $\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}$.

**2.** Найти множество значений следующих функций:

(1) $\dfrac{x-1}{x^2+1}$, (2) $\sqrt{2+x-x^2}$, (3) $\lg(1-2\sin x)$,

(4) $\sin^2 x+3\cos x-4$, (5) $2\sin x+3\cos x$, (6) $2^{|\sin x|}$.

(7) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, (8) $\sin^4 x+\cos^4 x$,

(9) $\dfrac{1+x}{1-x}$, (10) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$,

(11) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, (12) $\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$.

**II.3.2. Образование новых функций: композиция, обратная функция.** Композиция двух функций формируется согласно определению. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$ (мы специально употребили букву $x$ для указания аргумента обеих функций для того, чтобы подчеркнуть существенность не буквы, а положения, которое она занимает). Для нахождения значения композиции $h(x)=g(f(x))$ надо на место аргумента функции $g$ подставить значение $f(x)$ функции $f$ и результатом будет значения композиции. Аналогичное можно о композиции $f(g(x))$.

**Пример 1.** Составим композиции функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\sqrt{x}$ и найдем их области определения и множества значений.

Для нахождения композиции $g(f(x))$ надо на место аргумента в функцию $\sqrt{x}$ подставить выражение $\sin x$, т. е. $g(f(x))=\sqrt{\sin x}$. Область определения этой композиции характеризуется неравенством $\sin x\geqslant 0$, выражающим требование принадлежности значений $\sin x$ области определения функции $t \mapsto \sqrt{t}$. Множество решений этого неравенства есть объединение всех промежутков вида $[-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$. Множеством значений служит промежуток $[0, 1]$.

Для другой композиции имеем $f(g(x)) = \sin\sqrt{x}$. ее область определения совпадает с областью определения корня квадратного и заполняет промежуток $[0, +\infty)$, а множеством значений является множество $[-1, 1]$ значений синуса.

Для выяснения обратимости функции $z = f(x)$ надо ответить на вопрос: при каких $z$ уравнение $z = f(x)$ относительно $x$ имеет единственное решение? Ответ можно получить, например, непосредственно выражая $x$ через $y$, если такая возможность имеется. Если ее нет, то надо использовать свойства, гарантирующие обратимость, например, монотонность. Пока ограничимся примерами, в которых монотонность можно не привлекать.

**Пример 2.** Исследуем обратимость функции $z = x + \dfrac{1}{x}$ на множестве $x > 0$ и найдем к ней обратную. Если функций не обратима, выясним, на каких частях области определения она обратима и найдем соответствующие обратные функции.

Будем выражать $x$ через $z$ и отвечать на вопрос: единственно ли такое выражение и если нет, то на каких множествах переменной $x$ есть единственность? Имеем

$$\begin{aligned} z = x + \frac{1}{x} &\iff x^2 - zx + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 = z^2 - 4, \end{aligned}$$

и ясно, что возможно выразить $x$ через $x$ есть при $z \geqslant 2$, при это для $x \in (0, 1]$ выражение будет таким:

$$x = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

а для $x \in [1, +\infty)$ — таким:

$$x = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

Получили, что обратимости на всем $(0, +\infty)$ нет, но на промежутках $(0, 1]$ и $[1, +\infty)$ есть, и соответствующие обратные, определенные на множестве $z \in [2, +\infty)$ имеют указанный выше вид.

**Упражнения.**

**1.** Для функций $f(x)$ и $g(x)$ составить композиции $f(g(x)$ и $g(f(x))$ и найти их области определения и множества значений:

$$(1)\ 1 - x^2,\ g(x) = \lg x, \qquad (2)\ \ln x,\ g(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

$$(3)\ \sqrt{1 - x^2},\ g(x) = 2^x, \qquad (4)\ \frac{1}{1-x},\ g(x) = 2^x.$$

**2.** Изучить обратимость следующих функций и найти обратные к ним. В случае отсутствия обратимости на всей области определения выделить области обратимости и найти соответствующие обратные функции.

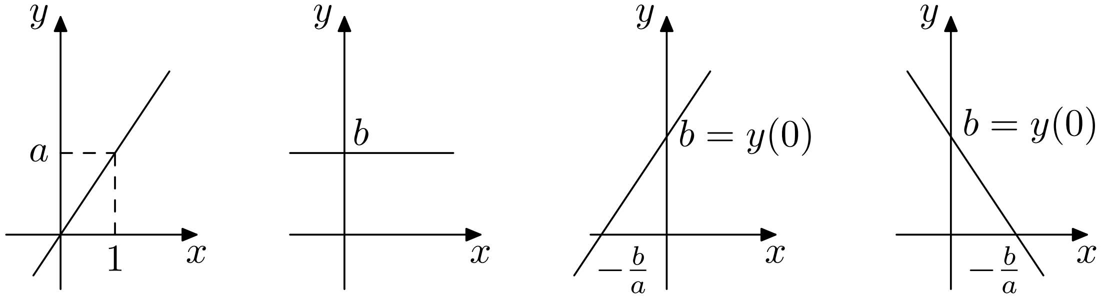
$$(1)\ \frac{x}{x+1}, \quad (2)\ x^2 + x,$$

$$(3)\ x - \frac{1}{x}, \quad (4)\ \frac{x}{x^2+1}.$$

## II.3.3. Графики элементарных функций.

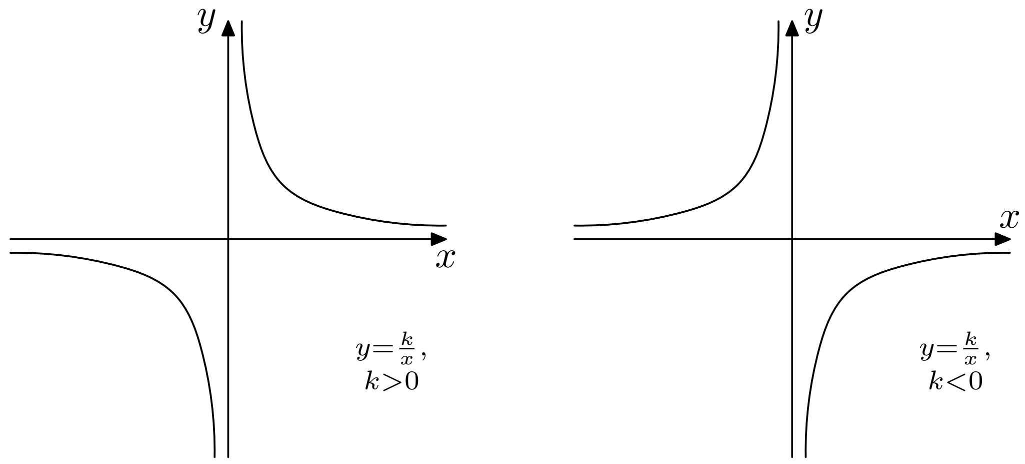
Напомним графики элементарных функций:

Линейная функция (вида $y = ax + b$ при разных вариантах $a$ и $b$):

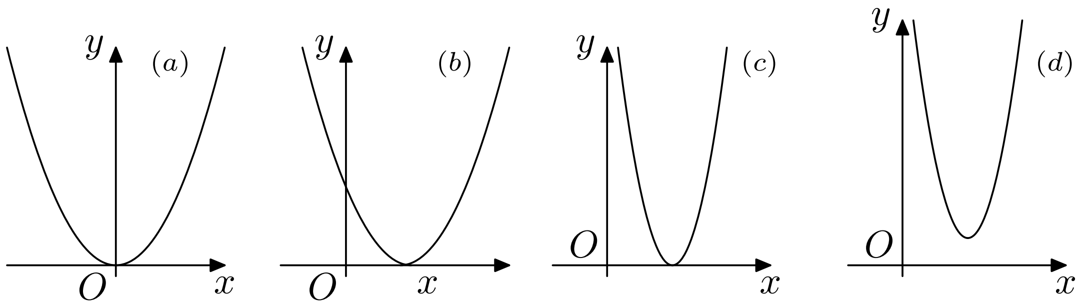



$a{>}0,\ b{=}0$ $\qquad$ $a{=}0,\ b{>}0$ $\qquad$ $a{>}0,\ b{>}0$ $\qquad$ $a{<}0,\ b{>}0$

Обратная пропорциональность:

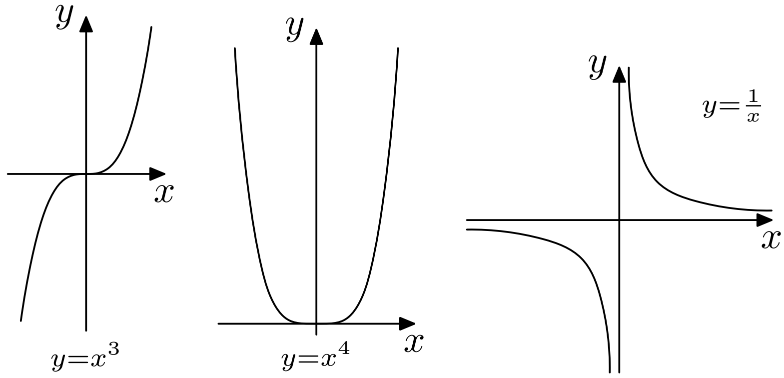



Квадратичная функция:



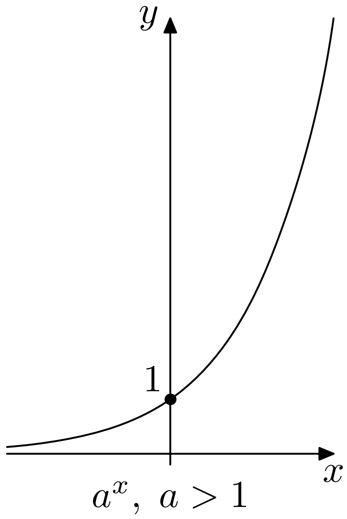

$y=x^2$ $\quad$ $y=(x-x_v)^2$, $x_v>0$ $\quad$ $y=2(x-x_v)^2$, $x_v>0$ $\quad$ $y=2(x-x_v)^2+y_v$, $x_v>0$, $y_v>0$

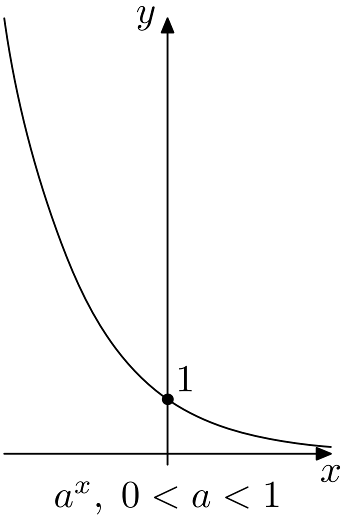
Степенная функция при некоторых показателях степени:



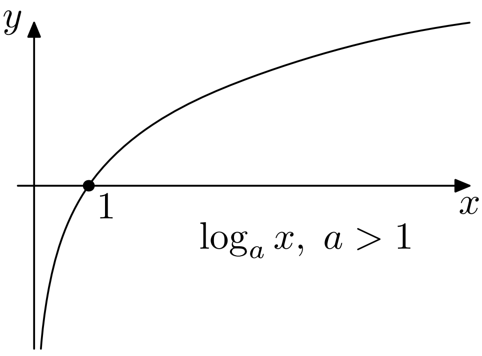

$y=x^3$ $\quad$ $y=x^4$

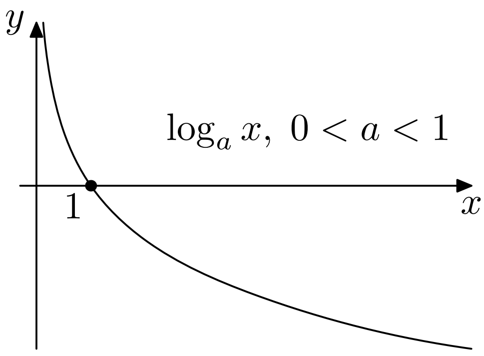
Показательная функция:



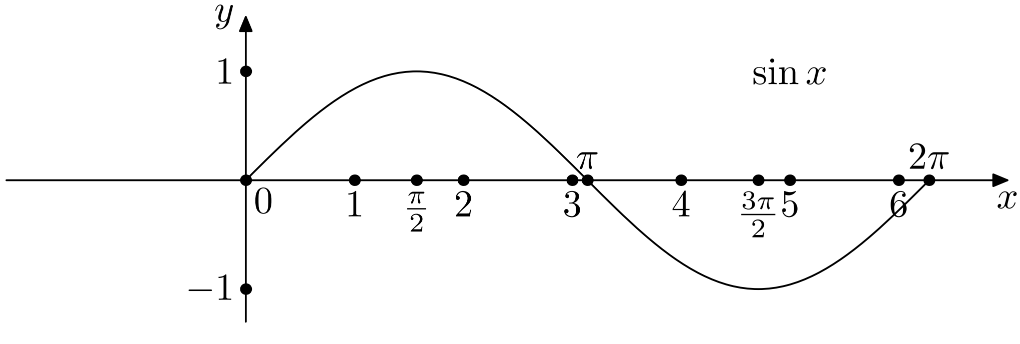



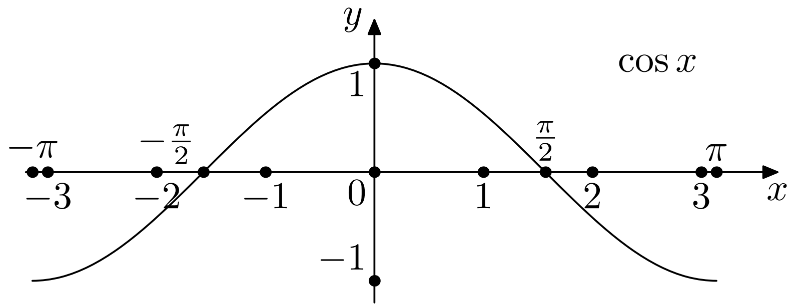

Логарифмическая функция:

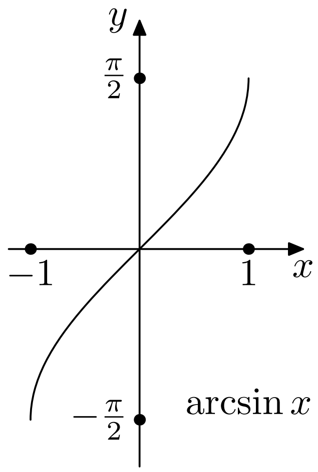


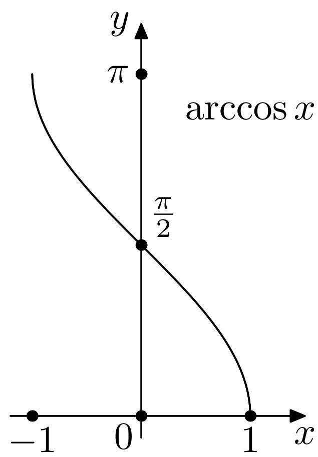



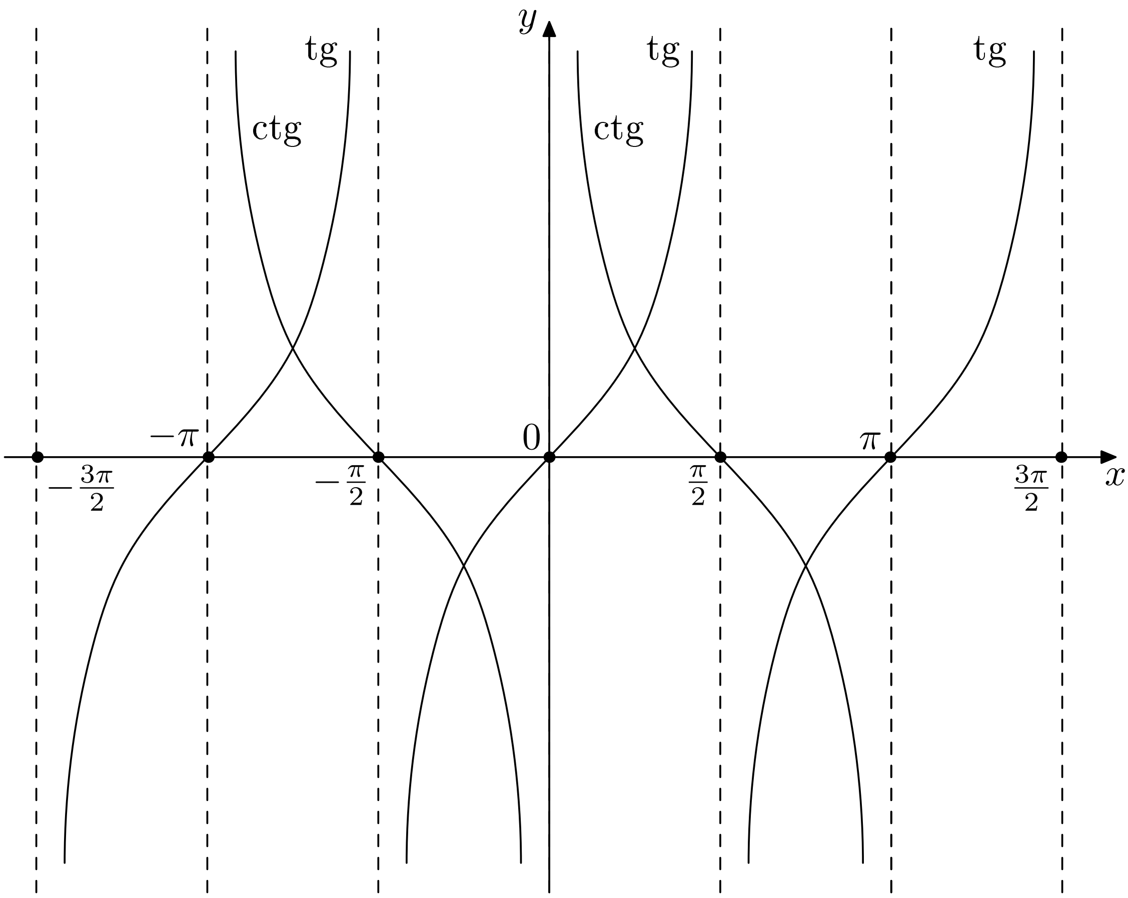

Тригонометрические функции:

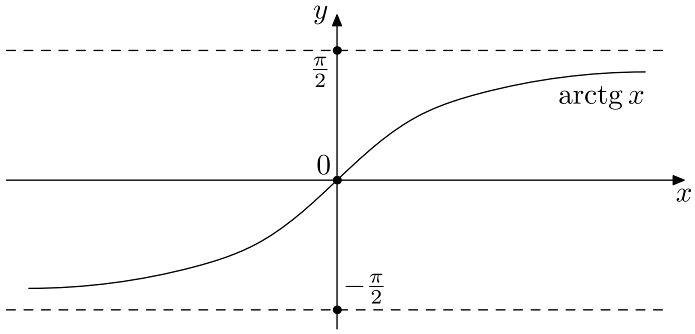


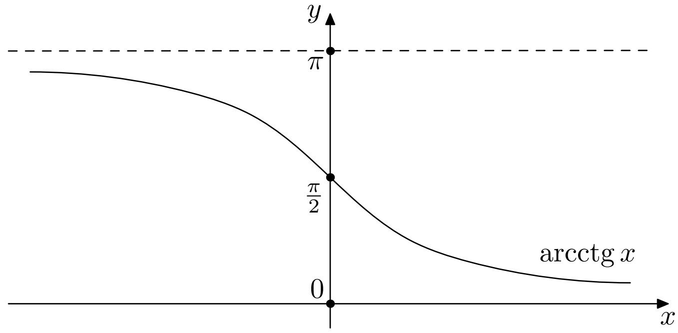

y
cos x
1
−π
−π/2
π/2
π
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1


y
π/2
−1
1
x
−π/2
arcsin x


y
π
arccos x
π/2
−1
0
1
x


y
tg
tg
tg
ctg
ctg
−π
0
π
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
x




**II.3.4. Исследование и использование четности и нечетности функции.** Наличие свойств четности или нечетности помогает упростить процедуру построения графика функции — для четной или нечетной функции график можно строить только для неотрицательных значений аргумента.

Если дан график функции и спрашивается, будет ли она четной (нечетной), то сначала надо обратить внимание на ее область определения, и если она не симметрична относительно нуля на оси абсцисс, то это функция общего вида, если же симметрична, то исследование можно продолжить и тогда следует обратиться к графику. Если он симметричен относительно оси ординат, то функция четная, если симметричен относительно начала координат, то нечетная. Кстати, график нечетной функции, определенной в нуле, всегда проходит через начало координат.

Если функция задана на промежутке, расположенном справа (слева) от нуля, то ее можно распространить на область, состоящую из данного промежутка в объединении с его образом при симметричном отражении относительно нуля. Если речь идет о функции, заданной графиком, то для получения графика нечетной функции данный график надо отразить симметрично относительно точки $(0,0)$, а если четной, то симметрично относительно оси ординат. Если же функция задана правилом $f$, то для распространения надо использовать определение и для $x<0$ полагать $f(x)=f(-x)$ для четной функции и $f(x)=-f(-x)$ для нечетной.

Указанные способы доопределения функции по четности или нечетности на отрицательную полуось легко показать геометрически, учитывая симметрию либо относительно оси ординат (для четной функции), либо относительно начала координат (для нечетной). Пусть функция $f$ определяется тем, что она нечетная и для неотрицательных значений аргумента $x$ из области ее определения совпадает с функций $g$ (заданной по крайней мере на каком-то множестве неотрицательных чисел). Возьмем отрицательное число $x$ и посмотрим, где брать значение функции $f$ в точке $x$. Естественно, среди значений функции $g$ на неотрицательных числах из области ее определения. Отразим $x$ относительно нуля, т. е. возьмем число $-x$ (рис. 3.2($a$)). Оно положительно, и функция $f$ при таком значении аргумента определена, а именно $f(-x) = g(-x)$ (рис. 3.2($b$)). Теперь определим значение $f$ в точке $x$ так, чтобы полученная функция была нечетной. Для этого согласно определению надо положить $f(x) = -f(-x) = -g(-x)$ (рис. 3.2($c$)).

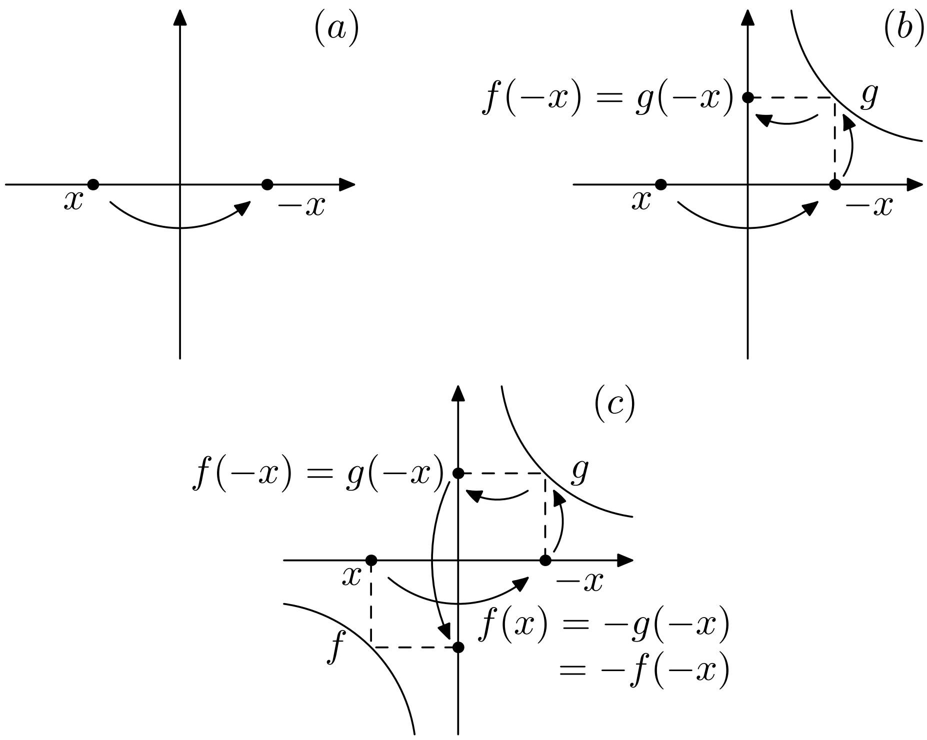



Рис. 1.3.

Аналогичными действиями можно распространить заданную на части положительной полуоси функцию до четной функции.

Если функция задана формулой, то при изучении четности или нечетности функции $f$ на место аргумента $x \in D(f)$ подставляют значение $-x$, и совершают упрощающие действия. Если при этом получается $f(x)$, то функция четная, если $-f(x)$, то — нечетная. Если хотя бы при одном $x \in D(f)$ либо $-x$ не входит в область определения функции $f$, либо не выполнено равенство $f(-x) = f(x)$ (или $f(-x) = -f(x)$), то функция свойством четности (соответственно нечетности) не обладает.

Нетрудно заметить, что если в композиции $h(x) = g(f(x))$ внутренняя функция $f$ четная, то $h$ тоже четная. Ясно также, что если $f$ и $g$ нечетные, то $h$ нечетная.

**Пример 1.** Определим функцию sgn, называемую *знак числа* (читается «сигнум»), полагая

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, это эта функция нечетная.

**Пример 2.** Является ли четной или нечетной функция $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$?

Сначала исследуем, верно ли, что с каждый элементом $x$ из области определения данной функции противоположный ему элемент $-x$ также входит в область определения. Функция $f$ определена на множестве $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, стало быть, число $-1$ лежит в области ее определения, тогда как 1 — нет. Функция общего вида.

Заметим, что при $x \neq 1$ будет $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$.

**Упражнения.**

**1.** Исследовать, какие из следующих функций обладают свойствами четности, а какие общего вида:

(1) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, (2) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$,
(3) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, (4) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$,
(5) $f(x) = \sin\arccos x$, (6) $f(x) = \arccos\sin x$,
(7) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$, (8) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$,
(9) $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$, (10) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x+1}$,

(11) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}=\sqrt{1-x+x^2}$,  (12) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

**II.3.5. Монотонность. Экстремумы.** Возрастание или убывание — одни из наиболее часто отмечаемых свойств функции. Как правило, свойство монотонности функции проявляется на каких-то промежутках. Функция, не являющаяся монотонной на всем рассматриваемом множестве, может обладать свойствами монотонности на промежутках, содержащихся в этом множестве. Так, функция на рис. 3.3($a$) возрастает на каждом из промежутков $[a,x_1]$ и $[x_2,b]$ и убывает на промежутке $[x_1,x_2]$, а функция на рис. 3.3($b$) убывает на каждом из промежутков $[-1,0)$ и $(0,1]$ (но не монотонна на их объединении).

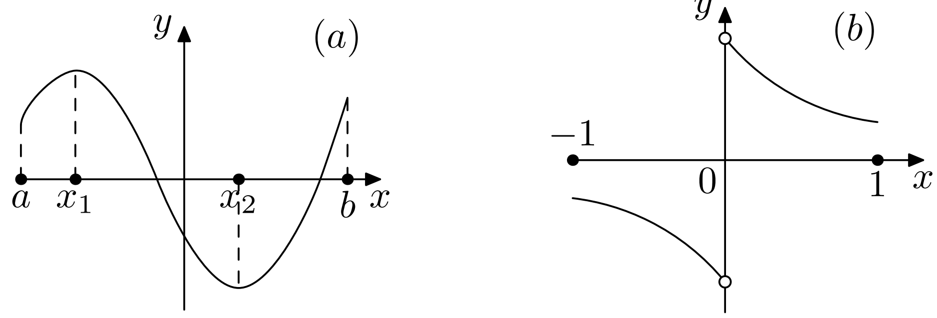



Рис. 3.3.

Если дан график функции и поставлен вопрос: указать (найти) промежутки, на которых функция возрастает (или убывает), то требуется указать промежутки **на оси абсцисс** (а не фрагменты графика функции!), на которых есть указанное свойство. Двигаясь по оси абсцисс слева направо (т. е. в положительном направлении оси), констатируем, что происходит с функцией в процессе возрастания аргумента. Если график уходит вверх, то функция возрастает, а если вниз — убывает, и так до тех пор, пока не прекратится процесс возрастания или убывания. Как только возрастание или убывание прекращается, так сразу заканчивается промежуток соответствующей монотонности. Например, на рис. 3.4 промежутками возрастания будут $[a,x_1]$, $[x_2,x_3]$ и $[x_4,b]$, а промежутками убывания — $[x_1,x_2]$ и $[x_3,x_4]$.

**Наблюдение 1.** *Пусть $f$ представляет собой сложную функцию (композицию), составленную из функций $g$ и $h$, т. е.*

$$f(x)=h(g(x)).$$

1. *Пусть функция $h$ возрастает. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $I\subset D(f)$ в том и только в том случае, если $g(x)$ возрастает*

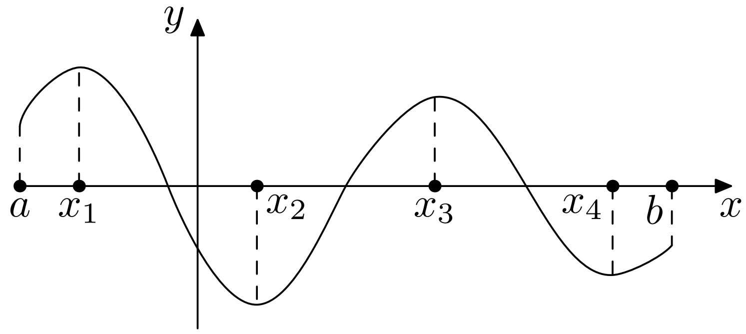



Рис. 3.4.

*(убывает) на этом промежутке. Точка $x_0$ является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$ в том и только в том случае, если она является точкой максимума (минимума) функции $g(x)$.*

2. *Пусть функция $h$ убывает. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $I \subset D(f)$ в том и только в том случае, если $g(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке. Точка $x_0$ является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$ в том и только в том случае, если она является точкой минимума (максимума) функции $g(x)$.*

Иными словами, возрастание внешней функции $h$ в композиции $h(g(x))$ сохраняет монотонность и вид экстремума внутренней функции $g(x)$, а ее убывание меняет тип монотонности и экстремума внутренней функции на противоположный.

Полезность наблюдения 1 состоит в том, что при изучении монотонности и точек экстремума $f$ можно перейти к исследованию монотонности и точек экстремума функции $g$ (внутренней функции в композиции) без учета функции $h$ (внешней функции в композиции), если $h$ монотонна. Однако надо понимать, что так мы можем найти только **промежутки** монотонности и **точки** экстремума, сами значения функции $f$ в точках экстремума надо искать, подставляя найденные точки экстремума в функцию $f$ и находя ее значения в таких точках.

Поскольку для элементарных функций промежутки их монотонности хорошо известны, наблюдение 1 оказывается весьма эффективным, ибо нередко изучаемая функция устроена как композиция, в которой в качестве внешней участвует функция с известными свойствами монотонности.

**Пример 1.** Возьмем какие-либо несложные функции, составим из них композиции и посмотрим, как можно исследовать промежутки монотонности и точки экстремума композиций.

Начнем с совсем простой ситуации, например, рассмотрим функцию $g(x) = (x+1)(3-x)$. Это квадратичная функция, она отрицательна на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, положительна на промежутке $(-1, 3)$, на $(-\infty, 1]$ она возрастает, на $[1, +\infty)$ убывает, у нее в точке $x = 1$ наблюдается максимум, который будет также ее наибольшим значением, при этом $f(1) = 4$.

Теперь составим композицию этой функции с корнем квадратным, т. е. обратимся к функции $f(x) = h(g(x))$, где $h(z) = \sqrt{z}$. Получается функция $f(x) = \sqrt{(x+1)(3-x)}$. Она определена там, где подкоренное выражение неотрицательно, т. е. на отрезке $[-1, 3]$. Поскольку $h$, внешняя функция в композиции, возрастает, композиция $f$ окажется монотонной там, где монотонна внутренняя функция $g(x) = (x+1)(3-x)$, с сохранением типа монотонности, т. е. на множестве $[-1, 1]$ функция $f$ возрастает, а на $[1, 3]$ убывает. При $x = 1$ у нее максимум (возрастание при переходе через эту точку сменяется убыванием), при этом значение в точке максимума будет уже не 4, а $f(1) = \sqrt{4} = 2$.

**Пример 2.** Рассмотрим композицию функций из примера 13, взятую в обратном порядке, т. е. функцию

$$\varphi(x) = g(h(x)) = (\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x}).$$

Она определена при $x \geqslant 0$. Ввиду возрастания внутренней функции $h(x) = \sqrt{x}$ на всей области определения $x \geqslant 0$ составная функция $\varphi$ возрастает там, где возрастает функция $g$, т. е. на множестве $[0, 1]$, и убывает на множестве $[1, +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой максимума, при этом значение $f$ в ней равно 4.

Напомним, что *последовательностью* называют функцию, определенную на множестве натуральных чисел. Для краткости значение $x(n)$ функции $x$ на номере $n$ обозначают через $x_n$, при этом если $n$ берется не из всего $\mathbb{N}$, то добавляют указание области изменения $n$, например, так: $x_n$, $n = 3, 4, \ldots$.

Можно заметить, что возрастание последовательности равносильно тому, что $x_{n+1} > x_n$ а убывание — тому, что $x_{n+1} < x_n$ для любого натурального $n$.

**Упражнения.**

**1.** Найти промежутки монотонности следующих функций:
(1) $y = x^2 - 4x + 3$, (2) $y = x^2 - 4|x| + 3$,

(3) $y = x + \dfrac{1}{x}$, (4) $y = x - \dfrac{1}{x}$,
(5) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, (6) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$,
(7) $y = 2^{-\sin x}$, (8) $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$,
(9) $y = \log_{1/2}(x^2+x+1)$, (10) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.

**2.** Доказать, что следующие функции немонотонны:
(1) $y = x^4 - x^2$, (2) $y = x^3 - x$,
(3) $y = \arcsin \sin x$, (4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

**3.** Исследовать на монотонность последовательности. Если они не монотонны, изучить, существует ли номер, начиная с которого они монотонны:
(1) $x_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$, (2) $x_n = \dfrac{n^2+5}{n+1}$,
(3) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, (4) $\sqrt{n^2+n} - n$,
(5) $3^n - 2^n$, (6) $\dfrac{2^n}{n}$.
**2.** Доказать немонотонность последовательностей:
(1) $x_n = (-1)^n$, (2) $x_n = n + (-1)^n$,
(3) $x_n = \sin n$, (4) $x_n = \sin \dfrac{\pi n}{4}$.

**II.3.6. Исследование и использование периодичности функции.** Простейшие задачи, связанные с использованием периодичности, обычно решаются на основе определения без привлечения логических ходов, и мы рассмотрим несколько примеров таких задач. Затем обратимся к традиционно более сложно проводимому исследованию периодичности.

**Пример 1.** Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3, 5]$.

Начнем с того, что функция задана только на отрезке длиной 3, а период ее равен 6. Если не добиться задания функции на отрезке длиной 6, то по периодичности ее распространить на всю числовую прямую не удастся. Так что сначала обеспечим задание функции на отрезке длиной 6. Поскольку $h$ четна и задана на $[0, 3]$, она с учетом четности определена и на отрезке $[-3, 3]$, а именно, если $x \in [0, 3]$, то $h(x) = x^2 - 4x + 1$, а если $x \in [-3, 0]$ и тем самым $-x \in [0, 3]$, то

$$h(x) = h(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1.$$

Итак, задание функции на промежутке длиной 6 состоялось.

Для удобства обозначим через $f$ функцию, полученную из построенной на $[-3, 3]$ функции $h$ путем распространения на $\mathbb{R}$ по периодичности. Периодичность, в частности, обеспечит повторяемость на всех промежутках длиной периода нулей функции $f$, выявленных на промежутке $[-3, 3]$. Поэтому для ответа на поставленный вопрос надо тщательно проанализировать, сколько нулей у функции $f$ на $[-3, 3]$ и как они на этом промежутке расположены.

У первоначальной функции $h(x) = x^2 - 4x + 1$ нулей всего два, а именно $2 \pm \sqrt{3}$, из которых только $2 - \sqrt{3}$ принадлежит промежутку $[0, 3]$ и тем самым будет участвовать в дальнейших рассмотрениях. Насколько точно нам надо знать расположение этой точки, покажет анализ того, что надо найти. А найти надо количество нулей функции $f$ на промежутке $[-3, 5]$. С нулями на части $[-3, 3]$ промежутка $[-3, 5]$ все ясно — там их два, один из которых $2 - \sqrt{3}$ появился от исходной функции, а другой расположен симметрично ему относительно нуля координатной оси (и равен, если это интересно, $-2 + \sqrt{3}$). Остается понять, есть ли нули у $f$ на оставшейся части $(3, 5]$. Функция $f$ периодична с периодом, равным 6, а значит, ее значения на $(3, 5]$ повторят значения на промежутке $(-3, -1]$ (полученном из промежутка $(3, 5]$ сдвигом влево на 6). Тем самым если на $(-3, -1]$ был нуль функции $f$, то нуль будет и на $(3, 5]$. Ясно, что число $2 - \sqrt{3}$, которое положительно, принимать во внимание не надо. Вопрос стал таким: точка $-2 + \sqrt{3}$ будет лежать в промежутке $(-3, -1]$ или нет, т. е. верны ли неравенства $-3 < -2 + \sqrt{3} \leqslant -1$? Левое неравенство, очевидно, верно. Для проверки правого запишем цепочку равносильных утверждений, и если в конце придем к верному, то исходное было верным, если к неверному, то — неверным:

$$-2 + \sqrt{3} \leqslant -1 \iff \sqrt{3} \leqslant 1 \iff 3 \leqslant 1,$$

что неверно. Таким образом, точка $-2 + \sqrt{3}$ в промежутке $(3, 5]$ не повторится. В итоге нулей у функции $f$ на $[-3, 5]$ два.

Более трудны задачи, в которых предлагается доказать периодичность, найти наименьший положительный период или обосновать непериодичность функции. Дело в том, что в определении периодичности заложена логическая структура, содержащая два требования: «существует» и «для любого». В этой ситуации если при исследовании периодичности не удается применить какое-то несложное соображение и приходится опираться на определение, то возникают некоторые трудности.

Как правило, в конкретных ситуациях наличие или отсутствие периодичности просматривается из каких-то простых общих соображений. Так, если область определения не удовлетворяет условиям, предъявляемым к области определения периодической функции, например, нет возможности повторяться каким-то элементам из области определения или область определения ограничена хотя бы с одной стороны, то о периодичности можно не вспоминать. Периодичность тригонометрических функций известна, и обычно если рассматриваемая функция создана с использованием тригонометрических функций, то о периодичности можно подозревать и зачастую она есть. Если же простых соображений для исследования периодичности недостаточно, то надо привлекать что-то дополнительное, а это может оказаться не совсем простым делом.

**Пример 2.** Докажем непериодичность функции $\sin x^2$.

Простые средства, приводящие к отсутствию периодичности этой функции, не срабатывают — определена она на множестве всех действительных чисел, в ее формировании участвует периодическая функция и, мало ли, вдруг и эта окажется периодической. Рассмотрим ее положительные нули, т. е. найдем положительные корни уравнения $\sin x^2 = 0$. Это такие числа $x$, что $x^2 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Выражая отсюда $x$ через $n$, получаем последовательность

$$x_n = \sqrt{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0,$$

идущих подряд положительных нулей функции $\sin x^2$. Докажем, что она убывающая. Действительно, рассмотрим разность $x_k - x_{k-1}$ и представим ее в виде

$$x_k - x_{k-1} = \sqrt{\pi k} - \sqrt{\pi(k-1)} = \frac{(\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)})(\sqrt{\pi k} - \sqrt{\pi(k-1)})}{\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ будет

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{\sqrt{\pi(n+1)} + \sqrt{\pi n}} < \frac{\pi}{\sqrt{\pi n} + \sqrt{\pi(n-1)}} = x_n - x_{n-1},$$

так что последовательность расстояний между соседними нулями функции $\sin x^2$ убывает, а значит, функция непериодическая.

Для обоснования периодичности могут быть полезными соображения, о которых сообщается ниже.

При проверке периодичности согласно определению надо сначала понять, какое число может быть периодом, а затем доказать, что это действительно период. Для подбора претендента на период можно воспользоваться необходимыми условиями или, иначе говоря, переходом к следствию. Можно рассуждать так. Если $f$ периодична и $T > 0$ — ее период, то для любого $x \in D(f)$ должны выполняться указанные в определении свойства, в частности равенство $f(x+T) = f(x)$. Если они должны выполняться для любого $x \in D(f)$, то они выполняются и для каждого конкретного $x$. Взяв какое-либо значение $x_0$, приходим к выводу, что тогда должно быть $f(x_0+T) = f(x_0)$. Тем самым получаем уравнение относительно $T$, среди корней которого должен находиться период (разумеется, если он есть). Что дает такое рассуждение? Оно позволяет ограничиться рассмотрением, возможно, небольшого набора претендентов на значение периода. Действительно, перефразируем утверждение «если $T$ — период, то $f(x_0+T) = f(x_0)$», заменив его равносильным «если $T$ не удовлетворяет равенству $f(x_0+T) = f(x_0)$, то это не период». Следовательно, период надо искать только среди корней уравнения $f(x_0+T) = f(x_0)$, и успех во многом зависит от того, насколько эффективно можно это уравнение решить и насколько небольшой набор корней получится. Если набор небольшой, то путем последовательного перебора элементов этого набора (начиная с наименьшего положительного в сторону возрастания) есть шанс наткнуться на период, если таковой существует.

**Упражнения.**

Исследовать периодичность следующих функций и в случае периодичности найти наименьший положительный период:

**(1)** $|\cos^3 x|$, **(2)** $2\sin x + \cos x$, **(3)** $\sqrt{\sin 3x}$, **(4)** $x \sin x$,
**(5)** $\arcsin \sin x$, **(6)** $\sin |x|$, **(7)** $x + \sin x$, **(8)**$^*$ $\sin x + \sin \pi x$.

**II.3.7. Ограниченность и неограниченность функции.** Приведем несколько рекомендаций по установлению указанных свойств.

Ограниченность. Будем вести речь об ограниченности сверху, для ограниченности снизу и с обеих сторон рассуждения аналогичны.

Для доказательства ограниченности сверху функции $f(x)$ на множестве $X$ требуется обосновать существование такого числа $C$, что для любого $x \in X$ выполнено $f(x) \leqslant C$. Гарантию наличия верхней границы можно получить на основе свойств множества значений элементарных функций. Например, если $f(x) = h(g(x))$ и $h$ ограничена сверху, то независимо от функции $g$ композиция $h(g(x))$ ограничена сверху (на соответствующем множестве).

Можно прибегнуть к такому рассуждению. Попробуем ограничить сверху функцию $f(x)$ более простой функцией, для которой требуемую верхнюю границу можно получить из каких-то соображений. Если не удается это сделать сразу, то можно новую, ограничивающую сверху функцию, в свою очередь также ограничить сверху более простой функцией, для которой больше шансов подобрать границу, и так далее до тех пор, пока не появится реальная возможность установить верхнюю границу очередной функции. Если такая возможность появилась, верхняя граница последней функции будет верхней границей исходной.

Можно записать требуемое неравенство $f(x) \leqslant C$ и, намечая действовать по определению, озаботиться тем, есть ли такие $C$, при которых это неравенство выполнено для всех $x$ из данного множества $X$.

Есть и другие средства изучения ограниченности, но они связаны с техникой, которую предстоит освоить в дальнейшем, поэтому здесь на применении такой техники останавливаться не будем.

Неограниченность. Здесь ситуация совсем иная по сравнению с ограниченностью. Судя по тому, что первым в определении неограниченности стоит квантор общности, при обосновании неограниченности (сверху) нам предстоит, ориентируясь на неизвестное нам число $C$, пытаться сформировать правило поиска элемента $x \in X$ такого, что $f(x) > C$. Здесь полезно ограничивать $f(x)$ снизу чем-то более простым, но все еще большим, т. е. таким выражением, для которого есть надежда подобрать требуемое число $x$. Разумеется, при этом надо использовать всю имеющуюся информацию о неограниченности элементарных функций.

**Пример 1.** Докажем ограниченность сверху функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.

Начнем рассуждать, например, так. Чтобы ограничить дробь сверху (числитель по условию неотрицателен), можно ограничить знаменатель снизу и взять такую функцию, где числитель остается прежним, а в знаменателе стоит оценка исходного знаменателя снизу. Ясно, что $x^2+1 \geqslant 1$, поэтому

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant x, \quad x \geqslant 0.$$

Мы ограничили сверху нашу функцию другой функцией, ясно проще зависящей от $x$. Теперь бы ограничить полученную функцию сверху, но, судя по ее виду, нам это сделать не удастся — мы можем брать сколь угодно большие значения $x$, так что подобрать постоянную не удастся. Можно ли сделать вывод о том, что и наша функция не ограниченная? Нет, можно лишь сделать вывод о том, что предложенный нами путь не привел к успеху. Выходит, рассуждения были слишком простыми, а предложенная оценка слишком грубой.

Посмотрим, в каком месте числовой прямой могут возникнуть проблемы с ограниченностью и по какой причине? Ясно, что проблемы могут быть в связи с возрастанием числителя. Однако и знаменатель при этом также будет возрастать, причем более быстрыми темпами. Уберем эффект возрастания числителя, считая $x > 0$ (это не отразится на доказательстве ограниченности сверху — ведь при $x = 0$ вся дробь равна нулю). Для этого разделим числитель и знаменатель на $x$:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1/x}.$$

Теперь числитель ограничен (более того, там стоит постоянная). Можно ли ограничить знаменатель снизу и чем? Воспользуемся известной оценкой

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

для $x > 0$. Заменяя знаменатель меньшей величиной, можно утверждать, что

$$\frac{1}{x+1/x} \leqslant \frac{1}{2} \text{ для любого } x > 0,$$

и доказательство ограниченности закончено — мы нашли постоянную, обеспечивающую оценку из определения ограниченности сверху для любого $x \geqslant 0$.

Можно рассудить иначе. Заметим, что если $x \in [0,1]$, то, последовательно ограничивая числитель сверху, а знаменатель снизу, имеем

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1.$$

Если же $x > 1$, то, ограничивая знаменатель снизу, мы ограничиваем всю дробь сверху, т. е. удаление единицы в знаменателе дает оценку

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

что не больше единицы при рассматриваемых $x$. Таким образом, при любом $x \geqslant 0$ имеем $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 1$.

**Пример 2.** Докажем ограниченность функции

$$\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Как и в предыдущем примере, здесь дробь, числитель которой на этот раз ограничен. Заменив стоящую в числителе функцию (отметив положительность знаменателя) ее оценкой сверху, т. е. использовав неравенство $|\sin x| \leqslant 1$, мы всю дробь не уменьшим:

$$\left|\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right| \leqslant \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

и если нам удастся подобрать постоянную, ограничивающую функцию $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то эта постоянная будет ограничивать и исходную функцию. Для последней функции подобрать такую постоянную легко, заменив знаменатель величиной, меньшей его при всех (допустимых) $x$:

$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x} \leqslant 2, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Постоянная 2 будет границей и первоначальной функции.

**Пример 3.** Докажем ограниченность функции $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

Рассудим, например, так. Надо подобрать такое $C$, что

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C$$

для любого $x \in \mathbb{R}$ (заметим, что функция определена всюду). Начнем выражать $x$ через $C$, т. е. решать неравенство с параметром $C$, и анализировать, есть ли такие $C$, при которых множество решений этого неравенства совпадает с $\mathbb{R}$. Имеем

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C \Longleftrightarrow x^2+x+1 \leqslant C(x^2+1) \Longleftrightarrow (C-1)x^2 - x + C - 1 \geqslant 0.$$

Для выполнения этого неравенства при любом $x$ надо, во-первых, взять $C > 1$, а во-вторых, обеспечить отрицательность дискриминанта квадратичной функции в левой части неравенства, т. е. неравенство $4(C-1)^2 > 1$, что имеет место например при $C = 2$. Таким образом, гарантируется, что $f(x) \leqslant 2$, тем самым функция ограничена сверху. Ограниченность снизу очевидна хотя бы потому, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Обоснование ограниченности функции $f$ можно свести к ограниченности функции из примера 1, если представить функцию в виде

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+1}.$$

**Пример 4.** Докажем ограниченность функции $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ на множестве $[1, +\infty)$.

Воспользуемся мелкой хитростью, а именно умножим и одновременно разделим выражение $x - \sqrt{x^2-1}$ на $x + \sqrt{x^2-1}$:

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

Уменьшим знаменатель, удалив из него неотрицательное слагаемое $\sqrt{x^2-1}$. Этим действием мы увеличим дробь, т. е.

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$$

на заданном множестве $[1, +\infty)$. Остается заметить, что $f(x) \geqslant 0$, так что $f$ ограничена снизу.

**Пример 5.** Докажем ограниченность функции $f(x) = 2^{\sin x}$.

Функция $f$ представляет собой композицию, в которой последней действует возрастающая функция $h : z \mapsto 2^z$, стало быть, если есть верхняя и нижняя границы для внутренней функции $\sin x$, то их образы при действии $h$ будут соответственно верхней и нижней границей функции $f$. Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, имеем $2^{-1} \leqslant 2^{\sin x} \leqslant 2$, так что $f$ ограничена.

**Пример 6.** Докажем неограниченность функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Доказательство утверждений, в которых для произвольной величины что-то требуется установить, лучше начинать словами «пусть дано (произвольное) ... », где на место многоточия ставится обозначение заранее задаваемой произвольной величины. Так как в определении неограниченности для обозначения произвольно выбираемого числа мы использовали букву $C$, с нее и начнем обоснование неограниченности сверху функции $\operatorname{ctg} x$. Итак, пусть дано произвольное $C$. Требуется выработать правило поиска значения $x$ из области определения котангенса такого, что $\operatorname{ctg} x > C$. Для этого будем ограничивать нашу функцию снизу (в отличие от доказательства ограниченности, где уместнее было ограничивать сверху) чем-то более простым, но оставляющим надежды на возможность нахождения требуемого $x$. Воспользуемся определением котангенса: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, и заметим, что большие положительные значения надо искать там, где знаменатель близок к нулю, а числитель отделен от нуля и они оба положительны. Так будет, например, вблизи нуля, где числитель близок к нулю, а знаменатель к единице. Стремясь ограничить котангенс снизу, ограничимся рассмотрением таких значений $x$, на которых, допустим, $\cos x \geqslant 1/2$, т. е. промежутком $(0, \pi/3]$. На этом промежутке $\operatorname{ctg} x \geqslant \dfrac{1}{2\sin x}$. Продолжим оценивать снизу. Переменная осталась только в знаменателе, и если ограничить его сверху, то при положительном числителе дробь ограничится снизу. Воспользуемся известным для положительных $x$ неравенством $\sin x < x$, учитывая которое получаем

$$\operatorname{ctg} x \geqslant \frac{1}{2\sin x} > \frac{1}{2x}.$$

Последнее выражение достаточно простое, чтобы, записав для заданного $C$ неравенство $\dfrac{1}{2x} > C$, найти хотя бы одно его решение. В качестве искомого $x$ можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $x < \dfrac{1}{2C}$. Правило выбора по заданному $C$ требуемого $x$ сформировано, стало быть, неограниченность сверху котангенса доказана.

Нетрудно доказать и его неограниченность снизу.

**Пример 7.** Докажем неограниченность функции $f(x) = x\cos x$.

Будем доказывать неограниченность сверху. Начнем с традиционного «пусть дано произвольное $C$». Теперь посмотрим на функцию и задумаемся, за счет какого ее фрагмента и в какой части области определения есть шанс найти требуемое $x$? Ясно, что множитель $\cos x$ ограничен, так что от него лучше бы избавиться, а вот множитель $x$ может дать желаемое значение $x$. Ограничить снизу все произведение затруднительно — функция $\cos x$ устроена так, что она периодически возвращается к значению 0.

Поэтому надо брать такие значения $x$, на которых $\cos x \neq 0$, лучше всего такие значения, на которых $\cos x = 1$. Это числа вида $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если брать только такие $x$, то тогда

$$f(x) = f(2\pi n) = 2\pi n,$$

и вопрос встал такой: для произвольного $C$ подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$2\pi n > C.$$

Решая это неравенство относительно $n$, находим, что можно взять любое целое $n$, удовлетворяющее неравенству

$$n > \frac{C}{2\pi}.$$

Например, можно взять $n = [C/(2\pi)]+1$, где квадратные скобки означают целую часть (взятие целой части дает натуральное число, которое может быть меньше чем $n$, но ненамного, и добавление 1 приведет уже к целому числу, обладающему требуемым свойством).

Правило выбора требуемого $x$ по заданному $C$ сформировано, и этим неограниченность функции $f$ доказана.

Мы доказали неограниченность функции $x\cos x$ сверху, ясно, что она будет и неограниченной снизу.

**Пример 8.** Докажем ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Запишем сумму подробно, без применения символа суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)},$$

и обратим внимание на легко проверяемое равенство $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Применим его к каждому из слагаемых в сумме:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

Ограниченность сверху доказана, ограниченность снизу очевидна, так как все члены последовательности положительны.

**Пример 9.** Докажем ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Обратим внимание на то, что

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},$$

и остается воспользоваться результатом предыдущего примера.

**Упражнения.**

**1.** Доказать ограниченность следующих функций:

(1) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$, (2) $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(x+1)}{1 + x^2}$,

(3) $2^{lg(1-x^2)}$, (4) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

**2.** Выяснить, ограничены ли следующие функции:

(1) $x - \sqrt{x-1}$, (2) $|x+1| - |x|$,

(3) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, (4) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 1}$.

**2.** Доказать ограниченность последовательностей

(1) $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$, (2) $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n - 1}$,

(3) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, (4) $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$,

(5) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$, (6) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

(7)* $x_n = \sqrt[n]{n}$, (8)* $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

**3.** Доказать неограниченность функций и последовательностей

(1) $f(x) = x \sin x$, (2) $f(x) = 1/\cos x$,

(3) $x_n = n + (-1)^n n$, (4) $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$,
(5)* $x_n = \dfrac{2^n}{n^2}$, (6)* $x_n = \dfrac{a^n}{n}$, $a > 1$.

## § II.4. Построение графиков на основе исследования простейших свойств функции

Для определенности и единообразия будем проводить исследование функции и последующее построение графика путем выполнения пожеланий пунктов следующего ниже перечня, хотя в каких-то ситуациях, возможно, от этого перечня будем отклоняться. Все процедуры, требуемые для выполнения пожеланий каждого из пунктов, подробно описаны выше.

**II.4.1. Перечень действий для исследования функции в целях построения ее графика.**

**1.** Найти область определения.

**2.** Исследовать особенности функции, упрощающие построение графика, а именно установить, будет ли она четной, нечетной, периодической.

**3.** Найти нули функции или установить их отсутствие, указать промежутки ее знакопостоянства.

**4.** Изучить поведение функции на концах области определения и характер ее обращения в нуль.

**5.** Исследовать монотонность и экстремумы.

**II.4.2. Примеры.** Покажем, как работает предложенный перечень на примерах несложно задаваемых функций. Оказывается, что и в простых ситуациях могут быть неожиданности. Постараемся ограничиваться элементарными средствами, не предполагающими использование производной, но и пренебрегать совсем этим техническим средством не будем, так что при острой необходимости привлечем и производную.

**Пример 1.** Построим график функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Функция определена при всех действительных $x$. Она непериодическая, например потому, что значение 1 она принимает единственный раз, при $x = 0$. Функция четна:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду четности дальнейшее изучение пройдет для $x \geqslant 0$.

На множестве $[0, +\infty)$ функция $x^2 + 1$, стоящая в знаменателе, при увеличении $x$ неограниченно возрастает, следовательно, наша функция убывает и неограниченно приближается к нулю. Тем самым на правом конце области определения, при далеких положительных $x$ ее график будет прижиматься к оси абсцисс и выглядеть так, как показано на рис. 4.1($a$).

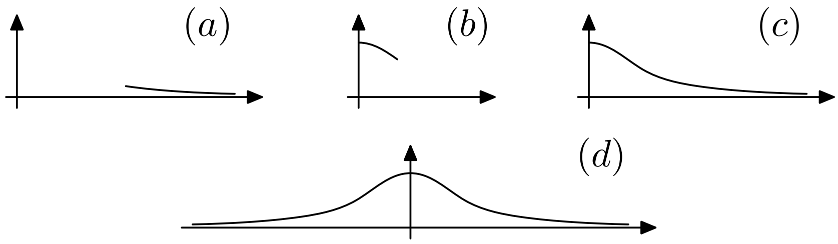



Рис. 4.1.

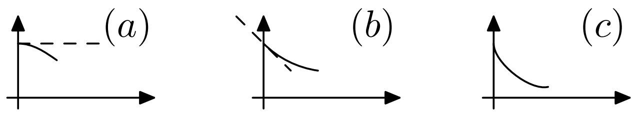



Рис. 4.2.

На другом конце рассматриваемого множества, т. е. при $x = 0$, она равна 1. Однако приблизиться к единице она могла разными способами — с горизонтальной, наклонной или вертикальной касательной, т. е. одним из указанных на рис. 4.2 способов. Обычно такое исследование проводится с помощью производной, однако в нашем случае можно обойтись и без нее. Обратим внимание на то, что выражение $\dfrac{1}{x^2+1}$ для $|x| < 1$ равно сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-x^2$:

$$\frac{1}{x^2 + 1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots .$$

Поскольку нас интересует, как будет выглядеть график около нуля оси абсцисс, естественно считать $x$ малыми, близкими к 0. А тогда значения

$x^4$, $x^6$ и т. д. существенно меньше, чем $x^2$, значит, если «пожертвовать» этими малыми по сравнению с $x^2$ слагаемыми, то можно считать, что наша функция близка к функции $1 - x^2$, вид которой около нуля известен. Вместе с тем нетрудно понять, что $f(x) > 1 - x^2$ и $f(x) \leqslant 1$. Тем самым график нашей функции будет между графиками функций $y = 1 - x^2$ и $y = 1$ и вид его показан на рис. 4.1($b$). Изображая рис. 4.1($a$) и 4.1($b$) на одной координатной плоскости, получим эскиз графика функции $f$ для положительных $x$ (рис. 4.1($c$)) а распространив картинку по четности на всю числовую прямую, придем к эскизу всего графика функции (рис. 4.1($d$)).

По-видимому, у нее будет меняться направление выпуклости, но это можно исследовать, привлекая вторую производную, что в наши планы пока не входит.

**Пример 2.** Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Отличие функции этого примера от функции предыдущего лишь в том, что здесь в знаменателе стоит знак минус, тогда как там — плюс. Однако различия в свойствах функций и их графиках существенны.

Функция определена на всем множестве $\mathbb{R}$, кроме точек $-1$ и $1$. Она четная и непериодическая, так что изучать ее можно лишь на множестве неотрицательных действительных чисел.

Функция не обращается в нуль, и неравенство $\dfrac{1}{x^2 - 1} > 0$ выполнено на множестве $|x| > 1$, т. е. на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. На оставшемся множестве $(-1, 1)$ она отрицательна.

Изучим поведение функции на концах области определения. При увеличении $x$ знаменатель возрастает и неограниченно увеличивается, так что функция, убывая, приближается к нулю. Это отражено на рис. 4.3($a$). Если аргумент приближается к значению 1, оставаясь справа от этой точки, то знаменатель приближается к нулю, а график функции, положительной справа от 1, неограниченно приближается к вертикальной прямой $x = 1$ справа (рис. 4.3($b$)). Если подходить к 1 слева, то приближение знаменателя к нулю останется, а знак изменится, стало быть, значения функции около 1 слева будут большими по абсолютной величине, но отрицательными, а ее график «прильнет» к вертикальной прямой $x = 1$ слева, как показано на рис. 4.3($c$).

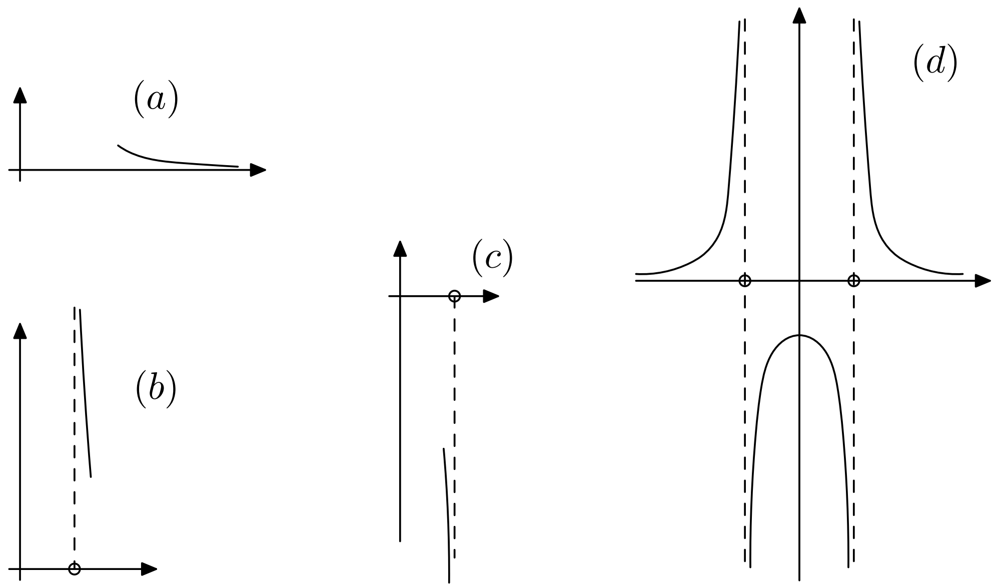



Рис. 4.3.

Осталось, по существу, понять, как выглядит функция около точки $x = 0$. Аналогично предыдущему можно сказать, что

$$\frac{1}{x^2-1} = -1 - x^2 - x^4 - \ldots,$$

и, пренебрегая сравнительно малыми величинами $x^4, \ldots$, можно написать приближенное равенство $\dfrac{1}{x^2-1} \approx -x^2 - 1$, а вид этой функции около нуля известен. Осталось, соединив информацию рис. 4.3($a$)–($c$) и приняв во внимание четность функции, изобразить график самой функции (рис. 4.3($d$)).

**Пример 3.** Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Данная функция определена на множестве $|x| \geqslant 1$, т. е. на множестве $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Функция четная, так что при ее исследовании можно ограничиться множеством $[1, +\infty)$. Функция обращается в нуль в точках $\pm 1$ и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Если $x$ неограниченно возрастает, то при больших значениях $x$ вычитание единицы практически незаметно, так что при таких $x$ функция будет близка к функции $y = \sqrt{x^2} = x$, оставаясь меньше функции $y = x$. Это наблюдение говорит о том, что при далеких $x$ график нашей функции будет «прижиматься» к графику функции $y = x$ снизу так, как показано на рис. 4.4($a$).

Будем теперь приближаться к точке 1 (естественно, справа). Как узнать характер входа в нуль функции $f(x)$? Можно найти ее производную, а можно пока обойтись и простыми наблюдениями. Представим

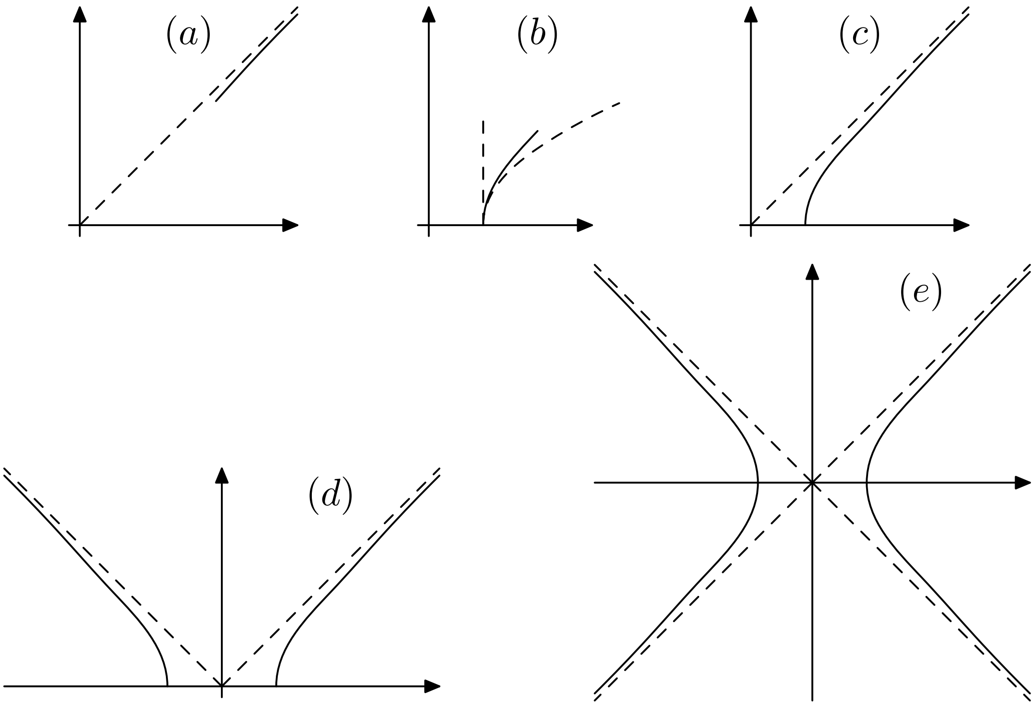



Рис. 4.4.

функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ и заметим, что из двух сомножителей под корнем один обращается в нуль, а другой нет, поэтому характер обращения функции в нуль будет определяться только одним из этих сомножителей, а именно $x - 1$, второй множитель (под корнем) будет примерно равен 2. Поэтому около точки $x = 1$ можно написать, что $f(x) \approx \sqrt{2(x-1)}$, а вид этой функции понятен — это сдвинутый и немного растянутый по оси $Oy$ корень квадратный (рис. 4.4($b$)). Наша функция будет немного больше функции $\sqrt{2(x-1)}$. Вспомнив, что функция возрастает на $[1, +\infty)$, и соединив фрагменты графика, изображенные на рис. 4.4($a$),($b$), получим эскиз графика функции при положительных $x$ (рис. 4.4($c$)). График всей функции получится из построенной части распространением по четности, т. е. симметрией относительно оси ординат (рис. 4.4($d$)).

Кстати, можно заметить, что это части гиперболы, но не той, которую мы привыкли видеть как график функции $y = \dfrac{1}{x}$, а повернутой по часовой стрелке на угол $\pi/4$ (рис. 4.4($e$)).

**Пример 4.** Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Функция определена на всем $\mathbb{R}$. Она четная, поэтому можно исследовать ее при $x \geqslant 0$. В нуль она не обращается и на промежутке $[0, +\infty)$

возрастает.

При далеких положительных $x$ влиянием единицы под корнем можно пренебречь, так что получим $\sqrt{x^2+1} \approx x$, но $\sqrt{x^2+1} > x$. Тем самым график нашей функции будет «приклеиваться» сверху к графику функции $y = x$ при далеких $x$ (рис. 4.5($a$)).

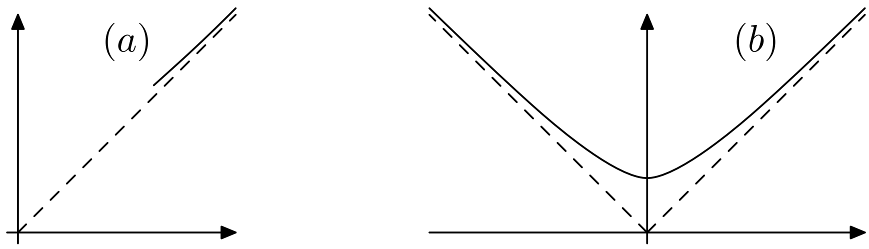



Рис. 4.5.

Ее поведение вблизи точки $x = 0$ исследовать без привлечения производной затруднительно, так что найдем производную:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Видим, что она равна нулю при $x = 0$, значит, у графика горизонтальная касательная. Ясно, что в точке $x = 0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного 1. Это позволяет изобразить эскиз графика при положительных $x$ и затем, распространив его с учетом свойства четности, получить на рис. 4.5($b$) график всей функции. Кстати, и на этот раз мы получили гиперболу, но только повернутую по сравнению с привычной на угол $\pi/4$ против часовой стрелки.

**Пример 5.** Построим график функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Функция определена на промежутке $[-1, 1]$. Она четная и, разумеется, непериодическая. Будем приближаться слева к правому концу ее области определения, т. е. к точке $x = 1$. Представив функцию в виде $f(x) = \sqrt{(1+x)(1-x)}$, как и в примере 3, находим, что около единицы можно написать $f(x) \approx \sqrt{2(1-x)}$, и выходит, что функция обращается в нуль при $x = 1$ так, как показано на рис. 4.6($a$), т. е. касаясь вертикальной прямой $x = 1$.

Ясно, что наибольшее значение, равное 1, функция примет при $x = 0$. Чтобы понять, с какой касательной это произойдет, найдем производную:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

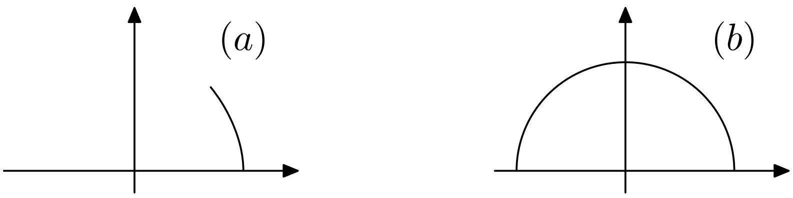



Рис. 4.6.

В точке $x = 0$ она обращается в нуль, значит, касательная в этой точке горизонтальна, и получается, что график, скорее всего, выглядит так, как изображено на рис. 4.6($b$).

Кстати, если возвести в квадрат обе части равенства $y = \sqrt{1 - x^2}$ и учесть ограничения на $y$, то получим, что график нашей функции — это множество, описываемое следующим образом:

$$\{(x, y) : y = \sqrt{1 - x^2}\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0\},$$

а это верхняя часть единичной окружности с центром в начале координат.

**Пример 6.** Построим график функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная как сумма двух нечетных функций. Функция непериодическая хотя бы потому, что в области ее определения нет всего одного числа, а именно нуля.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Она положительна во всех точках этого множества. Если $x$ становится большим, то слагаемое $1/x$ в определяющей функцию формуле становится малым и тем самым на величину значения $f(x)$ окажет малое влияние. Иначе говоря, при больших $x$ имеем $f(x) \approx x$ и $f(x) > x$. Это наблюдение на рисунке выглядит как «прилипание» графика функции $f$ сверху к графику функции $y = x$ при далеких положительных значениях $x$ (рис. 4.7($a$)). Пусть теперь $x$ приближается к нулю. Тогда из двух слагаемых $x$ и $1/x$ основной вклад в величину значения функции внесет $1/x$, так что при малых положительных $x$ имеем $f(x) \approx 1/x$ и при этом $f(x) > 1/x$. Это выглядит так, как изображено на рис. 4.7($b$).

Из рис. 4.7($a$), ($b$) ясно, что где-то при $x > 0$ будет минимум функции. Его легко найти с помощью производной, но мы ради того, чтобы воспользоваться некоторым простым полезным техническим средством, сделаем это иначе. Представляя слагаемые $x$ и $1/x$ как квадраты каких-

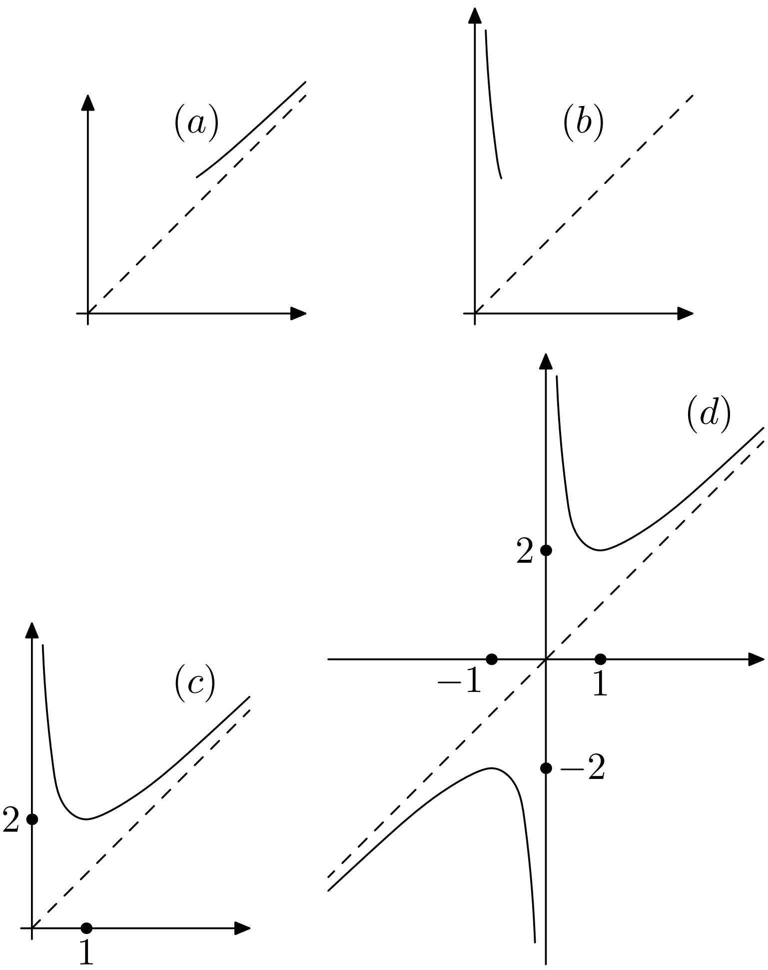



Рис. 4.7.

то величин, выделим в функции полный квадрат и оценим ее снизу:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Поскольку при этом $f(1) = 2$, становится понятно, что 2 — наименьшее значение функции, достигаемое при $x = 1$. На промежутке $(0, 1]$ функция убывает, на $[1, +\infty)$ — возрастает (что можно обосновать с помощью производной). График функции на положительной полуоси изображен на рис. 4.7($c$), а весь график — на рис. 4.7($d$).

**Пример 7.** Построим график функции $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная и непериодическая.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. На этом множестве она обращается в нуль при $x = 1$. Далее, $f(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(x) < 0$ при $0 < x < 1$.

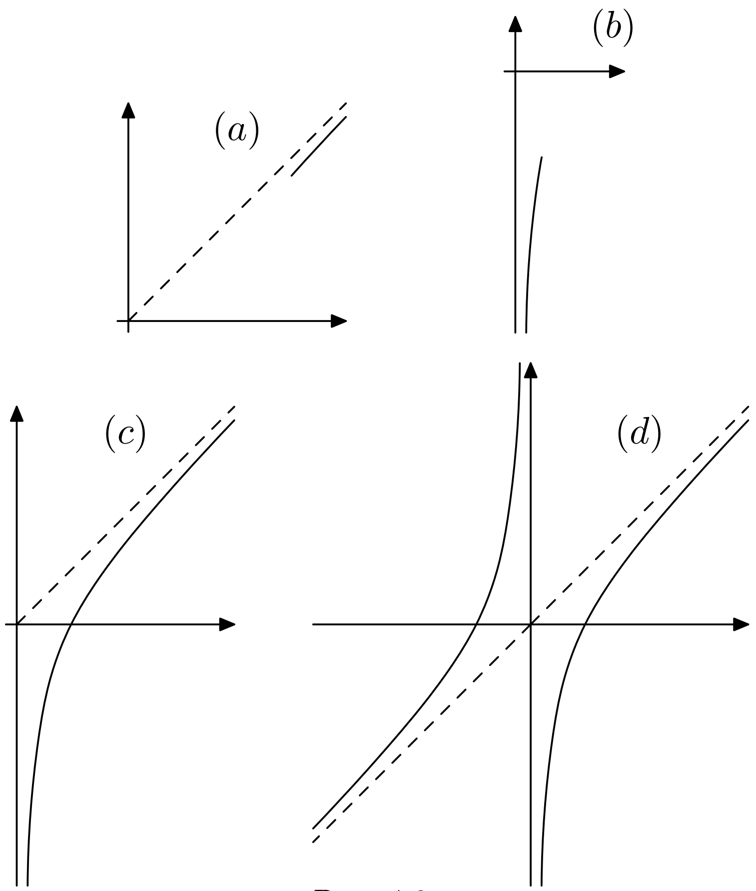


Рис. 4.8.

Если $x$ становится большим, то часть $-1/x$ в задающей функцию формуле становится малой, отсюда $f(x) \approx x$, $f(x) < x$ для далеких положительных $x$ и фрагмент ее графика при таких $x$ изображен на рис. 4.8($a$). Если же $x$ приближается к нулю, то $f(x) \approx -1/x$ и $f(x) > -1/x$. Соответствующий фрагмент графика дан на рис. 4.8($b$).

Функция $f$ возрастает на $(0, +\infty)$ как сумма возрастающих функций $x$ и $-\dfrac{1}{x}$.

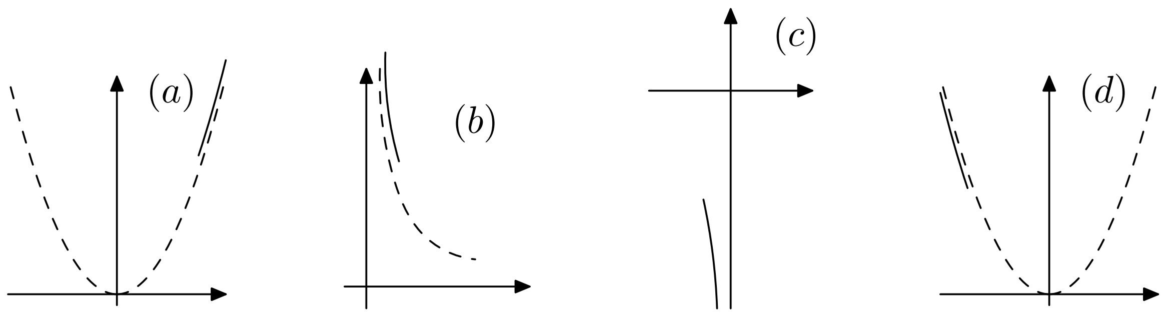
Соединяя полученные ранее детали графика, изобразим его часть, соответствующую положительным значениям аргумента (рис. 4.8($c$)). Весь график получится из этого распространением по нечетности, т. е. отражением относительно начала координат (рис. 4.8($d$)).

**Пример 8.** Построим график функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она общего вида, т. е. не обладает свойствами четности, нечетности, периодичности. Поэтому изучать ее надлежит на всей области определения.

Решая уравнение $f(x) = 0$, легко найти его единственный корень $x =$

$-1$. Решая неравенство $f(x) > 0$, получаем, что функция положительна на множестве $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ и отрицательна на $(-1, 0)$.



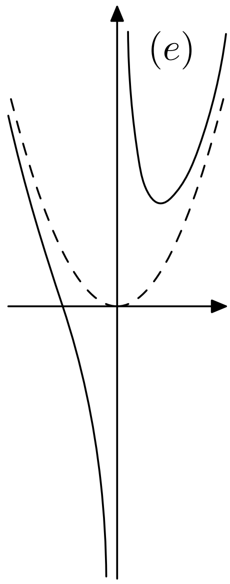




Рис. 4.9.

Изучим ее поведение на концах области определения. Если $x$ далекое положительное, то $f(x) \approx x^2$ и $f(x) > x^2$ для таких $x$, тем самым можем отметить соответствующий фрагмент ее графика (рис. 4.9($a$)). Если $x$ приближается к нулю справа, т. е. оставаясь положительным, то часть $x^2$ пренебрежимо мала (по сравнению с $1/x$), поэтому $f(x) \approx 1/x$ и $f(x) > 1/x$ (рис. 4.9($b$)). Если теперь $x$ по-прежнему близкое к нулю, но слева от него, т. е. отрицательное, то аналогично предыдущему $f(x) \approx 1/x$ и $f(x) > 1/x$ (рис. 4.9($c$)). Наконец, если $x$ оказывается большим по абсолютной величине и отрицательным, то $f(x) \approx x^2$ и $f(x) < x^2$ (рис. 4.9($d$)).

В принципе уже ясно, как будет выглядеть график всей функции, и мы можем нарисовать его эскиз (рис. 4.9($e$)). Однако для уточнения, в какой точке будет минимум, можно обратиться к производной: $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$. Ясно, что $f(x) = 0$ при $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$, причем слева от $x_0$ для значений $x$, близких к $x_0$, будет $f'(x) < 0$, а справа — $f'(x) > 0$. Изменение знака производной с минуса на плюс при переходе через точку $x_0$ говорит о том, что это точка минимума. Можно найти значение функции в этой точке: $f(x_0) \approx 1.89$.

**Пример 9.** Построим график функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Функция определена на множестве $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Она нечетная и непериодическая. Изучим ее на множестве $\{x \in D(f) : x \geqslant 0\}$.

Решая уравнение $f(x) = 0$, легко найти его единственный корень $x = 0$. Решая неравенство $f(x) > 0$, получаем, что среди $x \geqslant 0$ функция положительна на множестве $(1, +\infty)$ и отрицательна на $(0, 1)$.

Изучим ее поведение на концах области определения. Если $x$ далекое положительное, то вычитание единицы в знаменателе не окажет существенного влияния на значения функции, так что $f(x) \approx 1/x$, $f(x) > 1/x$ для таких $x$ и мы можем отметить соответствующий фрагмент ее графика (рис. 4.10($a$)). Если $x$ приближается к 1 справа, т. е. остается большим чем 1, то числитель близок к 1, а в знаменателе $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ часть $x - 1$ близка к нулю, а $x + 1 \approx 2$. Кроме того, знаменатель положителен, следовательно, вся дробь оказывается большой положительной, стало быть, ее график «прилипает» справа к вертикальной прямой $x = 1$ (рис. 4.10($b$)). Если $x$ переходит через точку 1 и остается близкой к 1, то, рассуждая, как и выше, получаем соответствующий фрагмент графика (рис. 4.10($c$)). Наконец, при $x$, близких к 0, знаменатель близок к $-1$, поэтому можно понять, как функция входит в нуль: $f(x) \approx -x$ при малых $x$, т. е. можно изобразить деталь графика около нуля справа (рис. 4.10($d$)).

Уже понятен вид графика всей функции, и мы может нарисовать его эскиз (рис. 4.10($e$)). Однако, чтобы иметь гарантии отсутствия точек экстремума и подтверждения свойств монотонности, найдем производную и используем ее для исследования: $f'(x) = -\dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$. Находим, что $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$. Но было бы большой неосмотрительностью делать отсюда вывод, что функция убывает на области определения, — это просто неверно. Можно лишь утверждать, что она убывает на каждом из промежутков, составляющих область определения, и это свойство вполне согласуется с нашим эскизом графика (рис. 4.10($f$)).

**Пример 10.** Построим график функции $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Функция определена на всем $\mathbb{R}$. Она нечетная, стало быть, достаточно построить ее график на множестве $x \geqslant 0$ и затем отразить его симметрично относительно начала координат. Функция, очевидно, непериодическая.

Ясно, что $f(x) = 0$ только при $x = 0$. При $x > 0$ будет $f(x) > 0$.

Изучим, как ведет себя функция при неограниченном возрастании аргумента. При больших значениях $x$ прибавление единицы в знаменателе окажет пренебрежимо малое влияние на ее значения, тем самым при

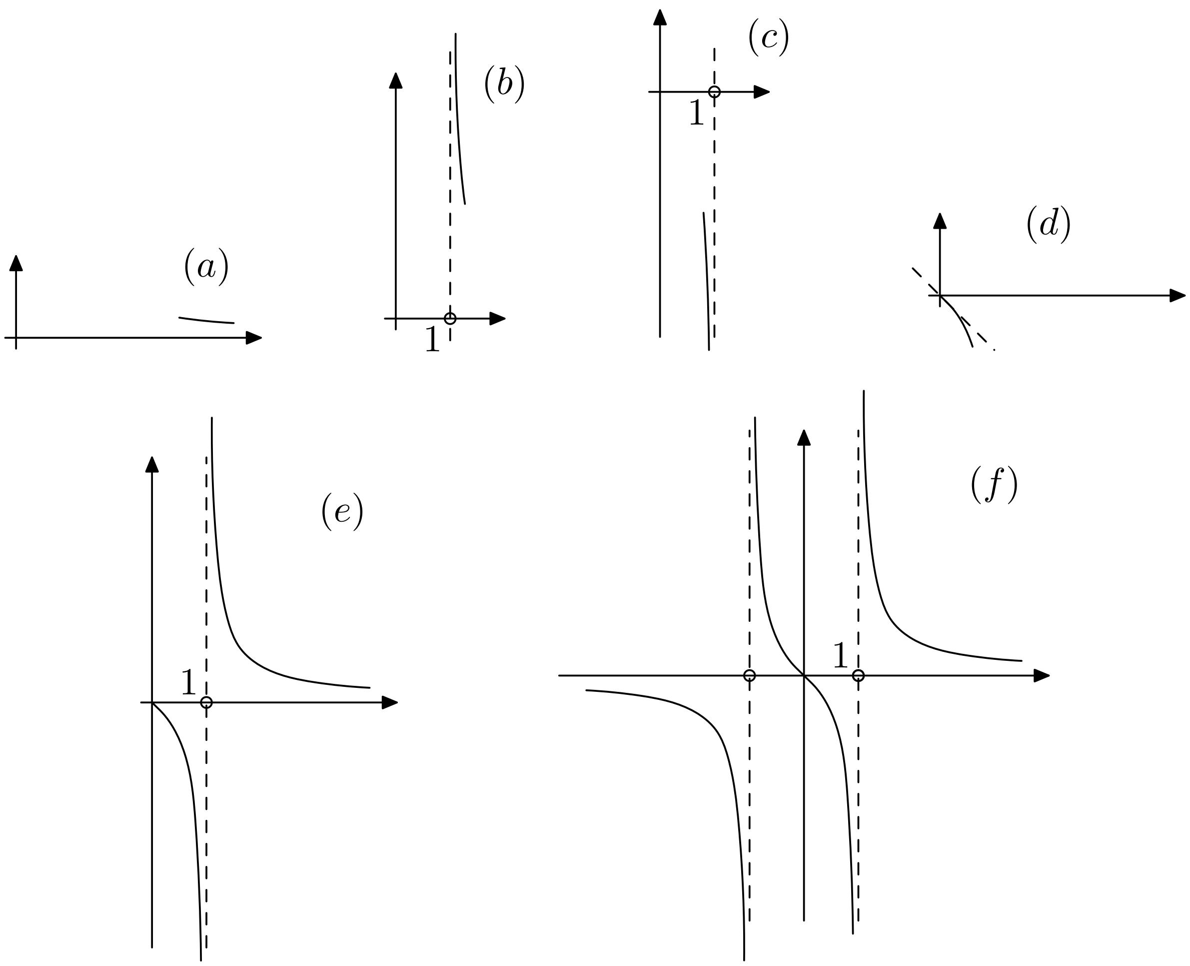



Рис. 4.10.

больших $x$ имеем

$$f(x) \approx \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x},$$

при этом $f(x) < \dfrac{2}{x}$. Это наблюдение позволяет изобразить график $f$ при далеких положительных значениях $x$ (рис. 4.11($a$)).

Посмотрим, как функция будет подходить к нулю при приближении значений аргумента к нулю. Ясно, что знаменатель около нуля примерно равен 1, тем самым можно написать, что $f(x) \approx 2x$ при малых $x$, при этом $f(x) < 2x$. Эта информация отражена в виде фрагмента графика около нуля на рис. 4.11($b$).

В принципе, ясно, как можно перейти от одного фрагмента графика к другому. Сначала, около нуля, функция будет возрастать, затем достигнет максимума, потом будет убывать и неограниченно приближаться

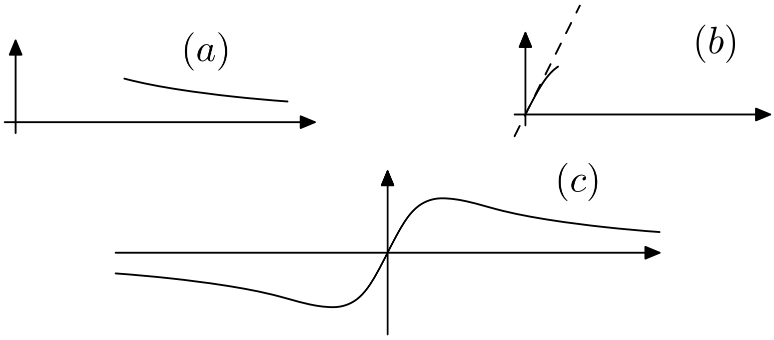



Рис. 4.11.

к нулю при удалении $x$ вправо. Для уточнения места, в котором будет максимум, и нахождения максимального значения обратимся к производной:

$$f'(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Находим, что среди положительных значений $x$ производная обращается в нуль при $x = 1$, более того, $f(x) > 0$ при $x \in (0,1)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (1,+\infty)$, следовательно, на промежутке $(0,1)$ функция возрастает, на $(1,+\infty)$ убывает, стало быть, при $x = 1$ она достигает максимума, равного 1.

Теперь можно изобразить график $f(x)$ (рис. 4.11($c$)).

**Упражнения.**

**1.** Провести простейший анализ функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, (2) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$,

(3) $\dfrac{1}{\sin x}$, (4) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$,

(5) $\sin^2 x$, (6) $\operatorname{tg}^2 x$, (7) $\sin\dfrac{1}{x}$, (8) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$,

(9) $x\sin x$, (10) $x^2\cos x$.

**2.** Провести простейший анализ композиций двух функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $2^{1/x}$, (2) $\dfrac{1}{2^{1/x}}$, (3) $2^{\frac{1}{x^2}}$, (4) $2^{\operatorname{tg} x}$,

(5) $2^{\sin x}$, (6) $2^{\arcsin x}$.

(7) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, (8) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$,

(9) $\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$, (10) $\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$,
(11) $\lg\dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $2^{\frac{x-1}{x+1}}$,
(13) $\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}$, (14) $\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$.

**3.** Изобразить эскизы графиков функций, связанных с обратными тригонометрическими функциями, и сформированных с участием модуля:

(1) $\sin(\arcsin x)$, (2) $\cos(\arccos x)$,
(3) $\arcsin(\sin x)$, (4) $\arccos(\cos x)$,
(5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, (6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$,
(7) $\sin(\arccos x)$, (8) $\cos(\arcsin x)$.
(9 $|x^2-x|$, (10) $|1-2^x|$,
(11) $1-2^{|x|}$, (12) $|x-1/x|$,
(13) $\arcsin|x|$, (14) $\arccos|x|$,

## § II.5. Операции над множествами и отображениями

**II.5.1. Операции над множествами.** Взаимодействие основных отношений между множествами, а именно отношений принадлежности и включения, и операций над множествами приводит к появлению свойств, выраженных в виде включения или равенства множеств. Их обоснование осуществляется на основе определений включения и равенства. Доказывая включение вида $A \subset B$, мы должны проверить, что каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$, т. е. для любого $x \in A$ показать, что $x \in B$. Для доказательства равенства $A = B$ требуется показать, что $A \subset B$ и $B \subset A$. Если предлагается доказать включение $A \subset B$ и добавляется, что оно строгое, то вместе с доказательством включения надо обосновать существование элемента множества $B$, не принадлежащего $A$.

**Пример 1.** Докажем равенство

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Начнем с доказательства включения

$$A \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Будем проводить его путем расшифровки математической записи, задавая применительно к выражению вопрос «что это значит?» и давая на него ответ в терминах логических связок. Пусть $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Что это означает? Согласно определениям это означает, что $x \in A$ и $x \notin B \setminus C$, т. е. неверно, что $x \in B \setminus C$. Так как последнее включение означает, что $x \in B$ и $x \notin C$, его отрицание выглядит так: $x \notin B$ или $x \in C$. Тем самым получили, что $x \in A$ и ($x \notin B$ или $x \in C$), откуда можно сделать вывод, что ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \in C$, а это означает, что $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Требуемое включение доказано.

Установим обратное включение, т. е. докажем, что

$$A \setminus (B \setminus C) \supset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Действительно, пусть $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Это значит, что $x \in A \setminus B$ или $x \in A \cap C$, откуда ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \in C$). В любом случае $x \in A$, а вместе с тем либо $x \notin B$, либо $x \in C$, что является отрицанием высказывания ($x \in B$ и $x \notin C$), иначе говоря, $x \notin B \setminus C$. В итоге $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Включение, а вместе с ним и равенство, доказаны.

В примере мы воспользовались по существу свойством, позволяющим раскрывать скобки в выражениях, содержащих логические операции конъюнкции и дизъюнкции. Напомним такие свойства, называемые *законами дистрибутивности*:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

**Упражнения.**

**1.** Приведите пример таких множеств $A, B, C$, что $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$.

**2.** Приведите пример множеств $A, B, C, D, E$, удовлетворяющих одновременно следующим условиям: $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$, $D \subset E$.

**3.** Доказать, что для любых множеств $A, B, C$ имеют место равенства

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C), \quad (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

**4.** Доказать, что для любых множеств $A, B, C, D$ верно равенство $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

**6.** Доказать равенства

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

для любых множеств $A, B, C$.

**II.5.2. Операции с участием отображений.** Здесь речь пойдет о том, как теоретико-множественные операции выдерживают действие отображения, т. е., например, как связаны между собой образ объединения и объединение образов, прообраз пересечения и пересечение прообразов и т. п.

Множество

$$f[A] = \{f(x) : x \in A \subset D(f)\}$$

называют *образом множества* $A$, множество

$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$$

— *прообразом множества* $B$ *при отображении* $f$. (рис. 5.2).

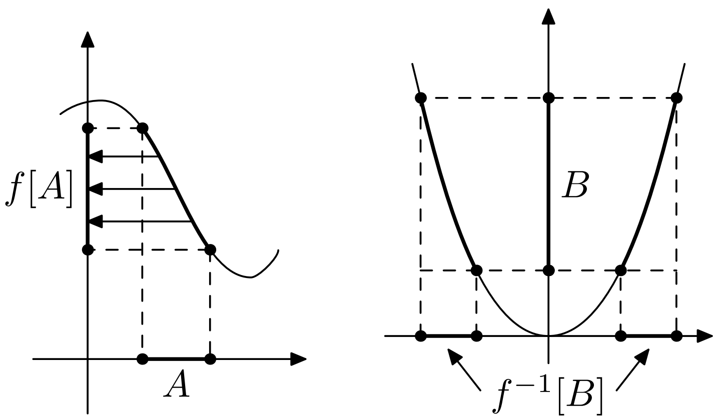



Рис. 5.2.

Ясно, что если в определении образа множества взять $A = D(f)$, то получим множество значений функции, а если в определении прообраза взять $B = E(f)$, то получим область определения функции.

Мы определили образ и прообраз множества как совокупность таких объектов, которые обладают определенным свойством, иначе говоря, как совокупность объектов, для которых справедливо некоторое высказывание, содержащее переменную. Свойство, характеризующее образ и прообраз, можно записать с использованием квантора существования, и такая запись обеспечивает методы нахождения образа и прообраза на основе их определений. А именно, для образа множества имеем

$$f[A] = \{y : (\exists x \in A)\; y = f(x)\}, \tag{5.1}$$

для прообраза —
$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : (\exists y \in B)\ y = f(x)\}. \tag{5.2}$$

Согласно этой разновидности определения для нахождения образа множества, в частности, множества ее значений, надо, рассматривая равенство $y = f(x)$ как уравнение относительно $x$, выяснить, при каких $y$ существует его решение, принадлежащее множеству $A$ (для множества множества значений — безотносительно множества $A$). Для нахождения прообраза надо поступать симметрично, а именно, считая $y$ неизвестной, выяснять, при каких $x$ можно получать значения $y$, принадлежащие множеству $B$. Поскольку при задании функции, как правило, значение $y$ выражается через $x$ явно или по крайней мере с использованием конечного набора заданных формулами правил, технически надо всего лишь выяснять, при каких $x$ выполнены условия, характеризующие множество $B$.

**Пример 1.** Докажем, что
$$f[f^{-1}[C]] = C.$$

Сначала уточним обстановку. Если в условии фигурирует выражение $f^{-1}[C]$, по умолчанию это указывает на то, что $C \subset E(f)$. Докажем включение $\subset$. Пусть $z \in f[f^{-1}[C]]$. Тогда согласно (5.1) существует такой $x \in f^{-1}[C]$, что $z = f(x)$. Включение $x \in f^{-1}[C]$ согласно (5.2) означает, что есть такое $y \in C$, для которого $y = f(x)$. Но $f$ — отображение, поэтому $y = z$, следовательно, $z \in C$.

Докажем включение $\supset$. Пусть $z \in C$. Согласно (5.2) $f^{-1}[C]$ состоит из всех элементов множества $D(f)$, значение отображения $f$ на которых является элементом множества $C$. В частности, для $z$ есть такое $z \in f^{-1}[C]$, что $z = f(x)$, стало быть, согласно (5.1) $z \in f[f^{-1}[C]]$.

**II.5.2. Задачи.**

**1.** Пусть $f$ — отображение и $A, B$ — подмножества $D(f)$, а $C, D$ — подмножества $E(f)$. Доказать соотношения
$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],$$
$$f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D], \quad f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$$
$$f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

**2.** Пусть $f, g$ — взаимно однозначные отображения и $E(f) = D(g)$. Показать, что $g \circ f$ взаимно однозначно и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**3.** Показать, что для любых отображений $f, g$ и множества $A \subset E(g \circ f)$ справедливо равенство $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]]$.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## План занятий

**1.** Ознакомиться с техникой сравнения чисел (II.1.1). Выполнить упражнения к п. II.1.1.

Домашнее задание. Прочесть § I.1 об устройстве числовых множеств.

**2.** Вспомнить способы преобразования числовых и буквенных выражений (II.1.2). Выполнить упражнения к п. II.1.2.

**3.** Изучить метод математической индукции (I.1.5, II.1.4). Выполнить упражнения к п. II.1.4.

Домашнее задание. Выполнить упражнения из п. II.1.4, не решенные на занятии.

Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал § I.2.

**4.** Обсудить материал § I.2. Ознакомиться с восприятием кванторов (II.2.1). Решить упражнение к п. II.2.1.

Домашнее задание. Выучить различные стилевые оформления утверждений. Выполнить упражнения, не решенные на занятии. Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал об определении функции и простейших средствах работы с функциями (I.3.1–I.3.3).

**5.** Ознакомиться с методами нахождения области определения и множества значений (п. П.3.1). Выполнить упражнения к п. II.3.1.

Домашнее задание. Выполнить упражнения, не решенные на занятии. Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал о свойствах функции (I.3.4).

**6.** Изучить образование композиции функций, исследование свойства обратимости и нахождение обратных функций. (I.3.3, II.3.2). Выполнить упражнения к п. II.3.2.

Повторить графики элементарных функций (II.3.3).

Домашнее задание. Выучить способы заданий функций. Выучить вид графиков элементарных функций. Выполнить упражнения к п. II.3.2, не решенные на занятии.

Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал о свойствах четности и нечетности функций (I.3.4).

**7.** Ознакомиться с методами изучения свойств четности и нечетности (II.3.4). Решить упражнения к п. II.3.4.

Домашнее задание. Выучить теоретический материал о свойствах четности и нечетности функции. Подготовиться к контрольной работе № 1.

**8.** Изучить свойства монотонности функции (I.3.4). Ознакомиться с методами исследования монотонности (II.3.5). Выполнить упражнения к п. II.3.5.

Последние 45 минут занятия — письменная контрольная работа. Предлагаются несколько теоретических вопросов и два упражнения. За контрольную работу выставляется оценка согласно заранее известным критериям.

Домашнее задание. Выучить теоретический материал о монотонности функции. Дорешать не решенные ранее упражнения предыдущих занятий. Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал о периодичности функций (I.3.4).

**9.** Обсуждение результатов контрольной работы. Выявление типичных ошибок и рекомендации по их устранению.

Изучить методы исследования периодичности функции (II.3.6). Выполнить упражнения к п. II.3.6.

Домашнее задание. Дорешать не решенные на занятии упражнения к п. II.3.6. Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал об ограниченности и неограниченности функции (I.3.4).

**10.** Изучить методы анализа ограниченности и неограниченности функций (II.3.7). Выполнить упражнения к п. II.3.7

При выполнении упражнений, в которых требуется что-то доказать, надо использовать только те средства, которые были даны здесь к данному моменту. Выполняя предписания упражнения, надо видеть цель не столько в том, чтобы убедиться в сказанном (то, что предлагают доказать, хорошо известно и многократно доказывалось), сколько в отработке тех важнейших понятий, которые относятся к данному упражнению.

Домашнее задание. Выполнить упражнения к п. II.3.7, не решенные на занятии.

**11.** Изучить процедуры построения эскиза графика функции на основе исследования ее простейших свойств (II.4.1). Освоить анализ и использование поведения функции на концах промежутков, составляющих область определения, и вблизи отдельных точек (II.4.2).

Решить упражнения к п. II.4.2.

Последние 45 минут занятия — письменная контрольная работа. Предлагаются несколько теоретических вопросов и два упражнения. За контрольную работу выставляется оценка согласно заранее известным критериям.

Домашнее задание. Выполнить упражнения, не решенные к предыдущим занятиям.

Подготовиться к следующему занятию: прочесть материал о понятии множества и простейших операциях с множествами (I.4.1).

**12.** Обсуждение результатов контрольной работы.

Ознакомиться с обоснованием включения и равенства множеств (II.5.1).. Выполнить упражнения к п. II.5.1.

Домашнее задание. Выполнить упражнения к п. II.5.1, не решенные на занятии.

Подготовиться к следующему занятию: вспомнить материал о функциях (I.3.1–I.3.3).

**13.** Ознакомиться с тем, как влияет взятие образа или прообраза на результат теоретико-множественных операций (II.5.2). Выполнить упражнения к п. II.5.2.

Домашнее задание. Дорешать все не решенные ранее упражнения. Подготовиться к итоговой проверочной работе.

На последнем занятии предлагается итоговая проверочная работа, состоящая из нескольких теоретических вопросов (не менее пяти) по пройденному материалу и нескольких несложных упражнений (не менее трех). Работа проводится в письменном виде в течение двух академических часов.

Итоги проверочной работы и вообще всего цикла адаптационной подготовки обсуждаются на последнем занятии.

## Литература


1. *Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* Алгебра. Задачник. 10–11 кл.: Учеб. пособие для общеобразоват. учеб. завдений. М.: Дрофа, 1996.
2. *Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* Начала анализа. Задачник. 10–11 кл.: Учеб. пособие для общеобразоват. учеб. завдений. М.: Дрофа, 1996.
3. *Дятлов В. Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 1. Числа. Преобразование выражений. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.
4. *Дятлов В. Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 2. Функции. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.
5. *Дятлов В. Н., Дятлов Г. В.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 4. О рассуждениях и утверждениях. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2008.
6. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М., Наука, 1984.

## Оглавление


Введение . . . 3

**Часть I. Теория** . . . 6

§ I.1. Устройство числовых множеств . . . 6

§ I.2. Структура математических утверждений . . . 16

§ I.3. Функции, основные понятия и свойства . . . 26

§ I.4. Множества, соответствия, отношения . . . 43

**Часть II. Практика** . . . 47

§ II.1. Сравнение чисел. Тождественные преобразования. Метод математической индукции . . . 47

§ II.2. Высказывания с кванторами . . . 58

§ II.3. Функции. Основные методы исследования . . . 61

§ II.4. Построение графиков функций на основе исследования простейших свойств функции . . . 92

§ II.5. Операции над множествами и отображениями . . . 105

**Приложение. План занятий** . . . 109

Литература . . . 112